3.1.3 Exercices (extrema, convexité)

Exercice 105 (Vrai / faux). *corrigé en page 213*

1. L'application $x \mapsto \|x\|_\infty$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$.
2. L'application $x \mapsto \|x\|_\infty$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.
3. L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + y$ admet un unique minimum.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, l'application $x \mapsto \|Ax - b\|_2$ admet un unique minimum.

Exercice 106 (Minimisation dans $\mathbb{R}$). *Corrigé en page 213*

On considère les fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = x^2$, $f_1(x) = x^2(x-1)^2$, $f_2(x) = |x|$, $f_3(x) = \cos x$, $f_4(x) = |\cos x|$, $f_5(x) = e^x$. On pose $K = [-1,1]$. Pour chacune de ces fonctions, répondre aux questions suivantes :

1. Etudier la différentiabilité et la (stricte) convexité éventuelles de la fonction, ; donner l'allure de son graphe.
2. La fonction admet elle un minimum global sur $\mathbb{R}$; ce minimum est-il unique ? Le cas échéant, calculer ce minimum.
3. La fonction admet elle un minimum sur K ; ce minimum est-il unique ? Le cas échéant, calculer ce minimum.

Exercice 107 (Fonctions quadratiques).

1. Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + 4xy + 3y^2$ n'admet pas de minimum en $(0,0)$.
2. Trouver la matrice symétrique S telle que $f(x) = x^t S x$, pour $f_1(x) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3)$, puis pour $f_2(x) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3)$ Etudier la convexité des fonctions f_1 et f_2.
3. Calculer les matrices hessiennes de g_1 et g_2 définies par : $g_1(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + x^2y + y^2$ et $g_2(x,y) = x^3 + xy - x$ et étudier la convexité de ces deux fonctions.

Exercice 108 (Convexité et continuité). *Suggestions en page 213.*

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

(a) Montrer que f est continue.

(b) Montrer que f est localement lipschitzienne.

2. Soit $n \geq 1$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On suppose que f est convexe.

(a) Montrer f est bornée supérieurement sur les bornés (c'est-à-dire : pour tout $R > 0$, il existe m_R t.q. $f(x) \leq m_R$ si la norme de x est inférieure ou égale à R).

(b) Montrer que f est continue.

(c) Montrer que f est localement lipschitzienne.

(d) On remplace maintenant $\mathbb{R}^n$ par E, e.v.n. de dimension finie. Montrer que f est continue et que f est localement lipschitzienne.

3. Soient E un e.v.n. de dimension infinie et $f : E \to \mathbb{R}$. On suppose que f est convexe.

(a) On suppose, dans cette question, que f est bornée supérieurement sur les bornés. Montrer que f est continue.

(b) Donner un exemple d'e.v.n. (noté E) et de fonction convexe $f : E \to \mathbb{R}$ t.q. f soit non continue.

3.2.3 Exercices (optimisation sans contrainte)

Exercice 109 (Maximisation)**.** *Suggestions en page 220*
Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \to \mathbb{R}$. En utilisant les résultats de la section 3.2.2, répondre aux questions suivantes :

1. Donner une condition suffisante d'existence de $\bar{x} \in E$ tel que $f(\bar{x}) = \sup_{x \in E} f(x)$.
2. Donner une condition suffisante d'unicité de $\bar{x} \in E$ tel que $f(\bar{x}) = \sup_{x \in E} f(x)$.
3. Donner une condition suffisante d'existence et unicité de $\bar{x} \in E$ tel que $f(\bar{x}) = \sup_{x \in E} f(x)$.

Exercice 110 (Complément de Schur)**.** *Corrigé en page 220*

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Dans toute la suite, si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, le produit scalaire de u et v est noté $u \cdot v$. Soient A une matrice carrée d'ordre n, symétrique définie positive, soit B une matrice $n \times p$, C une matrice carrée d'ordre p, et soient $f \in \mathbb{R}^n$ et $g \in \mathbb{R}^p$. On considère le système linéaire suivant :

$$M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \text{ avec } M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^t & C \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

1. On suppose dans cette question seulement que $n = p = 1$, et $A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} c \end{bmatrix}$
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, et c pour que M soit inversible.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, et c pour que M soit symétrique définie positive.

2. On définit la matrice $S = C - B^t A^{-1} B$, qu'on appelle “complément de Schur".
   (a) Calculer S dans le cas $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   (b) Montrer qu'il existe une unique solution au problème (3.14) si et seulement si la matrice S est inversible. Est-ce le cas dans la question (a) ?

3. On suppose dans cette question que C est symétrique.
   (a) Vérifier que M est symétrique.
   (b) Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$ et $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+p}$. Calculer $Mz \cdot z$ en fonction de A, B, C, x et y.
   (c) On fixe maintenant $y \in \mathbb{R}^p$, et on définit la fonction F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto Ax \cdot x + 2By \cdot x + Cy \cdot y$. Calculer $\nabla F(x)$, et calculer $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla F(x_0) = 0$
   (d) Montrer que la fonction F définie en 3(c) admet un unique minimum, et calculer la valeur de ce mimimum.
   (e) En déduire que M est définie positive si et seulement si S est définie positive (où S est la matrice définie à la question 1).

4. On suppose dans cette question que C est la matrice (carrée d'ordre p) nulle.
   (a) Montrer que la matrice $\tilde{S} = -S$ est symétrique définie positive si et seulement si $p \leq n$ et rang(B)=p. On supposera que ces deux conditions sont vérifiées dans toute la suite de la question.
   (b) En déduire que la matrice $P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \tilde{S} \end{bmatrix}$ est symétrique définie positive.
   (c) Calculer les valeurs propres de la matrice $T = P^{-1} M$ (il peut être utile de distinguer les cas Ker$B^t = \{0\}$ et Ker$B^t \neq \{0\}$).