

Chapitre 2

Systèmes non linéaires

Dans le premier chapitre, on a étudié quelques méthodes de résolution de systèmes linéaires en dimension finie. L'objectif est maintenant de développer des méthodes de résolution de systèmes non linéaires, toujours en dimension finie. On se donne $g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et on cherche x dans $\mathbb{R}^n$ solution de :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ g(x) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Au Chapitre I on a étudié des méthodes de résolution du système (2.1) dans le cas particulier $g(x) = Ax - b$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. On va maintenant étendre le champ d'étude au cas où g n'est pas forcément affine. On étudiera deux familles de méthodes pour la résolution approchée du système (2.1) :

- les méthodes de point fixe : point fixe de contraction et point fixe de monotonie
- les méthodes de type Newton ¹.

2.1 Rappels et notations de calcul différentiel

Le premier chapitre faisait appel à vos connaissances en algèbre linéaire. Ce chapitre-ci, ainsi que le suivant (optimisation) s'appuieront sur vos connaissances en calcul différentiel, et nous allons donc réviser les quelques notions qui nous seront utiles.

Définition 2.1 (Application différentiable). Soient E et F des espaces vectoriels normés, f une application de E dans F et $x \in E$. On rappelle que f est différentiable en x s'il existe $T_x \in \mathcal{L}(E, F)$ (où $\mathcal{L}(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires de E dans F) telle que

$$f(x+h) = f(x) + T_x(h) + \|h\|_E \varepsilon(h) \text{ avec } \varepsilon(h) \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

L'application T_x est alors unique² et on note $Df(x) = T_x \in \mathcal{L}(E, F)$ la différentielle de f au point x . Si f est différentiable en tout point de E , alors on appelle différentielle de f l'application $Df = E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ qui à $x \in E$ associe l'application linéaire $Df(x)$ de E dans F .

Remarquons tout de suite que si f est une application linéaire de E dans F , alors f est différentiable, et $Df = f$. En effet, si f est linéaire, $f(x+h) - f(x) = f(h)$, et donc l'égalité (2.2) est vérifiée avec $T_x = f$ et $\varepsilon = 0$. Voyons maintenant quelques cas particuliers d'espaces E et F :

1. Isaac Newton (1643 - 1727, né d'une famille de fermiers, est un philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste et astronome anglais. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour sa théorie de la gravitation universelle et la création, en concurrence avec Leibniz, du calcul infinitésimal.

Cas où $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dire que f est différentiable en x revient à dire que f est dérivable en x . En effet, dire que f est dérivable en x revient à dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ existe, et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon(h), \text{ avec } \varepsilon(h) \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x+h) - f(x) = T_x(h) + h\varepsilon(h), \text{ avec } T_x(h) = f'(x)h,$$

ce qui revient à dire que f est différentiable en x , et que sa différentielle en x est l'application linéaire $T_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, qui à h associe $f'(x)h$. On a ainsi vérifié que pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la notion de différentielle coïncide avec celle de dérivée.

Exemple 2.2. Prenons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$. Alors f est dérivable en tout point et sa dérivée vaut $f'(x) = \cos x$. La fonction f est donc aussi différentiable en tout point. La différentielle de f au point x est l'application linéaire $Df(x)$ qui à $h \in \mathbb{R}$ associe $Df(x)(h) = \cos x h$. La différentielle de f est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui à x associe $Df(x)$ (qui est donc elle-même une application linéaire).

Cas où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$ Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $x \in \mathbb{R}^n$ et supposons que f est différentiable en x ; alors $Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$; par caractérisation d'une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, il existe une unique matrice $J_f(x) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que

$$\underbrace{Df(x)(y)}_{\in \mathbb{R}^p} = \underbrace{J_f(x)y}_{\in \mathbb{R}^p}, \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

On confond alors souvent l'application linéaire $Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ avec la matrice $J_f(x) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ qui la représente, qu'on appelle **matrice jacobienne** de f au point x et qu'on note J_f . On écrit donc :

$$J_f(x) = Df(x) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n} \text{ où } a_{i,j} = \partial_j f_i(x),$$

∂_j désignant la dérivée partielle par rapport à la j -ème variable.

Notons que si $n = p = 1$, la fonction f est de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et la matrice jacobienne en x n'est autre que la dérivée en x : $J_f(x) = f'(x)$. On confond dans cette écriture la matrice $J_f(x)$ qui est de taille 1×1 avec le scalaire $f'(x)$.

Exemple 2.3. Prenons $n = 3$ et $p = 2$; soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^3 + x_3^4 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Soit $h \in \mathbb{R}^3$ de composantes (h_1, h_2, h_3) . Pour calculer la différentielle de f (en x appliquée à h), on peut calculer $f(x+h) - f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \begin{bmatrix} (x_1+h_1)^2 - x_1^2 + (x_2+h_2)^3 - x_2^3 + (x_3+h_3)^4 - x_3^4 \\ 2(x_1+h_1) - 2x_1 - 2(x_2+h_2) + 2x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1h_1 + h_1^2 + 3x_2^2h_2 + 3x_2h_2^2 + h_2^3 - 4x_3^3h_3 + -4x_3^2h_3^2 + h_3^4 \\ 2h_1 - 2 + h_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et on peut ainsi vérifier l'égalité (2.2) avec :

$$Df(x)h = \begin{bmatrix} 2x_1h_1 + 3x_2^2h_2 + 4x_3^3h_3 \\ 2h_1 - h_2 \end{bmatrix}$$

et donc, avec les notations précédentes,

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 3x_2^2 & 4x_3^3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bien sûr, dans la pratique, on n'a pas besoin de calculer la différentielle en effectuant la différence $f(x+h) - f(x)$. On peut directement calculer les dérivées partielles pour calculer la matrice jacobienne J_f .

Cas où $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$ C'est en fait un sous-cas du paragraphe précédent, puisqu'on est ici dans le cas $p = 1$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et f une fonction de E dans F différentiable en x ; on a donc $J_f(x) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$: J_f est une matrice ligne. On définit le **gradient** de f en x comme le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont les coefficients de la matrice colonne $(J_f(x))^t$, ce qu'on écrit, avec un abus de notation, $\nabla f(x) = (J_f(x))^t \in \mathbb{R}^n$. (L'abus de notation est dû au fait qu'à gauche, il s'agit d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$, et à droite, une matrice $n \times 1$, qui sont des objets mathématiques différents, mais qu'on identifie pour alléger les notations). Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a donc

$$Df(x)(y) = J_f(x)y = \sum_{j=1}^n \partial_j f(x) y_j = \nabla f(x) \cdot y \text{ où } \nabla f(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Attention, lorsque l'on écrit $J_f(x)y$ il s'agit d'un *produit matrice vecteur*, alors que lorsqu'on écrit $\nabla f(x) \cdot y$, il s'agit du *produit scalaire entre les vecteurs* $\nabla f(x)$ et y , qu'on peut aussi écrire $\nabla(f(x))^t y$.

Cas où E est un espace de Hilbert et $F = \mathbb{R}$. On généralise ici le cas présenté au paragraphe précédent. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $x \in E$. Alors $Df(x) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E'$, où E' désigne le dual topologique de E , c.à.d. l'ensemble des formes linéaires continues sur E . Par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $u \in E$ tel que $Df(x)(y) = (u|y)_E$ pour tout $y \in E$, où $(\cdot|\cdot)_E$ désigne le produit scalaire sur E . On appelle encore gradient de f en x ce vecteur u . On a donc $u = \nabla f(x) \in E$ et pour $y \in E$, $Df(x)(y) = (\nabla f(x)|y)_E$.

Différentielle d'ordre 2, matrice hessienne.

Revenons maintenant au cas général de deux espaces vectoriels normés E et F , et supposons maintenant que $f \in C^2(E, F)$. Le fait que $f \in C^2(E, F)$ signifie que $Df \in C^1(E, \mathcal{L}(E, F))$. Par définition, on a $D^2 f(x) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ et donc pour $y \in E$, $D^2 f(x)(y) \in \mathcal{L}(E, F)$, et pour $z \in E$, $D^2 f(x)(y)(z) \in F$. Considérons maintenant le cas particulier $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}$. On a :

$$f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \Leftrightarrow [f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \text{ et } \nabla f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)].$$

et

$$D^2 f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$$

Mais à toute application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$, on peut associer de manière unique une forme bilinéaire ϕ sur $\mathbb{R}^n$ de la manière suivante :

$$\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \tag{2.3}$$

$$(u, v) \mapsto \phi(u, v) = \underbrace{(\varphi(u))}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \underbrace{(v)}_{\in \mathbb{R}^n}. \tag{2.4}$$

On dit qu'il existe une isométrie canonique (un isomorphisme qui conserve la norme) entre l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ et l'espace des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^n$.

On appelle matrice hessienne de f et on note $H_f(x)$ la matrice de la forme bilinéaire ainsi associée à l'application linéaire $D^2 f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$.

On a donc $D^2 f(x)(y)(z) = y^t H_f(x) z$. La matrice hessienne $H_f(x)$ peut se calculer à l'aide des dérivées partielles : $H_f(x) = (b_{i,j})_{i,j=1 \dots n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $b_{i,j} = \partial_{i,j}^2 f(x)$ et $\partial_{i,j}^2$ désigne la dérivée partielle par rapport

à la variable i de la dérivée partielle par rapport à la variable j . Notons que par définition (toujours avec l'abus de notation qui consiste à identifier les applications linéaires avec les matrices qui les représentent), $Dg(x)$ est la matrice jacobienne de $g = \nabla f$ en x .

Remarque 2.4 (Sur les différentielles, gradient et Hessienne). *Pour définir la différentielle d'une fonction f d'un espace vectoriel de dimension finie E dans $\mathbb{R}$, on a besoin d'une norme sur E .*

Si f est différentiable en $x \in E$, pour définir le gradient de f en x , on a besoin d'un produit scalaire sur E pour pouvoir utiliser le théorème de représentation de Riesz mentionné plus haut. Le gradient est défini de manière unique par le produit scalaire, mais ses composantes dépendent de la base choisie.

Enfin, si f est deux fois différentiable en $x \in E$, on a besoin d'une base de E pour définir la matrice hessienne en x , et cette matrice hessienne dépend de la base choisie.

2.2 Les méthodes de point fixe

2.2.1 Point fixe de contraction

Soit $g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on définit la fonction $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ par $f(x) = x - g(x)$. On peut alors remarquer que $g(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = x$. Résoudre le système non linéaire (2.1) revient donc à trouver un point fixe de f . Encore faut-il qu'un tel point fixe existe... On rappelle le théorème de point fixe bien connu :

Théorème 2.5 (Point fixe). *Soit E un espace métrique complet, d la distance sur E , et $f : E \rightarrow E$ une fonction strictement contractante, c'est-à-dire telle qu'il existe $\kappa \in]0, 1[$ tel que $d(f(x), f(y)) \leq \kappa d(x, y)$ pour tout $x, y \in E$. Alors il existe un unique point fixe $\bar{x} \in E$ qui vérifie $f(\bar{x}) = \bar{x}$. De plus si $x^{(0)} \in E$, et $x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$, $\forall k \geq 0$, alors $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$ quand $n \rightarrow +\infty$.*

DÉMONSTRATION – *Etape 1 : Existence de $\bar{x}$ et convergence de la suite*

Soit $x^{(0)} \in E$ et $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$ pour $k \geq 0$. On va montrer que :

1. la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy (donc convergente car E est complet),
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{(k)} = \bar{x}$ est point fixe de f .

Par hypothèse, on sait que pour tout $k \geq 1$,

$$d(x^{(k+1)}, x^{(k)}) = d(f(x^{(k)}), f(x^{(k-1)})) \leq \kappa d(x^{(k)}, x^{(k-1)}).$$

Par récurrence sur k , on obtient que

$$d(x^{(k+1)}, x^{(k)}) \leq \kappa^k d(x^{(1)}, x^{(0)}), \quad \forall k \geq 0.$$

Soit $k \geq 0$ et $p \geq 1$, on a donc :

$$\begin{aligned} d(x^{(k+p)}, x^{(k)}) &\leq d(x^{(k+p)}, x^{(k+p-1)}) + \dots + d(x^{(k+1)}, x^{(k)}) \\ &\leq \sum_{q=1}^p d(x^{(k+q)}, x^{(k+q-1)}) \\ &\leq \sum_{q=1}^p \kappa^{k+q-1} d(x^{(1)}, x^{(0)}) \\ &\leq d(x^{(1)}, x^{(0)}) \kappa^k (1 + \kappa + \dots + \kappa^{p-1}) \\ &\leq d(x^{(1)}, x^{(0)}) \frac{\kappa^k}{1 - \kappa} \longrightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow +\infty \text{ car } \kappa < 1. \end{aligned}$$

La suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy, i.e. :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}; \quad \forall k \geq k_\varepsilon, \quad \forall p \geq 1 \quad d(x^{(k+p)}, x^{(k)}) \leq \varepsilon.$$

Comme E est complet, on a donc $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$ dans E quand $k \rightarrow +\infty$. Comme la fonction f est strictement contractante, elle est continue, donc on a aussi $f(x^{(k)}) \rightarrow f(\bar{x})$ dans E quand $k \rightarrow +\infty$. En passant à la limite dans l'égalité $x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$, on en déduit que $\bar{x} = f(\bar{x})$.

Etape 2 : Unicité

Soit $\bar{x}$ et $\bar{y}$ des points fixes de f , qui satisfont donc $\bar{x} = f(\bar{x})$ et $\bar{y} = f(\bar{y})$. Alors $d(f(\bar{x}), f(\bar{y})) = d(\bar{x}, \bar{y}) \leq \kappa d(\bar{x}, \bar{y})$; comme $\kappa < 1$, ceci est impossible sauf si $\bar{x} = \bar{y}$. ■

La méthode du point fixe s'appelle aussi méthode des itérations successives. Dans le cadre de ce cours, nous prendrons $E = \mathbb{R}^n$, et la distance associée à la norme euclidienne, que nous noterons $|\cdot|$.

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ avec } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n), d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A titre d'illustration, essayons de la mettre en oeuvre pour trouver les points fixes de la fonction $x \mapsto x^2$.

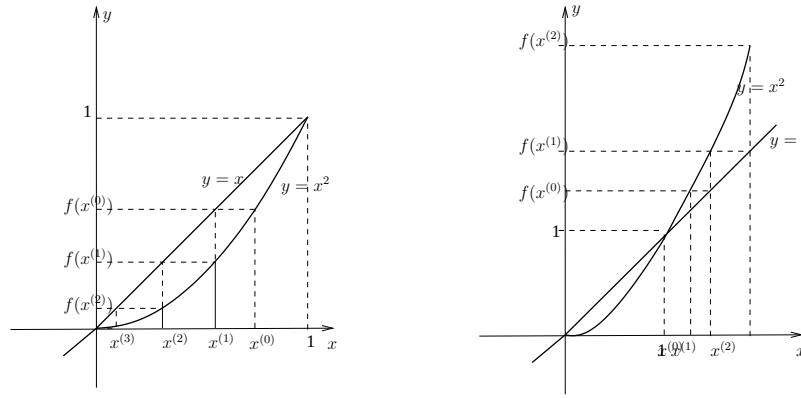


FIGURE 2.1: Comportement des itérés successifs du point fixe pour $x \mapsto x^2$ — À gauche : $x^{(0)} < 1$, à droite : $x^{(0)} > 1$.

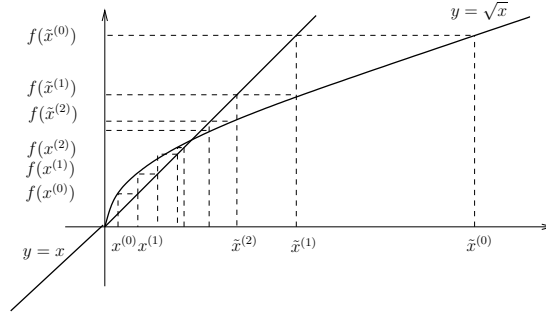
Pour la fonction $x \mapsto x^2$, on voit sur la figure 2.1, côté gauche, que si l'on part de $x = x^{(0)} < 1$, la méthode converge rapidement vers 0 ; or la fonction $x \mapsto x^2$ n'est strictement contractante que sur l'intervalle $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Donc si $x = x^{(0)} \in] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, on est dans les conditions d'application du théorème du point fixe. Mais en fait, la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ définie par le point fixe converge pour tout $x^{(0)} \in] -1, 1[$; ceci est très facile à voir car $x^{(k)} = (x^{(k-1)})^2$ et on a donc convergence vers 0 si $|x| < 1$.

Par contre si l'on part de $x^{(0)} > 1$ (à droite sur la figure 2.1), on diverge rapidement : mais rien de surprenant à cela, puisque la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas contractante sur $[1, +\infty[$.

Dans le cas de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, on voit sur la figure 2.2 que les itérés convergent vers 1 que l'on parte à droite ou à gauche de $x = 1$; on peut même démontrer (exercice) que si $x^{(0)} > 0$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1 lorsque $k \rightarrow +\infty$. Pourtant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est contractante que pour $x > \frac{1}{4}$; mais on n'atteint jamais le point fixe 0, ce qui est moral, puisque la fonction n'est pas contractante en 0. On se rend compte encore sur cet exemple que le théorème du point fixe donne une condition suffisante de convergence, mais que cette condition n'est pas nécessaire.

Remarquons que l'hypothèse que f envoie E dans E est cruciale. Par exemple la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est lipschitzienne de rapport $k < 1$ sur $[1 + \varepsilon, +\infty[$ pour tout $\varepsilon > 0$ mais elle n'envoie pas $[1 + \varepsilon, +\infty[$ dans $[1 + \varepsilon, +\infty[$. La méthode du point fixe à partir du choix initial $x \neq 1$ donne la suite $x, \frac{1}{x}, x, \frac{1}{x}, \dots, x, \frac{1}{x}$ qui ne converge pas.

Remarque 2.6 (Vitesse de convergence). *Sous les hypothèses du théorème 2.5, $d(x^{(k+1)}, \bar{x}) = d(f(x^{(k)}), f(\bar{x})) \leq \kappa d(x^{(k)}, \bar{x})$; donc si $x^{(k)} \neq \bar{x}$ alors $\frac{d(x^{(k+1)}, \bar{x})}{d(x^{(k)}, \bar{x})} \leq \kappa (< 1)$, voir à ce sujet la définition 2.14. La convergence est donc au moins linéaire (même si de fait, cette méthode converge en général assez lentement).*

FIGURE 2.2: Comportement des itérés successifs du point fixe pour $x \mapsto \sqrt{x}$

Remarque 2.7 (Généralisation). *Le théorème 2.5 se généralise en remplaçant l'hypothèse “ f strictement contractante” par “il existe $k > 0$ tel que $f^{(k)} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$ est strictement contractante” (reprendre la démonstration du théorème pour le vérifier).*

La question qui vient alors naturellement est : que faire pour résoudre $g(x) = 0$ si la méthode du point fixe appliquée à la fonction $x \mapsto x - g(x)$ ne converge pas ? Dans ce cas, f n'est pas strictement contractante ; une idée possible est de pondérer la fonction g par un paramètre $\omega \neq 0$ et d'appliquer les itérations de point fixe à la fonction $f_\omega(x) = x - \omega g(x)$; on remarque là encore que x est encore solution du système (2.1) si et seulement si x est point fixe de $f_\omega(x)$. On aimerait dans ce cas trouver ω pour que f_ω soit strictement contractante, c.à.d. pour que

$$|f_\omega(x) - f_\omega(y)| = |x - y - \omega(g(x) - g(y))| \leq \kappa |x - y| \text{ pour } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \text{ avec } \kappa < 1.$$

Or

$$\begin{aligned} |x - y - \omega(g(x) - g(y))|^2 &= (x - y - \omega(g(x) - g(y))) \cdot (x - y - \omega(g(x) - g(y))) \\ &= |x - y|^2 - 2(x - y) \cdot (\omega(g(x) - g(y))) + \omega^2 |g(x) - g(y)|^2. \end{aligned}$$

Supposons que g soit lipschitzienne, et soit $M > 0$ sa constante de Lipschitz :

$$|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.5)$$

On a donc

$$|x - y - \omega(g(x) - g(y))|^2 \leq (1 + \omega^2 M^2)|x - y|^2 - 2(x - y) \cdot (\omega(g(x) - g(y)))$$

Or on veut $|x - y - \omega(g(x) - g(y))|^2 \leq \kappa |x - y|^2$, avec $\kappa < 1$. On a donc intérêt à ce que le terme $-2(x - y) \cdot (\omega(g(x) - g(y)))$ soit de la forme $-a|x - y|^2$ avec a strictement positif. Pour obtenir ceci, on va supposer de plus que :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } (g(x) - g(y)) \cdot (x - y) \geq \alpha |x - y|^2, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (2.6)$$

On obtient alors :

$$|x - y - \omega(g(x) - g(y))|^2 \leq (1 + \omega^2 M^2 - 2\omega\alpha)|x - y|^2.$$

Et donc si $\omega \in]0, \frac{2\alpha}{M^2}[$, le polynôme $\omega^2 M^2 - 2\omega\alpha$ est strictement négatif : soit $-\mu$ (noter que $\mu \in]0, 1[$) et on obtient que

$$|x - y - \omega(g(x) - g(y))|^2 \leq (1 - \mu)|x - y|^2.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.8 (Point fixe de contraction avec relaxation). On désigne par $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Soit $g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ lipschitzienne de constante de Lipschitz $M > 0$, et telle que (2.6) est vérifiée : alors la fonction $f_\omega : x \mapsto x - \omega g(x)$ est strictement contractante si $0 < \omega < \frac{2\alpha}{M^2}$. Il existe donc un et un seul $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(\bar{x}) = 0$ et $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$ quand $n \rightarrow +\infty$ avec $x^{(k+1)} = f_\omega(x^{(k)}) = x^{(k)} - \omega g(x^{(k)})$.

Remarque 2.9. Le théorème 2.8 permet de montrer que sous les hypothèses (2.6) et (2.5), et pour $\omega \in]0, \frac{2\alpha}{M^2}[$, on peut obtenir la solution de (2.1) en construisant la suite :

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega g(x^{(k)}) & n \geq 0, \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.7)$$

Or on peut aussi écrire cette suite de la manière suivante :

$$\begin{cases} \tilde{x}^{(k+1)} = f(x^{(k)}), & \forall n \geq 0 \\ x^{(k+1)} = \omega \tilde{x}^{(k+1)} + (1 - \omega)x^{(k)}, & x^{(0)} \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.8)$$

En effet si $x^{(k+1)}$ est donné par la suite (2.8), alors

$$x^{(k+1)} = \omega \tilde{x}^{(k+1)} + (1 - \omega)x^{(k)} = \omega f(x^{(k)}) + (1 - \omega)x^{(k)} = -\omega g(x^{(k)}) + x^{(k)}.$$

Le procédé de construction de la suite (2.8) est l'algorithme de relaxation sur f .

La proposition suivante donne une condition suffisante pour qu'une fonction vérifie les hypothèses (2.6) et (2.5).

Proposition 2.10. Soit $h \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, et $(\lambda_i)_{i=1,n}$ les valeurs propres de la matrice hessienne de h . On suppose qu'il existe des réels strictement positifs α et M tels que

$$\alpha \leq \lambda_i(x) \leq M, \quad \forall i \in \{1 \dots n\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(Notons que cette hypothèse est plausible puisque les valeurs propres de la matrice hessienne sont réelles). Alors la fonction $g = \nabla h$ (gradient de h) vérifie les hypothèses (2.6) et (2.5) du théorème 2.8.

DÉMONSTRATION – Montrons d'abord que l'hypothèse (2.6) est vérifiée. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on veut montrer que $(g(x) - g(y)) \cdot (x - y) \geq \alpha|x - y|^2$. On introduit pour cela la fonction $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ définie par :

$$\varphi(t) = g(x + t(y - x)).$$

On a donc

$$\varphi(1) - \varphi(0) = g(y) - g(x) = \int_0^1 \varphi'(t) dt.$$

Or $\varphi'(t) = Dg(x + t(y - x))(y - x)$. Donc

$$g(y) - g(x) = \int_0^1 Dg(x + t(y - x))(y - x) dt.$$

On en déduit que :

$$(g(y) - g(x)) \cdot (y - x) = \int_0^1 (Dg(x + t(y - x))(y - x) \cdot (y - x)) dt.$$

Comme $\lambda_i(x) \in [\alpha, M] \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\alpha|w|^2 \leq Dg(z)w \cdot w \leq M|w|^2 \text{ pour tout } w, z \in \mathbb{R}^n$$

On a donc :

$$(g(y) - g(x)) \cdot (y - x) \geq \int_0^1 \alpha|y - x|^2 dt = \alpha|y - x|^2$$

ce qui montre que l'hypothèse (2.6) est bien vérifiée.

Montrons maintenant que l'hypothèse (2.5) est vérifiée. On veut montrer que $|g(y) - g(x)| \leq M|y - x|$. Comme

$$g(y) - g(x) = \int_0^1 Dg(x + t(y - x))(y - x)dt,$$

on a

$$\begin{aligned} |g(y) - g(x)| &\leq \int_0^1 |Dg(x + t(y - x))(y - x)|dt \\ &\leq \int_0^1 |Dg(x + t(y - x))||y - x|dt, \end{aligned}$$

où $|\cdot|$ est la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ induite par la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Or, comme $\lambda_i(x) \in [\alpha, M]$ pour tout $i = 1, \dots, n$, la matrice $Dg(x + t(y - x))$ est symétrique définie positive et donc, d'après la proposition 1.30 page 62, son rayon spectral est égal à sa norme, pour la norme induite par la norme euclidienne.

On a donc :

$$|Dg(x + t(y - x))| = \rho(Dg(x + t(y - x))) \leq M.$$

On a donc ainsi montré que : $|g(y) - g(x)| \leq M|y - x|$, ce qui termine la démonstration. ■

2.2.2 Point fixe de monotonie

Dans de nombreux cas issus de la discrétisation d'équations aux dérivées partielles, le problème de résolution d'un problème non linéaire apparaît sous la forme $Ax = R(x)$ où A est une matrice carrée d'ordre n inversible, et $R \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On peut le réécrire sous la forme $x = A^{-1}R(x)$ et appliquer l'algorithme de point fixe sur la fonction $f : x \mapsto A^{-1}R(x)$, ce qui donne comme itération : $x^{(k+1)} = A^{-1}R(x^{(k)})$. Si on pratique un point fixe avec relaxation, dont le paramètre de relaxation $\omega > 0$, alors l'itération s'écrit :

$$\tilde{x}^{(k+1)} = A^{-1}R(x^{(k)}), \quad x^{(k+1)} = \omega\tilde{x}^{(k+1)} + (1 - \omega)x^{(k)}.$$

Si la matrice A possède une propriété dite "de monotonie", on peut montrer la convergence de l'algorithme du point fixe ; c'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 2.11 (Point fixe de monotonie).

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $R \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On suppose que :

1. la matrice A est une matrice d'inverse positive, ou IP-matrice voir exercice 8), c.à.d. que A est inversible et tous les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls, ce qui est équivalent à dire que :

$$Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0,$$

au sens composante par composante, c'est-à-dire

$$((Ax)_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n) \Rightarrow (x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n).$$

2. R est monotone, c.à.d. que si $x \geq y$ (composante par composante) alors $R(x) \geq R(y)$ (composante par composante).
3. 0 est une sous-solution du problème, c'est-à-dire que $0 \leq R(0)$ et il existe $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$; $\tilde{x} \geq 0$ tel que $\tilde{x}$ est une sur-solution du problème, c'est-à-dire que $A\tilde{x} \geq R(\tilde{x})$.

On pose $x^{(0)} = 0$ et $Ax^{(k+1)} = R(x^{(k)})$. On a alors :

1. $0 \leq x^{(k)} \leq \tilde{x}, \forall k \in \mathbb{N}$,
2. $x^{(k+1)} \geq x^{(k)}, \forall k \in \mathbb{N}$,
3. $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$ quand $k \rightarrow +\infty$ et $A\bar{x} = R(\bar{x})$.

DÉMONSTRATION – Comme A est inversible la suite $(x^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$\begin{cases} x^{(0)} = 0, \\ Ax^{(k+1)} = R(x^{(k)}), \quad k \geq 0 \end{cases}$$

est bien définie. On va montrer par récurrence sur k que $0 \leq x^{(k)} \leq \tilde{x}$ pour tout $k \geq 0$ et que $x^{(k)} \leq x^{(k+1)}$ pour tout $k \geq 0$.

1. Pour $k = 0$, on a $x^{(0)} = 0$ et donc $0 \leq x^{(0)} \leq \tilde{x}$ et $Ax^{(1)} = R(0) \geq 0$. On en déduit que $x^{(1)} \geq 0$ grâce aux hypothèses 1 et 3 et donc $x^{(1)} \geq x^{(0)} = 0$.
2. On suppose maintenant (hypothèse de récurrence) que $0 \leq x^{(p)} \leq \tilde{x}$ et $x^{(p)} \leq x^{(p+1)}$ pour tout $p \in \{0, \dots, n-1\}$. On veut montrer que $0 \leq x^{(k)} \leq \tilde{x}$ et que $x^{(k)} \leq x^{(k+1)}$. Par hypothèse de récurrence pour $p = k-1$, on sait que $x^{(k)} \geq x^{(k-1)}$ et que $x^{(k-1)} \geq 0$. On a donc $x^{(k)} \geq 0$. Par hypothèse de récurrence, on a également que $x^{(k-1)} \leq \tilde{x}$ et grâce à l'hypothèse 2, on a donc $R(x^{(k-1)}) \leq R(\tilde{x})$. Par définition de la suite $(x^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$, on a $Ax^{(k)} = R(x^{(k-1)})$ et grâce à l'hypothèse 3, on sait que $A\tilde{x} \geq R(\tilde{x})$. On a donc : $A(\tilde{x} - x^{(k)}) \geq R(\tilde{x}) - R(x^{(k-1)}) \geq 0$. On en déduit alors (grâce à l'hypothèse 1) que $x^{(k)} \leq \tilde{x}$.
De plus, comme $Ax^{(k)} = R(x^{(k-1)})$ et $Ax^{(k+1)} = R(x^{(k)})$, on a $A(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = R(x^{(k)}) - R(x^{(k-1)}) \geq 0$ par l'hypothèse 2, et donc grâce à l'hypothèse 1, $x^{(k+1)} \geq x^{(k)}$.

On a donc ainsi montré (par récurrence) que

$$\begin{aligned} 0 &\leq x^{(k)} \leq \tilde{x}, \quad \forall k \geq 0 \\ x^{(k)} &\leq x^{(k+1)}, \quad \forall k \geq 0. \end{aligned}$$

Ces inégalités s'entendent composante par composante, c.à.d. que si $x^{(k)} = (x_1^{(k)} \dots x_n^{(k)})^t \in \mathbb{R}^n$ et $\tilde{x} = (\tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_n)^t \in \mathbb{R}^n$, alors $0 \leq x_i^{(k)} \leq \tilde{x}_i$ et $x_i^{(k)} \leq x_i^{(k+1)}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, et $\forall k \geq 0$.

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$; la suite $(x_i^{(k)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ est croissante et majorée par $\tilde{x}_i$ donc il existe $\bar{x}_i \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{x}_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_i^{(k)}$. Si on pose $\bar{x} = (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)^t \in \mathbb{R}^n$, on a donc $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$ quand $k \rightarrow +\infty$.

Enfin, comme $Ax^{(k+1)} = R(x^{(k)})$ et comme R est continue, on obtient par passage à la limite lorsque $k \rightarrow +\infty$ que $A\bar{x} = R(\bar{x})$ et que $0 \leq \bar{x} \leq \tilde{x}$. ■

L'hypothèse 1 du théorème 2.11 est vérifiée par exemple par les matrices A qu'on a obtenues par discrétisation par différences finies des opérateurs $-u''$ sur l'intervalle $]0, 1[$ (voir page 11 et l'exercice 47) et Δu sur $]0, 1[\times]0, 1[$ (voir page 14).

Théorème 2.12 (Généralisation du précédent).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $R \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $R = (R_1, \dots, R_n)^t$ tels que

1. Pour tout $\beta \geq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax + \beta x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$
2. $\frac{\partial R_i}{\partial x_j} \geq 0$, $\forall i, j$ t.q. $i \neq j$ (R_i est monotone croissante par rapport à la variable x_j si $j \neq i$) et $\exists \gamma > 0$,
 $-\gamma \leq \frac{\partial R_i}{\partial x_i} \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ (R_i est monotone décroissante par rapport à la variable x_i).
3. $0 \leq R(0)$ (0 est sous-solution) et $\exists \tilde{x} \geq 0$ tel que $A(\tilde{x}) \geq R(\tilde{x})$ ($\tilde{x}$ est sur-solution).

Soient $x^{(0)} = 0$, $\beta \geq \gamma$, et $(x^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $Ax^{(k+1)} + \beta x^{(k+1)} = R(x^{(k)}) + \beta x^{(k)}$. Cette suite converge vers $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et $A\bar{x} = R(\bar{x})$. De plus, $0 \leq x^{(k)} \leq \tilde{x} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $x^{(k)} \leq x^{(k+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION – On se ramène au théorème précédent avec $A + \beta Id$ au lieu de A et $R + \beta$ au lieu de R . ■

Remarque 2.13 (Point fixe de Brouwer). On s'est intéressé ici uniquement à des théorèmes de point fixe "constructifs", i.e. qui donnent un algorithme pour le déterminer. Il existe aussi un théorème de point fixe dans $\mathbb{R}^n$ avec des

hypothèses beaucoup plus générales (mais le théorème est non constructif), c'est le théorème de Brouwer³ : si f est une fonction continue de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ dans la boule unité, alors elle admet un point fixe dans la boule unité.

2.2.3 Vitesse de convergence

Définition 2.14 (Vitesse de convergence). Soit $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$ lorsque $k \rightarrow +\infty$, que la suite est non stationnaire, c.à.d. que $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|x^{(k+1)} - \bar{x}\|}{\|x^{(k)} - \bar{x}\|} = \beta \in [0, 1]. \quad (2.9)$$

On s'intéresse à la "vitesse de convergence" de la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$. On dit que :

1. La convergence est **sous-linéaire** si $\beta = 1$.
2. La convergence est **au moins linéaire** si $\beta \in [0, 1[$.
3. La convergence est **linéaire** si $\beta \in]0, 1[$.
4. La convergence est **super linéaire** si $\beta = 0$. Dans ce cas, on dit également que :
 - (a) La convergence est **au moins quadratique** s'il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+$ et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que si $k \geq n_0$ alors $\|x^{(k+1)} - \bar{x}\| \leq \gamma \|x^{(k)} - \bar{x}\|^2$.
 - (b) La convergence est **quadratique** si

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|x^{(k+1)} - \bar{x}\|}{\|x^{(k)} - \bar{x}\|^2} = \gamma > 0.$$

Plus généralement, on dit que :

- (a) La convergence est **au moins d'ordre p** s'il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+$ et il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que si $k \geq k_0$ alors $\|x^{(k+1)} - \bar{x}\| \leq \gamma \|x^{(k)} - \bar{x}\|^p$.
- (b) La convergence est **d'ordre p** si

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|x^{(k+1)} - \bar{x}\|}{\|x^{(k)} - \bar{x}\|^p} = \gamma > 0.$$

Remarque 2.15 (Sur la vitesse de convergence des suites).

- Remarquons d'abord que si une suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ converge vers $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ lorsque n tend vers l'infini, alors on a forcément $\beta \leq 1$ dans (2.9). En effet, si la suite vérifie (2.9) avec $\beta > 1$, alors il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq k_0$, $|x_k - \bar{x}| \geq |x_{k_0} - \bar{x}|$ pour tout $k \geq k_0$, ce qui contredit la convergence.
- Quelques exemples de suites qui convergent sous-linéairement : $x_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$, $x_k = \frac{1}{k}$, mais aussi, de manière moins intuitive : $x_k = \frac{1}{k^2}$. Toutes ces suites vérifient l'égalité (2.9) avec $\beta = 1$.
- Attention donc, contrairement à ce que pourrait suggérer son nom, la convergence linéaire (au sens donné ci-dessus), est déjà une convergence très rapide. Les suites géométriques définies par $x_k = \beta^k$ avec $\beta \in]0, 1[$ sont des suites qui convergent linéairement (vers 0), car elles vérifient évidemment bien (2.9) avec $\beta \in]0, 1[$.
- la convergence quadratique est encore plus rapide ! Par exemple la suite définie par $x_{k+1} = x_k^2$ converge de manière quadratique pour un choix initial $x_0 \in]-1, 1[$. Mais si par malheur le choix initial est en dehors de cet intervalle, la suite diverge alors très vite... de manière exponentielle, en fait, puisque $x_k = \exp(k \ln x_0)$.

3. Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), mathématicien néerlandais.

C'est le cas de la méthode de Newton, que nous allons introduire maintenant. Lorsqu'elle converge, elle converge très vite (nous démontrerons que la vitesse de convergence est quadratique). Mais lorsqu'elle diverge, elle diverge aussi très vite...

Pour construire des méthodes itératives qui convergent "super vite", nous allons donc essayer d'obtenir des vitesses de convergence super linéaires. C'est dans cet esprit que nous étudions dans la proposition suivante des conditions suffisantes de convergence de vitesse quadratique pour une méthode de type point fixe, dans le cas d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.16 (Vitesse de convergence d'une méthode de point fixe). Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; on suppose qu'il existe $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que $f(\bar{x}) = \bar{x}$. On construit la suite

$$\begin{aligned} x^{(0)} &\in \mathbb{R} \\ x^{(k+1)} &= f(x^{(k)}). \end{aligned}$$

1. Si on suppose que $f'(\bar{x}) \neq 0$ et $|f'(\bar{x})| < 1$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que si $x^{(0)} \in I_\alpha = [\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha]$ on a $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$ lorsque $k \rightarrow +\infty$. De plus si $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} \rightarrow |f'(\bar{x})| = \beta \text{ avec } \beta \in]0, 1[.$$

La convergence est donc linéaire.

2. Si on suppose maintenant que $f'(\bar{x}) = 0$ et $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que si $x^{(0)} \in I_\alpha = [\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha]$, alors $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$ quand $k \rightarrow +\infty$, et si $x^{(k)} \neq \bar{x}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ alors

$$\frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|^2} \rightarrow \beta = \frac{1}{2}|f''(\bar{x})|.$$

Dans ce cas, la convergence est donc au moins quadratique.

DÉMONSTRATION –

1. Supposons que $|f'(\bar{x})| < 1$, et montrons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x^{(0)} \in I_\alpha$ alors $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$. Comme $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\gamma = \max_{x \in I_\alpha} |f'(x)| < 1$ (par continuité de f').

On va maintenant montrer que $f : I_\alpha \rightarrow I_\alpha$ est strictement contractante, on pourra alors appliquer le théorème du point fixe à $f|_{I_\alpha}$, (I_α étant fermé), pour obtenir que $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$ où $\bar{x}$ est l'unique point fixe de $f|_{I_\alpha}$.

Soit $x \in I_\alpha$; montrons d'abord que $f(x) \in I_\alpha$: comme $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il existe $\xi \in]x, \bar{x}[$ tel que $|f(x) - \bar{x}| = |f(x) - f(\bar{x})| = |f'(\xi)||x - \bar{x}| \leq \gamma|x - \bar{x}| < \alpha$, ce qui prouve que $f(x) \in I_\alpha$. On vérifie alors que $f|_{I_\alpha}$ est strictement contractante en remarquant que pour tous $x, y \in I_\alpha$, $x < y$, il existe $\xi \in]x, y[\subset I_\alpha$ tel que $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq \gamma|x - y|$ avec $\gamma < 1$. On a ainsi montré que $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$ si $x^{(0)} \in I_\alpha$.

Cherchons maintenant la vitesse de convergence de la suite. Supposons que $f'(\bar{x}) \neq 0$ et $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$ et $\bar{x} = f(\bar{x})$, on a $|x^{(k+1)} - \bar{x}| = |f(x^{(k)}) - f(\bar{x})|$. Comme $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il existe $\xi_k \in]x^{(k)}, \bar{x}[$ ou $]\bar{x}, x^{(k)}[$, tel que $f(x^{(k)}) - f(\bar{x}) = f'(\xi_k)(x^{(k)} - \bar{x})$. On a donc

$$\frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} = |f'(\xi_k)| \rightarrow |f'(\bar{x})| \text{ car } x^{(k)} \rightarrow \bar{x} \text{ et } f' \text{ est continue.}$$

On a donc une convergence linéaire.

2. Supposons maintenant que $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f'(\bar{x}) = 0$. On sait déjà par ce qui précède qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x^{(0)} \in I_\alpha$ alors $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$ lorsque $k \rightarrow +\infty$. On veut estimer la vitesse de convergence; on suppose pour cela que $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il existe $\xi_k \in]x^{(k)}, \bar{x}[$, $\bar{x}$ tel que

$$f(x^{(k)}) - f(\bar{x}) = f'(\bar{x})(x^{(k)} - \bar{x}) + \frac{1}{2}f''(\xi_k)(x^{(k)} - \bar{x})^2.$$

On a donc : $x^{(k+1)} - \bar{x} = \frac{1}{2}f''(\xi_k)(x^{(k)} - \bar{x})^2$ ce qui entraîne, par continuité de f'' , que

$$\frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|^2} = \frac{1}{2}|f''(\xi_k)| \rightarrow \frac{1}{2}|f''(\bar{x})| \text{ quand } k \rightarrow +\infty.$$

La convergence est donc quadratique. ■

2.2.4 Méthode de Newton dans $\mathbb{R}$

On va étudier dans le paragraphe suivant la méthode de Newton pour la résolution d'un système non linéaire. (En fait, il semble que l'idée de cette méthode revienne plutôt à Simpson⁴ Donnons l'idée de la méthode de Newton dans le cas $n = 1$ à partir des résultats de la proposition précédente. Soit $g \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que $g(\bar{x}) = 0$. On cherche une méthode de construction d'une suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ qui converge vers $\bar{x}$ de manière quadratique. On pose

$$f(x) = x - h(x)g(x) \text{ avec } h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ tel que } h(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R},$$

et on a donc

$$f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0.$$

Si par miracle $f'(\bar{x}) = 0$, la méthode de point fixe sur f va donner (pour $x^{(0)} \in I_\alpha$ donné par la proposition 2.16) $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ tel que $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$ de manière au moins quadratique. Or on a $f'(x) = 1 - h'(x)g(x) - g'(x)h(x)$ et donc $f'(\bar{x}) = 1 - g'(\bar{x})h(\bar{x})$. Il suffit donc de prendre h tel que $h(\bar{x}) = \frac{1}{g'(\bar{x})}$. Ceci est possible si $g'(\bar{x}) \neq 0$.

En résumé, si $g \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est telle que $g'(\bar{x}) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ et $g(\bar{x}) = 0$, on peut construire, pour x assez proche de $\bar{x}$, la fonction $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}.$$

Grâce à la proposition 2.16, il existe $\alpha > 0$ tel que si $x^{(0)} \in I_\alpha$ alors la suite définie par

$$x^{(k+1)} = f(x^{(k)}) = x^{(k)} - \frac{g(x^{(k)})}{g'(x^{(k)})}$$

converge vers $\bar{x}$ de manière au moins quadratique.

Remarquons que dans le cas $n = 1$, la suite de Newton peut s'obtenir naturellement en remplaçant l'équation $g(\bar{x}) = 0$ par $g(x^{(k+1)}) = 0$, et $g(x^{(k+1)})$ par le développement limité en x^k :

$$g(x^{(k+1)}) = g(x^{(k)}) + g'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \frac{1}{2}g''(\xi)(x^{(k+1)} - x^{(k)})^2.$$

C'est le plus sûr moyen mnémotechnique pour retrouver l'itération de Newton :

$$g(x^{(k)}) + g'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0 \text{ ou encore } g'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -g(x^{(k)}). \quad (2.10)$$

Comparons sur un exemple les méthodes de point fixe et de Newton. On cherche le zéro de la fonction $g : x \mapsto x^2 - 3$ sur $\mathbb{R}_+$. Notons en passant que la construction de la suite $x^{(k)}$ par point fixe ou Newton permet l'approximation effective de $\sqrt{3}$. Si on applique le point fixe standard, la suite $x^{(k)}$ s'écrit

$$x^{(0)} \text{ donné,} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - (x^{(k)})^2 + 3.$$

Si on applique le point fixe avec paramètre de relaxation ω , la suite $x^{(k)}$ s'écrit

$$x^{(0)} \text{ donné,} \\ x^{(k+1)} = -x^{(k)} + \omega(-x^{(k)})^2 + 3)$$

4. Voir Nick Kollerstrom (1992). *Thomas Simpson and "Newton's method of approximation" : an enduring myth*, The British Journal for the History of Science, 25, pp 347-354 doi :10.1017/S0007087400029150 – Thomas Simpson est un mathématicien anglais du 18-ème siècle à qui on attribue généralement la méthode du même nom pour le calcul approché des intégrales, probablement à tort car celle-ci apparaît déjà dans les travaux de Kepler deux siècles plus tôt !

Si maintenant on applique la méthode de Newton, la suite $x^{(k)}$ s'écrit

$$x^{(0)} \text{ donné,}$$

$$x^{(k+1)} = -\frac{(x^{(k)})^2 - 3}{2x^{(k)}}.$$

Comparons les suites produites par scilab à partir de $x^{(0)} = 1$ par le point fixe standard, le point fixe avec relaxation ($\omega = .1$) et la méthode de Newton.

– **point fixe standard :**

1 3 -3 -9 -87 -7653 -58576059 -3.431D+15 -1.177D+31

– **point fixe avec relaxation :**

1. 1.2 1.356 1.4721264 1.5554108 1.6134805 1.6531486 1.6798586 1.6976661 1.7094591
 1.717234 1.7223448 1.7256976 1.7278944 1.7293325 1.7302734 1.7308888 1.7312912
 1.7315543 1.7317263 1.7318387 1.7319122 1.7319602 1.7319916 1.7320121 1.73204
 1.7320437 1.7320462 1.7320478 1.7320488 1.7320495 1.73205 1.7320503 1.7320504
 1.7320506 1.7320507 1.7320507 1.7320507 1.7320508

– **Newton :**

1. 2. 1.75 1.7321429 1.7320508 1.7320508

Remarque 2.17 (Attention à l'utilisation du théorème des accroissements finis...). *On a fait grand usage du théorème des accroissements finis dans ce qui précède. Rappelons que sous la forme qu'on a utilisée, ce théorème n'est valide que pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pourra s'en convaincre en considérant la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :*

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}.$$

On peut vérifier facilement qu'il n'existe pas de $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(2\pi) - \varphi(0) = 2\pi\varphi'(\xi)$.

2.2.5 Exercices

Enoncés

Exercice 69 (Calcul différentiel). *Suggestions en page 156, corrigé détaillé en page 156*

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique vecteur $a(x) \in \mathbb{R}^n$ tel que $Df(x)(h) = a(x) \cdot h$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.

Montrer que $(a(x))_i = \partial_i f(x)$.

2. On pose $\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))^t$. Soit φ l'application définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ par $\varphi(x) = \nabla f(x)$. Montrer que $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et que $D\varphi(x)(y) = A(x)y$, où $A(x)_{i,j} = \partial_{i,j}^2 f(x)$.

Exercice 70 (Calcul différentiel, suite). *Corrigé en page 157*

1. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ la fonction définie par $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + cx_1x_2$, où a, b , et c sont trois réels fixés. Donner la définition et l'expression de $Df(x)$, $\nabla f(x)$, $D^2f(x)$, $H_f(x)$.

2. Même question pour la fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ définie par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1^2x_2 + x_2 \sin(x_3)$.

Exercice 71 (Point fixe dans $\mathbb{R}$). *Corrigé en page 158*

1. Etudier la convergence de la suite $(x^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $x^{(0)} \in [0, 1]$ et $x^{(k+1)} = \cos\left(\frac{1}{1+x^{(k)}}\right)$.

2. Soit $I = [0, 1]$, et $f : x \mapsto x^4$. Montrer que la suite des itérés de point fixe converge pour tout $x \in [0, 1]$ et donner la limite de la suite en fonction du choix initial $x^{(0)}$.

Exercice 72 (Point fixe et Newton). *Corrigé détaillé en page 158.*

1. On veut résoudre l'équation $2xe^x = 1$.
 - (a) Vérifier que cette équation peut s'écrire sous forme de point fixe : $x = \frac{1}{2}e^{-x}$.
 - (b) Ecrire l'algorithme de point fixe, et calculer les itérés x_0, x_1, x_2 et x_3 en partant depuis $x_0 = 1$.
 - (c) Justifier la convergence de la méthode.
2. On veut résoudre l'équation $x^2 - 2 = 0$.
 - (a) Vérifier que cette équation peut s'écrire sous forme de point fixe : $x = \frac{2}{x}$.
 - (b) Ecrire l'algorithme de point fixe, et tracer sur un graphique les itérés x_0, x_1, x_2 et x_3 en partant de $x_0 = 1$ et $x_0 = 2$.
 - (c) Essayer ensuite le point fixe sur $x = \frac{x^2+2}{2x}$. Pas très facile à deviner, n'est ce pas ?
 - (d) Pour suivre les traces de Newton (ou plutôt Simpson, semble-t-il) : à x_n connu, écrire le développement limité de $g(x) = x^2 - 2$ entre $x^{(n)}$ et $x^{(n+1)}$, remplacer l'équation $g(\bar{x}) = 0$ par $g(x^{(n+1)}) = 0$, et $g(x^{(n+1)})$ par le développement limité en x^{n+1} , et en déduire l'approximation $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{g(x^{(n)})}{g'(x^{(n)})}$. Retrouver ainsi l'itération de la question précédente (pour $g(x) = x^2 - 2$).

Exercice 73 (Méthode de monotonie). *Suggestions en page 156, corrigé détaillé en page 159.*

On suppose que $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$ et que f est croissante. On s'intéresse, pour $\lambda > 0$, au système non linéaire suivant de n équations à n inconnues (notées $u_1, \dots, u_n$) :

$$\begin{aligned} (Au)_i &= \alpha_i f(u_i) + \lambda b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ u &= (u_1, \dots, u_n)^t \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (2.11)$$

où $\alpha_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $b_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice vérifiant

$$u \in \mathbb{R}^n, Au \geq 0 \Rightarrow u \geq 0. \quad (2.12)$$

On suppose qu'il existe $\mu > 0$ t.q. (2.11) ait une solution, notée $u^{(\mu)}$, pour $\lambda = \mu$. On suppose aussi que $u^{(\mu)} \geq 0$. Soit $0 < \lambda < \mu$. On définit la suite $(v^{(k)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ par $v^{(0)} = 0$ et, pour $n \geq 0$,

$$(Av^{(k+1)})_i = \alpha_i f(v_i^{(k)}) + \lambda b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.13)$$

Montrer que la suite $(v^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, convergente (dans $\mathbb{R}^n$) et que sa limite, notée $u^{(\lambda)}$, est solution de (2.11) (et vérifie $0 \leq u^{(\lambda)} \leq u^{(\mu)}$).

Exercice 74 (Point fixe amélioré). *Suggestions en page 156, Corrigé en page 159*

Soit $g \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tels que $g(\bar{x}) = 0$ et $g'(\bar{x}) \neq 0$.

On se donne $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$.

On considère l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}, \\ x_{n+1} = h(x_n), n \geq 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

avec $h(x) = x - \frac{g(x)}{g'(\varphi(x))}$

1) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x_0 \in [\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha] = I_\alpha$, alors la suite donnée par l'algorithme (2.14) est bien définie ; montrer que $x_n \rightarrow \bar{x}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

On prend maintenant $x_0 \in I_\alpha$ où α est donné par la question 1.

2) Montrer que la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par l'algorithme (2.14) est au moins quadratique.

3) On suppose que φ' est lipschitzienne et que $\varphi'(\bar{x}) = \frac{1}{2}$. Montrer que la convergence de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par (2.14) est au moins cubique, c'est-à-dire qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$|x_{k+1} - \bar{x}| \leq c|x_k - \bar{x}|^3, \quad \forall k \geq 1.$$

4) Soit $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I_\beta =]\bar{x} - \beta, \bar{x} + \beta[$; montrer que si on prend φ telle que :

$$\varphi(x) = x - \frac{g(x)}{2g'(x)} \quad \text{si } x \in I_\beta,$$

alors la suite définie par l'algorithme (2.14) converge de manière cubique.

2.3 Méthode de Newton dans $\mathbb{R}^n$

2.3.1 Construction et convergence de la méthode

On a vu ci-dessus comment se construit la méthode de Newton à partir du point fixe de monotonie en dimension $n = 1$. On va maintenant étudier cette méthode dans le cas n quelconque. Soient $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tels que $g(\bar{x}) = 0$.

On généralise la méthode vue en 1D en remplaçant dans (2.10) la dérivée $g'(x^{(k)})$ par la matrice jacobienne de g au point $x^{(k)}$, qu'on note $Dg(x^{(k)})$. La méthode s'écrit :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ Dg(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -g(x^{(k)}), \forall k \geq 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il faut donc effectuer les opérations suivantes :

1. Calcul de $Dg(x^{(k)})$,
2. Résolution du système linéaire $Dg(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -g(x^{(k)})$.

Remarque 2.18. Si la fonction g dont on cherche un zéro est linéaire, i.e. si g est définie par $g(x) = Ax - b$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$, alors la méthode de Newton revient à résoudre le système linéaire $Ax = b$. En effet $Dg(x^{(k)}) = A$ et donc (2.20) s'écrit $Ax^{(k+1)} = b$.

Pour assurer la convergence et la qualité de la méthode, on va chercher maintenant à répondre aux questions suivantes :

1. la suite $(x^{(k)})_n$ est-elle bien définie ? A-t-on $Dg(x^{(k)})$ inversible ?
2. A-t-on convergence $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$ quand $k \rightarrow +\infty$?
3. La convergence est-elle au moins quadratique ?

Théorème 2.19 (Convergence de la méthode de Newton, $g \in C^2$). Soient $g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tels que $g(\bar{x}) = 0$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$. On suppose que $Dg(\bar{x})$ est inversible. Alors la méthode de Newton converge localement, et la convergence est au moins quadratique. Plus précisément, il existe $b > 0$, et $\beta > 0$ tels que

1. si $x^{(0)} \in B(\bar{x}, b) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - \bar{x}\| < b\}$ alors la suite $(x^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie par (2.20) et $x^{(k)} \in B(\bar{x}, b)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
2. si $x^{(0)} \in B(\bar{x}, b)$ et si la suite $(x^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par (2.20) alors $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$ quand $n \rightarrow +\infty$,
3. si $x^{(0)} \in B(\bar{x}, b)$ et si la suite $(x^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par (2.20) alors $\|x^{(k+1)} - \bar{x}\| \leq \beta \|x^{(k)} - \bar{x}\|^2 \forall n \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION – Montrons d'abord que la suite converge si $x^{(0)}$ est suffisamment proche de $\bar{x}$. Pour cela on va utiliser le théorème du point fixe : soit f la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $x \mapsto x - (Dg(x))^{-1}g(x)$. On a

$$Df(\bar{x}) = \text{Id} - (Dg(\bar{x}))^{-1}(Dg(\bar{x})) = 0.$$

Comme $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction f est de classe C^1 et donc par continuité de Df , il existe $b > 0$ tel que $|Df(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in B = B(\bar{x}, b)$. Si on montre que $f(B) \subset B$, alors la fonction f est strictement contractante de B dans B , et donc par le théorème du point fixe, la suite définie par (2.20) converge. Soit $x = x^{(k)} \in B$, et soit $y = x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$. Grâce au théorème des accroissements finis dans des espaces vectoriels normés⁵, on a :

$$\|y - \bar{x}\| = \|f(x) - f(\bar{x})\| \leq \sup_{z \in B} \|Df(z)\| \|x - \bar{x}\|, \quad (2.21)$$

5. **Théorème des accroissements finis** : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés, soient $h \in C^1(E, F)$ et $(x, y) \in E^2$. On définit $]x, y[= \{tx + (1-t)y, t \in]0, 1[\}$. Alors : $\|h(y) - h(x)\| \leq \|y - x\| \sup_{z \in]x, y[} \|Dh(z)\|_{\mathcal{L}(E, F)}$. (On rappelle que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{x \in E, \|x\|_E=1} \|Tx\|_F$.)

Attention piège !! : Si $\dim F > 1$, on ne peut pas dire, comme c'est le cas en dimension 1, que $\exists \xi \in]x, y[$ t.q. $h(y) - h(x) = Dh(\xi)(y - x)$.

et donc

$$\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|.$$

On en déduit que $\mathbf{y} \in B$. La suite $(\mathbf{x}^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par (2.20) est donc bien convergente. Pour montrer le caractère quadratique de la convergence, on applique à nouveau l'inégalité des accroissements finis, cette fois-ci à $Df(z)$ dans (2.21). En effet, comme par hypothèse, $Df \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} \|Df(z)\| &= \|Df(z) - Df(\bar{\mathbf{x}})\| \\ &\leq \sup_{\xi \in B} \|Df(\xi)\| \|\mathbf{z} - \bar{\mathbf{x}}\| \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\leq \beta \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|. \quad (2.23)$$

En reportant cette majoration de $\|Df(z)\|$ dans (2.21), on obtient alors :

$$\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \beta \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2$$

ce qui donne la convergence locale au moins quadratique. $\blacksquare$

La condition $g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est une condition suffisante mais non nécessaire. Si $g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on peut encore démontrer la convergence, mais sous des hypothèses pas très faciles à vérifier en pratique :

Théorème 2.20 (Convergence de la méthode de Newton, $g \in C^1$).

Soient $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ tels que $g(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme induite. On suppose que $Dg(\bar{\mathbf{x}})$ est inversible. On suppose de plus qu'il existe $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

1. si $\mathbf{x} \in B(\bar{\mathbf{x}}, a)$ alors $Dg(\mathbf{x})$ est inversible et $\|Dg(\mathbf{x})\|^{-1} \leq a_1$;
2. si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(\bar{\mathbf{x}}, a)$ alors $\|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}) - Dg(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| \leq a_2 \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2$.

Alors, si on pose : $b = \min \left(a, \frac{1}{a_1 a_2} \right) > 0$, $\beta = a_1 a_2$ et si $\mathbf{x}^{(0)} \in B(\bar{\mathbf{x}}, b)$, on a :

1. $(\mathbf{x}^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie par (2.20),
2. $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$,
3. $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \beta \|\mathbf{x}^{(k)} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION — Soit $\mathbf{x}^{(0)} \in B(\bar{\mathbf{x}}, b) \subset B(\bar{\mathbf{x}}, a)$ où $b \leq a$. On va montrer par récurrence sur n que $\mathbf{x}^{(k)} \in B(\bar{\mathbf{x}}, b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (et que $(\mathbf{x}^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie). L'hypothèse de récurrence est que $\mathbf{x}^{(k)}$ est bien défini, et que $\mathbf{x}^{(k)} \in B(\bar{\mathbf{x}}, b)$. On veut montrer que $\mathbf{x}^{(k+1)}$ est bien défini et $\mathbf{x}^{(k+1)} \in B(\bar{\mathbf{x}}, b)$. Comme $b \leq a$, la matrice $Dg(\mathbf{x}^{(k)})$ est inversible et $\mathbf{x}^{(k+1)}$ est donc bien défini ; on a :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} = Dg(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} (-g(\mathbf{x}^{(k)}))$$

Pour montrer que $\mathbf{x}^{(k+1)} \in B(\bar{\mathbf{x}}, b)$ on va utiliser le fait que $b \leq \frac{1}{a_1 a_2}$. Par hypothèse, on sait que si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(\bar{\mathbf{x}}, a)$, on a

$$\|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}) - Dg(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| \leq a_2 \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2.$$

Prenons $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{x}}$ et $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)} \in B(\bar{\mathbf{x}}, a)$ dans l'inégalité ci-dessus. On obtient alors :

$$\|g(\bar{\mathbf{x}}) - g(\mathbf{x}^{(k)}) - Dg(\mathbf{x}^{(k)})(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(k)})\| \leq a_2 \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(k)}\|^2.$$

Comme $g(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ et par définition de $\mathbf{x}^{(k+1)}$, on a donc :

$$\|Dg(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) - Dg(\mathbf{x}^{(k)})(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(k)})\| \leq a_2 \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(k)}\|^2,$$

et donc

$$\|Dg(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x}^{(k+1)} - \bar{\mathbf{x}})\| \leq a_2 \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(k)}\|^2. \quad (2.24)$$

Or $\mathbf{x}^{(k+1)} - \bar{\mathbf{x}} = [Dg(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} (Dg(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x}^{(k+1)} - \bar{\mathbf{x}}))$, et donc

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \|Dg(\mathbf{x}^{(k)})^{-1}\| \|Dg(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x}^{(k+1)} - \bar{\mathbf{x}})\|.$$

En utilisant (2.24), les hypothèses 1 et 2 et le fait que $\mathbf{x}^{(k)} \in B(\bar{\mathbf{x}}, b)$, on a donc

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq a_1 a_2 \|\mathbf{x}^{(k)} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 < a_1 a_2 b^2. \quad (2.25)$$

Or $a_1 a_2 b^2 < b$ car $b \leq \frac{1}{a_1 a_2}$. Donc $\mathbf{x}^{(k+1)} \in B(\bar{\mathbf{x}}, b)$.

On a ainsi montré par récurrence que la suite $(\mathbf{x}^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que $\mathbf{x}^{(k)} \in B(\bar{\mathbf{x}}, b)$ pour tout $n \geq 0$.

Pour montrer la convergence de la suite $(\mathbf{x}^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ vers $\bar{\mathbf{x}}$, on repart de l'inégalité (2.25) :

$$a_1 a_2 \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq (a_1 a_2)^2 \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(k)}\|^2 = (a_1 a_2 \|\mathbf{x}^{(k)} - \bar{\mathbf{x}}\|)^2, \forall n \in \mathbb{N},$$

et donc par récurrence

$$a_1 a_2 \|\mathbf{x}^{(k)} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq (a_1 a_2 \|\mathbf{x}^{(0)} - \bar{\mathbf{x}}\|)^{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Comme $\mathbf{x}^{(0)} \in B(\bar{\mathbf{x}}, b)$ et $b \leq \frac{1}{a_1 a_2}$,

$$(a_1 a_2 \|\mathbf{x}^{(0)} - \bar{\mathbf{x}}\|) < 1$$

et donc $\|\mathbf{x}^{(k)} - \bar{\mathbf{x}}\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

La convergence est au moins quadratique car l'inégalité (2.25) s'écrit :

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \beta \|\mathbf{x}^{(k)} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 \text{ avec } \beta = a_1 a_2.$$

■

Le théorème 2.19 peut aussi se démontrer comme corollaire du théorème 2.20. En effet, sous les hypothèses du théorème 2.19, on peut démontrer qu'il existe $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

1. si $\mathbf{x} \in B(\bar{\mathbf{x}}, a)$ alors $Dg(\mathbf{x})$ est inversible et $\|(Dg(\mathbf{x}))^{-1}\| \leq a_1$,
2. si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(\bar{\mathbf{x}}, a)$ alors $\|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}) - Dg(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| \leq a_2 \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2$.

et donc appliquer le théorème 2.20, voir exercice 87 page 171.

Remarque 2.21 (Choix de l'itéré initial). *On ne sait pas bien estimer b dans le théorème 2.19, et ceci peut poser problème lors de l'implantation numérique : il faut choisir l'itéré initial $\mathbf{x}^{(0)}$ "suffisamment proche" de $\bar{\mathbf{x}}$ pour avoir convergence.*

2.3.2 Variantes de la méthode de Newton

L'avantage majeur de la méthode de Newton par rapport à une méthode de point fixe par exemple est sa vitesse de convergence d'ordre 2. On peut d'ailleurs remarquer que lorsque la méthode ne converge pas, par exemple si l'itéré initial $\mathbf{x}^{(0)}$ n'a pas été choisi "suffisamment proche" de $\bar{\mathbf{x}}$, alors la méthode diverge très vite...

L'inconvénient majeur de la méthode de Newton est son coût : on doit d'une part calculer la matrice jacobienne $Dg(\mathbf{x}^{(k)})$ à chaque itération, et d'autre part la factoriser pour résoudre le système linéaire $Dg(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = -g(\mathbf{x}^{(k)})$. (On rappelle que pour résoudre un système linéaire, il ne faut pas calculer l'inverse de la matrice, mais plutôt la factoriser sous la forme LU par exemple, et on calcule ensuite les solutions des systèmes avec matrice triangulaires faciles à inverser, voir Chapitre 1.) Plusieurs variantes ont été proposées pour tenter de réduire ce coût.

"Faux quasi Newton"

Soient $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ tels que $g(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. On cherche à calculer $\bar{\mathbf{x}}$. Si on le fait par la méthode de Newton, l'algorithme s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \\ Dg(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = -g(\mathbf{x}^{(k)}), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

La méthode du "Faux quasi-Newton" (parfois appelée quasi-Newton) consiste à remplacer le calcul de la matrice jacobienne $Dg(\mathbf{x}^{(k)})$ à chaque itération par un calcul toutes les "quelques" itérations. On se donne une suite $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$, avec $n_0 = 0$ et $n_{i+1} > n_i \forall i \in \mathbb{N}$, et on calcule la suite $(\mathbf{x}^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ Dg(\mathbf{x}^{(n_i)})(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = -g(\mathbf{x}^{(k)}) \text{ si } n_i \leq n < n_{i+1}. \end{cases} \quad (2.26)$$

Avec cette méthode, on a moins de calculs et de factorisations de la matrice jacobienne $Dg(\mathbf{x})$ à effectuer, mais on perd malheureusement la convergence quadratique : cette méthode n'est donc pas très utilisée en pratique.

Newton incomplet

On suppose que g s'écrit sous la forme :

$$g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + F_1(\mathbf{x}) + F_2(\mathbf{x}), \text{ avec } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ avec } F_1, F_2 \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

L'algorithme de Newton (2.20) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ (A + DF_1(\mathbf{x}^{(k)}) + DF_2(\mathbf{x}^{(k)}))(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \\ -A\mathbf{x}^{(k)} - F_1(\mathbf{x}^{(k)}) - F_2(\mathbf{x}^{(k)}). \end{cases}$$

La méthode de Newton incomplet consiste à ne pas tenir compte de la jacobienne de F_2 .

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ (A + DF_1(\mathbf{x}^{(k)}))(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = -A\mathbf{x}^{(k)} - F_1(\mathbf{x}^{(k)}) - F_2(\mathbf{x}^{(k)}). \end{cases} \quad (2.27)$$

On dit qu'on fait du "Newton sur F_1 " et du "point fixe sur F_2 ". Les avantages de cette procédure sont les suivants :

- La méthode ne nécessite pas le calcul de $DF_2(\mathbf{x})$, donc on peut l'employer si $F_2 \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ n'est pas dérivable.
- On peut choisir F_1 et F_2 de manière à ce que la structure de la matrice $A + DF_1(\mathbf{x}^{(k)})$ soit "meilleure" que celle de la matrice $A + DF_1(\mathbf{x}^{(k)}) + DF_2(\mathbf{x}^{(k)})$; si par exemple A est la matrice issue de la discrétisation du Laplacien, c'est une matrice creuse. On peut vouloir conserver cette structure et choisir F_1 et F_2 de manière à ce que la matrice $A + DF_1(\mathbf{x}^{(k)})$ ait la même structure que A .
- Dans certains problèmes, on connaît a priori les couplages plus ou moins forts dans les non-linéarités : un couplage est dit fort si la variation d'une variable entraîne une variation forte du terme qui en dépend. Donnons un exemple : Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + \sin(10^{-5}y), \exp(x) + y)$, et considérons le système non linéaire $f(x, y) = (a, b)^t$ où $(a, b)^t \in \mathbb{R}^2$ est donné. Il est naturel de penser que pour ce système, le terme de couplage de la première équation en la variable y sera faible, alors que le couplage de deuxième équation en la variable x sera fort.

On a alors intérêt à mettre en oeuvre la méthode de Newton sur la partie "couplage fort" et une méthode de point fixe sur la partie "couplage faible".

L'inconvénient majeur est la perte de la convergence quadratique. La méthode de Newton incomplet est cependant assez souvent employée en pratique en raison des avantages énumérés ci-dessus.

Remarque 2.22. Si $F_2 = 0$, alors la méthode de Newton incomplet est exactement la méthode de Newton. Si $F_1 = 0$, la méthode de Newton incomplet s'écrit

$$A(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = -A\mathbf{x}^{(k)} - F_2(\mathbf{x}^{(k)}),$$

En supposant A inversible, on a alors $\mathbf{x}^{(k+1)} = -A^{-1}F_2(\mathbf{x}^{(k)})$. C'est donc dans ce cas la méthode du point fixe sur la fonction $-A^{-1}F_2$.

Méthode de la sécante

La méthode de la sécante est une variante de la méthode de Newton dans le cas de la dimension 1 d'espace. On suppose ici $n = 1$ et $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La méthode de Newton pour calculer $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que $g(\bar{x}) = 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R} \\ g'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -g(x^{(k)}), \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

On aimerait simplifier le calcul de $g'(x^{(k)})$, c'est-à-dire remplacer $g'(x^{(k)})$ par une quantité "proche" sans calculer g' . Pour cela, on remplace la dérivée par un quotient différentiel. On obtient la méthode de la sécante :

$$\begin{cases} x^{(0)}, x^{(1)} \in \mathbb{R} \\ \frac{g(x^{(k)}) - g(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -g(x^{(k)}) \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (2.28)$$

Remarquons que dans la méthode de la sécante, $x^{(k+1)}$ dépend de $x^{(k)}$ et de $x^{(k-1)}$: on a une méthode à deux pas ; on a d'ailleurs besoin de deux itérés initiaux $x^{(0)}$ et $x^{(1)}$. L'avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas le calcul de g' . L'inconvénient est qu'on perd la convergence quadratique. On peut toutefois montrer (voir exercice 96 page 175) que si $g(\bar{x}) = 0$ et $g'(\bar{x}) \neq 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $x^{(0)}, x^{(1)} \in [\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha] = I_\alpha$, la suite $(x^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ construite par la méthode de la sécante (2.28) est bien définie, que $(x^{(k)})_{n \in \mathbb{N}} \subset I_\alpha$ et que $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$ quand $n \rightarrow +\infty$. De plus, la convergence est super linéaire, i.e. si $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\frac{x^{(k+1)} - \bar{x}}{x^{(k)} - \bar{x}} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. On peut même montrer (voir exercice 96 page 175) que la méthode de la sécante est convergente d'ordre d , où d est le nombre d'or.

Méthodes de type "Quasi Newton"

On veut généraliser la méthode de la sécante au cas $n > 1$. Soient donc $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Pour éviter de calculer $Dg(x^{(k)})$ dans la méthode de Newton (2.20), on va remplacer $Dg(x^{(k)})$ par $B^{(k)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ "proche de $Dg(x^{(k)})$ ". En s'inspirant de la méthode de la sécante en dimension 1, on cherche une matrice $B^{(k)}$ qui, $x^{(k)}$ et $x^{(k-1)}$ étant connus, vérifie la condition :

$$B^{(k)}(x^{(k)} - x^{(k-1)}) = g(x^{(k)}) - g(x^{(k-1)}) \quad (2.29)$$

Dans le cas où $n = 1$, cette condition détermine entièrement $B^{(k)}$; car on peut écrire : $B^{(k)} = \frac{g(x^{(k)}) - g(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$.

Si $n > 1$, la condition (2.29) ne permet pas de déterminer complètement $B^{(k)}$. Il y a plusieurs façons possibles de choisir $B^{(k)}$, nous en verrons en particulier dans le cadre des méthodes d'optimisation (voir chapitre 4, dans ce cas la fonction g est un gradient), nous donnons ici la méthode de Broyden⁶. Celle-ci consiste à choisir $B^{(k)}$ de la manière suivante : à $x^{(k)}$ et $x^{(k-1)}$ connus, on pose $\delta^{(k)} = x^{(k)} - x^{(k-1)}$ et $y^{(k)} = g(x^{(k)}) - g(x^{(k-1)})$; on suppose $B^{(k-1)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ connue, et on cherche $B^{(k)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$B^{(k)}\delta^{(k)} = y^{(k)} \quad (2.30)$$

(c'est la condition (2.29), qui ne suffit pas à déterminer $B^{(k)}$ de manière unique) et qui vérifie également :

$$B^{(k)}\xi = B^{(k-1)}\xi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \xi \perp \delta^{(k)}. \quad (2.31)$$

Proposition 2.23 (Existence et unicité de la matrice de Broyden).

Soient $y^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $\delta^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ et $B^{(k-1)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe une unique matrice $B^{(k)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant (2.30) et (2.31) ; la matrice $B^{(k)}$ s'exprime en fonction de $y^{(k)}$, $\delta^{(k)}$ et $B^{(k-1)}$ de la manière suivante :

$$B^{(k)} = \frac{1}{|\delta^{(k)}|^2} y^{(k)} (\delta^{(k)})^t + \frac{1}{|\delta^{(k)}|^2} B^{(k-1)} \left(\text{Id} - \delta^{(k)} (\delta^{(k)})^t \right). \quad (2.32)$$

DÉMONSTRATION — L'espace des vecteurs orthogonaux à $\delta^{(k)}$ est de dimension $n - 1$. Soit $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$ une base de cet espace, alors $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, \delta^{(k)})$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et si $B^{(k)}$ vérifie (2.30) et (2.31), les valeurs prises par l'application linéaire associée à $B^{(k)}$ sur chaque vecteur de base sont connues, ce qui détermine l'application linéaire et donc la matrice $B^{(k)}$ de manière unique. Soit $B^{(k)}$ définie par (2.32), on a :

$$B^{(k)}\delta^{(k)} = B^{(k-1)}\delta^{(k)} + \frac{y^{(k)} - B^{(k-1)}\delta^{(k)}}{\delta^{(k)} \cdot \delta^{(k)}} (\delta^{(k)})^t \delta^{(k)} = y^{(k)},$$

6. C. G. Broyden, "A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations." *Math. Comput.* 19, 577-593, 1965.

et donc $B^{(k)}$ vérifie (2.30). Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $\xi \perp \delta^{(k)}$, alors $\xi \cdot \delta^{(k)} = (\delta^{(k)})^t \xi = 0$ et donc

$$B^{(k)}\xi = B^{(k-1)}\xi + \frac{(y^{(k)} - B^{(k-1)}\delta^{(k)})}{\delta^{(k)} \cdot \delta^{(k)}} (\delta^{(k)})^t \xi = B^{(k-1)}\xi, \quad \forall \xi \perp \delta^{(k)}.$$

■

L'algorithme de Broyden s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Initialisation : } x^{(0)}, x^{(1)} \in \mathbb{R}^n \quad B_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \text{A } x^{(k)}, x^{(k-1)} \text{ et } B^{(k-1)} \text{ connus, on pose} \\ \quad \delta^{(k)} = x^{(k)} - x^{(k-1)} \text{ et } y^{(k)} = g(x^{(k)}) - g(x^{(k-1)}); \\ \text{Calcul de } B^{(k)} = B^{(k-1)} + \frac{y^{(k)} - B^{(k-1)}\delta^{(k)}}{\delta^{(k)} \cdot \delta^{(k)}} (\delta^{(k)})^t, \\ \text{Itération } n : \text{résolution de : } B^{(k)}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -g(x^{(k)}). \end{array} \right.$$

Une fois de plus, l'avantage de cette méthode est de ne pas nécessiter le calcul de $Dg(x)$, mais l'inconvénient est la perte du caractère quadratique de la convergence.

2.3.3 Exercices

Enoncés des exercices

Exercice 75 (Newton et logarithme). *Suggestions en page 176 Corrigé en page 177*

Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x)$. Montrer que la méthode de Newton pour la recherche de $\bar{x}$ tel que $f(\bar{x}) = 0$ converge si et seulement si le choix initial $x^{(0)}$ est tel que $x^{(0)} \in]0, e[$.

Exercice 76 (Newton pour un système linéaire). *Corrigé en page 177* Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x) = Ax - b$ où A est une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. Ecrire l'algorithme de Newton pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$ et montrer qu'il converge pour toute condition initiale $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 77 (Condition initiale et Newton). *Corrigé en page 177* L'algorithme de Newton pour $F(x, y) = (\sin(x) + y, xy)^t$ est-il bien défini pour la condition initiale $(\frac{\pi}{2}, 0)$?

Exercice 78 (Newton dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$). *Corrigé en page 178* Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| < 1$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On définit l'application

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x - x_0 - ay \\ y - y_0 - a \sin x \end{bmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que l'on déterminera, telle que $F(x, y) = (0, 0)$ si et seulement si $x = x_0 + ay$ et $f(y) = 0$.
2. Montrer que pour tout triplet (a, x_0, y_0) , il existe un unique couple $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ tel que $F(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$.
3. Ecrire l'algorithme de Newton pour f et montrer que l'algorithme de Newton converge au voisinage de $\bar{y}$.
4. Ecrire l'algorithme de Newton pour la fonction F . Montrer que l'algorithme converge au voisinage de $(\bar{x}, \bar{y})$.

Exercice 79 (Méthode de Newton pour un système 2×2). *Corrigé en page 178*

1. Ecrire la méthode de Newton pour la résolution du système suivant :

$$-5x + 2 \sin x + 2 \cos y = 0, \quad (2.33)$$

$$2 \cos x + 2 \sin y - 5y = 0. \quad (2.34)$$

et montrer que la suite définie par cet algorithme est toujours bien définie.

2. Soit $(\bar{x}, \bar{y})$ une solution du problème (2.33)-(2.34). Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si (x_0, y_0) est dans la boule B_ε de centre $(\bar{x}, \bar{y})$ et de rayon ε , alors la suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construite par la méthode de Newton converge vers $(\bar{x}, \bar{y})$ lorsque n tends vers $+\infty$.

3. Montrer qu'il existe au moins une solution $(\bar{x}, \bar{y})$ au problème (2.33)-(2.34).

Exercice 80 (Méthode de Newton pour un autre système 2×2).

1. Ecrire la méthode de Newton pour la résolution du système suivant :

$$x^2 + 2xy = 0, \quad (2.35)$$

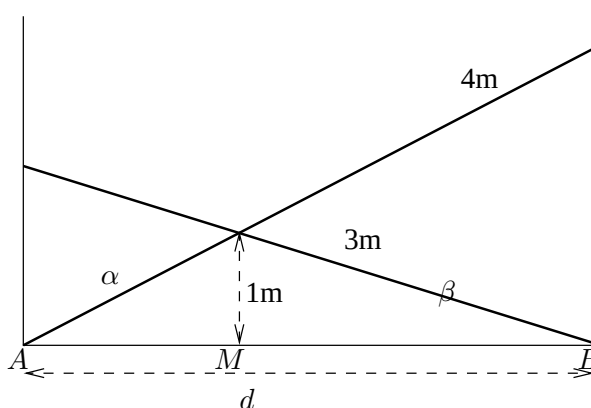
$$xy + 1 = 0. \quad (2.36)$$

2. Calculer les solutions de ce système.

3. Soit $(\bar{x}, \bar{y})$ une solution du problème (2.35)-(2.36). Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si (x_0, y_0) est dans la boule B_ε de centre $(\bar{x}, \bar{y})$ et de rayon ε , alors la suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construite par la méthode de Newton converge vers $(\bar{x}, \bar{y})$ lorsque n tends vers $+\infty$.

Exercice 81 (Newton et les échelles...). Corrigé en page 2.3.3 page 179

Soient deux échelles de longueurs respectives 3 et 4 m, posées contre deux murs verticaux selon la figure ci-contre. On sait que les échelles se croisent à 1m du sol, et on cherche à connaître la distance d entre les deux murs.



1. Montrer que le problème revient à déterminer x et y tels que

$$16x^2 = (x^2 + 1)(x + y)^2 \quad (2.37)$$

$$9y^2 = (y^2 + 1)(x + y)^2. \quad (2.38)$$

2. Ecrire l'algorithme de Newton pour la résolution du système (2.37)-(2.38).

3. Calculer les premiers itérés $x^{(1)}$ et $y^{(1)}$ construits par la méthode de Newton en partant de $x^{(0)} = 1$ et $y^{(0)} = 1$.

Exercice 82 (Newton dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$). Corrigé en page 179

On considère l'application $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$f(X) = X^2 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est de trouver les solutions de $f(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Réécrire l'application f comme une application F de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$. Notons $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, on a alors

$$\begin{aligned} f(X) &= \begin{bmatrix} x^2 + yz & y(x+t) \\ (x+t)z & yz + t^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^2 + yz - 1 & y(x+t) \\ z(x+t) & yz + t^2 - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On a donc $F(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} x^2 + yz - 1 \\ y(x+t) \\ z(x+t) \\ yz + t^2 - 1 \end{bmatrix}$.

2. Trouver l'ensemble des solutions de $f(X) = 0$.

On voit que soit $y = z = 0$ et $x^2 = t^2 = 1$ soit $x = -t$ et $yz = 1 - t^2$. L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \{(1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, -1), (-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 0, -1)\} \cup \{(t, y, \frac{1-t^2}{y}, -t) \mid t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*\}$$

3. Ecrire le premier itéré X_1 de l'algorithme de Newton pour l'application f partant de la donnée initiale $X_0 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (On pourra passer par l'application F). Montrer que la suite $(X_k)_k$ définie par cet algorithme est définie par tout k et que l'on peut écrire sous la forme $X_k = \lambda_k \text{Id}$ où $(\lambda_k)_k$ est une suite réelle dont on étudiera la convergence.

On a

$$DF(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} 2x & z & y & 0 \\ y & x+t & 0 & y \\ z & 0 & x+t & z \\ 0 & z & y & 2t \end{bmatrix}.$$

Par conséquent,

$$DF(4, 0, 0, 4) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{15}{8} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{15}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{8} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{17}{8} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On voit que $X_1 = \frac{17}{8} \text{Id}$. Par récurrence on vérifie que

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{1}{2\lambda_k}(\lambda_k^2 - 1) = \frac{\lambda_k^2 + 1}{2\lambda_k} = \phi(\lambda_k).$$

On vérifie que $\phi'(\lambda) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\lambda^2})$ et donc $\phi' \geq 0$ sur $[1, +\infty[$ avec $\phi(1) = 1$ donc $\phi : [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ et $|\phi'|_{[1, \infty[} \leq \frac{1}{2}$. On en déduit la convergence de la suite λ_k vers 1, qui est l'unique point fixe de ϕ dans cet intervalle.

4. L'algorithme de Newton converge-t-il au voisinage de $X_* = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$?

On vérifie que

$$DF(-1, 0, 0, -1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

est inversible. Le théorème de Newton Raphson assure la convergence locale de l'algorithme.

Exercice 83 (Nombre d'itérations fini pour Newton). *Corrigé détaillé en page 180*

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^x - 1$. Pour $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, on note $(x^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des itérés construits par la méthode de Newton pour la recherche d'un point où f s'annule.

1.1 Montrer que pour tout $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, la suite $(x^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

1.2 Montrer que si $x^{(0)} \neq 0$, alors $x^{(k+1)} \neq x^{(k)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la méthode de Newton converge en un nombre fini d'opérations si et seulement si $f(x^{(0)}) = 0$.

1.3 Montrer que :

1.3 (a) si $x^{(0)} < 0$ alors $x^{(1)} > 0$.

1.3 (b) si $x^{(0)} > 0$ alors $0 < x^{(1)} < x^{(0)}$.

1.4 Montrer que la suite $(x^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge lorsque n tend vers l'infini et donner sa limite.

2. Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable et strictement convexe ($n \geq 1$) et dont la différentielle ne s'annule pas. Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ le choix initial (ou itéré 0) dans la méthode de Newton.

Montrer que la méthode de Newton converge en un nombre fini d'opérations si et seulement si $F(x^{(0)}) = 0$.

Exercice 84 (Méthode de Newton pour un système 2×2). *Corrigé en page 181*

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Ecrire la méthode de Newton pour calculer la solution de $f(x) = 0$ et montrer qu'elle converge quel que soit le choix initial $x_0 \in \mathbb{R}$.

2. On considère maintenant l'application $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 - y \\ y^2 \end{bmatrix}$$

(a) Déterminer l'ensemble des solutions de $F(x, y) = (0, 0)$.

(b) Ecrire l'algorithme de Newton pour la résolution, et montrer que l'algorithme est bien défini pour tous les couples (x_0, y_0) tels que $x_0 \neq 0$ et $y_0 > 0$.

(c) Soit $(x_0, y_0) = (1, 1)$. On note (x_k, y_k) , $k \in \mathbb{N}$ les itérés de Newton.

i. Expliciter y_k et en déduire que la suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge.

ii. Montrer que $x_k \geq 2^{-\frac{k}{2}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et en déduire que $x_{k+1} \leq x_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

iii. En déduire que la méthode de Newton converge vers une solution de $F(x, y) = (0, 0)$.

Exercice 85 (Méthode de Newton pour le calcul de l'inverse). *Corrigé en page 182*

1. Soit $a > 0$. On cherche à calculer $\frac{1}{a}$ par l'algorithme de Newton.

(a) Montrer que l'algorithme de Newton appliqué à une fonction g (dont $\frac{1}{a}$ est un zéro) bien choisie s'écrit :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné,} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)}(2 - ax^{(k)}). \end{cases} \quad (2.39)$$

(b) Montrer que la suite $(x^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par (2.39) vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{a} \text{ si } x^{(0)} \in]0, \frac{2}{a}[, \\ -\infty \text{ si } x^{(0)} \in]-\infty, 0[\cup]\frac{2}{a}, +\infty[\end{cases}$$

2. On cherche maintenant à calculer l'inverse d'une matrice par la méthode de Newton. Soit donc A une matrice carrée d'ordre n inversible, dont on cherche à calculer l'inverse.

- (a) Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées inversibles d'ordre n (où $n \geq 1$) est un ouvert de l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n .
- (b) Soit T l'application définie de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ par $T(B) = B^{-1}$. Montrer que T est dérivable, et que $DT(B)H = -B^{-1}HB^{-1}$.
- (c) Ecrire la méthode de Newton pour calculer A^{-1} en cherchant le zéro de la fonction g de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $g(B) = B^{-1} - A$. Soit $B^{(k)}$ la suite ainsi définie.
- (d) Montrer que la suite $B^{(k)}$ définie dans la question précédente vérifie :

$$\text{Id} - AB^{(k+1)} = (\text{Id} - AB^{(k)})^2.$$

En déduire que la suite $(B^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A^{-1} si et seulement si $\rho(\text{Id} - AB^{(0)}) < 1$.

Exercice 86 (Méthode de Newton pour le calcul de la racine). *Suggestions en page 176, corrigé en page 183*

- 1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et f_λ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_\lambda(x) = x^2 - \lambda$.
 - 1.1 Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ fixé. Donner l'algorithme de Newton pour la résolution de l'équation $f_\lambda(x) = 0$.
 - 1.2 On suppose $x^{(0)} > 0$.
 - (i) Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k \geq 1}$ est minorée par $\sqrt{\lambda}$.
 - (ii) Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ converge et donner sa limite.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$; on note $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ les valeurs propres de A . On suppose que $\lambda_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

- 2. Montrer qu'il existe au moins une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Calculer une telle matrice B dans le cas où $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- 3. On suppose de plus que A est symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique définie positive B telle que $B^2 = A$. Montrer par un contre exemple que l'unicité n'est pas vérifiée si on ne demande pas que B soit symétrique définie positive.

Soit F l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $F(X) = X^2 - A$.

- 4. Montrer que F est différentiable en tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et déterminer $DF(X)H$ pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la méthode de Newton pour déterminer B .

- 5. On suppose maintenant $n \geq 1$. On note $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ la suite (si elle existe) donnée par l'algorithme de Newton à partir d'un choix initial $X^{(0)} = I$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - 5.1 Donner le procédé de construction de $X^{(k+1)}$ en fonction de $X^{(k)}$, pour $k \geq 0$.
 - 5.2 On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A (dont certaines peuvent être égales) et P la matrice orthogonale telle que $A = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$.
 - (i) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^{(k)}$ est bien définie et est donnée par

$$X^{(k)} = P \text{diag}(\mu_1^{(k)}, \dots, \mu_n^{(k)}) P^{-1},$$

où $\mu_i^{(k)}$ est le $k^{\text{ième}}$ terme de la suite de Newton pour la résolution de $f_{\lambda_i}(x) = (x - \lambda_i)^2 = 0$ avec comme choix initial $\mu_i^{(0)} = 1$.

- (ii) En déduire que la suite $X^{(k)}$ converge vers B quand $k \rightarrow +\infty$.

Exercice 87 (Autre démonstration de la convergence locale de Newton). *Suggestions en page 176. Corrigé en page 186*

On se place sous les hypothèses du théorème 2.19. Montrer qu'il existe $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

- 1. si $x \in B(\bar{x}, a)$ alors $Dg(x)$ est inversible et $\|(Dg(x))^{-1}\| \leq a_1$,

2. si $x, y \in B(\bar{x}, a)$ alors $\|g(y) - g(x) - Dg(x)(y - x)\| \leq a_2 \|y - x\|^2$.

et qu'on peut donc appliquer le théorème 2.20 pour obtenir le résultat de convergence locale du théorème 2.19.

Exercice 88 (Valeurs propres et méthode de Newton).

Suggestions en page 176, corrigé détaillé en page 187

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Soient $\bar{\lambda}$ une valeur propre simple de A et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé t.q. $\bar{x} \cdot \bar{x} = 1$. Pour calculer $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ on applique la méthode de Newton au système non linéaire (de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$) suivant :

$$Ax - \lambda x = 0,$$

$$x \cdot x = 1.$$

Montrer que la méthode est localement convergente.

Exercice 89 (Modification de la méthode de Newton). *Suggestions en page 176. Corrigé en page 188*

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ t.q. $f(\bar{x}) = 0$. On considère, pour $\lambda > 0$ donné, la méthode itérative suivante :

– Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

– Iterations : pour $n \geq 0$,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [Df(x^{(k)})^t Df(x^{(k)}) + \lambda Id]^{-1} Df(x^{(k)})^t f(x^{(k)}).$$

[Noter que, pour $\lambda = 0$, on retrouve la méthode de Newton.]

1. Montrer que la suite $(x^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

2. On suppose, dans cette question, que $n = 1$ et que $f'(\bar{x}) \neq 0$. Montrer que la méthode est localement convergente en $\bar{x}$.

3. On suppose que le rang de $Df(\bar{x})$ est égal à n . Montrer que la méthode est localement convergente en $\bar{x}$.
[Noter que cette question redonne la question précédente si $n = 1$.]

Exercice 90 (Convergence de la méthode de Newton si $f'(\bar{x}) = 0$). *Suggestions en page 176, corrigé détaillé en page 189*

Soient $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}$ t.q. $f(\bar{x}) = 0$.

1. Rappel du cours. Si $f'(\bar{x}) \neq 0$, la méthode de Newton est localement convergente en $\bar{x}$ et la convergence est au moins d'ordre 2.

2. On suppose maintenant que $f'(\bar{x}) = 0$ et $f''(\bar{x}) \neq 0$. Montrer que la méthode de Newton est localement convergente (en excluant le cas $x_0 = \bar{x} \dots$) et que la convergence est d'ordre 1. Si on suppose f de classe C^3 , donner une modification de la méthode de Newton donnant une convergence au moins d'ordre 2.

Exercice 91 (Point fixe et Newton). *Corrigé en page 190*

Soit $g \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tels que $g(\bar{x}) = 0$ et $g'(\bar{x}) \neq 0$ et soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

On considère l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}, \\ x_{n+1} = h(x_n), n \geq 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

avec $h(x) = x - \frac{g(x)}{g' \circ f(x)}$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x_0 \in [\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha] = I_\alpha$, alors la suite donnée par l'algorithme (2.40) est bien définie ; montrer que $x_n \rightarrow \bar{x}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ (on pourra montrer qu'on peut choisir α de manière à ce que $|h'(x)| < 1$ si $x \in I_\alpha$).

On prend maintenant $x_0 \in I_\alpha$ où α est donné par la question 1.

- Montrer que la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par l'algorithme (2.40) est au moins quadratique.
- On suppose de plus que f est deux fois dérivable et que $f'(\bar{x}) = \frac{1}{2}$. Montrer que la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par (1) est au moins cubique, c'est-à-dire qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq c|x_n - \bar{x}|^3, \quad \forall n \geq 1.$$

- Soit $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I_\beta =]\bar{x} - \beta, \bar{x} + \beta[$; montrer que si on prend $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$f(x) = x - \frac{g(x)}{2g'(x)} \quad \text{si } x \in I_\beta,$$

alors la suite définie par l'algorithme (1) converge de manière cubique.

Exercice 92 (Variante de la méthode de Newton).

Corrigé détaillé en page 192

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que $f(\bar{x}) = 0$. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- $\bar{x} \in I = [x_0 - c, x_0 + c]$,
- $|f(x_0)| \leq \frac{c}{2\lambda}$,
- $|f'(x) - f'(y)| \leq \frac{1}{2\lambda}, \quad \forall (x, y) \in I^2$
- $|f'(x)| \geq \frac{1}{\lambda} \quad \forall x \in I$.

On définit la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= x_0, \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(y)}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

où $y \in I$ est choisi arbitrairement.

- Montrer par récurrence que la suite définie par (2.41) satisfait $x^{(k)} \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(On pourra remarquer que si $x^{(k+1)}$ est donné par (2.41) alors $x^{(k+1)} - x_0 = x^{(k)} - x_0 - \frac{f(x^{(k)}) - f(x_0)}{f'(y)} - \frac{f(x_0)}{f'(y)}$.)
- Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ définie par (2.41) vérifie $|x^{(k)} - \bar{x}| \leq \frac{c}{2^n}$ et qu'elle converge vers $\bar{x}$ de manière au moins linéaire.
- On remplace l'algorithme (2.41) par

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= x_0, \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(y^{(k)})}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

où la suite $(y^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite donnée d'éléments de I . Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$ de manière au moins linéaire, et que cette convergence devient super-linéaire si $f'(y_n) \rightarrow f'(\bar{x})$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- On suppose maintenant que $n \geq 1$ et que $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. La méthode définie par (2.41) ou (2.42) peut-elle se généraliser, avec d'éventuelles modifications des hypothèses, à la dimension n ?

Exercice 93 (Méthode de Newton pour un système semi-linéaire). *Suggestions en page 176. Corrigé en page 192*

On suppose que $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que f est croissante. On s'intéresse au système non linéaire suivant de n équations à n inconnues (notées $u_1, \dots, u_n$) :

$$\begin{aligned} (Au)_i + \alpha_i f(u_i) &= b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ u &= (u_1, \dots, u_n)^t \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (2.43)$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive, $\alpha_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $b_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

On admet que (2.43) admet au moins une solution (ceci peut être démontré mais est difficile).

1. Montrer que (2.43) admet une unique solution.
2. Soit u la solution de (2.43). Montrer qu'il existe $a > 0$ t.q. la méthode de Newton pour approcher la solution de (2.43) converge lorsque le point de départ de la méthode, noté $u^{(0)}$, vérifie $|u - u^{(0)}| < a$.

Exercice 94 (Méthode de Steffensen).

Suggestions en page 177, corrigé détaillé en page 194

Soient $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}$ t.q. $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$. On considère la méthode itérative suivante :

- Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.
- Itérations : pour $n \geq 0$, si $f(x^{(k)} + f(x^{(k)})) \neq f(x^{(k)})$,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{(f(x^{(k)}))^2}{f(x^{(k)} + f(x^{(k)})) - f(x^{(k)})}, \quad (2.44)$$

et si $f(x^{(k)} + f(x^{(k)})) = f(x^{(k)})$, $x^{(k+1)} = x^{(k)}$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x^{(k)} \in B(\bar{x}, \alpha)$, alors $f(x^{(k)} + f(x^{(k)})) \neq f(x^{(k)})$ si $x^{(k)} \neq \bar{x}$. En déduire que si $x_0 \in B(\bar{x}, \alpha)$, alors toute la suite $(x^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (2.44) pourvu que $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer par des développements de Taylor avec reste intégral qu'il existe une fonction a continue sur un voisinage de $\bar{x}$ telle que si $x_0 \in B(\bar{x}, \alpha)$, alors

$$x^{(k+1)} - \bar{x} = a(x^{(k)})(x^{(k)} - \bar{x}), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x^{(k)} \neq \bar{x}. \quad (2.45)$$

3. Montrer que la méthode est localement convergente en $\bar{x}$ et la convergence est au moins d'ordre 2.

Exercice 95 (Méthode de Newton-Tchebycheff). *Corrigé en page 2.3.3 page 198*

1. Soit $f \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{x} = f(\bar{x})$ et $f'(\bar{x}) = f''(\bar{x}) = 0$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}, \\ x_{n+1} = f(x_n). \end{cases} \quad (PF)$$

- (a) Justifier l'appellation "(PF)" de l'algorithme.
- (b) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que si $|y - \bar{x}| \leq a$ alors $|f'(y)| \leq \frac{1}{2}$.
- (c) Montrer par récurrence sur n que si $x_0 \in B(\bar{x}, a)$ alors $x_n \in B(\bar{x}, \frac{a}{2^n})$.
- (d) En déduire que la suite construite par (PF) converge localement, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V de $\bar{x}$ tel que si $x_0 \in V$ alors $x_n \rightarrow \bar{x}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- (e) Montrer que la vitesse de convergence de la suite construite par (PF) est au moins cubique (c'est-à-dire qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que $|x_{n+1} - \bar{x}| \leq \beta |x_n - \bar{x}|^3$) si la donnée initiale x_0 est choisie dans un certain voisinage de $\bar{x}$. (On pourra utiliser un développement de Taylor-Lagrange.)

2. Soit $g \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et soit $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que $g(\bar{x}) = 0$ et $g'(\bar{x}) \neq 0$. Pour une fonction $h \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à déterminer, on définit $f \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par $f(x) = x + h(x)g(x)$. Donner une expression de $h(\bar{x})$ et $h'(\bar{x})$ en fonction de $g'(\bar{x})$ et de $g''(\bar{x})$ telle que la méthode (PF) appliquée à la recherche d'un point fixe de f converge localement vers $\bar{x}$ avec une vitesse de convergence au moins cubique.

3. Soit $g \in C^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et soit $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que $g(\bar{x}) = 0$ et $g'(\bar{x}) \neq 0$. On considère la modification suivante (dûe à Tchebychev) de la méthode de Newton :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} - \frac{g''(x_n)[g(x_n)]^2}{2[g'(x_n)]^3}. \quad (2.46)$$

Montrer que la méthode (2.46) converge localement et que la vitesse de convergence est au moins cubique. [On pourra commencer par le cas où g' ne s'annule pas].

Exercice 96 (Méthode de la sécante). *Corrigé en page 2.3.3 page 199*

Soient $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}$ t.q. $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$. Pour calculer $\bar{x}$, on considère la méthode itérative suivante (appelée "méthode de la sécante") :

- Initialisation : $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$.
 - Itérations : pour $n \geq 1$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ si $f(x_n) \neq 0$ et $x_{n+1} = x_n$ si $f(x_n) = 0$.
- Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie par cette méthode, on pose $e_n = |x_n - \bar{x}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ t.q. pour $x_0, x_1 \in]\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon[$, $x_0 \neq x_1$, la méthode de la sécante définit bien une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et l'on a $e_{n+1} \leq (1/2)e_n$ pour tout $n \geq 1$. [Raisonnement par récurrence : on suppose $x_n, x_{n-1} \in]\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon[$, $x_n \neq x_{n-1}$ et $x_n \neq \bar{x}$. Montrer, grâce à un choix convenable de ε , que $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$ et que $f(x_n) \neq 0$. En déduire que x_{n+1} est bien défini et $x_n \neq x_{n+1}$. Puis, toujours grâce à un choix convenable de ε , que $e_{n+1} \leq (1/2)e_n$. Conclure.]

Dans les questions suivantes, on suppose que $x_0, x_1 \in]\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon[$, $x_0 \neq x_1$ (ε trouvé à la première question) et que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par la méthode de la sécante vérifie $x_n \neq \bar{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $d = (1 + \sqrt{5})/2$ et on démontre que la convergence est en général d'ordre d .

2. Pour $x \neq \bar{x}$, on définit $\mu(x)$ comme la moyenne de f' sur l'intervalle dont les extrémités sont x et $\bar{x}$.

- (a) Montrer que $e_{n+1} = e_n e_{n-1} M_n$, pour tout $n \geq 1$, avec $M_n = \left| \frac{\mu(x_n) - \mu(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right|$.
- (b) Montrer que la fonction μ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\bar{x}\}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \mu'(x)$.
- (c) Calculer la limite de la suite $(M_n)_{n \geq 1}$ lorsque $n \rightarrow \infty$. En déduire que la suite $(M_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

3. Soit $M > 0$, $M \geq M_n$ pour tout $n \geq 1$ (M_n donné à la question précédente). On pose $a_0 = M e_0$, $a_1 = M e_1$ et $a_{n+1} = a_n a_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

- (a) Montrer que $M e_n \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Montrer qu'il existe $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon[$ t.q. la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ tend en décroissant vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$, si $x_0, x_1 \in]\bar{x} - \varepsilon_1, \bar{x} + \varepsilon_1[$.
- (c) Dans cette question, on prend $x_0, x_1 \in]\bar{x} - \varepsilon_1, \bar{x} + \varepsilon_1[$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta \in]0, 1[$ t.q. $M e_n \leq a_n \leq \alpha(\beta)^{d^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ceci correspond à une convergence d'ordre au moins d). [On pourra utiliser la relation de récurrence $\ln a_{n+1} = \ln a_n + \ln a_{n-1}$ pour $n \geq 1$].
- (d) (Question plus difficile) Si $f''(\bar{x}) \neq 0$, $e_{n+1} = e_n e_{n-1} M_n$, montrer que $M_n \rightarrow \bar{M}$, quand $n \rightarrow \infty$, avec $\bar{M} > 0$. En déduire qu'il existe $\gamma > 0$ t.q. $\frac{e_{n+1}}{(e_n)^d} \rightarrow \gamma$ quand $n \rightarrow \infty$ (ceci signifie que la convergence est exactement d'ordre d). [Considérer, par exemple, $\beta_n = \ln e_{n+1} - d \ln e_n$ et montrer que β_n converge dans $\mathbb{R}$ quand $n \rightarrow \infty$.]

- (e) Comparer l'ordre de convergence de la méthode de la sécante à celui de la méthode de Newton.