3.4 Optimisation sous contraintes

3.4.1 Définitions

Soit $E = \mathbb{R}^n$, soit $f \in C(E, \mathbb{R})$, et soit K un sous ensemble de E. On s'intéresse à la recherche de $\bar{u} \in K$ tel que :

$$\begin{cases} \bar{u} \in K \\ f(\bar{u}) = \inf_K f \end{cases} \tag{3.53}$$

Ce problème est un problème de minimisation avec contrainte (ou "sous contrainte") au sens où l'on cherche u qui minimise f en astreignant u a être dans K. Voyons quelques exemples de ces contraintes (définies par l'ensemble K), qu'on va expliciter à l'aide des p fonctions continues, $g_i \in C(E, \mathbb{R})$ $i = 1 \ldots p$.

1. **Contraintes égalités.** On pose $K = \{x \in E, g_i(x) = 0 \; i = 1 \ldots p\}$. On verra plus loin que le problème de minimisation de f peut alors être résolu grâce au théorème des multiplicateurs de Lagrange (voir théorème 3.35).
2. **Contraintes inégalités.** On pose $K = \{x \in E, g_i(x) \leq 0 \; i = 1 \ldots, p\}$. On verra plus loin que le problème de minimisation de f peut alors être résolu grâce au théorème de Kuhn–Tucker (voir théorème 3.39).
   — *Programmation linéaire.* Avec un tel ensemble de contraintes K, si de plus f est linéaire, c'est-à-dire qu'il existe $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = b \cdot x$, et les fonctions g_i sont affines, c'est-à-dire qu'il existe $b_i \in \mathbb{R}^n$ et $c_i \in \mathbb{R}$ tels que $g_i(x) = b_i \cdot x + C_i$, alors on dit qu'on a affaire ùn problème de "programmation linéaire". Ces problèmes sont souvent résolus numériquement à l'aide de l'algorithme de Dantzig, inventé vers 1950.
   — *Programmation quadratique.* Avec le même ensemble de contraintes K, si de plus f est quadratique, c'est-à-dire si f est de la forme $f(x) = \frac{1}{2} Ax \cdot x - b \cdot x$, et les fonctions g_i sont affines, alors on dit qu'on a affaire ùn problème de "programmation quadratique".
3. **Programmation convexe.** Dans le cas où f est convexe et K est convexe, on dit qu'on a affaire ùn problème de "programmation convexe".

3.4.2 Existence – Unicité – Conditions d'optimalité simple

Théorème 3.29 (Existence)**.** *Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $f \in C(E, \mathbb{R})$.*

1. *Si K est un sous-ensemble fermé borné de E, alors il existe $\bar{\boldsymbol{x}} \in K$ tel que $f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \inf_K f$.*
2. *Si K est un sous-ensemble fermé de E, et si f est croissante à l'infini, c'est–à–dire que $f(x) \to +\infty$ quand $|x| \to +\infty$, alors $\exists \bar{\boldsymbol{x}} \in K$ tel que $f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \inf_K f$*

DÉMONSTRATION –

1. Si K est un sous-ensemble fermé borné de E, comme f est continue, elle atteint ses bornes sur K, d'où l'existence de $\bar{\boldsymbol{x}}$.
2. Si f est croissante à l'infini, alors il existe $R > 0$ tel que si $\|x\| > R$ alors $f(x) > f(0)$; donc $\inf_K f = \inf_{K \cap B_R} f$, où B_R désigne la boule de centre 0 et de rayon R. L'ensemble $K \cap B_R$ est compact, car intersection d'un fermé et d'un compact. Donc, par ce qui précède, il existe $\bar{\boldsymbol{x}} \in K$ tel que $f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \inf_{K \cap B_R} f = \inf_{B_R} f$.

■

Théorème 3.30 (Unicité)**.** *Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $f \in C(E, \mathbb{R})$. On suppose que f est strictement convexe et que K est convexe. Alors il existe au plus un élément $\bar{\boldsymbol{x}}$ de K tel que $f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \inf_K f$.*

DÉMONSTRATION – Supposons que $\bar{\boldsymbol{x}}$ et $\bar{\bar{x}}$ soient deux solutions du problème (3.53), avec $\bar{\boldsymbol{x}} \neq \bar{\bar{x}}$
Alors $f(\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\bar{\bar{x}}) < \dfrac{1}{2}f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \dfrac{1}{2}f(\bar{\bar{x}}) = \inf_K f$. On aboutit donc à une contradiction. ∎

Des théorèmes d'existence 3.29 et d'unicité 3.30 on déduit immédiatement le théorème d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 3.31 (Existence et unicité)**.** *Soient $E = \mathbb{R}^n$, $f \in C(E, \mathbb{R}^n)$ une fonction strictement convexe et K un sous ensemble convexe fermé de E. Si K est borné ou si f est croissante à l'infini, c'est–à–dire si $f(x) \Rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, alors il existe un unique élément $\bar{\boldsymbol{x}}$ de K solution du problème de minimisation* (3.53)*, i.e. tel que $f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \inf_K f$*

Remarque 3.32. *On peut remplacer $E = \mathbb{R}^n$ par E espace de Hilbert de dimension infinie dans le dernier théorème, mais on a besoin dans ce cas de l'hypothèse de convexité de f pour assurer l'existence de la solution (voir cours de maîtrise).*

Proposition 3.33 (Condition simple d'optimalité)**.** *Soient $E = \mathbb{R}^n$, $f \in C(E, \mathbb{R})$ et $\bar{\boldsymbol{x}} \in K$ tel que $f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \inf_K f$. On suppose que f est différentiable en $\bar{\boldsymbol{x}}$*

1. *Si $\bar{\boldsymbol{x}} \in \overset{\circ}{K}$ alors $\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0$.*
2. *Si K est convexe, alors $\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) \cdot (x - \bar{\boldsymbol{x}}) \geq 0$ pour tout $x \in K$.*

DÉMONSTRATION –
1. Si $\bar{\boldsymbol{x}} \in \overset{\circ}{K}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(\bar{\boldsymbol{x}}, \varepsilon) \subset K$ et $f(\bar{\boldsymbol{x}}) \leq f(x)\ \forall x \in B(\bar{\boldsymbol{x}}, \varepsilon)$. Alors on a déjà vu (voir preuve de la Proposition 3.8 page 209) que ceci implique $\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0$.
2. Soit $x \in K$. Comme $\bar{\boldsymbol{x}}$ réalise le minimum de f sur K, on a : $f(\bar{\boldsymbol{x}} + t(x - \bar{\boldsymbol{x}})) = f(tx + (1-t)\bar{\boldsymbol{x}}) \geq f(\bar{\boldsymbol{x}})$ pour tout $t \in]0, 1]$, par convexité de K. On en déduit que
$$\frac{f(\bar{\boldsymbol{x}} + t(x - \bar{\boldsymbol{x}})) - f(\bar{\boldsymbol{x}})}{t} \geq 0 \text{ pour tout } t \in]0, 1].$$
En passant à la limite lorsque t tend vers 0 dans cette dernière inégalité, on obtient : $\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) \cdot (x - \bar{\boldsymbol{x}}) \geq 0$.

∎

3.4.3 Conditions d'optimalité dans le cas de contraintes égalité

Dans tout ce paragraphe, on considèrera les hypothèses et notations suivantes :

$$\begin{aligned} &f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad g_i \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \ \ i = 1 \ldots p\,; \\ &K = \{u \in \mathbb{R}^n, \ \ g_i(u) = 0 \ \ \forall i = 1 \ldots p\}\,; \\ &g = (g_1, \ldots, g_p)^t \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \end{aligned} \tag{3.54}$$

Remarque 3.34 (Quelques rappels de calcul différentiel)**.**
Comme $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, si $u \in \mathbb{R}^n$, alors $Dg(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, ce qui revient à dire, en confondant l'application linéaire $Dg(u)$ avec sa matrice, que $Dg(u) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Par définition, $Im(Dg(u)) = \{Dg(u)z, \ \ z \in$

$\mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^p$, et rang$(Dg(u)) = \dim(Im(Dg(u))) \leq p$. On rappelle de plus que

$$Dg(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \ldots, & \ddots, & \ldots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

et que rang $(Dg(u)) \leq \min(n, p)$. De plus, si rang $(Dg(u)) = p$, alors les vecteurs $(Dg_i(u))_{i=1\ldots p}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 3.35 (Multiplicateurs de Lagrange)**.** *Soit $\bar{u} \in K$ tel que $f(\bar{u}) = \inf_K f$. On suppose que f est différentiable en $\bar{u}$ et $\dim(Im(Dg(\bar{u})) = p$ (ou rang $(Dg(\bar{u})) = p$), alors :*

$$\text{il existe } (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)^t \in \mathbb{R}^p \; telsque \nabla f(\bar{u}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(\bar{u}) = 0.$$

(Cette dernière égalité a lieu dans $\mathbb{R}^n$)

DÉMONSTRATION – Pour plus de clarté, donnons d'abord une idée "géométrique" de la démonstration dans le cas $n = 2$ et $p = 1$. On a dans ce cas $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 g(x, y) = 0\}$, et on cherche $u \in K$ tel que $f(u) = \inf_K f$. Traçons dans le repère (x, y) la courbe $g(x, y) = 0$, ainsi que les courbes de niveau de f. Si on se "promène" sur la courbe $g(x, y) = 0$, en partant du point P_0 vers la droite (voir figure 3.1), on rencontre les courbes de niveau successives de f et on se rend compte sur le dessin que la valeur minimale que prend f sur la courbe $g(x, y) = 0$ est atteinte lorsque cette courbe est tangente à la courbe de niveau de f : sur le dessin, ceci correspond au point P_1 où la courbe $g(x, y) = 0$ est tangente à la courbe $f(x, y) = 3$. Une fois qu'on a passé ce point de tangence, on peut remarquer que f augmente.
On utilise alors le fait que si φ est une fonction continûment différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, le gradient de φ est orthogonal à toute courbe de niveau de φ, c'est-à-dire toute courbe de la forme $\varphi(x, y) = c$, où $c \in \mathbb{R}$. (En effet, soit $(x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$ un paramétrage de la courbe $g(x, y) = c$, en dérivant par rapport à t, on obtient : $\nabla g(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t))^t = 0$). En appliquant ceci à f et g, on en déduit qu'au point de tangence entre une courbe de niveau de f et la courbe $g(x, y) = 0$, les gradients de f et g sont colinéaires. Et donc si $\nabla g(u) \neq 0$, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\nabla f(u) = \lambda \nabla g(u)$.

Passons maintenant à la démonstration rigoureuse du théorème dans laquelle on utilise le théorème des fonctions implicites [5].
Par hypothèse, $Dg(\bar{u}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $Im(Dg(\bar{u})) = \mathbb{R}^p$. Donc il existe un sous espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, tel que $Dg(\bar{u})$ soit bijective de F dans $\mathbb{R}^p$. En effet, soit $(e_1 \ldots e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$, alors pour tout $i \in \{1, \ldots p\}$, il existe $y_i \in \mathbb{R}^n$ tel que $Dg(\bar{x}) y_i = e_i$. Soit F le sous espace engendré par la famille $\{y_1 \ldots y_p\}$; on remarque que cette famille est libre, car si $\sum_{i=1}^p \lambda_i y_i = 0$, alors $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0$, et donc $\lambda_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots p$. On a ainsi montré l'existence d'un sous espace F de dimension p telle que $Dg(\bar{x})$ soit bijective (car surjective) de F dans $\mathbb{R}^p$.
Il existe un sous espace vectoriel G de $\mathbb{R}^n$, tel que $\mathbb{R}^n = F \bigoplus G$. Pour $v \in F$ et $w \in G$; on pose $\bar{g}(w, v) = g(v + w)$ et $\bar{f}(w, v) = f(v + w)$. On a donc $\bar{f} \in C(G \times F, \mathbb{R})$ et $\bar{g} \in C^1(G \times F, \mathbb{R})$. De plus, $D_2\bar{g}(w, v) \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R}^p)$, et pour tout $z \in F$, on a $D_2\bar{g}(w, v)z = Dg(v + w)z$.
Soit $(\bar{v}, \bar{w}) \in F \times G$ tel que $\bar{u} = \bar{v} + \bar{w}$. Alors $D_2\bar{g}(\bar{w}, \bar{v})z = Dg(\bar{u})z$ pour tout $z \in F$. L'application $D_2\bar{g}(\bar{w}, \bar{v})$ est une bijection de F sur $\mathbb{R}^p$, car, par définition de F, $Dg(\bar{u})$ est bijective de F sur $\mathbb{R}^p$.
On rappelle que $K = \{u \in \mathbb{R}^n : g(u) = 0\}$ et on définit $\overline{K} = \{(w, v) \in G \times F, \; \bar{g}(w, v) = 0\}$. Par définition de $\bar{f}$ et de $\bar{g}$, on a

$$\begin{cases} (\bar{w}, \bar{v}) \in \overline{K} \\ \bar{f}(\bar{w}, \bar{v}) \leq f(w, v) \;\; \forall (w, v) \in \overline{K} \end{cases} \tag{3.55}$$

5. **Théorème des fonctions implicites** Soient p et q des entiers naturels, soit $h \in C^1(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$, et soient $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$ et $c \in \mathbb{R}^p$ tels que $h(\bar{x}, \bar{y}) = c$. On suppose que la matrice de la différentielle $D_2 h(\bar{x}, \bar{y}) (\in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}))$ est inversible. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $\nu > 0$ tels que pour tout $x \in B(\bar{x}, \varepsilon)$, il existe un unique $y \in B(\bar{y}, \nu)$ tel que $h(x, y) = c$. on peut ainsi définir une application ϕ de $B(\bar{x}, \varepsilon)$ dans $B(\bar{y}, \nu)$ par $\phi(x) = y$. On a $\phi(\bar{x}) = \bar{y}$, $\phi \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ et $D\phi(x) = -[D_2 h(x, \phi(x))]^{-1} \cdot D_1 h(x, \phi(x))$.

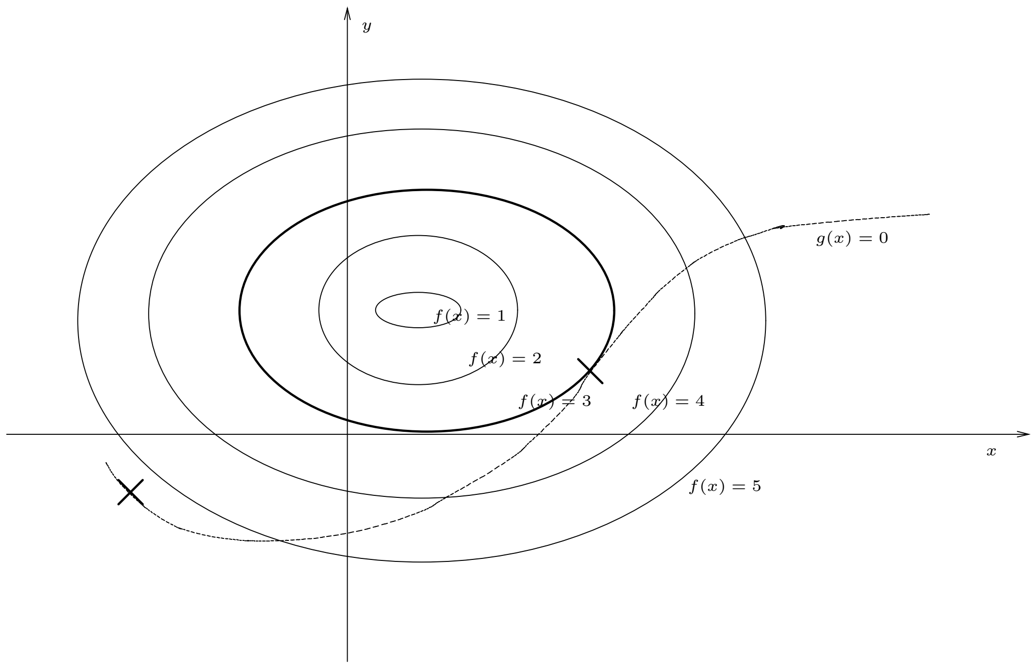

FIGURE 3.1: Interprétation géométrique des multiplicateurs de Lagrange

D'autre part, le théorème des fonctions implicites (voir note de bas de page 260) entraîne l'existence de $\varepsilon > 0$ et $\nu > 0$ tels que pour tout $w \in B_G(\bar{w}, \varepsilon)$ il existe un unique $v \in B_F(\bar{v}, \nu)$ tel que $\bar{g}(w, v) = 0$. On note $v = \phi(w)$ et on définit ainsi une application $\phi \in C^1(B_G(\bar{w}, \varepsilon), B_F(\bar{v}, \nu))$.
On déduit alors de (3.55) que :

$$\bar{f}(\bar{w}, \phi(\bar{w})) \leq \bar{f}(w, \phi(w))), \forall w \in B_G(\bar{w}, \varepsilon),$$

et donc

$$f(\bar{u}) = f(\bar{w} + \phi(\bar{w})) \leq f(w + \phi(w)), \forall w \in B_G(\bar{w}, \varepsilon).$$

En posant $\psi(w) = \bar{f}(w, \phi(w))$, on peut donc écrire

$$\psi(\bar{w}) = \bar{f}(\bar{w}, \phi(\bar{w})) \leq \psi(w), \forall w \in B_G(\bar{w}, \varepsilon).$$

On a donc, grâce à la proposition 3.33,

$$D\psi(\bar{w}) = 0. \tag{3.56}$$

Par définition de ψ, de $\bar{f}$ et de $\bar{g}$, on a :

$$D\psi(\bar{w}) = D_1\bar{f}(\bar{w}, \phi((\bar{w})) + D_2\bar{f}(\bar{w}, \phi(\bar{w}))D\phi(\bar{w}).$$

D'après le théorème des fonctions implicites,

$$D\phi(\bar{w}) = -[D_2\bar{g}(\bar{w}, \phi((\bar{w}))]^{-1} D_1\bar{g}(\bar{w}, \phi((\bar{w})).$$

On déduit donc de (3.56) que

$$D_1\bar{f}(\bar{w}, \phi((\bar{w}))w - [D_2\bar{g}(\bar{w}, \phi((\bar{w}))]^{-1} D_1\bar{g}(\bar{w}, \phi((\bar{w}))w = 0, \text{ pour tout } w \in G. \tag{3.57}$$

De plus, comme $D_2\bar{g}(\bar{w}, \phi((\bar{w}))]^{-1} D_2\bar{g}(\bar{w}, \phi((\bar{w})) = Id$, on a :

$$D_2\bar{f}(\bar{w}, \phi((\bar{w}))z - D_2\bar{f}(\bar{w}, \phi((\bar{w}))\,[D_2\bar{g}(\bar{w}, \phi((\bar{w}))]^{-1}\,D_2\bar{g}(\bar{w}, \phi((\bar{w}))z = 0, \forall z \in F. \tag{3.58}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, et $(z, w) \in F \times G$ tel que $x = z + w$. En additionant (3.57) et (3.58), et en notant

$$\Lambda = -D_2\bar{f}(\bar{w}, \phi((\bar{w}))\,[D_2\bar{g}(\bar{w}, \phi((\bar{w}))]^{-1},$$

on obtient :

$$Df(\bar{u})x + \Lambda Dg(\bar{u})x = 0,$$

ce qui donne, en transposant : $Df(\bar{u}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(\bar{u}) = 0$, avec $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$.

■

Remarque 3.36 (Utilisation pratique du théorème de Lagrange)**.** *Soit* $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$*,* $g = (g_1, \ldots, g_p)^t$ *avec* $g_i \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *pour* $i = 1, \ldots, p.$*, et soit* $K = \{u \in \mathbb{R}^n, \quad g_i(u) = 0, \quad i = 1, \ldots, p\}$.
Le problème qu'on cherche à résoudre est le problème de minimisation (3.53) *qu'on rappelle ici :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} \in K \\ f(\bar{u}) = \inf_K f \end{array} \right.$$

D'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange, si $\bar{u}$ *est solution de* (3.53) *et* $Im(Dg(\bar{u})) = \mathbb{R}^p$*, alors il existe* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ *tel que* $\bar{u}$ *est solution du problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{u}) + \displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, j = 1, \ldots n, \\ g_i(\bar{u}) = 0, \quad i = 1, \ldots, p. \end{array} \right. \tag{3.59}$$

Le système (3.59) *est un système non linéaire de de* $(n+p)$ *équations et à* $(n+p)$ *inconnues* $(\bar{x}, \ldots, \bar{x}_n, \lambda_i \ldots \lambda_p)$*. Ce système sera résolu par une méthode de résolution de système non linéaire (Newton par exemple).*

Remarque 3.37. *On vient de montrer que si* $\bar{x}$ *solution de* (3.53) *et* $Im(Dg(\bar{x})) = \mathbb{R}^p$*, alors* $\bar{x}$ *solution de* (3.59)*. Par contre, si* $\bar{x}$ *est solution de* (3.59)*, ceci n'entraîne pas que* $\bar{x}$ *est solution de* (3.53)*.*

Des exemples d'application du théorème des multiplicateurs de Lagrange sont donnés dans les exercices 118 page 263 et 119 page 263.

3.4.4 Contraintes inégalités

Soit $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \quad i = 1, \ldots, p$, on considère maintenant un ensemble K de la forme : $K = \{x \in \mathbb{R}^n, \ g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1 \ldots p\}$, et on cherche à résoudre le problème de minimisation (3.53) qui sécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} \in K \\ f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in K. \end{array} \right.$$

Remarque 3.38. *Soit* $\bar{x}$ *une solution de* (3.53) *et supposons que* $g_i(\bar{x}) < 0$*, pour tout* $i \in \{1, \ldots, p\}$*. Il existe alors* $\varepsilon > 0$ *tel que si* $x \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ *alors* $g_i(x) < 0$ *pour tout* $i = 1, \ldots, p$*.*
On a donc $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in B(\bar{x}, \varepsilon)$*. On est alors ramené à un problème de minimisation sans contrainte, et si* $i\ f$ *est différentiable en* $\bar{x}$*, on a donc* $\nabla f(\bar{x}) = 0$*.*

On donne maintenant sans démonstration le théorème de Kuhn-Tücker qui donne une caractérisation de la solution du problème (3.53).

Théorème 3.39 (Kuhn–Tucker)**.** *Soit* $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$*, soit* $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$*, pour* $i = 1, \ldots, p$*, et soit* $K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0 \ \forall i = 1 \ldots p\}$*. On suppose qu'il existe* $\bar{x}$ *solution de* (3.53)*, et on pose* $I(\bar{\boldsymbol{x}}) = \{i \in \{1, \ldots, p\}; |g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0\}$*. On suppose que* f *est différentiable en* $\bar{\boldsymbol{x}}$ *et que la famille (de* $\mathbb{R}^n$*)* $\{\nabla g_i(\bar{\boldsymbol{x}}), i \in I(\bar{\boldsymbol{x}})\}$ *est libre. Alors il existe une famille* $(\lambda_i)_{i \in I(\bar{\boldsymbol{x}})} \subset \mathbb{R}_+$ *telle que*

$$\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i \in I(\bar{\boldsymbol{x}})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0.$$

Remarque 3.40. *1. Le théorème de Kuhn-Tucker s'applique pour des ensembles de contrainte de type inégalité. Si on a une contraite de type égalité, on peut évidemment se ramener à deux contraintes de type inégalité en remarquant que* $\{h(x) = 0\} = \{h(x) \leq)\} \cap \{-h(x) \leq 0\}$*. Cependant, si on pose* $g_1 = h$ *et* $g_2 = -h$*, on remarque que la famille* $\{\nabla g_1(\bar{x}), \nabla g_2(\bar{x})\} = \{\nabla h(\bar{x}), -\nabla h(\bar{x})\}$ *n'est pas libre. On ne peut donc pas appliquer le théorème de Kuhn-Tucker sous la forme donnée précédemment dans ce cas (mais on peut il existe des versions du théorème de Kuhn-Tucker permettant de traiter ce cas, voir Bonans-Saguez).*

2. *Dans la pratique, on a intérêt à écrire la conclusion du théorème de Kuhn-Tucker (i.e. l'existence de la famille $(\lambda_i)_{i\in I(\bar x)}$) sous la forme du système de $n+p$ équations et $2p$ inéquations à résoudre suivant :*

$$\begin{cases} \nabla f(\bar x) + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(\bar x) = 0, \\ \lambda_i g_i(\bar x) = 0, \quad \forall i = 1,\dots,p, \\ g_i(\bar x) \le 0, \quad \forall i = 1,\dots,p, \\ \lambda_i \ge 0, \quad \forall i = 1,\dots,p. \end{cases}$$

$\underset{\lambda_i \ge 0}{i = 1 \dots p} \quad g_i(\bar x) \le 0 \quad i = 1 \dots p$

3.4.5 Exercices

Exercice 117 (Sur l'existence et l'unicité)**.** *Corrigé en page 265*

Etudier l'existence et l'unicité des solutions du problème (3.53), avec les données suivantes : $E = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x^2$, et pour les quatre différents ensembles K suivants :

$$\begin{array}{llll} (i) & K = \{|x| \le 1\}\ ; & (ii) & K = \{|x| = 1\} \\ (iii) & K = \{|x| \ge 1\}\ ; & (iv) & K = \{|x| > 1\}. \end{array} \tag{3.60}$$

Exercice 118 (Aire maximale d'un rectangle à périmètre donné)**.**
Corrigé en page 265

1. On cherche à maximiser l'aire d'un rectangle de périmètre donné égal à 2. Montrer que ce problème peut se formuler comme un problème de minimisation de la forme (3.53), où K est de la forme $K = \{x \in \mathbb{R}^2; g(x) = 0\}$. On donnera f et g de manière explicite.

2. Montrer que le problème de minimisation ainsi obtenu est équivalent au problème

$$\begin{cases} \bar x = (\bar x_1, \bar x_2)^t \in \tilde K \\ f(\bar x_1, \bar x_2) \le f(x_1, x_2), \quad \forall\, (x_1, x_2)^t \in \tilde K, \end{cases} \tag{3.61}$$

où $\tilde K = K \cap [0,1]^2$, K et f étant obtenus à la question 1. En déduire que le problème de minimisation de l'aire admet au moins une solution.
3. Calculer $Dg(x)$ pour $x \in K$ et en déduire que si x est solution de (3.61) alors $x = (1/2, 1/2)$. En déduire que le problème (3.61) admet une unique solution donnée par $\bar x = (1/2, 1/2)$.

Exercice 119 (Fonctionnelle quadratique)**.** *Suggestions en page 241, corrigé en page 266*

Soit f une fonction quadratique, *i.e.* $f(x) = \dfrac{1}{2} Ax \cdot x - b \cdot x$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. On suppose que la contrainte g est une fonction linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $g(x) = d \cdot x - c$ où $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}^n$, et que $d \ne 0$. On pose $K = \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = 0\}$ et on cherche à résoudre le problème de minimisation (3.53).

1. Montrer que l'ensemble K est non vide, fermé et convexe. En déduire que le problème (3.53) admet une unique solution.

2. Montrer que si $\bar x$ est solution de (3.53), alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = (\bar x, \lambda)^t$ soit l'unique solution du système :

$$\left[\begin{array}{c|c} A & d \\ \hline d^t & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \bar x \\ \hline \lambda \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b \\ \hline c \end{array}\right] \tag{3.62}$$

Exercice 120 (Minimisation sans dérivabilité)**.**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice s.d.p., $b \in \mathbb{R}^n$, $j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe, à valeurs positives ou nulles (mais non nécessairement dérivable, par exemple $j(v) = \sum_{j=1}^n \alpha_i |v_i|$, avec $\alpha_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$). Soit U une partie non vide, fermée convexe de $\mathbb{R}^n$. Pour $v \in \mathbb{R}^n$, on pose $J(v) = (1/2)Av \cdot v - b \cdot v + j(v)$.

1. Montrer qu'il existe un et un seul u tel que :
$$u \in U,\ J(u) \leq J(v),\ \forall v \in U. \tag{3.63}$$
2. Soit $u \in U$, montrer que u est solution de (3.63) si et seulement si $(Au - b) \cdot (v - u) + j(v) - j(u) \geq 0$, pour tout $v \in U$.

Exercice 121 (Utilisation du théorème de Lagrange)**.**

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x, y) = -y$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Chercher le(s) point(s) où f atteint son maximum ou son minimum sous la contrainte $g = 0$.
2. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose : $f(x) = \sum_{i=1}^n |x_i - a_i|^2$, $g(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$. Chercher le(s) point(s) où f atteint son maximum ou son minimum sous la contrainte $g = 1$.
3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s.d.p. et $b \in \mathbb{R}^n$. Pour $v \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(v) = (1/2)Av \cdot v - b \cdot v$ et $g(v) = Bv \cdot v$. Peut-on appliquer le théorème de Lagrange et quelle condition donne-t-il sur u si $f(u) = \min\{f(v), v \in K\}$ avec $K = \{v \in \mathbb{R}^n; g(v) = 1\}$?

Exercice 122 (Contre exemple aux multiplicateurs de Lagrange)**.**

Soient f et g : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définies par : $f(x, y) = y$, et $g(x, y) = y^3 - x^2$. On pose $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; g(x, y) = 0\}$.

1. Calculer le minimum de f sur K et le point $(\overline{x}, \overline{y})$ où ce minimum est atteint.
2. Existe-t-il λ tel que $Df(\overline{x}, \overline{y}) = \lambda Dg(\overline{x}, \overline{y})$?
3. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème des multiplicateurs de Lagrange ?
4. Que trouve-t-on lorsqu'on applique la méthode dite "de Lagrange" pour trouver $(\overline{x}, \overline{y})$?

Exercice 123 (Application simple du théorème de Kuhn-Tucker)**.** *Corrigé en page 266*

Soit f la fonction définie de $E = \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + y^2$ et $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y \geq 1\}$. Justifier l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.53) et appliquer le théorème de Kuhn-Tucker pour la détermination de cette solution.

Exercice 124 (Exemple d'opérateur de projection)**.**

Correction en page 267
1.Soit $K = C^+ = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \ldots, x_k)^t,\ x_i \geq 0,\ \forall i = 1, \ldots, N\}$.

(a) Montrer que K est un convexe fermé non vide.

(b) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a : $(p_K(y))_i = \max(y_i, 0)$.

2. Soit $(\alpha_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}^n$ et $(\beta_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}^n$ tels que $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Soit $K = \{x = (x_1, \ldots, x_n)^t; \alpha_i \leq \beta_i, i = 1, \ldots, n\}$.

1. Montrer que K est un convexe fermé non vide.

2. Soit p_K l'opérateur de projection définie à la proposition 3.41 page 267. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a :
$$(p_K(y))_i = \max(\alpha_i, \min(y_i, \beta_i)),\quad \forall i = 1, \ldots, n$$

3.5 Algorithmes d'optimisation sous contraintes

3.5.1 Méthodes de gradient avec projection

On rappelle le résultat suivant de projection sur un convexe fermé :

Proposition 3.41 (Projection sur un convexe fermé). *Soit E un espace de Hilbert, muni d'une norme $\|.\|$ induite par un produit scalaire $(.,.)$, et soit K un convexe fermé non vide de E. Alors, tout $x \in E$, il existe un unique $x_0 \in K$ tel que $\|x - x_0\| \leq \|x - y\|$ pour tout $y \in K$. On note $x_0 = p_K(x)$ la projection orthogonale de x sur K. On a également :*

$$x_0 = p_K(x) \textit{ si et seulement si } (x - x_0, x_0 - y) \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Dans le cadre des algorithmes de minimisation avec contraintes que nous allons développer maintenant, nous considèrerons $E = \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une fonction convexe, et K fermé convexe non vide. On cherche à calculer une solution approchée de $\bar{x}$, solution du problème (3.53).

Algorithme du gradient à pas fixe avec projection sur K (GPFK) Soit $\rho > 0$ donné, on considère l'algorithme suivant :
Algorithme (GPFK)
  Initialisation : $x_0 \in K$
  Itération :
    x_k connu $\qquad x_{k+1} = p_K(x_k - \rho \nabla f(x_k))$
où p_K est la projection sur K définie par la proposition 3.41.

Lemme 3.42. *Soit $(x_k)_k$ construite par l'algorithme (GPFK). On suppose que $x_k \to x$ quand $n + \infty$. Alors x est solution de* (3.53).

DÉMONSTRATION – Soit $p_K : \mathbb{R}^n \to K \subset \mathbb{R}^n$ la projection sur K définie par la proposition 3.41. Alors p_K est continue. Donc si
$x_k \to x$ quand $n \to +\infty$ alors $x = p_K(x - \rho \nabla f(x))$ et $x \in K$ (car $x_k \in K$ et K est fermé).
La caractérisation de $p_K(x - \rho \nabla f(x))$ donnée dans la proposition 3.41 donne alors :
$(x - \rho \nabla f(x) - x / x - y) \geq 0$ pour tout $y \in K$, et comme $\rho > 0$, ceci entraîne $(\nabla f(x) / x - y)$ pour tout $y \in K$. Or f est convexe donc $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y - x)$ pour tout $y \in K$, et donc $f(y) \geq f(x)$ pour tout $y \in K$, ce qui termine la démonstration.

■

Théorème 3.43 (Convergence de l'algorithme GPFK).
Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, et K convexe fermé non vide. On suppose que :

1. *il existe $\alpha > 0$ tel que $(\nabla f(x) - \nabla f(y) | x - y) \geq \alpha |x - y|^2$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,*
2. *il existe $M > 0$ tel que $|\nabla f(x) - \nabla f(y)| \leq M|x - y|$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,*

alors :

1. *il existe un unique élément $\bar{x} \in K$ solution de* (3.53),
2. *si $0 < \rho < \dfrac{2\alpha}{M^2}$, la suite (x_k) définie par l'algorithme $(GPFK)$ converge vers $\bar{x}$ lorsque $n \to +\infty$.*

DÉMONSTRATION –

1. La condition 1. donne que f est strictement convexe et que $f(x) \to +\infty$ quand $|x| \to +\infty$. Comme K est convexe fermé non vide, il existe donc un unique $\bar{x}$ solution de (3.53).
2. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $h(x) = p_K(x - \rho\nabla f(x))$. On a donc $x_{k+1} = h(x_k)$. Pour montrer que la suite $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il suffit donc de montrer que h est strictement contractante dès que
$$0 < \rho < \frac{2\alpha}{M^2}. \tag{3.66}$$

Grâce au lemme 3.44 démontré plus loin, on sait que p_K est contractante. Or h est définie par :
$$h(x) = p_K(\bar{h}(x)) \quad \text{où } \bar{h}(x) = x - \rho\nabla f(x).$$
On a déjà vu que $\bar{h}$ est strictement contractante si la condition (3.66) est vérifiée (voir théorème 3.20 page 221), et plus précisément :
$$|\bar{h}(x) - \bar{h}(y)| \leq (1 - 2\alpha\rho + M^2\rho^2)|x - y|^2.$$
On en déduit que :
$$|h(x) - h(y)|^2 \leq |p_K(\bar{h}(x)) - p_K(\bar{h}(y))|^2 \leq |\bar{h}(x) - \bar{h}(y))|^2 \leq (1 - 2\alpha\rho + \rho^2 M^2)|x - y|^2.$$
L'application h est donc strictement contractante dès que $0 < \frac{2\alpha}{M^2}$. La suite $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc bien vers $x = \bar{x}$ ■

Lemme 3.44 (Propriété de contraction de la projection orthogonale)**.** *Soit E un espace de Hilbert, $\|\cdot\|$ la norme et $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire, K un convexe fermé non vide de E et p_K la projection orthogonale sur K définie par la proposition 3.41, alors $\|p_K(x) - p_K(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in E^2$.*

DÉMONSTRATION – Comme E est un espace de Hilbert,
$$\|p_K(x) - p_K(y)\|^2 = (p_K(x) - p_K(y)|p_K(x) - p_K(y)).$$
On a donc
$$\begin{aligned}\|p_K(x) - p_K(y)\|^2 = & \ (p_K(x) - x + x - y + y - p_K(y)|p_K(x) - p_K(y)) \\ = & \ (p_K(x) - x|p_K(x) - p_K(y))_E + (x - y|p_K(x) - p_K(y)) + \\ & \ (y - p_K(y)|p_K(x) - p_K(y)).\end{aligned}$$
Or $(p_K(x) - x|p_K(x) - p_K(y)) \geq 0$ et $(y - p_K(y)|p_K(x) - p_K(y))$, d'où :
$$\|p_K(x) - p_K(y)\| \leq (x - y|p_K(x) - p_K(y)),$$
et donc, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\|p_K(x) - p_K(y)\| \leq \|x - y\| \, \|p_K(x) - p_K(y)\| \leq \|x - y\|.$$
■

Algorithme du gradient à pas optimal avec projection sur K (GPOK)
L'algorithme du gradient à pas optimal avec projection sur K s'écrit :

Initialisation	$x_0 \in K$
Itération	x_k connu
	$w_k = -\nabla f(x_k)$; calculer α_k optimal dans la direction w_k
	$x_{k+1} = p_K(x_k + \alpha_k \boldsymbol{w}^{(k)})$

La démonstration de convergence de cet algorithme se déduit de celle de l'algorithme à pas fixe.

Remarque 3.45. *On pourrait aussi utiliser un algorithme de type Quasi–Newton avec projection sur K.*

Les algorithmes de projection sont simples à décrire, mais ils soulèvent deux questions :

1. Comment calcule-t-on p_K ?
2. Que faire si K n'est pas convexe ?

On peut donner une réponse à la première question dans les cas simples :

1er cas On suppose ici que $K = C^+ = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \ldots, x_k)^t\ x_i \geq 0\ \forall i\}$.

Si $y \in \mathbb{R}^n\ y = (y_+1 \ldots y_n)^t$, on peut montrer (exercice 3.4.5 page 264) que

$$(p_K(y))_i = y_i^+ = \max(y_i, 0), \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

2ème cas Soit $(\alpha_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}^n$ et $(\beta_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}^n$ tels que $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Si

$$K = \prod_{i=1,n} [\alpha_i, \beta_i],$$

alors

$$(p_K(y))_i = \max(\alpha_i, \min(y_i, \beta_i)), \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Dans le cas d'un convexe K plus “compliqué”, ou dans le cas où K n'est pas convexe, on peut utiliser des méthodes de dualité introduites dans le paragraphe suivant.

3.5.2 Méthodes de dualité

Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$\left\{\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \\ g_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \\ K = \{x \in \mathbb{R}^n,\ g_i(x) \leq 0\ i = 1, \ldots, p\}, \text{ et } K \text{ est non vide.} \end{array}\right. \tag{3.67}$$

On définit un problème “primal" comme étant le problème de minimisation d'origine, c'est–à–dire

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{x} \in K, \\ f(\bar{x}) \leq f(x), \text{ pour tout } x \in K, \end{array}\right. \tag{3.68}$$

On définit le “lagrangien" comme étant la fonction L définie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x), \tag{3.69}$$

avec $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_p(x))^t$ et $\lambda = (\lambda_1(x), \ldots, \lambda_p(x))^t$.
On note C^+ l'ensemble défini par

$$C^+ = \{\lambda \in \mathbb{R}^p,\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)^t, \lambda_i \geq 0 \text{ pour tout } i = 1, \ldots, p\}.$$

Remarque 3.46. *Le théorème de Kuhn-Tucker entraîne que si $\bar{x}$ est solution du problème primal* (3.68) *alors il existe $\lambda \in C^+$ tel que $D_1 L(\bar{x}, \lambda) = 0$ (c'est–à–dire $Df(\bar{x}) + \lambda \cdot Dg(\bar{x}) = 0$) et $\lambda \cdot g(\bar{x}) = 0$.*

On définit alors l'application M de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$M(\lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda), \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^p. \tag{3.70}$$

On peut donc remarquer que $M(\lambda)$ réalise le minimum (en x) du problème sans contrainte, qui s'écrit, pour $\lambda \in \mathbb{R}^p$ fixé :

$$\left\{\begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ L(x, \lambda) \leq L(y, \lambda) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n, \end{array}\right. \tag{3.71}$$

Lemme 3.47. *L'application M de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ définie par* (3.70) *est concave (ou encore l'application -M est convexe), c'est–à–dire que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^p$ et pour tout $t \in]0,1[$ on a $M(t\lambda + (1-t)\mu) \geq tM(\lambda) + (1-t)\mathcal{M}(u)$*

DÉMONSTRATION – Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^p$ et $t \in]0,1[$; on veut montrer que $M(t\lambda + (1-t)\mu) \geq tM(\lambda) + (1-t)M(\mu)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\begin{aligned} L(x, t\lambda + (1-t)\mu) &= f(x) + (t\lambda + (1-t)\mu)g(x) \\ &= tf(x) + (1-t)f(x) + (t\lambda + (1-t)\mu)g(x). \end{aligned}$$

On a donc $L(x, t\lambda + (1-t)\mu) = tL(x,\lambda) + (1-t)L(x,\mu)$. Par définition de M, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$L(x, t\lambda + (1-t)\mu) \geq tM(\lambda) + (1-t)M(\mu)$$

Or, toujours par définition de M,

$$M(t\lambda + (1-t)\mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, t\lambda + (1-t)\mu) \geq tM(\lambda) + (1-t)M(\mu).$$

■

On considère maintenant le problème d'optimisation dit "dual" suivant :

$$\begin{cases} \mu \in C^+, \\ M(\mu) \geq M(\lambda) \quad \forall \lambda \in C^+. \end{cases} \tag{3.72}$$

Définition 3.48. *Soit $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $(x,\mu) \in \mathbb{R}^n \times C^+$. On dit que (x,μ) est un point selle de L sur $\mathbb{R}^n \times C^+$ si*

$$L(x,\lambda) \leq L(x,\mu) \leq L(y,\mu) \text{ pour tout } y \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } \lambda \in C^+.$$

Proposition 3.49. *Sous les hypothèses* (3.67)*, soit L définie par $L(x,\lambda) = f(x) + \lambda g(x)$ et $(x,\mu) \in \mathbb{R}^n \times C^+$ un point selle de L sur $\mathbb{R}^n \times C^+$.*
alors

1. *$\bar{x}$ est solution du problème* (3.68)*,*
2. *μ est solution de* (3.72)*,*
3. *$\bar{x}$ est solution du problème* (3.71) *avec $\lambda = \mu$.*

On admettra cette proposition.

Réciproquement, on peut montrer que (sous des hypothèses convenables sur f et g), si μ est solution de (3.72), et si $\bar{x}$ solution de (3.71) avec $\lambda = \mu$, alors $(\bar{x}, \mu)$ est un point selle de L, et donc $\bar{x}$ est solution de (3.68).

De ces résultats découle l'idée de base des méthodes de dualité : on cherche μ solution de (3.72). On obtient ensuite une solution $\bar{x}$ du problème (3.68), en cherchant $\bar{x}$ comme solution du problème (3.71) avec $\lambda = \mu$ (qui est un problème de minimisation sans contraintes). La recherche de la solution μ du problème dual (3.72) peut se faire par exemple par l'algorithme très classique d'Uzawa, que nous décrivons maintenant.

Algorithme d'Uzawa L'algorithme d'Uzawa consiste à utiliser l'algorithme du gradient à pas fixe avec projection (qu'on a appelé "GPFK", voir page 267) pour résoudre de manière itérative le problème dual (3.72). On cherche donc $\mu \in C^+$ tel que $M(\mu) \geq M(\lambda)$ pour tout $\lambda \in C^+$. On se donne $\rho > 0$, et on note p_{C^+} la projection sur le convexe C^+ (voir proposition 3.41 page 267). L'algorithme (GPFK) pour la recherche de μ s'écrit donc :

Initialisation : $\mu_0 \in C_+$
Itération : $\mu_{k+1} = p_{C_+}(\mu_k + \rho \nabla M(\mu_k))$

Pour définir complètement l'algorithme d'Uzawa, il reste à préciser les points suivants :

1. Calcul de $\nabla M(\mu_k)$,
2. calcul de $p_{C^+}(\lambda)$ pour λ dans $\mathbb{R}^n$.

On peut également s'intéresser aux propriétés de convergence de l'algorithme.

La réponse au point 2 est simple (voir exercice 3.4.5 page 264) : pour $\lambda \in \mathbb{R}^n$, on calcule $p_{C_+}(\lambda) = \gamma$ avec $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p)^t$ en posant $\gamma_i = \max(0, \lambda_i)$ pour $i = 1, \ldots, p$, où $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)^t$.

La réponse au point 1. est une conséquence de la proposition suivante (qu'on admettra ici) :

Proposition 3.50. *Sous les hypothèses* (3.67)*, on suppose que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$, le problème* (3.71) *admet une solution unique, notée x_λ et on suppose que l'application définie de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ par $\lambda \mapsto x_\lambda$ est différentiable. Alors $M(\lambda) = L(x_\lambda, \lambda)$, M est différentiable en λ pour tout λ, et $\nabla M(\lambda) = g(x_\lambda)$.*

En conséquence, pour calculer $\nabla M(\lambda)$, on est ramené à chercher x_λ solution du problème de minimisation sans contrainte (3.71). On peut dont maintenant donner le détail de l'itération générale de l'algorithme d'Uzawa :

Itération de l'algorithme d'Uzawa. Soit $\mu_k \in C^+$ connu ;

1. On cherche $x_k \in \mathbb{R}^n$ solution de $\begin{cases} x_k \in \mathbb{R}^n, \\ L(x_k, \mu_k) \leq L(x, \mu_k), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ (On a donc $x_k = x_{\mu_n}$)
2. On calcule $\nabla M(\mu_k) = g(x_k)$
3. $\overline{\mu}_{k+1} = \mu_k + \rho \nabla M(\mu_k) = \mu_k + \rho g(x_k) = ((\overline{\mu}_{k+1})_1, \ldots, (\overline{\mu}_{k+1})_p)^t$
4. $\mu_{k+1} = p_{C^+}(\overline{\mu}_{k+1})$, c'est–à-dire $\mu_{k+1} = ((\mu_{k+1})_1, \ldots, (\mu_{k+1})_p)^t$ avec $(\mu_{k+1})_i = \max(0, (\overline{\mu}_{k+1})_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, p$.

On a alors le résultat suivant de convergence de l'algorithme :

Proposition 3.51 (Convergence de l'algorithme d'Uzawa)**.** *Sous les hypothèses* (3.67)*, on suppose de plus que :*

1. *il existe $\alpha > 0$ tel que $(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x - y) \geq \alpha |x - y|^2$ pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$,*
2. *il existe $M_f > 0$ $|\nabla f(x) - \nabla f(y)| \leq M_f |x - y|$ pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$,*
3. *pour tout $\lambda \in C^+$, il existe un unique $x_\lambda \in \mathbb{R}^n$ tel que $L(x_\lambda, \lambda) \leq L(x, \lambda)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

Alors si $0 < \rho < \dfrac{2\alpha}{{M_f}^2}$, la suite $((x_k, \mu_k))_k \in \mathbb{R}^n \times C^+$ donnée par l'algorithme d'Uzawa vérifie :

1. *$x_k \to \bar{x}$ quand $n \to +\infty$, où $\bar{x}$ est la solution du problème* (3.68)*,*
2. *$(\mu_k)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.*

Remarque 3.52 (Sur l'algorithme d'Uzawa)**.**

1. *L'algorithme est très efficace si les contraintes sont affines : (i.e. si $g_i(x) = \alpha_i \cdot x + \beta_i$ pour tout $i = 1, \ldots, p$, avec $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$ et $\beta_i \in \mathbb{R}$).*
2. *Pour avoir l'hypothèse 3 du théorème, il suffit que les fonctions g_i soient convexes. (On a dans ce cas existence et unicité de la solution x_λ du problème* (3.71) *et existence et unicité de la solution $\bar{x}$ du problème* (3.68)*.)*

3.5.3 Exercices

Exercice 125 (Méthode de pénalisation)**.**

Soit f une fonction continue et strictement convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, satisfaisant de plus :

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Soit K un sous ensemble non vide, convexe (c'est–à–dire tel que $\forall (x, y) \in K^2$, $tx + (1-t)y \in K$, $\forall t \in]0, 1[$), et fermé de $\mathbb{R}^n$. Soit ψ une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $[0, +\infty[$ telle que $\psi(x) = 0$ si et seulement si $x \in K$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_k par $f_k(x) = f(x) + n\psi(x)$.

1. Montrer qu'il existe au moins un élément $\bar{x}_k \in \mathbb{R}^n$ tel que $f_k(\bar{x}_k) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f_k(x)$, et qu'il existe un unique élément $\bar{x}_K \in K$ tel que $f(\bar{x}_K) = \inf_{x\in K} f(x)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f(\bar{x}_n) \leq f_k(\bar{x}_n) \leq f(\bar{x}_K).$$
3. En déduire qu'il existe une sous-suite $(\bar{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $y \in K$ tels que $\bar{x}_{n_k} \to y$ lorsque $k \to +\infty$.
4. Montrer que $y = \bar{x}_K$. En déduire que toute la suite $(\bar{x}_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}_K$.
5. Déduire de ces questions un algorithme (dit "de pénalisation") de résolution du problème de minimisation suivant :
$$\begin{cases} \text{Trouver } \bar{x}_K \in K; \\ f(\bar{x}_K) \leq f(x), \forall x \in K, \end{cases}$$
en donnant un exemple de fonction ψ.

Exercice 126 (Méthode de relaxation avec Newton problèmes sous contrainte)**.**

On considère le problème :
$$\begin{cases} \overline{x} \in K, \\ f(\overline{x}) \leq f(x), \forall x \in K, \end{cases} \tag{3.73}$$
où $K \subset \mathbb{R}^n$.

(a) On prend ici $K = \prod_{i=1,n}[a_i, b_i]$, où $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $a_i \leq b_i$. On considère l'algorithme suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Initialisation :} & x^{(0)} \in E, \\ \text{Itération } n : & x^{(k)} \text{ connu, } (n \geq 0) \\ & \text{Calculer } x_1^{(k+1)} \in [a_1, b_1] \text{ tel que :} \\ & f(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \leq f(\xi, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}), \text{ pour tout } \xi \in [a_1, b_1], \\ & \text{Calculer } x_2^{(k+1)} \in [a_2, b_2] \text{ tel que :} \\ & f(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \leq f(x_1^{(k+1)}, \xi, x_3^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}), \\ & \qquad \text{pour tout } \xi \in [a_2, b_2], \\ & \qquad\qquad \ldots \\ & \text{Calculer } x_k^{(k+1)} \in [a_k, b_k], \text{ tel que :} \\ & f(x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{k-1}^{(k+1)}, x_k^{(k+1)}, x_{(k+1)}^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \\ & \qquad \leq f(x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{k-1}^{(k+1)}, \xi, x_{(k+1)}^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}), \text{ pour tout } \xi \in [a_k, b_k], \\ & \qquad\qquad \ldots \\ & \text{Calculer } x_n^{(k+1)} \in [a_n, b_n] \text{ tel que :} \\ & f(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k+1)}) \leq f(x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{n-1}^{(k+1)}, \xi), \\ & \qquad \text{pour tout } \xi \in [a_n, b_n]. \end{array}\right. \tag{3.74}$$

Montrer que la suite $x^{(k)}$ construite par l'algorithme (3.74) est bien définie et converge vers $\overline{x}$ lorsque n tend vers $+\infty$, où $\overline{x} \in K$ est tel que $f(\overline{x}) \leq f(x)$ pour tout $x \in K$.

(b) On prend maintenant $n = 2$, f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x_1^2 + x_2^2$, et $K = \{(x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2; x_1 + x_2 \geq 2\}$. Montrer qu'il existe un unique élément $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)^t$ de K tel que $f(\overline{x}) = \inf_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$. Déterminer $\overline{x}$.

On considère l'algorithme suivant pour la recherche de $\overline{x}$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Initialisation :} & x^{(0)} \in E, \\ \text{Itération } n : & x^{(k)} \text{ connu, } (n \geq 0) \\ & \text{Calculer } x_1^{(k+1)} \geq 2 - x_2^{(k)} \text{ tel que :} \\ & f(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}) \leq f(\xi, x_2^{(k)}), \text{ pour tout } \xi \geq 2 - x_2^{(k)}, \\ & \text{Calculer } x_2^{(k+1)} \geq 2 - x_1^{(k)} \text{ tel que :} \\ & f(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}) \leq f(x_1^{(k+1)}, \xi), \text{ pour tout } \xi \geq 2 - x_1^{(k)}. \end{array}\right. \tag{3.75}$$

Montrer (éventuellement graphiquement) que la suite construite par l'algorithme ci-dessus ne converge vers $\overline{x}$ que si l'une des composantes de $x^{(0)}$ vaut 1.

Exercice 127 (Convergence de l'algorithme d'Uzawa)**.**

Soient $n \geq 1$ $p \in \mathbb{N}^\star$. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une fonction telle que

$$\exists \alpha > 0,\ (\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x - y) \geq \alpha |x - y|^2,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Soit $C \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ (C est donc une matrice, à éléments réels, ayant p lignes et n colonnes) et $d \in \mathbb{R}^p$. On note $D = \{x \in \mathbb{R}^n, Cx \leq d\}$ et $\mathcal{C}^+ = \{u \in \mathbb{R}^p, u \geq 0\}$.
On suppose $D \neq \emptyset$ et on s'intéresse au problème suivant :

$$x \in D,\ \ f(x) \leq f(y),\ \forall y \in D. \tag{3.76}$$

1. Montrer que $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x) \cdot (y - x) + \frac{\alpha}{2}|x - y|^2$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que f est strictement convexe et que $f(x) \to \infty$ quand $|x| \to \infty$. En déduire qu'il existe une et une seule solution au problème (3.76).

   Dans la suite, on note $\overline{x}$ cette solution.

   Pour $u \in \mathbb{R}^p$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $L(x, u) = f(x) + u \cdot (Cx - d)$.
3. Soit $u \in \mathbb{R}^p$ (dans cette question, u est fixé). Montrer que l'application $x \to L(x, u)$ est strictement convexe (de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$) et que $L(x, u) \to \infty$ quand $|x| \to \infty$ [Utiliser la question 1]. En déduire qu'il existe une et une seule solution au problème suivant :

$$x \in \mathbb{R}^n,\ \ L(x, u) \leq L(y, u),\ \forall y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.77}$$

   Dans la suite, on note x_u cette solution. Montrer que x_u est aussi l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ t.q. $\nabla f(x_u) + C^t u = 0$.
4. On admet que le théorème de Kuhn-Tucker s'applique ici (cf. cours). Il existe donc $\overline{u} \in \mathcal{C}^+$ t.q. $\nabla f(\overline{x}) + C^t\overline{u} = 0$ et $\overline{u} \cdot (C\overline{x} - d) = 0$. Montrer que $(\overline{x}, \overline{u})$ est un point selle de L sur $\mathbb{R}^n \times \mathcal{C}^+$, c'est-à-dire :

$$L(\overline{x}, v) \leq L(\overline{x}, \overline{u}) \leq L(y, \overline{u}),\ \forall (y, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}^+. \tag{3.78}$$

   Pour $u \in \mathbb{R}^p$, on pose $M(u) = L(x_u, u)$ (de sorte que $M(u) = \inf\{L(x, u),\ x \in \mathbb{R}^n\}$). On considère alors le problème suivant :

$$u \in \mathcal{C}^+,\ \ M(u) \geq M(v),\ \forall v \in \mathcal{C}^+. \tag{3.79}$$

5. Soit $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}^+$ un point selle de L sur $\mathbb{R}^n \times \mathcal{C}^+$ (c'est-à-dire $L(x, v) \leq L(x, u) \leq L(y, u)$, pour tout $(y, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}^+$). Montrer que $x = \overline{x} = x_u$ (on rappelle que $\overline{x}$ est l'unique solution de (3.76) et x_u est l'unique solution de (3.77)) et que u est solution de (3.79). [On pourra commencer par montrer, en utilisant la première inégalité, que $x \in D$ et $u \cdot (Cx - d) = 0$.]

   Montrer que $\nabla f(\overline{x}) + C^t u = 0$ et que $u = P_{\mathcal{C}^+}(u + \rho(C\overline{x} - d))$, pour tout $\rho > 0$, où $P_{\mathcal{C}^+}$ désigne l'opérateur de projection orthogonale sur $\mathcal{C}^+$. [on rappelle que si $v \in \mathbb{R}^p$ et $w \in \mathcal{C}^+$, on a $w = P_{\mathcal{C}^+}v \iff ((v - w) \cdot (w - z) \geq 0, \forall z \in \mathcal{C}^+)$.]

6. Déduire des questions 2, 4 et 5 que le problème (3.79) admet au moins une solution.
7. Montrer que l'algorithme du gradient à pas fixe avec projection pour trouver la solution de (3.79) s'écrit (on désigne par $\rho > 0$ le pas de l'algorithme) :

   Initialisation. $u_0 \in \mathcal{C}^+$.

   Itérations. Pour $u_k \in \mathcal{C}^+$ connu ($k \geq 0$). On calcule $x_k \in \mathbb{R}^n$ t.q. $\nabla f(x_k) + C^t u_k = 0$ (montrer qu'un tel x_k existe et est unique) et on pose $u_{k+1} = P_{\mathcal{C}^+}(u_k + \rho(Cx_k - d))$.

   Dans la suite, on s'intéresse à la convergence de la suite $(x_k, u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par cet algorithme.
8. Soit ρ t.q. $0 < \rho < 2\alpha/\|C\|^2$ avec $\|C\| = \sup\{|Cx|,\, x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } |x| = 1\}$. Soit $(\overline{x}, \overline{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}^+$ un point selle de L sur $\mathbb{R}^n \times \mathcal{C}^+$ (c'est-à-dire vérifiant (3.78)) et $(x_k, u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par l'algorithme de la question précédente. Montrer que

$$|u_{k+1} - \overline{u}|^2 \leq |u_k - \overline{u}|^2 - \rho(2\alpha - \rho\|C\|^2)|x_k - \overline{x}|^2,\ \forall k \in \mathbb{R}^n.$$

   En déduire que $x_k \to \overline{x}$ quand $k \to \infty$.

   Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée et que, si $\tilde{u}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a $\nabla f(\overline{x}) + C^t\tilde{u} = 0$. En déduire que, si rang(C)=p, on a $u_k \to \overline{u}$ quand $k \to \infty$ et que $\overline{u}$ est *l'unique* élément de $\mathcal{C}^+$ t.q. $\nabla f(\overline{x}) + C^t\overline{u} = 0$.