

Licence de Mathématiques

Équations différentielles ordinaires

Site Saint Charles

Thierry Gallouët - thierry.gallouet@univ-amu.fr
Loïc Le Treust - loic.le-treust@univ-amu.fr

Site Luminy

Serge Vladuts - serge.vladuts@univ-amu.fr

22 août 2018

D'après les notes de cours d'Assia Benabdallah et de Florence Hubert.

Bibliographie

- [Arn74] V. Arnold, *Equations différentielles ordinaires*, MIR, 1974.
- [BG10] S. Benzoni-Gavage, *Calcul différentiel et équations différentielles*, Dunod, 2010.
- [BGB⁺08] L. Bourguignon, S. Goutelle, J. Burdin, de Saint Martin, A. Guillermet, M. Ducher, R. Jelliffe, and P. Maire, *Bases rationnelles de la modélisation thérapeutique*, Jacques André, 2008. 9
- [Bou12] G. Boularas, *Equations différentielles*, Cours de L3 de l'Université de Limoges (2012).
- [Dem06] J.P. Demailly, *Analyse numérique des équations différentielles*, EDP Sciences, 2006.
- [EK05] L. Edelstein-Keshet, *Mathematical models in biology*, SIAM, 2005. 49
- [GAL14] E. Ghys, A. Alvarez, and J. Leys, *Chaos*, 2014. 49, 50, 52, 75
- [Gom25] B. Gompertz, *On the nature of the function expressive of the law of human mortality and on a new mode of determining the nature of life contingencies*, Letter to Francis Baily (1825), 513–585. 48
- [Gom65] ———, Wikipédia, 1779-1865. 48
- [GW90] M. Gyllenberg and G.F. Webb, *A nonlinear structured population model of tumor growth with quiescence*, Journal of Math. Biol. **28** (1990), no. 6, 671–713.
- [Har82] P. Hartmann, *Ordinary differential equations*, Birkhauser, 1982.
- [Her] R. Herbin, *Analyse numérique : cours et exercices corrigés*, <http://www.cmi.univ-mrs.fr/herbin/anamat.html>.
- [HH06] J. H. Hubbard and F. Hubert, *Calcul scientifique. équations différentielles et équations aux dérivées partielles*, vol. 2, Vuibert, 2006. 13
- [Hub10] F. Hubert, *Etude de quelques problèmes de transport en médecine*, Université de Provence-Master2-Edp, 2010.
- [HW99] J. H. Hubbard and B. West, *Equations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini, 1999.
- [KBO03] A. C. King, J. Billingham, and S. R. Otto, *Differential equations, linear, nonlinear, ordinary, partial*, Cambridge, 2003.
- [Lam72] J.H. Lambert, *Anmerkungen und zusätze zur entwerfung des land- und himmelscharten*. 48
- [Mal] Thomas Malthus, Wikipedia. 46
- [Pis78] N. Piskounov, *Calcul différentiel et intégral*, vol. 2, MIR, 1978.
- [Ver] P.F. Verhultz, Wikipédia. 47
- [Ver45] ———, *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population*, Nouveaux mémoires de l'Académie royale de Bruxelles **18** (1845), 1–42. 47
- [Vér02] J. Véron, *Les mathématiques de la population de Lambert à Lotka*, Math. & Sci. Hum. **40^{ème} année** (2002), no. 159, 43–45. 48
- [wika] *Calculateur humain*, Wikipédia. 38
- [wikb] *Equations de Lotka-Volterra*, Wikipédia. 50

- [wikc] *Les figures de l'ombre*, Wikipédia. [38](#)
- [wikd] *Système dynamique de Lorenz*, Wikipédia.
- [wike] *Théorie du chaos*, Wikipédia.
- [Zab95] J. Zabczyk, *Mathematical control theory*, Birkhauser, 1995.

Table des matières

1	Les équations différentielles linéaires	7
1.1	Quelques exemples d'équations ou de systèmes d'équations différentiels linéaires . . .	8
1.1.1	Dynamique des populations : le modèle de Malthus	8
1.1.2	Pharmacocinétique	9
1.1.3	Circuits électriques	13
1.2	Équations différentielles scalaires linéaires du premier ordre	15
1.2.1	Résolution des équations différentielles linéaires homogènes scalaires du premier ordre	17
1.2.2	Résolution des équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre	18
1.2.3	Comment trouver une solution particulière ?	19
1.3	Résolution de systèmes différentiels linéaires	23
1.3.1	Théorème d'existence et d'unicité	23
1.3.2	Systèmes homogènes - structure de l'espace des solutions	26
1.3.3	Équations différentielles linéaires scalaires homogènes d'ordre 2	27
1.3.4	Systèmes non-homogènes - structure de l'espace des solutions	28
1.3.5	Cas des systèmes différentiels à coefficients constants	29
1.4	Approximation d'une équation différentielle linéaire	37
1.4.1	Problématique	37
1.4.2	Définitions	38
1.4.3	Le schéma d'Euler explicite	39
1.4.4	Le schéma d'Euler implicite	41
1.4.5	Comportement des schémas en temps long	41
1.5	Appendice : primitives de fonctions usuelles.	43
2	Les équations différentielles non linéaires : existence et unicité	45
2.1	Quelques exemples de la vie courante	45
2.1.1	Dynamique des populations	45
2.1.2	Equation d'un pendule pesant simple	51
2.2	Quelques exemples simples plus académiques qui illustrent les difficultés inhérentes aux problèmes non linéaires	53
2.2.1	Exemple de non existence globale : $y' = y^2$	53
2.2.2	Exemple de non unicité : $y' = \sqrt{ y }$	53
2.3	Notion de solution d'une équation différentielle	54

2.4	Théorèmes d'existence et d'unicité	55
2.4.1	Notion d'unicité	55
2.4.2	Fonctions localement lipschitzienne	55
2.4.3	Théorèmes de Cauchy-Lipschitz	57
2.4.4	Cas particulier des systèmes autonomes	60
2.4.5	Cas f continue	60
2.5	Théorèmes d'explosion	60
2.6	Approximation des solutions d'une EDO	62
2.6.1	Discrétisation	62
2.6.2	Etude d'un schéma numérique	63
2.6.3	Le schéma d'Euler explicite	65
2.6.4	Autres schémas à un pas - le schéma d'Euler implicite	66
3	Propriétés qualitatives des équations différentielles non linéaires	67
3.1	Quelques outils pour déterminer le caractère global des solutions	67
3.2	Comportement des solutions de systèmes différentiels linéaires pour des temps longs	70
3.3	Comportement des solutions au voisinage des équilibres - cas autonome	73
3.4	Comportement qualitatif des solutions en dimension 1	74
3.5	Comportement qualitatif des solutions en dimension 2	75
3.5.1	Le théorème de Poincaré-Bendixon	75
3.5.2	Le système proie-prédateur	76

Chapitre 1

Les équations différentielles linéaires

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les solutions des systèmes différentiels de la forme

$$u'(t) = A(t)u(t) + B(t), \quad t \in I,$$

(I un intervalle ouvert) et de montrer en particulier, le théorème suivant :

Théorème 1.1 (Equations différentielles linéaires)

Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ des fonctions continues sur I . Alors, les propriétés suivantes sont vérifiées pour toute condition initiale $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$.

[Existence] Il existe une fonction $Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ qui est solution du **problème de Cauchy**

$$\begin{aligned} Y'(t) &= A(t)Y(t) + B(t), \quad t \in I, \\ Y(t_0) &= Y_0. \end{aligned}$$

[Unicité] Soient $I_1 \subset I$ et $I_2 \subset I$ deux sous-intervalles contenant t_0 . Supposons que $Y_1 \in \mathcal{C}^1(I_1, \mathbb{R}^n)$ et $Y_2 \in \mathcal{C}^1(I_2, \mathbb{R}^n)$ vérifient

$$\begin{aligned} Y'_i(t) &= A(t)Y_i(t) + B(t), \quad t \in I_i, \quad i \in \{1, 2\}, \\ Y_1(t_0) &= Y_2(t_0) = Y_0, \end{aligned}$$

alors $Y_1 = Y_2$ sur $I_1 \cap I_2$.

★ Notations :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: espace vectoriel normé des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels.
- $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$: espace vectoriel normé des matrices à n lignes et m colonnes et à coefficients réels.
- $GL_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\|\cdot\|$: notation générique de norme sur \mathbb{R}^n ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- I_n : matrice unité de dimension $n \times n$.

- *Matrice scalaire* : On appelle matrice scalaire toute matrice de la forme λI_n où λ est un scalaire. Cette appellation vient du fait que le sous-espace vectoriel des matrices scalaires est isomorphe au corps de base \mathbb{R} et qu'elles commutent avec toutes les autres matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On désigne par $\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$ la matrice diagonale par blocs où les matrices A_i sont carrées. Si la dimension de A_i est $n_i \times n_i$, celle de $\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$ est $\left(\sum_{i=1}^s n_i\right)^2$.

1.1 Quelques exemples d'équations ou de systèmes d'équations différentiels linéaires

1.1.1 Dynamique des populations : le modèle de Malthus

La mathématisation de la science de la population a beaucoup progressé au XIX^e siècle, notamment grâce à Thomas-Robert Malthus qui a proposé en 1798 le premier modèle reposant sur des équations différentielles prenant en compte la croissance de la population. De façon naïve, on peut décrire les variations au cours du temps t (en année) du nombre $Y(t)$ d'individus d'une population par :

$$Y(t+h) = Y(t) + \underbrace{\text{nombre de naissances}}_{N_n(t,t+h)} - \underbrace{\text{nombre de morts}}_{N_m(t,t+h)},$$

où $N_n(t, t+h)$ et $N_m(t, t+h)$ sont respectivement le nombre de naissances et de morts ayant lieu dans l'intervalle de temps $[t, t+h]$, $h \geq 0$.

L'analyse de Malthus, basée sur l'étude de données concernant la population américaine de l'époque consistait entre autre à penser que ces deux quantités sont proportionnelles à

- $Y(t)$: il y a d'autant plus de naissances et de morts que la population $Y(t)$ est grande,
- h : il y a d'autant plus de naissances et de morts que l'intervalle $[t, t+h]$ est grand.

On suppose donc qu'il existe $\lambda, \mu > 0$ tels que

$$N_n(t, t+h) \simeq \lambda h Y(t),$$

$$N_m(t, t+h) \simeq \mu h Y(t),$$

et

$$\frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} \simeq a Y(t),$$

où $a = \lambda - \mu$. Autrement dit (en considérant que h tend vers 0), l'évolution de la population est modélisée par l'équation différentielle

$$(1.1) \quad Y'(t) = aY(t),$$

ou encore

$$Y(t) = Y(t_0)e^{a(t-t_0)}.$$



Thomas Robert Malthus

Si le taux de mortalité de la population est supérieur à son taux de natalité ($\lambda < \mu$) la population s'éteint exponentiellement vite, alors que dans le cas contraire $\lambda > \mu$, on a une expansion exponentielle de la population.

Remarque 1.2

Pour que les approximations ci-dessus aient un sens, il faut bien sûr supposer que Y est une fonction dérivable sur \mathbb{R} et qu'elle est à valeurs dans \mathbb{R} (et pas seulement dans \mathbb{N}). Le modèle continu $Y' = aY$ est alors une approximation d'un modèle discret (plus réaliste ?) dans lequel la quantité Y est une suite récurrente prenant ses valeurs dans \mathbb{N} . Nous verrons plus tard que le chemin inverse peut être utilisé pour résoudre des équations différentielles de manière approchée à l'aide de suites récurrentes. Ceci est particulièrement intéressant lorsque les solutions ne peuvent pas être exprimées en fonctions des fonctions usuelles (voir Section 1.4).

1.1.2 Pharmacocinétique

Pour plus de détails, voir [BGB⁺08].

- **Contexte.** L'objectif est ici d'étudier l'évolution de la concentration d'un médicament dans l'ensemble ou une partie d'un organisme après une administration (par injection ou par voie orale) afin de mieux comprendre sa biodisponibilité et son action au cours du temps.
- **Description.** L'organisme est représentée par un ensemble de compartiments dans lesquels les médicaments circulent. On peut par exemple, penser dans le cas d'un administration orale d'un anti-douleur aux compartiments suivants :
 - Compartiment 1 : estomac,
 - Compartiment 2 : système sanguin,
 - Compartiment 3 : cerveaux.

Dans ce cas, l'objectif est de comprendre l'évolution de la concentration de l'anti-douleur dans le cerveaux après qu'il ait traversé les deux autres compartiments. On numérote les compartiments de 1 à d et on note $Q_1(t), \dots, Q_d(t)$ les quantités de médicament correspondantes présentes au temps t . Souvent, la quantité la plus appropriée est la concentration de médicament, $c_i(t)$ au lieu de sa quantité. La relation entre les deux est

$$c_i = \frac{Q_i}{V_i},$$

où V_i est le volume du compartiment (qui n'a pas nécessairement de réalité physiologique).

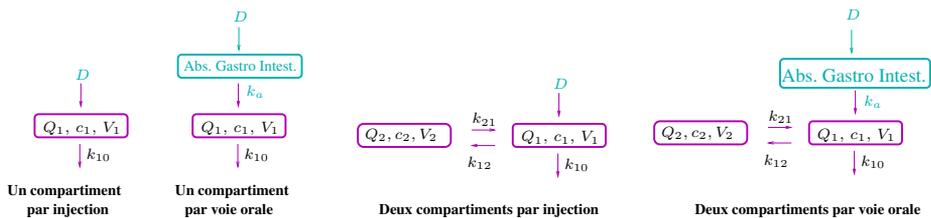


FIGURE 1.1 – Quelques modèles

- **Les paramètres.** Les flux de médicaments entre les compartiments sont représentés par des constantes de transfert. On note $(k_{ij})_{i,j \in \{1,d\}}$, les constantes de transfert du compartiment i vers le compartiment j . L'organisme filtre en permanence les molécules présentes dans les compartiments. On note k_{i0} la constante d'élimination à partir du compartiment i .
- **Le principe.** On effectue un bilan de matière pour chaque compartiment selon le principe suivant : *la variation de quantité de médicament dans le compartiment i ($i = 1, \dots, d$) est donnée par la différence des entrées et sorties.*
- **Les équations.**

- *Modèle à un compartiment relatif à une injection instantanée (on parle de bolus).*

On suppose que l'on injecte de façon instantanée une dose D de médicament à l'instant t_{inj} . La quantité de médicament vérifie alors

$$(1.2) \quad \begin{cases} \frac{dQ_1}{dt} = -k_{10}Q_1, \\ Q_1(t_{inj}) = D, \end{cases}$$

et la concentration $c_1 = \frac{Q_1}{V_1}$ est solution de

$$(1.3) \quad \begin{cases} \frac{dc_1}{dt} = -k_{10}c_1, \\ c_1(t_{inj}) = \frac{D}{V_1}. \end{cases}$$

Autrement dit, on a $Q_1 : t \mapsto De^{-k_{10}(t-t_{inj})}$ et $c_1 : t \mapsto \frac{D}{V_1}e^{-k_{10}(t-t_{inj})}$.

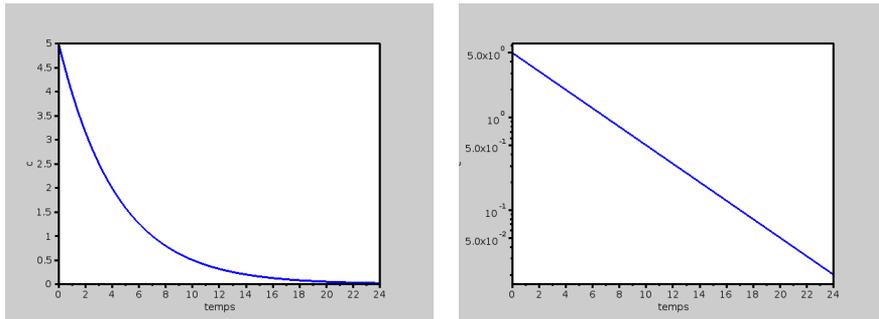


FIGURE 1.2 – Modèle à un compartiment pour une injection instantanée. (Gauche) Echelle normal. (Droite) Echelle logarithmique en ordonnée.

- *Modèle à un compartiment relatif à une administration par voie orale.*

On suppose que l'on prend un comprimé correspondant à une dose D de molécule active à l'instant t_{abs} . Le médicament est tout d'abord transformé par l'estomac et par l'intestin. On représentera cette étape par un compartiment d'absorption. On notera $Q_a(t)$ la quantité de médicament, $k_a > 0$ sa vitesse d'élimination. On a alors

$$(1.4) \quad \begin{cases} \frac{dQ_a}{dt} = -k_a Q_a, \\ Q_a(t_{abs}) = D. \end{cases}$$

Autrement dit, on a $Q_a : t \mapsto De^{-k_a(t-t_{abs})}$. Le médicament passe alors dans le com-

partiment principal à la vitesse $k_a Q_a$, ce qui donne

$$(1.5) \quad \begin{cases} \frac{dQ_1}{dt} = -k_{10}Q_1 + k_a Q_a, \\ Q_1(t_{abs}) = 0, \end{cases}$$

et la concentration $c_1 = \frac{Q_1}{V_1}$ est solution de

$$(1.6) \quad \begin{cases} \frac{dc_1}{dt} = -k_{10}c_1 + k_a Q_a / V_1, \\ c_1(t_{abs}) = 0. \end{cases}$$

Dans la suite, on supposera que $k_a < k_{10}$. On cherche la solution du problème (1.5) parmi les fonctions obtenues en sommant une solution particulière Q_1^p de l'équation différentielle

$$\frac{dQ}{dt} = -k_{10}Q + k_a Q_a = -k_{10}Q + (k_a D e^{k_a t_{abs}}) e^{-k_a t},$$

et une solution Q_1^h de l'équation homogène

$$\frac{dQ}{dt} = -k_{10}Q.$$

On obtient que $Q_1^h : t \mapsto C^h e^{-k_{10}t}$ où $C^h \in \mathbb{R}$. On cherche alors une solution particulière Q_1^p parmi les fonctions de la forme $Q_1^p : t \mapsto C^p e^{-k_a t}$ où $C^p \in \mathbb{R}$. Pour que Q_1^p vérifie l'équation différentielle (1.5), il faut que

$$-C^p k_a = -k_{10}C^p + k_a D e^{k_a t_{abs}},$$

et donc

$$C^p = \frac{k_a D e^{k_a t_{abs}}}{k_{10} - k_a}.$$

Remarquons, maintenant, que $Q_1 = Q_1^p + Q_1^h$ est une solution de l'équation différentielle (1.5). Il reste donc à choisir $C^h \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la condition initiale

$$Q_1(t_{abs}) = 0.$$

soit satisfaite par Q_1 . Pour que ce soit le cas, il faut que $C^p e^{-k_a t_{abs}} + C^h e^{-k_{10} t_{abs}} = 0$. On en déduit que la fonction

$$Q_1 : t \mapsto \frac{k_a D}{k_{10} - k_a} \left(e^{-k_a(t-t_{abs})} - e^{-k_{10}(t-t_{abs})} \right),$$

est la solution du problème de Cauchy (1.5).

- *Modèle à deux compartiments relatif à une injection par bolus.*

La pharmacocinétique de tous les médicaments n'est pas forcément si simple et passe par l'ajout de compartiments supplémentaires. Dans cet exemple à deux compartiments, les quantités de médicaments vérifient

$$(1.7) \quad \begin{cases} \frac{dQ_1}{dt} = -(k_{10} + k_{12})Q_1 + k_{21}Q_2 \\ \frac{dQ_2}{dt} = k_{12}Q_1 - k_{21}Q_2 \\ Q_1(t_{inj}) = D, Q_2(t_{inj}) = 0. \end{cases}$$

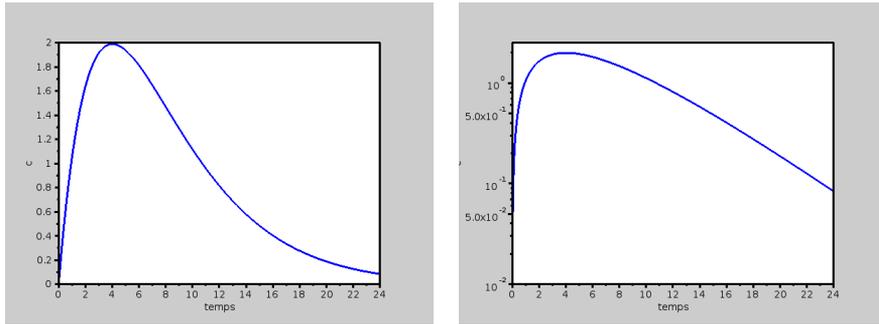


FIGURE 1.3 – Modèle à un compartiment pour une administration par voie orale. (Gauche) Échelle normale. (Droite) Échelle logarithmique en ordonnée.

et donc les concentrations vérifient

$$(1.8) \quad \begin{cases} \frac{dc_1}{dt} = -(k_{10} + k_{12})c_1 + k_{21} \frac{V_2}{V_1} c_2 \\ \frac{dc_2}{dt} = k_{12} \frac{V_1}{V_2} c_1 - k_{21} c_2 \\ c_1(t_{inj}) = \frac{D}{V_1}, c_2(t_{inj}) = 0. \end{cases}$$

Chacun des deux systèmes est un système linéaire qui s'écrit $Q' = AQ$, $Q(t_{inj}) = Q_0$ avec $A = \begin{pmatrix} -(k_{10} + k_{12}) & k_{21} \\ k_{12} & -k_{21} \end{pmatrix}$. On verra au chapitre 1 page 7 comment résoudre explicitement ce système.

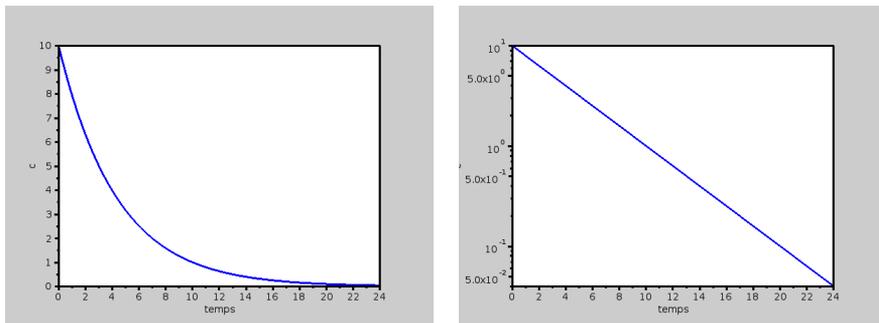


FIGURE 1.4 – Modèle à deux compartiments pour une administration par injection instantanée. (Gauche) Échelle normale. (Droite) Échelle logarithmique en ordonnée.

- *Modèle à deux compartiments relatif à une administration par voie orale.*

Pour une administration par voie orale, le système d'équations pour les quantités devient

$$(1.9) \quad \begin{cases} \frac{dQ_1}{dt} & = R(t) + k_{21}Q_2 - (k_{10} + k_{12})Q_1 \\ \frac{dQ_2}{dt} & = k_{12}Q_1 - k_{21}Q_2, \\ Q_i(t_{abs}) & = 0, \end{cases}$$

où $R : t \mapsto k_a Q_a(t)$ et pour les concentrations

$$(1.10) \quad \begin{cases} \frac{dc_1}{dt} &= \frac{R(t)}{V_1} + k_{21} \frac{V_2}{V_1} c_2 - (k_{10} + k_{12}) c_1 \\ \frac{dc_2}{dt} &= k_{12} \frac{V_1}{V_2} c_1 - k_{21} c_2 \\ c_i(t_{abs}) &= 0 \end{cases},$$

où $D = \frac{R}{V_1}$ est la dose administrée. Chacun des deux systèmes est un système linéaire qui s'écrit $Q' = AQ + R(t)$, $Q(t_{inj}) = 0$ avec $A = \begin{pmatrix} -(k_{10} + k_{12}) & k_{21} \\ k_{12} & -k_{21} \end{pmatrix}$. On verra dans la section 1.3.5 comment résoudre explicitement ce système d'équation différentielle.

Remarque 1.3

Le système (1.9) est un modèle très simplifié de l'administration d'un traitement. On peut le résoudre et obtenir $(Q_1(t), Q_2(t))$ pour tout t en fonction des paramètres et de la quantité Q de médicament administrée. Il existe des modèles plus réalistes, comme par exemple ceux où les transferts entre compartiments ne sont plus linéaires.

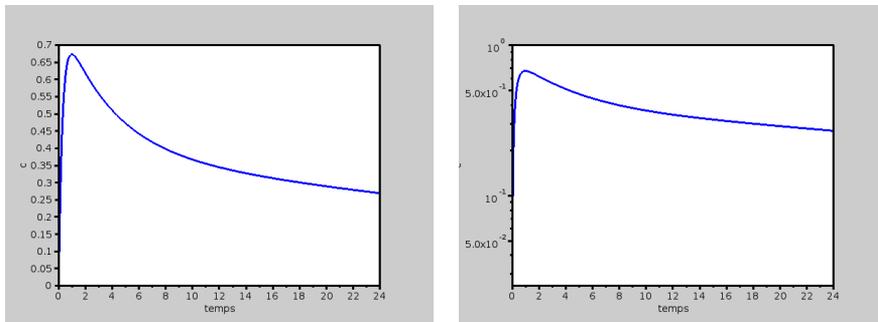


FIGURE 1.5 – Modèle à deux compartiments pour une administration par voie orale. (Gauche) Échelle normale. (Droite) Échelle logarithmique en ordonnée.

1.1.3 Circuits électriques

Voir [HH06] ou <http://fr.wikipedia.org/wiki/CircuitRLC>.

- **Description du phénomène et notations.** Considérons un circuit comprenant une résistance, une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C en série. Le circuit est soumis à un échelon de tension E (en volts). On cherche à calculer la tension U_c (en volts) aux bornes du condensateur. On note I l'intensité (en ampères) du courant électrique dans le circuit, U_R, U_L la tension aux bornes de la résistance et de la bobine, et R_t (en ohms) la résistance du circuit.
- **Utilisations des grands principes de la physique.** La loi des mailles conduit à :

$$E = U_c + U_L + U_R = U_c + L \frac{dI}{dt} + R_t I.$$

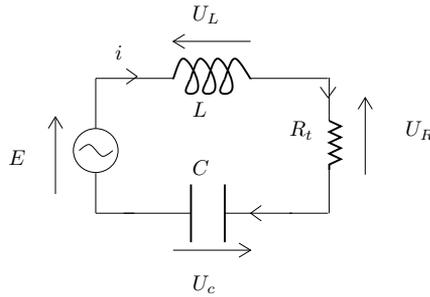


FIGURE 1.6 – Circuit RLC

La relation caractéristique du condensateur conduit à :

$$I = C \frac{dU_c}{dt}.$$

- **Les équations.** Des deux lois précédentes, on déduit l'équation régissant l'évolution de la tension aux bornes du condensateur :

$$(1.11) \quad LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + R_t C \frac{dU_c}{dt} + U_c = E.$$

Noter que l'on en déduit l'évolution temporelle de toutes les autres quantités.

- **Commentaires.** L'équation (1.11) est une équation différentielle d'ordre 2. On peut se ramener à un système différentiel linéaire d'ordre 1 en travaillant avec la fonction inconnue $Y : t \mapsto (U_c(t), U_c'(t))^T$:

$$(1.12) \quad Y' = AY + b \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R_t}{L} \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}.$$

On verra que l'ensemble des solutions de (1.11) est de la forme $S_0 + \{f_p\}$ où f_p est une solution quelconque de (1.11) et S_0 un espace vectoriel sur \mathbb{C} de dimension 2 dont on sait trouver une base en fonction des paramètres L, C, R_t . Plus précisément, S_0 est l'espace des solutions de l'équation différentielle suivante

$$(1.13) \quad LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + R_t C \frac{dU_c}{dt} + U_c = 0,$$

appelée *équation différentielle homogène*.

La figure 1.7 montre les comportements de $t \mapsto U_c(t)$ et des trajectoires $\{(U_c(t); U_c'(t)), t \in \mathbb{R}\}$ pour différents jeux de paramètres L, R_t dans le cas $E : t \mapsto 0$. La figure 1.8 montre les comportements de $t \mapsto U_c(t)$ et des trajectoires $\{(U_c(t); U_c'(t)), t \in \mathbb{R}\}$ dans le cas où $R_t = 1$ et $E : t \mapsto \cos(\omega t)$ pour différentes valeurs de ω . La figure 1.9 montre le comportement de $t \mapsto U_c(t)$ et des trajectoires $\{(U_c(t); U_c'(t)), t \in \mathbb{R}\}$ dans le cas où $R_t = 0$ et $E : t \mapsto \cos(\omega t)$ pour différentes valeurs de ω . Cette dernière figure illustre l'apparition de *résonances* (les trajectoires ne restent pas bornées). On pourra consulter la vidéo <http://www.youtube.com/watch?v=z3HJxZeOOP8> pour une présentation d'une modélisation d'un circuit électrique.

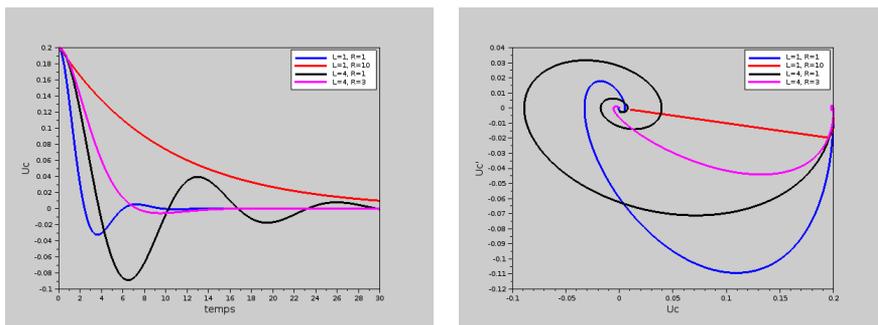


FIGURE 1.7 – Circuit RLC non forcé ($E = 0$). Données : $U_c(0) = 0.2$, $U'_c(0) = 0$, $C = 1$. Comportements de $t \mapsto U_c(t)$ (Gauche) et des trajectoires $\{(U_c(t); U'_c(t)), t \in \mathbb{R}\}$ (Droite) pour différentes valeurs des paramètres L, R_t .

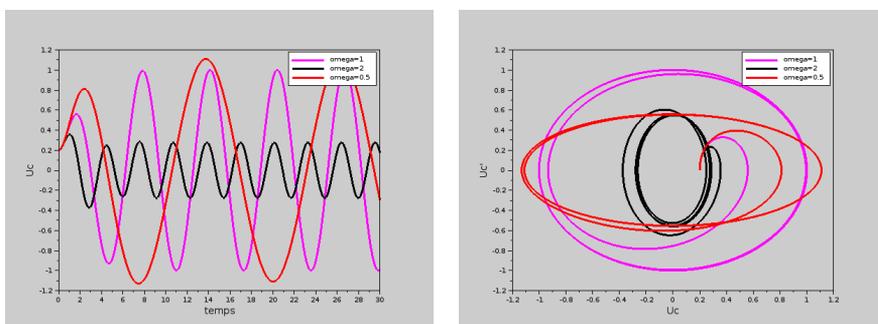


FIGURE 1.8 – Circuit RLC forcé ($E : t \mapsto \cos(\omega t)$). Données : $U_c(0) = 0.2$, $U'_c(0) = 0$, $C = 1$, $L = 1$, $R_t = 1$. Comportements de $t \mapsto U_c(t)$ (Gauche) et des trajectoires $\{(U_c(t); U'_c(t)), t \in \mathbb{R}\}$ (Droite) pour différentes valeurs de ω .

1.2 Équations différentielles scalaires linéaires du premier ordre

Définition 1.4

On appelle *équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre* toute équation de la forme

$$(1.14) \quad u'(t) = a(t)u(t) + b(t), \quad t \in I,$$

où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et a et b sont des fonctions définies sur I et à valeurs dans \mathbb{R} . On appelle *équation homogène associée* à (1.14) l'équation

$$(1.15) \quad u'(t) = a(t)u(t), \quad t \in I.$$

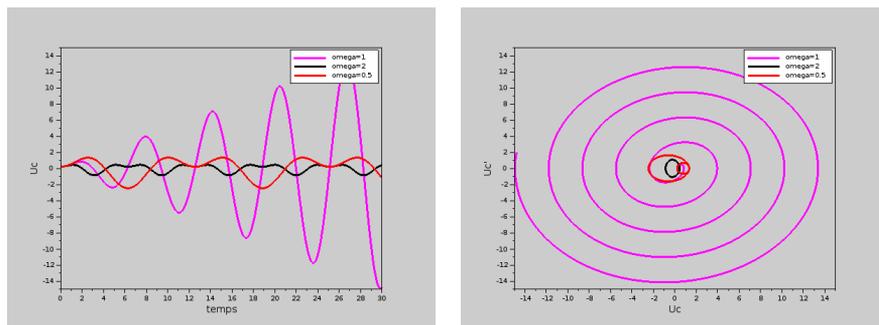


FIGURE 1.9 – Circuit RLC forcé ($E : t \mapsto \cos(\omega t)$). Phénomène de résonance. Données : $U_c(0) = 0.2, U_c'(0) = 0, C = 1, L = 1, R_t = 0$. Comportements de $t \mapsto U_c(t)$ (Gauche) et des trajectoires $\{(U_c(t); U_c'(t)), t \in \mathbb{R}\}$ (Droite) pour différentes valeurs de ω .

Remarque 1.5

1. Les équations que nous étudions sont des équations entre fonctions. Plus précisément, la résolution de l'équation

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I,$$

où $f : (t, u) \in I \times \mathbb{R} \mapsto f(t, u) = a(t)u + b(t) \in \mathbb{R}$, consiste à trouver une fonction dérivable $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que les fonctions y' et $t \mapsto f(t, y(t))$ soient égales sur l'intervalle I . On parle d'**équations différentielles** car l'équation relie la dérivée d'une fonction à une autre fonction.

2. Les équations différentielles sont dites **scalaires** lorsque les fonctions y recherchées sont à valeurs dans \mathbb{R} . Nous verrons dans la suite du cours, des équations différentielles dont les fonctions recherchées sont à valeurs dans \mathbb{R}^n où $n > 1$. On parle alors de **système d'équations différentielles** (voir par exemple (1.9)).
3. L'équation (1.14) est dite du **premier ordre** car l'équation porte sur la première dérivée

de y . L'équation (1.11) est quant à elle une équation différentielle scalaire du **second ordre**. On peut cependant se ramener à un système d'équations différentielles du premier ordre grâce à la transformations présentées en (1.12).

4. L'équation (1.14) est dite **linéaire** car pour tout $t \in I$, la fonction $u \mapsto f(t, u)$ est une fonction affine.

1.2.1 Résolution des équations différentielles linéaires homogènes scalaires du premier ordre

Théorème 1.1

Supposons que $a \in C(I, \mathbb{R})$. Les solutions de l'équation différentielle homogène (1.15) sont de la forme

$$(1.16) \quad u : t \in I \mapsto ce^{A(t)},$$

où c est une constante et A est une primitive de a .

Proposition 1.6

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (1.15) est un espace vectoriel de dimension un, i.e. une droite dans l'espace des fonctions appartenant à $C^1(I)$.

Démonstration : Théorème 1.1.

Soit la fonction u définie sur I par $u(t) = ce^{A(t)}$. En appliquant la règle de dérivation d'une fonction composée, on obtient :

$$u'(t) = cA'(t)e^{A(t)} = ca(t)e^{A(t)} = a(t)u(t), \quad t \in I,$$

et u est solution de (1.15).

Réciproquement, si u est solution de (1.15), alors en choisissant un nombre réel $t_0 \in I$ et en posant $v : t \in I \mapsto u(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}$, on obtient que

$$v'(t) = u'(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} - u(t)a(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} = 0,$$

pour tout $t \in I$. Ainsi, on a que v est une fonction constante et

$$u(t) = v(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}, \quad t \in I.$$

Exemple 1

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $u'(t) = -3u(t)$, $t \in]2, 4[$, est

$$\{u : t \in]2, 4[\mapsto ce^{-3t}, c \in \mathbb{R}\}.$$

En effet, $t \rightarrow -3t$ est une primitive de $t \rightarrow -3$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $u'(t) = (t^4 + 1)u(t)$, $t \in \mathbb{R}$ est

$$\{u : t \in \mathbb{R} \mapsto ce^{\frac{t^5}{5} + t}\}.$$

En effet, $t \mapsto \frac{t^5}{5} + t$ est une primitive de $t \mapsto t^4 + 1$.

1.2.2 Résolution des équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

Théorème 1.2

Supposons que $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Soit u_p une solution de (1.14). Alors les solutions de (1.14) sont de la forme

$$(1.17) \quad u : t \in I \mapsto ce^{A(t)} + u_p(t),$$

où c est une constante et A est une primitive de a .

Remarque 1.7

Pour obtenir l'ensemble des solutions de (1.14), on doit

1. trouver une solution particulière de (1.14),
2. trouver toutes les solutions de l'équation homogène associée (1.15) et donc une primitive de la fonction a (voir Section 1.5).

Démonstration : Théorème 1.2.

Soient u, u_p deux solutions de (1.14). On pose $v = u - u_p$. On a pour tout $t \in I$ que

$$v'(t) = u'(t) - u_p'(t) = (a(t)u(t) + b(t)) - (a(t)u_p(t) + b(t)) = a(t)(u(t) - u_p(t)) = a(t)v(t).$$

La fonction v est solution de l'équation homogène (1.15). Par le Théorème 1.16, il existe une primitive A de a et une constante $c \in \mathbb{R}$ telles que $v(t) = ce^{A(t)}$ pour $t \in I$ ainsi

$$u : t \mapsto u_p(t) + ce^{A(t)}.$$

Réciproquement, on a facilement que la fonction u définie par (1.17) est bien une solution de (1.14). ■

Exemple 2

1. Étudions l'équation $u'(t) = -3u(t) + 4$, $t \in]2, 4[$.

(a) La fonction $u_p : t \in]2, 4[\mapsto 4/3$ est une solution particulière.

(b) L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\{v : t \in]2, 4[\mapsto ce^{-3t}, c \in \mathbb{R}\}.$$

(c) L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\{u : t \in]2, 4[\mapsto ce^{-3t} + 4/3, c \in \mathbb{R}\}.$$

2. Étudions l'équation différentielle $u'(t) = (t^4 + 1)u(t) - t^5 - t + 1$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) La fonction $u_p : t \in \mathbb{R} \mapsto t$ est une solution particulière.

(b) L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\{v : t \in \mathbb{R} \mapsto ce^{\frac{t^5}{5}+t}, c \in \mathbb{R}\}.$$

(c) L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\{u : t \in \mathbb{R} \mapsto t + ce^{\frac{t^5}{5}+t}, c \in \mathbb{R}\}.$$

1.2.3 Comment trouver une solution particulière ?

L'objectif de cette section est de comprendre comment obtenir une solution particulière des équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre non-homogènes.

1.2.3.1 Principe de superposition

La structure linéaire de l'équation peut être utilisée pour décomposer le problème en plusieurs sous problèmes plus simples.

Proposition 1.8

Supposons que $b = \sum_{j=1}^N \lambda_j b_j$, où $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ et $b_1, \dots, b_N \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Soient $u_{p,1}, \dots, u_{p,N} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, des solutions de

$$u'(t) = a(t)u(t) + b_j(t), t \in I,$$

pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$. Alors, la fonction $u_p = \sum_{j=1}^N \lambda_j u_{p,j}$ est une solution particulière de (1.14).

Démonstration : On a pour tout $t \in I$ que

$$\begin{aligned} u'_p(t) &= \sum_{j=1}^N \lambda_j u'_{p,j}(t) = \sum_{j=1}^N \lambda_j (a(t)u_{p,j}(t) + b_j(t)) = a(t) \sum_{j=1}^N \lambda_j u_{p,j}(t) + \sum_{j=1}^N \lambda_j b_j(t) \\ &= a(t)u_p(t) + b(t). \end{aligned}$$

1.2.3.2 Quelques cas simples

La proposition suivante présente quelques cas pour lesquels une solution particulière peut être obtenue simplement.

Proposition 1.9

¹ Supposons que la fonction a est constante.

1. Supposons que $b : t \mapsto P(t)e^{kt}$, où P est une fonction polynôme de degré n et k un nombre réel, alors il existe une solution particulière u_p de la forme

$$u_p : t \mapsto Q(t)e^{kt},$$

où Q est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à n si $k \neq a$, et de degré inférieur ou égal à $n + 1$ si $k = a$.

2. Supposons que $b : t \mapsto P_1(t) \cos(kt) + P_2(t) \sin(kt)$, où P_1, P_2 sont deux polynômes de degrés inférieur ou égaux à n et k un nombre réel, alors il existe une solution particulière u_p de la forme

$$u_p : t \mapsto Q_1(t) \cos(kt) + Q_2(t) \sin(kt),$$

où Q_1, Q_2 sont des fonctions polynômes de degrés inférieur ou égaux à n .

Démonstration :

1. Soit u_p une solution particulière u_p . On pose $v : t \mapsto e^{-kt}u_p(t)$. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$v'(t) = e^{-kt} (u_p'(t) - ku_p(t)) = e^{-kt} (au_p(t) + P(t)e^{kt} - ku_p(t)) = (a - k)v(t) + P(t).$$

(a) Si $a = k$, on a que v est une primitive de P .

(b) Si $a \neq k$, on note $P : t \mapsto \alpha_n t^n + \dots + \alpha_0$. On veut trouver un polynôme $Q : t \mapsto \beta_n t^n + \dots + \beta_0$ tel que $Q' - (a - k)Q - P = 0$. On a

$$\begin{aligned} Q' - (a - k)Q - P &= (n\beta_n t^{n-1} + \dots + \beta_1) - (a - k)(\beta_n t^n + \dots + \beta_0) - (\alpha_n t^n + \dots + \alpha_0) \\ &= -((a - k)\beta_n + \alpha_n)t^n + \sum_{j=0}^{n-1} ((j + 1)\beta_{j+1} - (a - k)\beta_j - \alpha_j)t^j. \end{aligned}$$

On pose alors

$$\begin{aligned} \beta_n &= -\alpha_n / (a - k), \\ \beta_j &= ((j + 1)\beta_{j+1} - \alpha_j) / (a - k), \text{ pour } j = n - 1, n - 2, \dots, 1, 0. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, l'analyse précédente nous permet de trouver une fonction v qui vérifie les hypothèses de la proposition.

2. L'analyse précédente fonctionne aussi lorsque $k \in \mathbb{C}$ et les polynômes sont à coefficients complexes. En utilisant, les formules de Moivre $\cos(kt) = (e^{ikt} + e^{-ikt})/2$ et $\sin(kt) = (e^{ikt} - e^{-ikt})/2i$ et le principe de superposition (Proposition 1.8), on obtient le résultat. ■

1.2.3.3 Méthode de la variation de la constante

Lorsque les résultats précédents ne s'appliquent pas, on utilise la méthode suivante dite de la *variation de la constante*.

★ **Idée de la méthode**

On cherche une solution particulière u_p sous la forme suivante

$$(1.18) \quad u_p : t \mapsto c(t)e^{A(t)}, \quad t \in I,$$

où A est une primitive de a et $c \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

" u_p est une solution de l'équation homogène dans laquelle la constante est devenue variable."

On a pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} u_p'(t) - (a(t)u_p(t) + b(t)) &= (c'(t)e^{A(t)} + c(t)a(t)e^{A(t)}) - (a(t)c(t)e^{A(t)} + b(t)) \\ &= c'(t)e^{A(t)} - b(t). \end{aligned}$$

En choisissant pour c une primitive de $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$, par exemple,

$$c : t \mapsto c_0 + \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds,$$

pour $t_0 \in I$ et $c_0 \in \mathbb{R}$ et on obtient une solution de l'équation différentielle.

★ **Résultats et exemples**

Théorème 1.3 (Expression de la solution du problème de Cauchy)

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et a, b deux fonctions continues sur I . Soit $t_0 \in I$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. L'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = a(t)u(t) + b(t), & t \in I, \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

est

$$(1.19) \quad u(t) = u_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(r) dr} b(s) ds.$$

Exemple 3

1. Étudions l'équation $u'(t) = \sin(t)u(t) + \sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$v : t \mapsto c_0 e^{\int_{\pi/2}^t \sin(s) ds} = c_0 e^{-\cos(t)},$$

où $c_0 \in \mathbb{R}$.

(b) On cherche alors une solution particulière $u_p : t \mapsto c(t)e^{-\cos(t)}$ avec la méthode de la variation de la constante où c est une fonction \mathcal{C}^1 . La fonction c doit vérifier pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$c'(t) = \sin(t)e^{\cos(t)}.$$

On a donc $c : t \mapsto c_0 - e^{\cos(t)}$ où $c_0 \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation sont de la forme

$$u : t \mapsto c_0 e^{\cos(t)} - 1, \text{ où } c_0 \in \mathbb{R}.$$

2. Étudions l'équation $u'(t) = -u(t) - e^{-t} \cos(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $v : t \mapsto c_0 e^{-t}$, où $c_0 \in \mathbb{R}$.

(b) En utilisant la méthode de la variation de la constante, on est ramené à trouver une primitive de $t \mapsto -e^t e^{-t} \cos(t) = -\cos(t)$. On obtient alors que les solutions sont de la forme suivante

$$u : t \mapsto c_0 e^{-t} - \sin(t) e^{-t} \text{ où } c_0 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4

1. Étudions le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u'(t) = -3u(t) + 4, & t \in]2, 4[, \\ u(3) = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

La solution de ce problème est

$$u(t) = -\frac{2}{3} e^9 e^{-3t} + \frac{4}{3} (1 - e^{9-3t}) = -2e^9 e^{-3t} + \frac{4}{3}, \quad t \in]2, 4[.$$

2. Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u'(t) = (t^4 + 1)u(t) + t^4 + 1, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 2. \end{cases}$$

On applique la formule (1.19). On obtient

$$u(t) = 3e^{\frac{t^5}{5} + t} - 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.3 Résolution de systèmes différentiels linéaires

1.3.1 Théorème d'existence et d'unicité

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Considérons le système linéaire

$$(1.20) \quad Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t), \quad t \in I,$$

où les fonctions

$$A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

et

$$B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sont définies et continues sur l'intervalle I .

Théorème 1.10 (Equations différentielles linéaires)

Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ des fonctions continues sur I . Alors, les propriétés suivantes sont vérifiées pour toute condition initiale $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$.

[Existence] Il existe une fonction $Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ qui est solution du problème de Cauchy

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t), \quad t \in I,$$

$$Y(t_0) = Y_0.$$

[Unicité] Soient $I_1 \subset I$ et $I_2 \subset I$ deux sous-intervalles contenant t_0 . Supposons que $Y_1 \in \mathcal{C}^1(I_1, \mathbb{R}^n)$ et $Y_2 \in \mathcal{C}^1(I_2, \mathbb{R}^n)$ vérifient

$$Y'_i(t) = A(t)Y_i(t) + B(t), \quad t \in I_i, \quad i \in \{1, 2\},$$

$$Y_1(t_0) = Y_2(t_0) = Y_0,$$

alors $Y_1 = Y_2$ sur $I_1 \cap I_2$.

Remarque 1.11

La solution Y est définie sur I tout entier. On dit que c'est une **solution globale**.

Outils pour la démonstration :

La preuve de ce théorème repose sur l'utilisation de résultats de topologie (admis ici).

Définition 1.12

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|_E$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ une suite.

1. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|x_p - x_q\|_E \leq \varepsilon \text{ pour tout } p, q \geq N_\varepsilon.$$

2. E est dit complet si toutes ses suites de Cauchy convergent.

Théorème 1.13 (Point fixe)

Soit E un espace vectoriel normé et complet. On note $\|\cdot\|_E$ la norme sur E . Soit $F : E \rightarrow E$ une application strictement contractante, c'est-à-dire pour laquelle il existe $0 \leq k < 1$ tel que

$$\|F(x) - F(y)\|_E \leq k\|x - y\|_E, \text{ pour tout } x, y \in E.$$

Alors, F a un unique point fixe.

Définition 1.14

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $|\cdot|$ une norme sur \mathbb{R}^n . On pose

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|Ax|}{|x|} = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |x|=1}} |Ax|, \text{ pour tout } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Alors, $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appelée norme induite par $|\cdot|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration : On note de la même manière par $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n et la norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Unicité. Soit $Y_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $Y_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux solutions du problème de Cauchy telles que $t_0 \in I_1 \cap I_2$. On définit $W : I_1 \cap I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $W = Y_1 - Y_2$. On a pour tout $t \in J \subset I_1 \cap I_2$ où J est un sous-intervalle fermé borné, que

$$W'(t) = Y_1'(t) - Y_2'(t) = A(t)Y_1(t) + B(t) - (A(t)Y_2(t) + B(t)) = A(t)W(t),$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|W(t)\|_2^2 &= 2 \langle W(t), W'(t) \rangle = 2 \langle W(t), A(t)W(t) \rangle \leq 2\|W(t)\|_2 \|A(t)W(t)\|_2 \\ &\leq K\|W(t)\|_2^2, \end{aligned}$$

où $K = (2 \sup_{s \in J} \|A(s)\|_2)$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n . Remarquons maintenant que $\widetilde{W} : t \mapsto \|W(t)\|_2^2 e^{-Kt}$ vérifie $\widetilde{W}'(t) \leq 0$ et $\widetilde{W}(0) = 0$. On obtient alors par intégration que $\widetilde{W} = 0$ et $Y_1 = Y_2$ sur J . Comme ceci est vrai pour tout sous-intervalle fermé borné J , c'est aussi vrai pour $I_1 \cap I_2$.

Existence locale. Soit $J \subset I$ un intervalle fermé borné, t_0 et $T > 0$ tels que $[t_0, t_0 + T] \subset J$, (T sera fixé plus précisément au cours de la preuve).

1. On définit $E = \mathcal{C}([t_0, t_0 + T]; \mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions continue sur $[t_0, t_0 + T]$, muni de la norme infinie :

$$\|Y\|_E = \sup_{t \in [t_0, t_0 + T]} \|Y(t)\|_2, \text{ pour tout } Y \in E.$$

E est un espace complet (exercice).

2. On définit $F : E \rightarrow E$ par

$$F(Y) : t \mapsto Y_0 + \int_{t_0}^t (A(s)Y(s) + B(s)) ds$$

En particulier, $F(Y)$ est une fonction continue de $[t_0, t_0 + T]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n et $F(Y)(t) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$.

3. Montrons que F est une fonction Lipschitzienne sur E . Soient $Y, Z \in E$ et $t \in [t_0, t_0 + T]$, on a

$$\begin{aligned} \|F(Y)(t) - F(Z)(t)\|_2 &= \left\| \int_{t_0}^t (A(s)(Y(s) - Z(s)) ds \right\|_2 \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(s)(Y(s) - Z(s))\|_2 ds \leq \sup_J \|A(\cdot)\|_2 \int_{t_0}^t \|Y(s) - Z(s)\|_2 ds \\ &\leq \sup_J \|A(\cdot)\|_2 T \sup_{[t_0, t_0 + T]} \|Y(\cdot) - Z(\cdot)\|_2 \leq \left(\sup_J \|A(\cdot)\|_2 T \right) \|Y(\cdot) - Z(\cdot)\|_E. \end{aligned}$$

Comme J est un intervalle compact de \mathbb{R} et que A est continue, on obtient que $\sup_J \|A(\cdot)\|_2$ est fini. On pose $k = (\sup_J \|A(\cdot)\|_2 T) < +\infty$ et en prenant le supremum en t dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\|F(Y)(\cdot) - F(Z)(\cdot)\|_E \leq k \|Y(\cdot) - Z(\cdot)\|_E.$$

On fixe $T \in]0, \min\left(\frac{1}{\sup_J \|A(\cdot)\|_2}, \sup J - t_0\right)[$ [de manière à ce que $k \in]0, 1[$ et que F soit contractante.

4. D'après du théorème du point fixe, F admet donc un unique point fixe \tilde{Y}_1 vérifiant pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$:

$$Y_1(t) = Y_0 + \int_{t_0}^t (A(s)Y_1(s) + B(s)) ds.$$

Comme $Y_1 \in E$, on a que Y_1 est continue. En examinant le membre de droite dans l'égalité ci-dessus, on obtient que $Y_1 \in \mathcal{C}^1([t_0, t_0 + T]; \mathbb{R}^n)$. En le dérivant, on a que Y_1 est solution du problème de Cauchy mentionné dans le théorème. Ceci démontre l'existence d'une solution définie sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T] \subset J$. Remarquons maintenant que toute solution définie sur $[t_0, t_0 + T]$ est un point fixe de F . Le théorème du point fixe assure qu'il n'existe qu'une seule fonction de ce type. Remarquons aussi que le même résultat peut être obtenu sur l'intervalle $[t_0 - T, t_0]$.

Existence globale.

5. Il reste maintenant à prolonger la solution Y_1 à l'ensemble de l'intervalle ouvert I . Soient $b_1 < b_2 < b_3$ tels que $]b_1, b_3[\subset I$. Soient $\tilde{Y}_1 \in \mathcal{C}^1(]b_1, b_2]; \mathbb{R}^n)$ et $\tilde{Y}_2 \in \mathcal{C}^1(]b_2, b_3]; \mathbb{R}^n)$ deux solutions de l'équation différentielle $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ vérifiant $\tilde{Y}_1(b_2) = \tilde{Y}_2(b_2)$. On pose

$$Y : t \in]b_1, b_3[\mapsto \begin{cases} \tilde{Y}_1(t) & \text{pour } t \in]b_1, b_2] \\ \tilde{Y}_2(t) & \text{pour } t \in]b_2, b_3[. \end{cases}$$

Par construction, Y est continue sur $]b_1, b_3[$ et \mathcal{C}^1 sur $]b_1, b_3[\setminus \{b_2\}$. Y admet une dérivée à droite et à gauche en b_2 :

$$\lim_{t \rightarrow b_2^-} \frac{Y(t) - Y(b_2)}{t - b_2} = \lim_{t \rightarrow b_2^-} \frac{\tilde{Y}_1(t) - \tilde{Y}_1(b_2)}{t - b_2} = \tilde{Y}'_1(b_2) = A(b_2)\tilde{Y}_1(b_2) + B(b_2)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow b_2^+} \frac{Y(t) - Y(b_2)}{t - b_2} = \lim_{t \rightarrow b_2^+} \frac{\tilde{Y}_2(t) - \tilde{Y}_2(b_2)}{t - b_2} = \tilde{Y}_2'(b_2) = A(b_2)\tilde{Y}_2(b_2) + B(b_2).$$

Comme les deux limites coïncident, on obtient que Y est dérivable en b_2 et donc en tout point de $]b_1, b_3[$. De plus, Y est une solution de l'équation différentielle sur tout l'intervalle $]b_1, b_3[$. Nous sommes alors en mesure de *recoller* les solutions pour obtenir des solutions sur des intervalles plus grand.

6. Nous commençons par prolonger Y_1 à l'intervalle J , (T dépend de J). Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{aligned} Y'(t) &= A(t)Y(t) + B(t), \quad t \in [t_0 + T, t_0 + 2T] \subset J \\ Y(t_0 + T) &= Y_1(t_0 + T). \end{aligned}$$

En appliquant ce qui précède, on obtient une unique solution $Y_2 \in \mathcal{C}^1([t_0 + T, t_0 + 2T]; \mathbb{R}^n)$ et la fonction

$$Y : t \in [t_0, t_0 + 2T] \mapsto \begin{cases} Y_1(t) & \text{si } t \in [t_0, t_0 + T], \\ Y_2(t) & \text{si } t \in [t_0 + T, t_0 + 2T] \end{cases}$$

est une solution du problème de Cauchy définie sur $[t_0, t_0 + 2T]$. Ce procédé peut être itéré $n \in \mathbb{N}^*$ fois à condition que $t_0 + nT \in J$. On obtient alors l'existence et l'unicité d'une solution sur l'intervalle $[t_0, \sup J]$. On fait de même pour les $t < t_0$ et on obtient une solution unique sur J . Comme ceci est vrai pour tout intervalle compact $J \subset I$, on a construit une unique solution sur I tout entier. ■

1.3.2 Systèmes homogènes - structure de l'espace des solutions

On note \mathcal{S} l'ensemble des solutions du système homogène (1.21)

$$(1.21) \quad Y'(t) = A(t)Y(t), \quad t \in I,$$

C'est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^n)$ des fonctions continument différentiables sur l'intervalle I .

Théorème 1.4

L'ensemble des solutions du système différentiel linéaire homogène (1.21) \mathcal{S} a une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension n . Toutes les solutions sont définies sur l'intervalle I et sont dites solutions globales.

Démonstration :

1. On commence par voir que \mathcal{S} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I)$ (la solution nulle est dans l'espace, toute combinaison linéaire de deux solutions est aussi une solution).

2. Soit $t_0 \in I$. On pose

$$\Phi_{t_0} : Y_0 \in \mathbb{R}^n \mapsto Y \in C^1(I; \mathbb{R}^n),$$

où Y est l'unique solution du problème de Cauchy dont la donnée initiale est (t_0, Y_0) . Φ_{t_0} est linéaire et injective. En effet, soit $Y_0 \in \ker \Phi_{t_0}$. On a $\Phi_{t_0}(Y_0)(t_0) = Y_0 = 0$. Ainsi, on a $\ker \Phi_{t_0} = \{0\}$.

3. Montrons que $\text{Im} \Phi_{t_0} = \mathcal{S}$. On a par définition de Φ_{t_0} que $\text{Im} \Phi_{t_0} \subset \mathcal{S}$. Soit Y une solution de (1.21). Par unicité des solutions, on a que $\Phi_{t_0}(Y(t_0)) = Y$ donc $Y \in \text{Im} \Phi_{t_0}$ et $\text{Im} \Phi_{t_0} \supset \mathcal{S}$.
4. Ceci démontre que Φ_{t_0} est un isomorphisme entre les espaces vectoriels \mathbb{R}^n et \mathcal{S} . En particulier, la dimension de \mathcal{S} est n . ■

Corollaire 1.15

Si n solutions sont linéairement indépendantes en un point $t_0 \in I$, elles le sont en tout autre point de I .

Démonstration : Soient $t_0, t_1 \in I$. On note $\Gamma_{t_1} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$, l'application linéaire qui à $Y \in \mathcal{S}$ associe $Y(t_1)$. On doit montrer que $\Gamma_{t_1} \circ \Phi_{t_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est bijective où Φ_{t_0} est définie dans la preuve du Théorème 1.4. $\Gamma_{t_1} \circ \Phi_{t_0}(Y_0)$ correspond à la valeur prise en t_1 par l'unique solution $\Phi_{t_0}(Y_0)$ du problème de Cauchy dont la donnée initiale est (t_0, Y_0) . $\Gamma_{t_1} \circ \Phi_{t_0}$ est bien bijective car on connaît son inverse :

$$(\Gamma_{t_1} \circ \Phi_{t_0})^{-1} = \Gamma_{t_0} \circ \Phi_{t_1}. \quad \blacksquare$$

Remarque 1.16

Une base de l'espace vectoriel \mathcal{S} consiste à prendre les n solutions des problèmes de Cauchy

$$Y'_i(t) = A(t)Y_i(t), Y_i(t_0) = Y_{i,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i.$$

1.3.3 Équations différentielles linéaires scalaires homogènes d'ordre 2

On se donne trois réels a, b, c tel que $a \neq 0$. Étudions équation différentielle

(1.22) $ay'' + by' + cy = 0.$

Proposition 1.17

On note $p(x) = ax^2 + bx + c$ polynôme caractéristique de (1.22) et x_1, x_2 les racines de p .

1. Si $x_1 \neq x_2$, alors l'ensemble des solutions de (1.22) est l'espace vectoriel de dimension 2 suivant :

$$\{t \mapsto a_1 e^{x_1 t} + a_2 e^{x_2 t}, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

2. Si $x_1 = x_2$, alors l'ensemble des solutions de (1.22) est l'espace vectoriel de dimension 2 suivant :

$$\{t \mapsto (a_1 + t a_2) e^{x_1 t}, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Démonstration :

1. On commence par se ramener à un système d'équations différentielles d'ordre 1 en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ de manière à ce que

$$Y' = AY \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions de $Y' = AY$ est de dimension 2. Pour toute solution Y , la première composante est solution de (1.22). Ainsi, l'ensemble des solutions de (1.22) est aussi de dimension 2

2. Cherchons alors une base de solution de dimension 2.

(a) Si $x_1 \neq x_2$, alors toute combinaison linéaire de $t \mapsto e^{x_1 t}$ et $t \mapsto e^{x_2 t}$ est solution. Ces deux fonctions sont linéairement indépendantes. On a donc obtenu une base de solutions.

(b) Si $x_1 = x_2$, alors $t \mapsto e^{t x_1}$ et $t \mapsto t e^{t x_1}$ forment une base de solutions. ■

1.3.4 Systèmes non-homogènes - structure de l'espace des solutions

Considérons l'équation

$$(1.23) \quad Y'(t) = A(t)Y(t) + \sum_{j=1}^m B_j(t), \quad t \in I,$$

où $m \in \mathbb{N}$, $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B_j : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont continues.

Théorème 1.5 (Principe de superposition)

Soient $Y_{p,j} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de l'équation $Y'(t) = A(t)Y(t) + B_j(t)$, alors toute solution Y de (1.20) s'écrit

$$Y = \sum_{j=1}^m Y_{p,j} + Y_h,$$

où Y_h est une solution de l'équation homogène associée (1.21). On dit que l'ensemble des solutions du système linéaire (1.20) a une structure d'espace affine de dimension n sur \mathbb{R} .

Démonstration : On pose $Y_h = Y - Y_p$ où $Y_p = \sum_{j=1}^m Y_{p,j}$. On a pour tout $t \in I$ que

$$Y'_h(t) = Y'(t) - Y'_p(t) = \left(A(t)Y(t) + \sum_{j=1}^m B_j(t) \right) - \sum_{j=1}^m (A(t)Y_{p,j}(t) + B_j(t)) = A(t)Y_h(t).$$

Résoudre un système linéaire (1.20) revient à trouver une de ses solutions particulières et la solution générale du système homogène associé.

1.3.5 Cas des systèmes différentiels à coefficients constants

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans \mathbb{R} , et $B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$. On veut résoudre le problème suivant

$$(1.24) \quad \begin{cases} Y'(t) &= AY(t) + B(t) \\ Y(0) &= Y_0, \end{cases}$$

où $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. La différence entre (1.20) et (1.24) est que, ici, la matrice A est constante.

Nous avons pour cela besoin de la notion d'*exponentielle d'une matrice*. Mais avant cela, nous allons faire quelques rappels d'algèbre linéaire. On notera $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A .

1.3.5.1 Forme de Jordan d'une matrice

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et p son polynôme caractéristique. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ ses valeurs propres dans le corps des complexes \mathbb{C} (racines de p) de multiplicité r_1, r_2, \dots, r_s :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}.$$

On note $E_i = \ker(A - \lambda_i)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i . Sa dimension d_i (appelée parfois, dimension géométrique) est inférieure ou égale à la multiplicité r_i .

Matrice diagonalisable

Les matrices les plus simples sont les matrices diagonales. Nous rappelons que sous certaines hypothèses, on peut s'y ramener à l'aide d'un changements de base.

Proposition 1.18

Supposons que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, on ait $d_i = r_i$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A = PDP^{-1},$$

où D est la matrice diagonale dans laquelle les valeurs propres λ_i apparaissent chacune r_i fois. Les colonnes de P sont des vecteurs propres de A . On dit que la matrice A est semblable à une matrice diagonale.

Cas général

Toutes les matrices ne sont pas diagonalisables. On peut cependant toujours simplifier leur expressions à l'aide de la réduction de Jordan.

Proposition 1.19

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice de passage $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $J = P^{-1} A P$ soit de la forme (appelée forme de Jordan de A) :

$$J = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_s \end{pmatrix}.$$

Dans cette représentation, les M_i sont des blocs carrés de la forme :

$$M_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & \varepsilon_{r_i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

où les valeurs des ε_j sont égales à 0 ou 1.

Ainsi, la forme de Jordan d'une matrice A quelconque dans \mathbb{C} pourrait être représentée comme une matrice "diagonale"

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_l \end{pmatrix} = \text{diag}(J_1, J_2, \cdots, J_l)$$

où chaque bloc de Jordan J_k est de la forme

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.20

Dans le cas d'une matrice diagonalisable, sous les ε_i peuvent être choisis nuls et tous les blocs J_k sont de taille 1.

1.3.5.2 Exponentielle de matrices

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'exponentielle d'une matrice et d'étudier ses propriétés.

Théorème 1.6

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$$

converge normalement. Sa somme, notée $\exp A$, définit une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que l'on note \exp .

Outils pour la démonstration

Définition 1.21

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|_E$. La série de terme général $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ est normalement convergente si la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_E$ converge.

Théorème 1.22

Soit E un espace vectoriel normé. E est complet si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

Démonstration :

1. Nous introduisons pour commencer des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont bien adaptées à l'étude de la convergence de cette série de matrice. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{C}^n . On note de la même manière la norme matricielle induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (voir Définition 1.14). On vérifie que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que $\|I_n\| = 1$, où I_n désigne la matrice identité (en exercice).
2. On en déduit donc par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$\left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \frac{1}{k!} \|A\|^k.$$

Comme la série numérique de terme général $\frac{1}{k!} \|A\|^k$ est convergente (sa somme est $e^{\|A\|}$), la série de terme général $\frac{1}{k!} A^k$ est normalement convergente. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace complet, la série converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Soient K un ensemble compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A, B \in K$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. On note $R = \max_{C \in K} \|C\|$. On a

$$\begin{aligned} \|\exp A - \exp B\| &\leq \left\| \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} (A^k - B^k) \right\| + \left\| \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} (A^k - B^k) \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} (A^k - B^k) \right\| + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} (\|A\|^k + \|B\|^k) \\ &\leq \left\| \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} (A^k - B^k) \right\| + 2 \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} R^k. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série $\exp(R)$ converge, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n_0 \geq N$, on a $\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} R^k \leq \varepsilon/4$. On fixe $n_0 \geq N$. L'application $A \mapsto \sum_{k=0}^{n_0} \frac{A^k}{k!}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ étant une somme finie d'applications continues. Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tout $A, B \in K$ vérifiant $\|A - B\| \leq \delta$,

$$\left\| \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} (A^k - B^k) \right\| \leq \varepsilon/2,$$

et

$$\|\exp A - \exp B\| \leq \varepsilon.$$

On a montré que \exp est continue sur tous les compacts de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elle est donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car cet espace vectoriel est de dimension fini. ■

On trouvera dans la proposition suivante, les principales propriétés de l'exponentielle d'une matrice.

Proposition 1.23

1. L'application \exp est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Si $AB = BA$, alors $\exp(A + B) = \exp A \exp B$.
3. On a $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C})$ et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.
4. Si $A = PDP^{-1}$, où $P \in GL_n(\mathbb{C})$, alors $\exp A = P(\exp D)P^{-1}$.
5. Si $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ est une matrice diagonale, alors

$$\exp D = \text{diag}(\exp d_1, \exp d_2, \dots, \exp d_n).$$

6. L'application \exp est différentiable en 0 et $D \exp(0) = I_n$.

Démonstration :

1. La continuité est démontrée par le Théorème 1.6.
2. Soit A et B deux matrices qui commutent alors on peut appliquer la formule du binôme et on obtient pour $k \in \mathbb{N}$:

$$(A + B)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^j B^{k-j},$$

et

$$\begin{aligned} \exp(A + B) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A + B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^j B^{k-j} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} A^j B^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} A^j \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{1}{(k-j)!} B^{k-j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} A^j \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} B^k = \exp(A) \exp(B). \end{aligned}$$

3. Les matrices A et $-A$ commutent donc $I_n = \exp(0) = \exp(A - A) = \exp(A) \exp(-A)$ et $\exp(A)$ est inversible, d'inverse $\exp(-A)$.
4. On a pour tout $j \in \mathbb{N}$ que

$$(PDP^{-1})^j = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD^jP^{-1},$$

et

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \exp(PDP^{-1}) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(PDP^{-1})^j}{j!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{PD^jP^{-1}}{j!} = P \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{D^j}{j!} \right) P^{-1} \\ &= P \exp(D) P^{-1}. \end{aligned}$$

5. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $D^k = \text{diag}(d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k)$ donc

$$\exp D = \sum_{k \geq 0} D^k / k! = \text{diag}(\exp d_1, \dots, \exp d_n).$$

6. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a

$$\exp(0 + H) - (\exp(0) + H) = \exp(H) - (I_n + H) = \sum_{k \geq 2} \frac{H^k}{k!}.$$

Par récurrence, on obtient

$$\|\exp(0 + H) - \exp(0) - H\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} = \exp(\|H\|) - (1 + \|H\|) \leq \|H\|^2 \exp(\|H\|),$$

où $\|\cdot\|$ est une norme matricielle induite (voir Définition 1.14). Ceci assure que \exp est différentiable en 0 et que $D \exp(0) \cdot H = H$ pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. ■

La proposition suivante explore la relation entre l'application \exp et la théorie des systèmes d'équations différentielles.

Proposition 1.24 (Exponentielle de matrices et EDO)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit l'application

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \\ t &\mapsto \exp(tA). \end{aligned}$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. La fonction f est différentiable sur \mathbb{R} et

$$f'(t) = Af(t) = f(t)A, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2. On a $f(s+t) = f(s).f(t)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$ et $f(0) = I_n$.

3. Soit $Y_0 \in \mathbb{C}^n$. La fonction $Y(t) = \exp(tA)Y_0$ est l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{aligned} Y'(t) &= AY(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ Y(0) &= Y_0. \end{aligned}$$

4. Considérons une décomposition de A en blocs de Jordan : $A = P \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_l) P^{-1}$ où $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et les J_k sont des blocs de Jordan. Alors, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ que

$$\exp(tA) = P \operatorname{diag}(\exp(tJ_1), \dots, \exp(tJ_l)) P^{-1},$$

où

$$\exp tJ_k = e^{t\lambda_k} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{(d_k-1)}}{(d_k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{(d_k-2)}}{(d_k-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration :

1. On a pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ que

$$f(s, t) = \exp(sA + tA) = \exp(sA) \exp(tA) = f(s) \cdot f(t)$$

car les matrices sA et tA commutent. Ceci prouve le point 2

2. Comme la fonction \exp est différentiable en 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a que f est différentiable en 0 et que sa différentielle est I_n . Par le point précédent, on obtient que f est différentiable en tout point $t \in \mathbb{R}$ et sa différentielle est donnée par la relation du point 1.

3. Le point 3 est une conséquence du point 1.

4. Par le point 4 de la proposition 1.23, il nous reste à calculer $\exp(t \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_l))$. Remarquons pour commencer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(t \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_l))^k = t^k \operatorname{diag}(J_1^k, \dots, J_l^k)$, donc $\exp(t \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_l)) = \operatorname{diag}(\exp(tJ_1), \dots, \exp(tJ_l))$. Finalement, on a

$$\exp(tJ_k) = \exp(t\lambda_k I_{d_k} + tM) = \exp(t\lambda_k) \exp(tM)$$

où d_k est la taille de la matrice J_k ,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$M^{d_k} = 0$ et

$$\exp(tM) = \sum_{j=0}^{d_k-1} \frac{t^j M^j}{j!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{(d_k-1)}}{(d_k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{(d_k-2)}}{(d_k-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 5 (Exemples de calcul de l'exponentielle d'une matrice)

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont $\lambda^\pm = \pm i$ et les vecteurs propres associés sont $V^\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$. On notera que les valeurs propres sont complexes mais conjuguées. On va travailler un moment dans \mathbb{C} et revenir à \mathbb{R} . La matrice de passage est $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ et son inverse est $P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$. Ce qui permet d'écrire

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Un autre moyen de calcul de e^{At} est le théorème de Cayley-Hamilton : Si $p(\lambda) = \det(\lambda I_d - A)$ alors $p(A) = 0$.

Si $p(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \lambda^k$ alors $A^n = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k A^k$.

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = -Id$. Par conséquent, on a

$$A^{2p+1} = (-1)^p A \text{ et } A^{2p} = (-1)^p Id.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} A^{2p+1} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!} A^{2p} \\ &= A \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p t^{2p+1}}{(2p+1)!} + I_2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p t^{2p}}{(2p)!} \\ &= A \sin(t) + I_2 \cos(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.3.5.3 Résolution de systèmes différentiels linéaires

Théorème 1.7 (Formule de Duhamel)

Soit $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique application $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ solution de

$$(1.25) \quad \begin{cases} Y'(t) = AY(t) + F(t), & t \in \mathbb{R}, \\ Y(0) = Y_0, \end{cases}$$

donnée par

$$(1.26) \quad Y(t) = \exp(tA) Y_0 + \int_0^t \exp((t-s)A) F(s) ds,$$

qui s'appelle la formule de Duhamel.

Remarque 1.25

Soit $t \in \mathbb{R} \rightarrow B(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application continue. On note $(b_{ij}(t))$ les coefficients de $B(t)$. Chaque coefficient définit une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On définit $\int_0^t B(s) ds$ comme la matrice dont les coefficients sont $\int_0^t b_{ij}(s) ds$. On notera que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$A \int_0^t B(s) ds = \int_0^t AB(s) ds$$

et

$$\frac{d}{dt} \int_0^t B(s) ds = B(t).$$

De plus, nous utiliserons plus loin la propriété suivante. Soient $Y, Z \in \mathbb{R}^n$, on note (Y, Z) le produit scalaire dans \mathbb{R}^n de deux vecteurs. On a

$$\left(\int_0^t B(s) Y ds, Z \right) = \int_0^t (B(s) Y, Z) ds.$$

Démonstration : [Démonstration du Théorème 1.7]

On sait qu'il existe une unique solution maximale globale du problème de Cauchy. Il reste à vérifier qu'elle est donnée par (1.26). Montrons que la formule de Duhamel (1.26) définit bien une application de classe C^1 et qu'elle vérifie le problème de Cauchy (1.25). On déduit du point 3 de la proposition 1.24 que $\exp(tA)$ est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} . Par ailleurs,

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \exp((t-s)A) F(s) ds = A \int_0^t \exp((t-s)A) F(s) ds + F(t).$$

Comme F est continue, on en déduit que Y est de classe C^1 sur \mathbb{R} et que

$$\begin{aligned} Y'(t) &= A \exp(tA) Y_0 + A \int_0^t \exp((t-s)A) F(s) ds + F(t) \\ &= AY(t) + F(t). \end{aligned}$$

De plus, $Y(0) = Y_0$. Ainsi, (1.26) définit bien une solution du système (1.25). ■

1.4 Approximation d'une équation différentielle linéaire

1.4.1 Problématique

Soit $T > 0$. On s'intéresse ici au problème de Cauchy suivant

$$(1.27) \quad y'(t) = Ay(t) + b(t), \quad t \in [0, T], \quad y(0) = y_0,$$

où $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}^d)$. Attention, on a noté d la dimension du système différentiel.

Problèmes. Il est souvent très difficile de calculer une expression analytique (avec des fonctions usuelles) des solutions de (2.16) malgré le fait que l'on en connaisse une expression théorique (1.26). En effet, les contraintes suivantes peuvent se poser :

1. Calcul de l'exponentielle d'une matrice.

- (a) Pour faire ce calcul, on cherche une forme réduite de Jordan pour la matrice A , ce qui revient, dans certains cas, à diagonaliser A . Ceci est possible à la main, pour des matrices de petites tailles (2,3,4). Pour des matrices plus grandes, c'est beaucoup plus fastidieux. On peut alors utiliser un ordinateur qui fera les calculs à notre place.
- (b) Un ordinateur ne peut pas faire tous les calculs de manière exacte. En effet, pour trouver les valeurs propres, on cherche les racines du polynôme caractéristique. Or, il n'existe pas de formules générales donnant les racines des polynômes de degrés supérieur à 5. On peut seulement obtenir une expression approchée des valeurs propres.

2. Calcul de l'intégrale dans (1.26).

Même, dans les cas où on sait calculer l'exponentielle de la matrice A , il est parfois impossible d'avoir une expression analytique de l'intégrale dans (1.26). On doit aussi avoir recours à un ordinateur.

Objectifs. Le but de cette partie est de présenter deux algorithmes (méthodes numériques) permettant de calculer des solutions approchées sur ordinateur. Notons qu'il est plus efficace de chercher directement des solutions approchées sans passer par le calcul de toutes les valeurs propres.

Remarques historiques. Avant l'invention des ordinateurs, ce travail était fait à la main par des calculateurs humains [wika]. Il était alors fondamental d'avoir des méthodes permettant d'obtenir des bonnes solutions approchées avec un minimum de calculs. Par exemple, les premiers calculs de trajectoires de fusées pour la conquête spatiale ont été calculés par des personnes (Voir notamment le film *Les figures de l'ombre* [wkc] qui évoque ce travail à la NASA). Avec l'avènement des ordinateurs, ce travail a disparu mais la recherche de méthodes numériques efficaces reste un problème fondamental lorsque l'on cherche à étudier des problèmes complexes.

1.4.2 Définitions

Définition 1.26 (Discrétisation)

Soient $T > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On appelle **discrétisation** τ de l'intervalle $[0, T]$, ou subdivision de $[0, T]$, la donnée d'une suite $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ telle que

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T, \quad t_{n+1} - t_n = h_n, \quad 0 \leq n \leq N.$$

La quantité $h = h(\tau) = \max_{0 \leq n \leq N} h_n$ est alors appelée **pas de la discrétisation**.

On dit que la discrétisation est régulière ou **uniforme** si $h = T/N$ et $t_n = nh$ pour tout $n = 0, \dots, N$. En particulier, on a pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$ que $h_n = h$.

Description de la stratégie.

1. Étant donné une discrétisation $\tau = (t_n)_{0 \leq n \leq N}$, on va chercher une suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ qui "approche" $(y(t_n))_{0 \leq n \leq N}$. On appelle schéma numérique, un algorithme qui permet de calculer les éléments de la suite y_n .
2. On construit lors la fonction affine \tilde{y}_τ par morceaux ou polygonale qui vaut y_n aux points t_n pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_\tau : [0, T] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto y_n + \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} (y_{n+1} - y_n) \text{ si } t \in [t_n, t_{n+1}]. \end{aligned}$$

3. On cherche alors à trouver un algorithme tel que

$$\|y - y_\tau\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} \|y(t) - y_\tau(t)\|$$

tend vers 0 lorsque le pas de la discrétisation $h(\tau)$ tend vers 0 : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute discrétisation τ de $[0, T]$ vérifiant $h(\tau) < \delta$, on ait $\|y - y_\tau\|_\infty < \varepsilon$.

Remarque 1.27

Le nombre de points de discrétisations $N + 1$ et le pas de discrétisation h sont bien sur reliés. On peut montrer que $h(\tau) \geq T/N$. Donc, si $h(\tau)$ tend vers 0, N doit tendre vers $+\infty$.

Définition 1.28 (Schéma numérique à un pas)

Soit $\tau = (t_n)_{0 \leq n \leq N}$ une discrétisation. Un schéma à un pas est une suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ définie par une récurrence de la forme

$$(1.28) \quad y_{n+1} = \psi(t_n, h_n, y_n), \quad n = 0, \dots, N-1, \quad y_0 \text{ donné},$$

où $\psi : (t, h, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \mapsto \psi(t, h, y) \in \mathbb{R}^d$.

1.4.3 Le schéma d'Euler explicite

En utilisant la formule de Taylor-Young pour y en t_n à l'ordre 1, on obtient que

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + (t_{n+1} - t_n)y'(t_n) + o(t_{n+1} - t_n) \\ &= y(t_n) + h_n(Ay(t_n) + b(t_n)) + o(h_n). \end{aligned}$$

L'idée la plus simple pour définir un schéma numérique consiste alors à définir la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en ne conservant que les deux premiers termes dans la formule de Taylor.

Théorème 1.29

Le schéma d'Euler explicite est défini par

$$(1.29) \quad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n(Ay_n + b(t_n)) \text{ i.e. } \psi : (t, h, y) \mapsto y + h(Ay + b(t)), \\ y_0 = y(0). \end{cases}$$

Il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour toute discrétisation τ de $[0, T]$,

$$\|y_\tau - y\|_\infty \leq C_T h(\tau).$$

Remarque 1.30

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En notant $y_{\text{unif}, N}$, la fonction polygonale obtenue avec le schéma d'Euler explicite pour la discrétisation uniforme sur $[0, T]$, le théorème précédent nous assure que la suite de fonction $(y_{\text{unif}, N})_{N > 1}$ converge uniformément vers la solution y du problème de Cauchy (2.16). On obtient aussi que la convergence se fait aussi à une vitesse qui est au moins linéaire :

$$\|y - y_{\text{unif}, N}\|_\infty \leq C_T h = C_T(T/N).$$

Démonstration : On va démontrer le résultat dans le cas scalaire $d = 1$ avec $b = 0$. Le cas général sera étudié plus tard dans le cours. La solution exacte est donnée par $y : t \mapsto y_0 e^{at}$.

1. On a pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$ que $y_{n+1} = y_n + h_n a y_n = (1 + ah_n)y_n$ et

$$y_\tau(t) = (1 + a(t - t_n))y_n \text{ si } t \in [t_n, t_{n+1}].$$

On a aussi

$$|y_{n+1}| \leq (1 + |a|h_n)|y_n| \leq e^{|a|h_n}|y_n| \text{ pour tout } n \in \{0, \dots, N-1\},$$

et par récurrence

$$|y_n| \leq e^{|a|t_n} |y_0| \text{ pour tout } n \in \{0, \dots, N\}.$$

2. Soit $t \in [0, t_1]$. On a

$$\begin{aligned} |y_\tau(t) - y(t)| &= \left| (y_0 + aty_0) - \left(y_0 + y'(0)t + \int_{t_0}^t \left(\int_0^s y''(u) du \right) ds \right) \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^s y''(u) du \right) ds \right|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\int_0^s y''(u) du \right) ds &= \int_0^t \left(\int_0^s y_0 a^2 e^{au} du \right) ds = y_0 a \int_0^t (e^{as} - 1) ds \\ &= y_0 (e^{at} - (1 + at)), \end{aligned}$$

donc

$$|y_\tau(t) - y(t)| = \left| \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^s y''(u) du \right) ds \right| \leq |y_0| e^{|a|t} (|a|t)^2.$$

3. Soient $n \in \{0, \dots, N-1\}$ et $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Le même calcul donne

$$|y_\tau(t) - y_n e^{a(t-t_n)}| \leq |y_n| e^{|a|(t-t_n)} (|a|(t-t_n))^2.$$

4. Soient $n \in \{1, \dots, N-1\}$ et $t \in [t_n, t_{n+1}]$. L'inégalité triangulaire et les points précédents nous donnent

$$\begin{aligned} |y_\tau(t) - y(t)| &\leq |y_\tau(t) - y_n e^{a(t-t_n)}| + \sum_{k=0}^{n-1} |y_{k+1} e^{a(t-t_{k+1})} - y_k e^{a(t-t_k)}| \\ &\leq |y_\tau(t) - y_n e^{a(t-t_n)}| + \sum_{k=0}^{n-1} e^{a(t-t_{k+1})} |y_\tau(t_{k+1}) - y_k e^{a(t_{k+1}-t_k)}| \\ &\leq |y_n| e^{|a|(t-t_n)} (|a|(t-t_n))^2 + \sum_{k=0}^{n-1} e^{|a|(t-t_{k+1})} |y_k| e^{|a|(t_{k+1}-t_k)} (|a|(t_{k+1}-t_k))^2 \\ &\leq |a|^2 |y_0| h \left((t-t_n) e^{|a|t} + \sum_{k=0}^{n-1} e^{|a|t} (t_{k+1}-t_k) \right) \\ &\leq |a|^2 |y_0| h e^{|a|t} t \leq C_T h, \end{aligned}$$

où $C_T = |a|^2 |y_0| e^{|a|T} T$. On a donc montré que $\|y_\tau - y\|_\infty \leq C_T h$. ■

1.4.4 Le schéma d'Euler implicite

La méthode d'Euler implicite est basé sur la formule de Taylor-Young pour y en t_{n+1} à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + (t_{n+1} - t_n)y'(t_{n+1}) + o(t_{n+1} - t_n) \\ &= y(t_n) + h_n(Ay(t_{n+1}) + b(t_{n+1})) + o(h_n). \end{aligned}$$

On a alors le résultat suivant dont on admet la preuve.

Théorème 1.31

Le schéma d'Euler implicite est défini par

(1.30)

$$\begin{cases} y_{n+1} = (Id - h_n A)^{-1}(y_n + h_n b(t_n)) \text{ i.e. } \psi : (t, h, y) \mapsto (Id - hA)^{-1}(y + hb(t)), \\ y_0 = y(0). \end{cases}$$

Il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour toute discrétisation τ de $[0, T]$,

$$\|y_\tau - y\|_\infty \leq C_T h(\tau).$$

Remarque 1.32

À chaque itération, on a un système linéaire à inverser.

1.4.5 Comportement des schémas en temps long

On va comparer le comportement des schémas d'Euler explicite et d'Euler implicite dans le cas des systèmes linéaires en temps long.

Quelques problèmes scalaires. On se donne $a, y_0, z_0 > 0$ et on s'intéresse aux problèmes

$$y'(t) = ay(t), y(0) = y_0, \quad z'(t) = -az(t), z(0) = z_0.$$

On prend une discrétisation à pas constant h .

On rappelle que ces équations modélisent l'évolution de deux populations

- l'une en expansion $y : t \mapsto y_0 e^{at} \geq 0$,
- l'autre en extinction $z : t \mapsto z_0 e^{-at} \geq 0$.

Il est important que les schémas numériques que l'on utilise préservent les propriétés de positivité des solutions.

Le schéma d'Euler explicite s'écrit alors

$$y_{n+1} = (1 + ha)y_n = (1 + ha)^n y_0$$

On remarque que les approximations y_n sont positives pour toutes les valeurs de h .

$$z_{n+1} = (1 - ha)z_n = (1 - ha)^n z_0$$

On remarque que la positivité des solutions z_n est ici conditionnée au fait que $h \leq \frac{1}{a}$. Le schéma

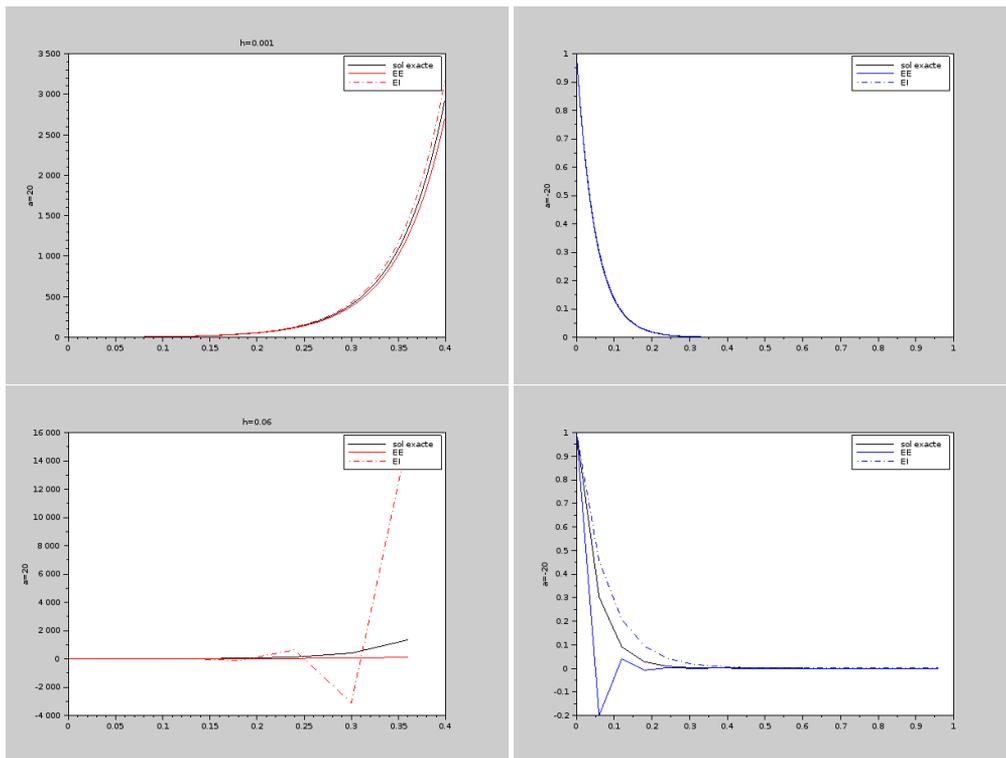


FIGURE 1.10 – Graphes des approximations obtenues à l’aide des schémas d’Euler explicite (Traits pleins) et Euler implicite (Traits pointillés) pour le problème $y' = ay$ (Gauche) et $z' = -az$ (Droite) pour $a = 20$, $h = 0.001$ (haut) ou $h = 0.06$ (bas)

d’Euler implicite quant à lui s’écrit

$$\bar{y}_{n+1} = \frac{1}{1 - ha} \bar{y}_n = \left(\frac{1}{1 - ha} \right)^n y_0,$$

Les solutions \bar{y}_n ne sont dans ce cas positives que si $h \leq \frac{1}{a}$.

$$\bar{z}_{n+1} = \frac{1}{1 + ha} \bar{z}_n = \left(\frac{1}{1 + ha} \right)^n z_0, \forall h$$

Les solutions \bar{z}_n ne sont dans ce cas positives que si $h \leq -\frac{1}{a}$. Cette perte de positivité est illustrée Figure 1.10.

Le pendule linéarisé. On peut maintenant observer ce qui se passe pour l’équation du pendule linéarisé :

$$Y' = AY \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que si $Y : t \mapsto \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, on a la propriété de conservation suivante :

$$\mathcal{H}(Y(t)) := (y_1(t))^2 + (y_2(t))^2 = \mathcal{H}(Y(0)), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Les schémas d'Euler explicite et implicite s'écrivent

$$Y_{n+1}^{\text{EE}} = (Id + hA)Y_n^{\text{EE}} := G^{\text{EE}}Y_n^{\text{EE}}, \quad Y_{n+1}^{\text{EI}} = (Id - hA)^{-1}Y_n^{\text{EI}} := G^{\text{EI}}Y_n^{\text{EI}}$$

On peut alors vérifier que la matrice G^{EE} a pour valeurs propres : $\lambda_{\pm}^{\text{EE}} = 1 \pm ih$ et donc un rayon spectral $\rho(G^{\text{EE}}) = \sqrt{1 + h^2} > 1$. De façon analogue, la matrice G^{EI} a pour valeurs propres : $\lambda_{\pm}^{\text{EI}} = \frac{1}{1 \pm ih}$ et donc un rayon spectral $\rho(G^{\text{EI}}) = \frac{1}{\sqrt{1 + h^2}} < 1$. On en déduit et on le vérifie sur la figure 1.11 que ni le schéma d'Euler explicite, ni le schéma d'Euler implicite ne conservent \mathcal{H} . Si on se fixe h même petit, et si on laisse tendre T vers l'infini, on voit que les solutions du schéma d'Euler explicite vont tendre vers l'infini, celles du schéma d'Euler implicite vont tendre vers 0, au lieu de rester de module constant ! Pour remédier à ce problème il faut construire des schémas numériques dit *symplectique* adaptés aux propriétés de conservation du problème.

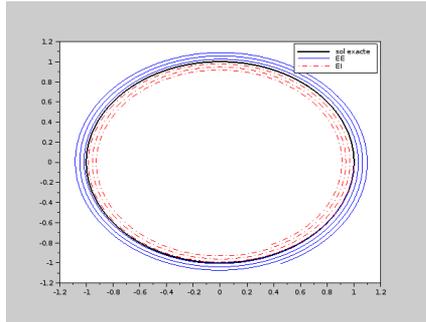


FIGURE 1.11 – Approximation des solution du problème du pendule linéarisé par les schéma d'Euler explicite et implicite

1.5 Appendice : primitives de fonctions usuelles.

On note f la fonction usuelle considérée, F une de ses primitives, et D le domaine de définition de F .

$f(x) = x^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$D = \mathbb{R}_+^*$ (\mathbb{R} si $\alpha \in \mathbb{N}$)
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x $	$D =]-\infty, 0[\text{ ou }]0, +\infty[$
$f(x) = a^x$ avec $a > 0, a \neq 1$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$F(x) = -\ln \cos x $	$D =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \sinh x$	$F(x) = \cosh x$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = \cosh x$	$F(x) = \sinh x$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = \tanh x$	$F(x) = \ln(\cosh x)$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan(x)$	$D =]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\cotan(x)$	$D =]k\pi, \pi + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$F(x) = \tanh x$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sinh^2 x}$	$F(x) = -\frac{1}{\tanh(x)}$	$D =]-\infty, 0[\text{ ou }]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$	$F(x) = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{a^2-x^2}$	$F(x) = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right $	$D =]-\infty, -a[\text{ ou }]-a, a[\text{ ou }]a, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$F(x) = \arcsin \frac{x}{a}$	$D =]-a, a[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$F(x) = \ln x + \sqrt{x^2-a^2} $	$D =]-\infty, -a[\text{ ou }]a, +\infty[$

Chapitre 2

Les équations différentielles non linéaires : existence et unicité

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $t_0 \in I$ et $u_0 \in \Omega$. Soit f définie sur $I \times \Omega$. On considère le système différentiel¹ suivant :

$$(2.1) \quad u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in I.$$

On va chercher à résoudre le problème dit **problème de Cauchy** suivant :

$$(2.2) \quad \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in J \subset I \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

où J désigne un intervalle ouvert contenant t_0 contenu dans I .

2.1 Quelques exemples de la vie courante

2.1.1 Dynamique des populations

La mathématisation de la science de la population a beaucoup progressé au XIXe siècle, notamment grâce à

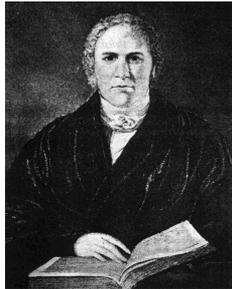
- **Thomas-Robert Malthus** qui a proposé en 1798, le premier modèle reposant sur des équations différentielles prenant en compte la croissance de la population,
- **Benjamin Gompertz** et sa formulation d'une loi de la mortalité fondée sur l'âge,
- **Pierre-François Verhulst** qui propose une loi logistique selon laquelle la croissance de la population se ralentit du fait de cette croissance même.

Les modèles qu'ils ont développés sont toujours d'actualité, comme nous allons le voir par la suite.

1. On utilisera indifféremment les termes *équation différentielle* ou *système différentiel*.



Thomas Robert Malthus



Benjamin Gompertz



Pierre-François Verhulst

Ces modèles de populations ont été plus récemment utilisés pour modéliser des phénomènes biologiques, comme par exemple les phénomènes de croissance tumorale.

2.1.1.1 Du modèle de Malthus au modèle de Lokta-Volterra

★ Le modèle de Malthus

Dans la section 1.1.1, nous avons déjà évoqué le modèle de croissance de population de Malthus. Nous avons suivi les étapes suivantes.

- **La modélisation** a consisté à justifier les choix de phénomènes pris en compte (taux de natalité et mortalité dépendant de manière linéaire de la population). Ceci nous a permis d'obtenir une équation différentielle $Y' = aY$ où $Y(t)$ est la population au temps t .
- **La résolution** des problèmes de Cauchy associés

$$\begin{aligned} Y'(t) &= aY(t), \quad t \geq 0, \\ Y(0) &= Y_0 \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

nous donne $Y : t \mapsto Y_0 e^{at}$.

- **L'interprétation des résultats** : Malthus prédisait donc que les populations évoluaient de façon exponentielle alors que les ressources ne croissent que de façon géométrique. Par conséquent, le monde courait à la catastrophe.

Ce qui a manqué à notre présentation fut un **retour sur le modèle**, c'est-à-dire une critique de la modélisation et une discussion sur les améliorations qui nous donnerait un modèle plus réaliste. Ce que n'avait pas prédit Malthus par son analyse, est qu'en cas de pénurie de nutriments, certaines populations seraient capables de réguler leur natalité pour pallier ce phénomène. Noter que les prévisions de Malthus sont encore d'actualité dans certaines configurations extrêmes comme en Afrique (cf Wikipedia. Thomas Malthus [[Mal](#)]).

★ Le modèle de Verhulst

C'est à Verhulst (1838) que l'on doit le modèle dit logistique, qui prend en compte ce phénomène de régulation.

- **Modélisation.** L'équation décrivant l'évolution de la population est donnée par

$$(2.3) \quad Y'(t) = aY(t) \left(1 - \frac{Y(t)}{b} \right).$$

Le **taux de croissance** est

- la constante a dans le modèle de Malthus,
- la fonction $Y \mapsto a(1 - \frac{Y}{b})$ dans le modèle de Verhulst.

Ce dernier modèle dit qu'en cas de pénurie de nutriments le taux de croissance de la population diminue et que cette diminution peut être considérée comme proportionnelle au nombre d'individus de la population (cf [Ver45, Ver]).

- **Illustration numérique.** La figure 2.1 nous donne le graphe de solutions approchées obtenues grâce au schéma d'Euler (qui sera vu ultérieurement dans le cas des équations différentielles non linéaires). Nous représentons uniquement les trajectoires issues du point $(0, 1)$. Autrement dit, nous résolvons les problèmes de Cauchy avec la donnée initiale $Y(0) = 1$, pour différents jeux des paramètres a et b .

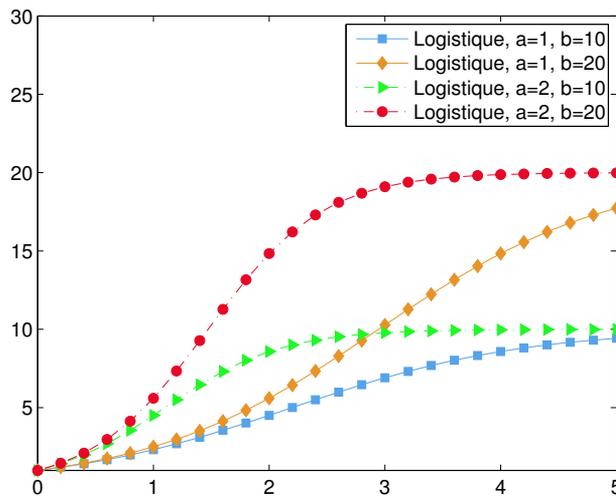


FIGURE 2.1 – Solutions du modèle logistique pour différentes valeurs des paramètres

- **Interprétation des résultats.** On observe une convergence vers un état constant égal à b pour des temps grands. À cause de la forme de « S » des solutions, on parle souvent de trajectoire en forme de « Sigmoides ». La population n'explose plus.
- **Résolution analytique.** L'équation logistique est un exemple d'équation non linéaire pour laquelle on sait expliciter les solutions. C'est assez rarement le cas. Pour étudier les solutions des équations que l'on ne sait pas résoudre de manière analytique (en donnant une expression formée de fonctions usuelles), on doit avoir recours à
 - une étude théorique qualitative (voir chapitre 3),
 - la résolution numérique pour illustrer et mieux comprendre le comportement des solutions (voir section 2.6).

Dans ce cas précis, on a affaire à une équation dite de *Bernoulli*

$$Y' = \alpha Y + \beta Y^m,$$

que l'on peut résoudre rigoureusement grâce à la **méthode d'analyse - synthèse** dont les étapes sont dans ce cas :

1. **[Analyse]** Supposons qu'il existe une solution $t \mapsto Y(t)$ (ici strictement positive), on cherche une expression analytique de Y .
2. **[Synthèse]** On ne suppose plus que la solution Y existe. On définit cependant Y grâce à l'expression analytique de l'étape d'analyse et on vérifie que c'est bien une solution.

Pour l'étape d'analyse, on peut vérifier que la fonction $Z : t \mapsto Y(t)^{1-m}$ est solution d'une équation linéaire que l'on sait résoudre. On écrit alors Y en fonction de Z . Une deuxième technique consiste à remarquer que l'on peut séparer les variables Y et t et écrire

$$\frac{Y'}{aY - bY^2} = \left(\frac{1}{a} \ln \left(\frac{Y}{a - bY} \right) \right)' = 1.$$

On peut alors intégrer cette identité pour obtenir une expression de Y

★ Le modèle de Lambert - Gompertz

A la même époque, J. H. Lambert (1772) [Lam72, Vér02], puis B. Gompertz (1825) [Gom65, Gom25] établissent un lien entre le taux de mortalité et l'âge des individus.

- **Modélisation.** Gompertz avait été sollicité par des sociétés d'assurances (tenues par sa belle-famille) pour évaluer le coût des assurances vies. Il proposa le modèle suivant

$$(2.4) \quad Y'(t) = aY(t) \ln \left(\frac{b}{Y(t)} \right)$$

basé sur le fait qu'entre 20 ans et 80 ans, le taux de mortalité des populations doublait tous les 8 ans. En d'autres termes, le taux de mortalité a une croissance exponentielle : $\tau : t \mapsto \tau_0 e^{at}$ où τ_0 désigne la probabilité pour un individu de mourir dans un intervalle de temps fixé et l'exposant de Gompertz a mesure l'accroissement de cette probabilité avec l'âge. Autrement dit, comme on a pour tout t ,

$$-\tau(t) = \frac{Y'(t)}{Y(t)} = (\ln(Y(t)))',$$

on obtient

$$(\ln(Y(t)))' = -\tau_0 e^{at}$$

et

$$\ln(Y(t)) = K - \frac{\tau_0}{a} e^{at}, \text{ où } K \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent on a bien, $\tau(t) = a(\ln(Y(t)) - K)$ et $Y'(t) = aY(t) \ln \left(\frac{b}{Y(t)} \right)$ où $b = e^K$.

- **Illustration numérique.**

La figure 2.2 compare les solutions du modèle logistique et du modèle de Gompertz pour différents jeux de paramètres.

- **Interprétation des résultats.** On notera à nouveau le profil en « Sigmoides » des trajectoires.

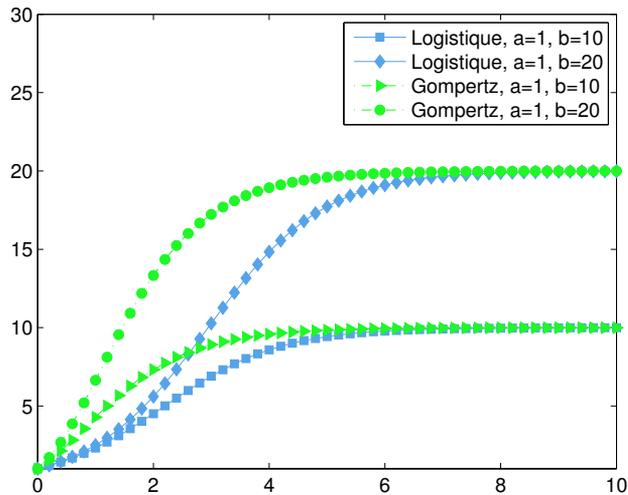


FIGURE 2.2 – Comparaison des solutions du modèle logistique et du modèle de Gompertz pour différentes valeurs des paramètres

- **Résolution analytique.** Le modèle de Gompertz est un autre exemple pour lequel on sait expliciter les solutions. Il suffit pour cela de remarquer que la fonction $Z(t) = \ln(Y(t))$ est solution de l'équation linéaire

$$Z'(t) = a(\ln(b) - Z(t)).$$

Noter que ce modèle est particulièrement bien adapté à la modélisation de croissance tumorale.

★ Commentaires

Ceci n'offre qu'un tout petit aperçu des modèles de dynamique de population à une variable. Les deux derniers modèles ci-dessus se mettent sous la forme $Y' = Yh(Y)$ où h est une fonction qui s'annule en 0 et qui est décroissante sur \mathbb{R}^+ . D'autres fonctions h sont couramment utilisés :

- $h(Y) = Y^\gamma$ avec $\gamma < 0$. On parle du modèle « puissance ».
- $h(Y) = aY^{-\frac{1}{4}} - b$. On parle du modèle de West.
- $h(Y) = aY^{-\frac{1}{3}} - b$. On parle du modèle de Von Bertalanffy.

Ces deux derniers modèles sont à nouveau des exemples d'équations de Bernoulli, pour lesquels on sait donc expliciter les solutions. Il y a une littérature immense sur ce sujet.

2.1.1.2 Le modèle proie-prédateur

Voir [EK05] ou le chapitre 4 du film Chaos [GAL14] pour plus de détails.

- **Description.** Le modèle présenté a été élaboré par Volterra dans le but d'étudier les populations de poissons en Méditerranée.
- **Les hypothèses.**

- Si elles ne sont pas confrontées aux prédateurs, les proies ont une croissance illimitée ;
 - La survie des prédateurs dépend des proies ;
 - La croissance de la population des prédateurs est proportionnelle à leur nourriture (composée des proies).
- **Les équations.** On note x la population des proies et y celle des prédateurs. Voici un modèle simple qui prend en compte les principes ci-dessus :

$$(2.5) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} = dx - cy \end{cases} .$$

S'il n'y a pas de prédateurs, la population des proies vérifie $\frac{dx}{dt} = ax$ ($a > 0$) et a donc une croissance exponentielle (comme le proposait Malthus car on a supposé qu'en l'absence de prédateurs, la croissance des proies est illimitée). Avec ces deux termes, la première équation peut alors être interprétée comme suit : la variation du nombre de proies est donnée par sa propre croissance moins le taux de prédation qui leur est appliqué.

La croissance des prédateurs est proportionnelle à la présence des proies (dx). En l'absence de proies, la population des prédateurs ne peut survivre, d'où la présence de $-cy$ avec $c > 0$.

- **Commentaires.** Un exemple d'une telle application est proposée dans le chapitre 4 du film Chaos [GAL14] <http://www.chaos-math.org/fr/chaos-iv-oscillations> Voir aussi [wikb].

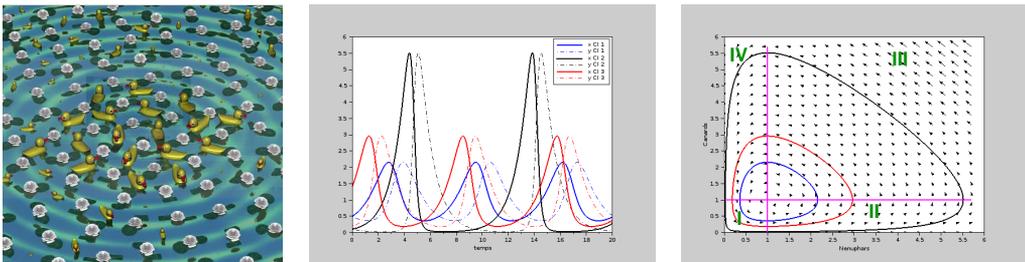


FIGURE 2.3 – Les canards et les nénuphars (film CHAOS)

- **Étude qualitative.** On est ici confronté à un système différentiel non linéaire pour lequel on ne sait pas expliciter de solutions. On sait néanmoins établir de nombreuses propriétés des solutions de ce système.

On prouve que pour une condition initiale au temps t_0 qui vérifie $x(t_0) > 0$ et $y(t_0) > 0$, le système admet une unique solution définie pour tout réel t , de plus elle vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) > 0, y(t) > 0.$$

On peut également montrer que ces solutions sont périodiques, comme le montre la figure 2.3. Noter que les trajectoires périodiques correspondent à des trajectoires fermées dans le plan (x, y) .

- **Interprétation des résultats.** Dans ce modèle, les prédateurs prospèrent lorsque les proies sont nombreuses, mais finissent par épuiser leurs ressources et déclinent. Lorsque la population de prédateur a suffisamment diminué, les proies profitant du répit se reproduisent et leur population augmente de nouveau. Cette dynamique se poursuit en un cycle de croissance et déclin.

2.1.2 Équation d'un pendule pesant simple

- **Description du phénomène et notations**

On se place dans un plan P . On fixe un corps X (par exemple une petite bille) de masse m attaché à une extrémité d'une tige métallique inextensible de masse et d'épaisseur négligeables et de longueur l . L'autre extrémité de cette tige est fixée à un point d'un plan noté O . On appelle *pendule pesant simple* cette tige. On écarte la tige de sa position d'équilibre (verticale). On note θ l'angle que fait la tige avec la verticale. On cherche l'évolution de cet angle θ en fonction du temps t .

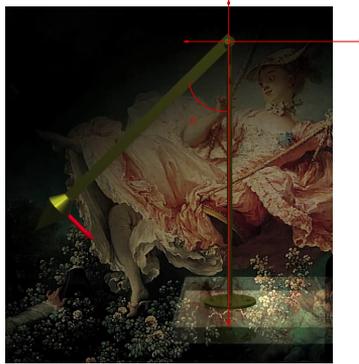


FIGURE 2.4 – Pendule

- **Les principes**

On suppose qu'il n'y a pas de frottements.

- **Mise en équation**

La trajectoire de la bille est un arc de cercle. La force qui s'exerce sur le pendule est la force de gravité, mg . Seule la composante tangentielle est responsable du mouvement de la bille. Elle vaut $-mg \sin \theta$. L'application de la seconde loi de Newton conduit à

$$m\gamma = -mg \sin \theta,$$

où γ désigne l'accélération. Comme la bille se déplace sur l'arc de cercle de rayon l . La longueur de son déplacement correspondant à l'angle θ est $l\theta$. Sa vitesse est $l\frac{d\theta}{dt}$ et l'accélération au temps t est donnée par $l\frac{d^2\theta}{dt^2}$. On obtient ainsi l'équation du mouvement $ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$ ce qui revient à

$$(2.6) \quad l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin \theta = 0.$$

Dans le cas d'oscillations de petites amplitudes, on fait souvent l'approximation $\sin(\theta) \sim \theta$. Le modèle que l'on résoud alors est le suivant :

$$(2.7) \quad l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\theta = 0.$$

On parle du *modèle du pendule linéarisé*.

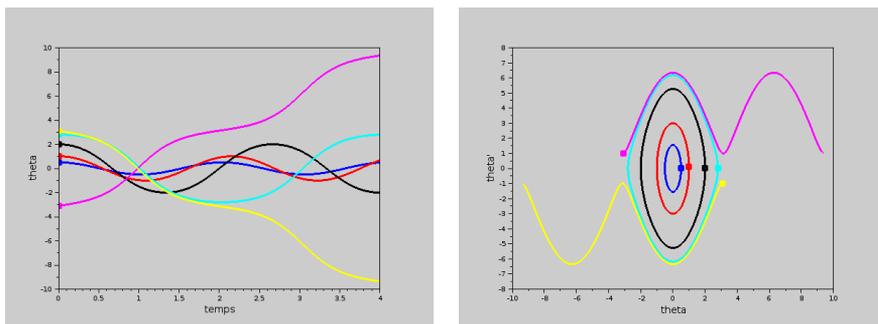


FIGURE 2.5 – Pendule partant de différentes valeurs de $(\theta(0), \theta'(0))$. (Gauche) Graphe de $t \rightarrow \theta(t)$. (Droite) graphe dans le portrait de phase $(\theta(t), \theta'(t))$. Les constantes : $g = 9.81, l = 1$.

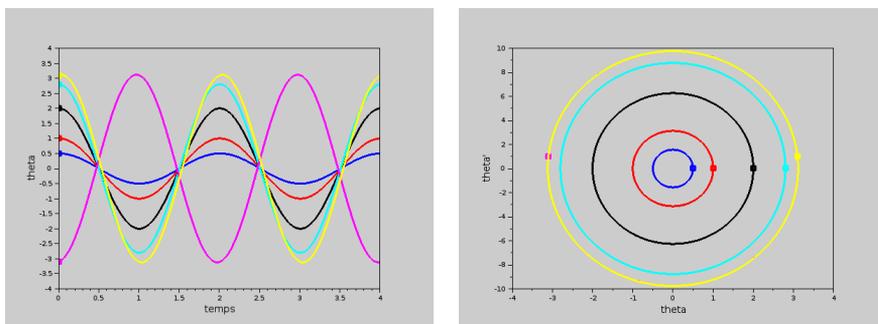


FIGURE 2.6 – Pendule linéarisé partant de différentes valeurs de $(\theta(0), \theta'(0))$. (Gauche) Graphe de $t \rightarrow \theta(t)$. (Droite) graphe dans le portrait de phase $(\theta(t), \theta'(t))$. Les constantes : $g = 9.81, l = 1$.

On remarquera que dans le cas du pendule linéarisé toutes les trajectoires sont périodiques, ce qui n'est pas le cas pour les trajectoires du pendule libre.

Pour plus de détails et pour des extensions sur ce modèle, vous pourrez voir le chapitre 4 du film CHAOS [GAL14], <http://www.chaos-math.org/fr/chaos-iv-oscillations>.

2.2 Quelques exemples simples plus académiques qui illustrent les difficultés inhérentes aux problèmes non linéaires

2.2.1 Exemple de non existence globale : $y' = y^2$

On considère le problème $\begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

C'est un exemple d'EDO non linéaire en dimension 1. La fonction inconnue est $x \mapsto y(x)$ et

$$I = \mathbb{R}, \Omega = \mathbb{R}, f(x, y) = y^2.$$

Soit (J, y) une solution de $y' = y^2$ qui ne s'annule pas sur J . Alors

$$\frac{y'}{y^2} = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{y}\right)' = 1 \Rightarrow \int_0^x \left(-\frac{1}{y}\right)' d\bar{x} = \int_0^x 1 d\bar{x}.$$

On en déduit que

$$-\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{y(0)} = x \Rightarrow y(x) = \frac{1}{-x + \frac{1}{y(0)}} = \frac{1}{-x + 1}.$$

On voit que cette solution n'est définie que sur $J =]-\infty, 1[$. On dira que la solution n'est pas globale. On remarquera que la solution "explose" lorsque $x \rightarrow 1^-$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \|y(x)\| = +\infty.$$

Noter que l'intervalle d'existence dépend de la condition initiale ; si $y(0) = -2$, on a $J =]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

2.2.2 Exemple de non unicité : $y' = \sqrt{|y|}$

On considère le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|} \\ y(-2) = -1 \end{cases}$

C'est un exemple d'EDO non linéaire en dimension 1 où $f(t, y) = \sqrt{|y|}$ est une fonction continue.

On vérifie que tant que y reste négative

$$\frac{y'}{\sqrt{|y|}} = 1 \Rightarrow (-\sqrt{-y})' = \frac{1}{2} \Rightarrow -\sqrt{-y(t)} + \sqrt{-y(-2)} = \frac{1}{2}(t + 2).$$

On en déduit que

$$y(t) = -\left(1 - \frac{1}{2}(t + 2)\right)^2$$

On voit que $y(0) = 0$ par conséquent cette solution n'est valide que pour $t \leq 0$. On peut alors construire une famille de solutions définies par

$$y_k(t) = \begin{cases} -\left(1 - \frac{1}{2}(t + 2)\right)^2 & \text{si } t \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq t \leq k \\ \left(\frac{1}{2}(t - k)\right)^2 & \text{si } t \geq k \end{cases}$$

Par conséquent, on a un exemple pour lequel le problème de Cauchy admet plusieurs solutions. On verra que la fonction $f(t, y) = \sqrt{y}$ ne satisfait pas les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.

2.3 Notion de solution d'une équation différentielle

Définition 2.1 (Solution d'un problème de Cauchy)

Une solution du problème de Cauchy (2.2) est un couple (J, u) où J désigne un intervalle ouvert contenant t_0 contenu dans I , u est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur J qui vérifie

$$u' = f(t, u) \quad \forall t \in J \text{ et } u(t_0) = u_0.$$

Un système différentiel tel (2.1) définit en tout point (t_0, u_0) la tangente à la courbe intégrale passant par ce point. La résolution d'une équation différentielle revient donc à trouver les courbes $t \mapsto u(t)$ de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dont la tangente en chaque point a la même direction que $f(t, u(t))$.

Définition 2.2 (Un peu de vocabulaire)

Soit (J, u) une solution de (2.1)

1. L'image de J par u , c'est-à-dire $\{u(t); t \in J\}$ est appelée **trajectoire** de la solution (J, u) .
2. L'ensemble des trajectoires est appelé **portrait de phase** de l'équation différentielle.
3. L'espace \mathbb{R}^n où les solutions prennent leurs valeurs (donc contenant les trajectoires) est appelé **espace des phases** de l'équation différentielle.
4. L'ensemble $\{(t, u(t)); t \in J\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est appelée **courbe intégrale** de l'équation différentielle.
5. On appelle **point d'équilibre** (ou point critique, ou point stationnaire) de (2.1), tout point $u_0 \in \Omega$ tel que

$$f(t, u_0) = 0 \quad \forall t \in I.$$

(I, u_0) est une solution de (2.1).

Définition 2.3 (Prolongement-Solution maximale)

On dit qu'une solution (J_2, u_2) du problème de Cauchy (2.2) est un prolongement de la solution (J_1, u_1) du même problème de Cauchy, si $J_1 \subset J_2$ et $u_2|_{J_1} = u_1$.

Si tous les prolongements d'une solution (J_1, u_1) lui sont identiques, alors (J_1, u_1) est dite non prolongeable ou maximale.

Définition 2.4 (Solution globale-Solution locale)

Toute solution (J, u) de (2.2) avec $J = I$ est dite globale.

Toute solution (J, u) de (2.2) avec J strictement inclus dans I est dite locale.

2.4 Théorèmes d'existence et d'unicité

2.4.1 Notion d'unicité

Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous donne les conditions qui assurent l'existence locale et l'unicité de la solution d'une équation différentielle. Avant d'énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz, expliquons d'abord ce que l'on entend par unicité.

Définition 2.5 (Unicité du problème de Cauchy)

On dira que le problème de Cauchy (2.2) admet une solution unique si pour tout $(\tilde{t}, \tilde{u}) \in I \times \Omega$, quelles que soient deux solutions (J_1, u_1) et (J_2, u_2) du problème de Cauchy associé :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in I, \\ u(\tilde{t}) = \tilde{u} \end{cases},$$

les deux fonctions coïncident sur $J_1 \cap J_2$.

2.4.2 Fonctions localement lipschitzienne

Définition 2.6 (Fonction localement lipschitzienne)

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et f une fonction définie sur $I \times \Omega$. On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable si pour tout $(t, x) \in I \times \Omega$, il existe $K > 0$ et un voisinage de (t, x) , $]t - a, t + a[\times B^2(x, \alpha)$, avec $a > 0$, $\alpha > 0$, tels que

$$\forall s \in]t - a, t + a[, \forall (y, z) \in B(x, \alpha) \times B(x, \alpha), \|f(s, y) - f(s, z)\| \leq K \|y - z\|.$$

Définition 2.7 (Fonctions globalement lipschitziennes)

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et f une fonction définie sur $I \times \Omega$. On dit que f est globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable s'il existe $K > 0$ tel que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq K \|x_1 - x_2\|, \quad \forall (t, x_1, x_2) \in I \times \Omega \times \Omega.$$

Exemple 6

Les fonctions

$$f(t, x) = t^4 + 5x, \quad g(t, x) = \cos(x),$$

définies sur \mathbb{R}^2 , sont globalement lipschitziennes par rapport à leur deuxième variable. En effet, pour f , $K = 5$ convient, tandis que pour g , $K = 1$ convient car d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe c appartenant à l'intervalle d'extrémités x et y tel que

$$\cos(x) - \cos(y) = -\sin(c)(x - y).$$

D'où

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |g(t, x) - g(t, y)| &= |\cos(x) - \cos(y)| \\ &= |-\sin(c)(x - y)| = |\sin(c)||x - y| \leq |x - y|. \end{aligned}$$

La fonction $f(t, x) = \sqrt{x}$ n'est pas localement au voisinage de 0. En effet,

$$\frac{f(t, x) - f(t, 0)}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty.$$

Proposition 2.8 (Les fonctions de classe C^1 sont localement lipschitziennes)

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et f une fonction définie sur $I \times \Omega$. Si $f \in C^1(I \times \Omega)$, alors f est localement lipschitzienne par rapport à ses deux variables et en particulier, par rapport à sa deuxième variable.

Démonstration : Soit $(t, x) \in I \times \Omega$. Comme $I \times \Omega$ est ouvert de \mathbb{R}^{n+1} , il existe $a_t > 0$ $\alpha_x > 0$ tels que $[t - a_t, t + a_t] \subset I$ et $\bar{B}(x, \alpha_x) \subset \Omega$. Comme la fonction f appartient à $C^1(I \times \Omega)$, les fonctions g_i définies sur le sous-ensemble compact $[t - a_t, t + a_t] \times \bar{B}(x, \alpha_x)$ de \mathbb{R}^{n+1} par

$$g_{i,j}(s, w) = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(s, w) \right|, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n$$

sont continues. Elles atteignent donc leur maximum, noté $K_{i,j}$, sur ce compact. On note

$$K := \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} K_{i,j}^2}.$$

Soit $y, z \in \bar{B}(x, \alpha_x)$, $\lambda \in [0, 1]$ et $F_i(\lambda) = f_i(s, \lambda(y - z) + z)$. On applique le théorème des accroissements finis à F_i sur $[0, 1]$, il existe $c_i \in]0, 1[$ tel que $F_i(1) - F_i(0) = F_i'(c_i)$. En posant $z_i = c_i(y - z) + z$ ³, on aura

$$f_i(s, y) - f_i(z) = (\nabla f_i(s, z_i), (y - z)),$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^n . De l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient⁴

$$|f_i(s, y) - f_i(z)| \leq \|\nabla f_i(s, z_i)\|_2 \|y - z\|_2 \leq \sup_{z \in \bar{B}(x, \alpha_x)} \|\nabla f_i(s, z)\|_2 \|y - z\|_2 \leq K \|y - z\|_2.$$

On déduit

$$\forall s \in]t - a_t, t + a_t[, \forall (y, z) \in B(x, \alpha_x)^2, \text{ on a } \|f(s, y) - f(s, z)\|_2 \leq K \|y - z\|_2.$$

3. On notera que $z_i \in \bar{B}(x, \alpha_x)$

4. On a noté $\|X\|_2$ la norme euclidienne du vecteur $X = (x_1, \dots, x_n) : \|X\|_2 := \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|^2}$.

Remarque 2.9

Soit $p \geq 1$. L'application $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ de composantes $f = (f_i)_{1 \leq i \leq p}$ est continue, respectivement localement lipschitzienne, respectivement globalement lipschitzienne, si et seulement si chacune de ses composantes, f_i , le sont.

Exemple 7

La fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(t, x) = t - x^2$ est une fonction polynôme des 2 variables t et x , donc appartient à $C^1(\mathbb{R}^2)$. Elle est donc localement lipschitzienne par rapport à x . Mais elle n'est pas globalement lipschitzienne par rapport à x . En effet, pour tout $K > 0$, il existe $(t, x, y) = (0, K + 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$|f(t, x) - f(t, y)| = (K + 1)^2 > K(K + 1) = K|x - y|.$$

2.4.3 Théorèmes de Cauchy-Lipschitz

Théorème 2.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz- Version globalement Lipschitz)

Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n . On suppose que f est une fonction continue et lipschitzienne par rapport à la variable u . Alors pour tout $(t_0, u_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy suivant :

$$(2.8) \quad \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0 \end{cases},$$

admet une unique solution globale (I, u) .

De plus, si f est de classe $C^k(I \times \Omega; \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, alors $u \in C^{k+1}(J; \mathbb{R}^n)$.

Démonstration :

On veut chercher une fonction de classe C^1 sur un voisinage de t_0 , noté $I_0 = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ à valeurs dans un voisinage de u_0 et vérifiant sur I_0 :

$$(2.9) \quad u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds.$$

La fonction u peut être vue comme le point fixe de l'application F qui à $\phi \in C^1(I_0, \mathbb{R}^n)$ associe

$$F(\phi)(t) := u_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Pour montrer que F admet un point fixe, il suffit de montrer que pour α suffisamment petit l'application F est une contraction de $\mathcal{C}(I_0; \mathbb{R}^n)$ dans lui-même. Le théorème de point fixe sur un Banach nous permettra de conclure à l'existence d'une solution locale.

On rappelle que F est une contraction si il existe $0 < k < 1$ tel que

$$\sup_{t \in I_0} \|F(\phi_1)(t) - F(\phi_2)(t)\| \leq k \sup_{t \in I_0} \|\phi_1(t) - \phi_2(t)\|$$

Comme f est globalement lipschitz, on a

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I_0} \|F(\phi_1)(t) - F(\phi_2)(t)\| &\leq \sup_{t \in I_0} \left\| \int_{t_0}^t f(s, \phi_1(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, \phi_2(s)) ds \right\| \\ &\leq \sup_{t \in I_0} \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s))\| ds \right| \\ &\leq \sup_{t \in I_0} \left| \int_{t_0}^t M \|\phi_1(s) - \phi_2(s)\| ds \right| \\ &\leq M\alpha \sup_{t \in I_0} \|\phi_1(s) - \phi_2(s)\| \end{aligned}$$

où M désigne la constante de lipschitz de f . On voit donc que si $\alpha M < 1$ alors F est une contraction. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure que si $\alpha M < 1$, il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}(I_0)$ vérifiant (2.9).

En utilisant (2.9), on vérifie ensuite que cette solution est de classe $\mathcal{C}^1(I_0)$

Dans le cas où f est globalement Lipschitz, on peut montrer l'existence d'une solution définie sur tout l'intervalle I par un argument dit de "bootstrap". Dans le cas $I = \mathbb{R}$, notons $u_1 = u(t_0 + \alpha)$ et considérons le problème de Cauchy

$$(2.10) \quad \begin{cases} u'(t) &= f(t, u(t)), \\ u(t_0 + \alpha) &= u_1 \end{cases},$$

Par un argument similaire, on montre que ce nouveau problème admet une unique solution définie sur $I_1 = [t_0 + \alpha, t_0 + 2\alpha]$. De proche en proche, on définit une solution sur tout intervalle $[t_0 + k\alpha, t_0 + 2k\alpha]$ pour $k \in \mathbb{Z}$. La fonction obtenue en recollant chacune de ces solution est une solution de l'équation sur \mathbb{R} .

L'unicité de la solution du problème de Cauchy définie sur \mathbb{R} est un corollaire du lemme de Gronwall 2.10. ■

Lemme 2.10 (lemme de Gronwall-Bellman)

Soit u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[t_0 - c, t_0 + c]$ avec $c > 0$. On suppose que u est à valeurs positives. Si ces deux fonctions vérifient l'inégalité

$$(2.11) \quad \forall t \in [t_0 - c, t_0 + c], \quad u(t) \leq v(t) + \lambda \int_{t_0}^t u(s) ds$$

où λ est un nombre positif ou nul, alors,

$$\forall t \in [t_0 - c, t_0 + c], \quad u(t) \leq v(t) + \lambda \begin{cases} \int_{t_0}^t v(s) \exp(\lambda(t-s)) ds, & \text{si } t \in [t_0, t_0 + c] \\ \int_t^{t_0} v(s) \exp(\lambda(s-t)) ds, & \text{si } t \in [t_0 - c, t_0] \end{cases}$$

Démonstration : On suppose que $t \geq t_0$, la démonstration pour $t < t_0$ est analogue. On définit la

fonction

$$U : [t_0, t_0 + c[\rightarrow \mathbb{R}, \quad U(t) = \int_{t_0}^t u(s) ds.$$

De l'inégalité (2.11), on déduit :

$$U'(t) \leq v(t) + \lambda U(t).$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par $\exp(-\lambda t)$ on obtient

$$(U(t) \exp(-\lambda t))' \leq v(t) \exp(-\lambda t).$$

Comme $U(t_0) = 0$, l'intégration de cette inéquation différentielle conduit à

$$U(t) \leq \int_{t_0}^t v(s) \exp(\lambda(t-s)) ds.$$

Tenant compte de la définition de U , on déduit

$$\int_{t_0}^t u(s) ds \leq \int_{t_0}^t v(s) \exp(\lambda(t-s)) ds.$$

De (2.11), on déduit le résultat cherché :

$$u(t) \leq v(t) + \lambda \int_{t_0}^t v(s) \exp(\lambda(t-s)) ds. \quad \blacksquare$$

Corollaire 2.11 (Existence et unicité pour un problème linéaire)

Soit $-\infty \leq b_1 < b_2 \leq +\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A :]b_1, b_2[\rightarrow M_n(\mathbb{R})$, $B :]b_1, b_2[\rightarrow \mathbb{R}^n$, deux fonctions continues sur $]b_1, b_2[$. Pour tout $(t_0, u_0) \in]b_1, b_2[\times \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + B(t), & t \in]b_1, b_2[, \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale globale (définie sur $]b_1, b_2[$).

On retrouve immédiatement le théorème d'existence et d'unicité de solutions globales démontré au chapitre précédent pour les problèmes linéaires.

On peut étendre ce théorème à des fonctions f localement Lipschitz :

Théorème 2.2 (Théorème de Picard (1856 - 1941)-Théorème de Cauchy-Lipschitz)

Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n . On suppose que f est une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable u . Alors pour tout $(t_0, u_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy suivant :

$$(2.12) \quad \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0 \end{cases},$$

admet **une unique solution maximale** (J, u) .
De plus, si f est de classe $\mathcal{C}^k(I \times \Omega; \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, alors $u \in \mathcal{C}^{k+1}(J; \mathbb{R}^n)$.

On admettra ce théorème.

2.4.4 Cas particulier des systèmes autonomes

Définition 2.12

On dit que le système différentiel $y' = f(t, y)$ est **autonome** si la fonction f est indépendante du temps : $f(t, y) = \bar{f}(y)$ pour tout $t \in I$.

Corollaire 2.13 (Système différentiel autonome)

Les trajectoires d'un système différentiel autonome ne peuvent pas se croiser.

Exemple 8

On considère le système proie-prédateur

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x(a - by) \\ y(-c + dx) \end{pmatrix} := f(x, y)$$

pour une donnée initiale $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}^{+,*})^2$. La fonction f est polynomiale en x et y et donc a fortiori localement lipschitzienne. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution maximale définie sur un intervalle J . Le théorème 2.13 permet de montrer que pour tout $t \in J$, $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$. En effet, on peut voir que $(x(t), y(t))_{t \in J} = (x_0 e^{at}, 0)_{t \in J}$ est une trajectoire pour tout $x_0 > 0$, de même que $(x(t), y(t))_{t \in J} = (0, y_0 e^{-ct})_{t \in J}$. Par conséquent, tous les points $(x, 0)$ ou $(0, y)$ sont des points d'une trajectoire qui ne peuvent appartenir à une trajectoire issue d'un point $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}^{+,*})^2$.

2.4.5 Cas f continue

Dans le cas où la fonction f est seulement continue, on sait montrer l'existence d'au moins une solution au problème de Cauchy mais on perd l'unicité de la solution.

Théorème 2.3 (Théorème de Cauchy-Peano-Arzelà)

Soit f continue de $I \times \Omega$ dans \mathbb{R}^n , où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Alors il existe au moins une solution (J, u) de (2.2).

Le théorème de Cauchy-Peano-Arzelà assure l'existence d'une solution à un problème de Cauchy mais ne dit rien sur l'unicité des solutions qui en général est fautive.

2.5 Théorèmes d'explosion

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité locale de solutions : quelle que soit la condition initiale $(t_0, u_0) \in I \times \Omega$, l'existence d'une solution unique est garantie sur un

certain intervalle. Se posent alors diverses questions. Comment savoir si telle ou telle solution est prolongeable ou non? On a vu que c'était possible pour f globalement Lipschitz, mais qu'en est-il dans le cas général? Quel lien existe-t-il entre le domaine de définition du second membre du système différentiel et l'intervalle maximal d'existence des solutions? Sous quelles conditions peut-on dire que les solutions d'un même système différentiel sont définies sur un même intervalle?

On rappelle l'exemple suivant :

Exemple 9

On considère le problème de Cauchy

$$(2.13) \quad u' = u^2, \quad u(0) = c.$$

Son unique solution est donnée par $u(t) = \frac{c}{1-ct}$. Elle est définie sur l'intervalle $]-\infty, \frac{1}{c}[$ si c est positif, sur $]\frac{1}{c}, \infty[$ si c est négatif et sur \mathbb{R} si $c = 0$. On voit que cette solution n'est, en général, pas prolongeable à tout \mathbb{R} alors que le second membre f est défini partout (sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Pour caractériser cet intervalle maximal d'existence on a un outil appelé le théorème d'explosion ou le théorème des bouts suivant :

Théorème 2.4 (Théorème d'explosion - Cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$)

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $(t_0, u_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. On note $b_2 = \sup I, b_1 = \inf I$. Soit f une fonction définie sur $I \times \mathbb{R}^n$, continue et localement Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. Il existe une unique solution maximale (J, u) du problème de Cauchy (2.12) où J est un intervalle ouvert $]\beta_1, \beta_2[$.

1. Si $\beta_1 > b_1$ (ce qui veut dire que la solution est locale), alors

$$(2.14) \quad \limsup_{t \rightarrow \beta_1^+} \|u(t)\| = +\infty, \quad \text{i.e.} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [\beta_1, \beta_1 + \varepsilon]} \|u(t)\| = +\infty.$$

2. Si $\beta_2 < b_2$ (ce qui veut dire que la solution est locale), alors

$$(2.15) \quad \limsup_{t \rightarrow \beta_2^-} \|u(t)\| = +\infty, \quad \text{i.e.} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [\beta_2 - \varepsilon, \beta_2]} \|u(t)\| = +\infty.$$

Ce théorème se généralise à un ouvert Ω de la façon suivante :

Théorème 2.5 (Théorème d'explosion - Cas général)

Sous les hypothèses du théorème 2.2, on note $b_2 = \sup I, b_1 = \inf I$ et $(]\beta_1, \beta_2[, u)$ la solution maximale du problème de Cauchy 2.12. On a l'alternative suivante :

1. $b_2 = \beta_2$

2. Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\delta > 0$ tel que $u(t) \in \Omega \setminus K$ pour tout $t \in]\beta_2 - \delta, \beta_2[$. Dans ce cas, on dit que u sort de tout compact.

De même on a l'alternative suivante

1. $b_1 = \beta_1$
2. Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\delta > 0$ tel que $u(t) \in \Omega \setminus K$ pour tout $t \in]\beta_1, \beta_1 + \delta[$.

Corollaire 2.14 ($\Omega = \mathbb{R}^n$. *Toute solution maximale bornée est globale*)

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $(t_0, u_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Soit f une fonction définie sur $I \times \mathbb{R}^n$, continue et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable.

Si la solution maximale du problème de Cauchy (2.12) est bornée, alors elle est globale.

Exemple 10

On considère l'équation logistique $y' = f(y) = y(1 - y)$ pour $y(0) = y_0 \in]0, 1[$. La fonction f étant très régulière, elle est a fortiori localement Lipschitz par rapport à y et le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution maximale définie sur un intervalle maximal J . On rappelle que alors que cette équation a deux équilibres $t \mapsto 0$ et $t \mapsto 1$ et comme il s'agit d'une équation autonome le théorème 2.13 assure que pour tout $t \in J$, $y(t) \in]0, 1[$. En particulier, la solution maximale est bornée. On en déduit en utilisant le corollaire 2.14 que la solution est globale $J = \mathbb{R}$.

2.6 Approximation des solutions d'une EDO

2.6.1 Discrétisation

Soit f continue de $I \times \Omega$ dans \mathbb{R}^d , où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On a vu qu'il existe une unique solution maximale (J, y) du problème de Cauchy

$$(2.16) \quad y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [0, T_0[, \quad y(0) = y_0.$$

On supposera que l'intervalle $[0, T]$ est inclus dans J et on va chercher à *approcher* la solution y sur cet intervalle.

Définition 2.15 (Discrétisation)

Soit $T > 0$ donné. On appelle *discrétisation* τ de l'intervalle $[0, T]$, ou *subdivision* de $[0, T]$, la donnée d'une suite $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ telle que

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T, \quad t_{n+1} - t_n = h_n, \quad 0 \leq n \leq N.$$

La quantité $h = \max_{0 \leq n \leq N} h_n$ est alors appelé **pas de la discrétisation**.

On dit que la discrétisation est **régulière** ou **uniforme** si $h_n = h$ est indépendant de n , autrement dit $t_n = nh$ pour tout $n = 0, \dots, N$.

Etant donné une discrétisation $\tau = (t_n)_{0 \leq n \leq N}$, on va chercher une suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ qui "approche" $y(t_n)$. On appelle schéma numérique, un algorithme qui permet de calculer les éléments de la suite y_n .

Définition 2.16 (Schéma numérique à un pas)

Etant donné une discrétisation $\tau = (t_n)_{0 \leq n \leq N}$, On appelle schéma à un pas, une suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ définie par une récurrence de la forme

$$(2.17) \quad y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, h_n, y_n), \quad n = 0, \dots, N - 1, \quad y_0 \text{ donné.}$$

2.6.2 Etude d'un schéma numérique

Reste à définir ce que l'on appelle une "bonne approximation". Pour cela on va introduire la notion d'erreur de l'approximation ou erreur du schéma.

Définition 2.17 (Erreur d'un schéma numérique)

Soit $T > 0$ et $\tau = (t_n)_{0 \leq n \leq N}$ une discrétisation de pas h de l'intervalle $[0, T]$. Soit $([0, T], y)$ une solution du problème (2.16) et $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ une solution du schéma (2.17). On appelle **erreur du schéma**, la suite $e^h = (e_n)_{0 \leq n \leq N}$ définie par

$$e_n = y(t_n) - y_n \text{ pour } n = 0, \dots, N.$$

Définition 2.18 (Convergence d'un schéma)

Soit $T > 0$ et $\tau_h = (t_n^h)_{0 \leq n \leq N_h}$ une famille de discrétisations de l'intervalle $[0, T]$ dont le pas h tend vers 0. Soit $e^h = (e_n^h)_{n=0, \dots, N_h}$ l'erreur du schéma associée à chacune des discrétisations. On dit que le schéma (2.17) est convergent si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{n=0, \dots, N_h} |e_n^h| = 0.$$

L'étude de la convergence d'un schéma repose sur

- La consistance du schéma
- La convergence du schéma

Définition 2.19 (Consistance d'un schéma numérique)

Soit $T > 0$ et $\tau_h = (t_n^h)_{0 \leq n \leq N_h}$ une famille de discrétisations de l'intervalle $[0, T]$ dont le pas h tend vers 0. Soit $([0, T], y)$ la solution du problème de Cauchy (2.16).

On appelle **erreur de consistance du schéma** (2.17) la suite $R^h = (R_n^h)_{n=0, \dots, N_h}$ définie par

$$R_n = \frac{1}{h_n} (y(t_{n+1}) - y(t_n) - \phi(t_n, h_n, y(t_n))).$$

De plus,

- On dit que le schéma est **consistant** si $\sup_{n=0, \dots, N_h} |R_n^h|$ tend vers zéro lorsque h tend vers zéro.
- On dit que le schéma est d'ordre p s'il existe une constante C telle que

$$\max_{n=0, \dots, N_h} |R_n^h| \leq Ch^p.$$

Définition 2.20 (Stabilité par rapport aux erreurs d'arrondis)

Soit $T > 0$ et $\tau_h = (t_n^h)_{0 \leq n \leq N_h}$ une famille de discrétisations de l'intervalle $[0, T]$ dont le pas h tend vers 0.

On dit que le schéma (2.17) est stable par rapport aux erreurs s'il existe $h_* > 0$ et C ne dépendant que de T, f, ϕ, y_0 tels que si $\max_k h_k \leq h_*$ et si (y_n) et (z_n) désignent les deux suites définies par

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n \phi(t_n, h_n, y_n), \quad n = 0, \dots, N_h - 1 \\ z_{n+1} &= z_n + h_n \phi(t_n, h_n, z_n) + \varepsilon_n \end{aligned}$$

où $(\varepsilon_n)_{n=0, \dots, N_h}$ est donnée, alors pour tout $n = 0, \dots, N_h - 1$, on a

$$(2.18) \quad |y_n - z_n| \leq C \left(|y_0 - z_0| + \sum_{i=0}^{n-1} |\varepsilon_i| \right)$$

Théorème 2.6 (Convergence)

Soit $T > 0$ et $\tau_h = (t_n^h)_{0 \leq n \leq N_h}$ une famille de discrétisations de l'intervalle $[0, T]$ dont le pas h tend vers 0.

Un schéma stable par rapport aux erreurs d'arrondis et consistant converge vers la solution du problème de Cauchy (2.16) lorsque le pas de la discrétisation h tend vers 0.

Démonstration : Soit $T > 0$ et $\tau_h = (t_n^h)_{0 \leq n \leq N_h}$ une famille de discrétisations de l'intervalle $[0, T]$ dont le pas h tend vers 0. Soit y la solution du problème de Cauchy (2.16). On rappelle que si $\bar{y}_n = y(t_n)$, d'après la définition 2.19 de l'erreur de consistance du schéma R_n^h ,

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + h_n \phi(t_n, h_n, \bar{y}_n) + h_n R_n^h.$$

La propriété de stabilité par rapport aux erreurs d'arrondis assure alors que

$$|y_n - \bar{y}_n| \leq C \left(|y_0 - \bar{y}_0| + \sum_{i=0}^{n-1} h_i |R_i^h| \right),$$

et la consistance du schéma que $\sup_{0 \leq i \leq N_h} |R_i^h|$ tend vers zéro lorsque h tend vers zéro. On en déduit si $y_0 = \bar{y}_0$ que le schéma converge. De plus si le schéma est d'ordre p , on a une estimation de l'erreur :

$$\max_{n=0, \dots, N_h} |y_n - \bar{y}_n| \leq C (|y_0 - \bar{y}_0| + Th^p).$$



2.6.3 Le schéma d'Euler explicite

L'exemple le plus simple de schéma consiste à remarquer en intégrant l'équation entre deux temps t_n et t_{n+1} que

$$\begin{aligned}
 y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) ds \\
 &= y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(s) ds \\
 &= y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(y'(t_n) + \int_{t_n}^s y''(u) du \right) ds \\
 &= y(t_n) + h_n f(t_n, y(t_n)) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\int_{t_n}^s y''(u) du \right) ds \\
 &= y(t_n) + h_n f(t_n, y(t_n)) + h_n R_n
 \end{aligned}$$

On appelle schéma d'Euler explicite le schéma

$$(2.19) \quad y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) \text{ i.e. } \phi(t, h, y) = f(t, y).$$

Proposition 2.21 (Consistance du schéma d'Euler)

On suppose que la solution $([0, T], y)$ du problème de Cauchy (2.16) est de classe $C^2(0, T)$. Alors le schéma d'Euler explicite est consistant et d'ordre 1. Plus précisément,

$$|R_n| \leq \frac{h_n}{2} \sup_{[0, T]} |y''|.$$

Démonstration : C'est juste une conséquence du fait que

$$h_n R_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\int_{t_n}^s y''(u) du \right) ds. \quad \blacksquare$$

Définition 2.22

On dit que la fonction f est **Lipschitz sur les bornés** si Pour tout $A > 0$, il existe K_A tel que

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq K_A \|y - z\|, \forall (y, z) \in B_A \times B_A, \forall t \in [0, T]$$

où B_A désigne la boule de centre 0 et de rayon A .

Proposition 2.23 (Stabilité du schéma d'Euler explicite)

On suppose que f est Lipschitz sur le bornés au sens de la définition 2.22, alors Le schéma d'Euler est stable par rapport aux erreurs d'arrondis.

Démonstration : On démontre le théorème dans le cas où f est globalement lipschitz de constante de Lipschitz K . On a

$$\begin{aligned} |y_{n+1} - z_{n+1}| &\leq |y_n - z_n| + h_n |\phi(t_n, h_n, y_n) - \phi(t_n, h_n, z_n)| + |\varepsilon_n| \\ &\leq |y_n - z_n| + h_n |f(t_n, y_n) - f(t_n, z_n)| + |\varepsilon_n| \\ &\leq |y_n - z_n|(1 + h_n K) + |\varepsilon_n| \end{aligned}$$

où K désigne la constante de Lipschitz de f . En remarquant que $1 + h_n K \leq e^{K(t_{n+1} - t_n)}$ et en posant $\eta_n = |y_n - z_n|e^{-Kt_n}$, on obtient

$$\eta_{n+1} \leq \eta_n + e^{-Kt_{n+1}} |\varepsilon_n| \leq \eta_0 + \sum_{i=0}^n e^{-Kt_{i+1}} |\varepsilon_i|$$

On en déduit que

$$e^{-Kt_n} |y_n - z_n| \leq e^{-Kt_0} |y_0 - z_0| + \sum_{i=0}^{n-1} e^{-Kt_{i+1}} |\varepsilon_i|$$

et donc que

$$|y_n - z_n| \leq e^{K(t_n - t_0)} |y_0 - z_0| + \sum_{i=0}^{n-1} e^{K(t_n - t_{i+1})} |\varepsilon_i| \leq e^{KT} \left(|y_0 - z_0| + \sum_{i=0}^{n-1} |\varepsilon_i| \right) \quad \blacksquare$$

Théorème 2.7

On suppose que f est Lipschitz sur les bornés au sens de la définition 2.22 et que la solution $([0, T], y)$ du problème de Cauchy (2.16) est de classe $C^2(0, T)$. Alors le schéma d'Euler explicite converge et plus précisément,

$$\max_{n=0, \dots, N_h} |y(t_n) - y_n| \leq h e^{KT} T \sup_{[0, T]} |y''|.$$

Démonstration : C'est une conséquence des propriétés de consistance et de stabilité du schéma d'Euler explicite et du fait que $y(0) = y_0$. \blacksquare

2.6.4 Autres schémas à un pas - le schéma d'Euler implicite

La méthode d'Euler implicite consiste à approcher l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$ par $f(t_{n+1})y(t_{n+1})$. Autrement dit, on peut considérer le système

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

Attention, y_{n+1} est solution d'un système implicite. La première question à se poser pour ce type de schéma est l'existence de y_{n+1} . On peut montrer qu'une condition suffisante pour que le schéma soit bien posé est que

$$(D_y f(t, y)z, z) \leq 0 \quad \forall y \in \Omega, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d, \quad \forall t \geq 0.$$

On peut vérifier qu'alors le schéma est consistant d'ordre 1 et stable.

Chapitre 3

Propriétés qualitatives des équations différentielles non linéaires

L'objectif de ce chapitre est de rassembler un certain nombre de résultats qui permettent, sans avoir explicité les solutions d'une équation ou d'un système différentiel de décrire les propriétés de ces trajectoires. Les questions que l'on se posera seront les suivantes :

- Les solutions des problèmes de Cauchy sont-elles globales ?
- Y-a-t-il des trajectoires particulières comme des équilibres par exemple ?
- Que peut-on dire des trajectoires au voisinage des points d'équilibre ?
- Lorsque les solutions sont définies de façon globale, que peut-on dire du comportement à l'infini des solutions ?

3.1 Quelques outils pour déterminer le caractère global des solutions

On s'intéresse aux solutions du système différentiel $u' = f(t, u(t))$.

★ Cas f sous-linéaire

Théorème 3.1 (*Les fonctions sous-linéaires*)

Soit $-\infty \leq b_1 < b_2 \leq +\infty$. Soit f définie sur $]b_1, b_2[\times \mathbb{R}^n$, continue et localement lipschitzienne sur ce domaine. On suppose qu'il existe deux fonctions réelles f_1, f_2 continues sur $]b_1, b_2[$ telles que

$$(3.1) \quad \forall (t, u) \in]b_1, b_2[\times \mathbb{R}^n : \quad \|f(t, u)\| \leq f_1(t)\|u\| + f_2(t).$$

Alors, pour tout $(t_0, u_0) \in]b_1, b_2[\times \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy associé à f et (t_0, u_0) admet une unique solution maximale globale (i.e définie sur $]b_1, b_2[$).

Démonstration : Supposons qu'il existe une solution maximale $(] \beta_1, \beta_2[, u)$ avec $] \beta_1, \beta_2[\subsetneq I$. Supposons, par exemple, que $\beta_2 < b_2$ et choisissons $t_0 \in] \beta_1, \beta_2[$. On a :

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0, \beta_2[, \quad \|u(t)\| &\leq \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|f(s, u(s))\| ds \\ &\leq \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^t (f_1(s)\|u(s)\| + f_2(s)) ds \\ &\leq \|u(t_0)\| + a \int_{t_0}^t \|u(s)\| ds + b(t - t_0), \end{aligned}$$

où a et b sont des majorants des fonctions $|f_i|$ (continues sur le compact $[t_0, \beta_2]$). On pose

$$m = \sup_{t \in [t_0, \beta_2]} (\|u(t_0)\| + b(t - t_0)) = \|u(t_0)\| + b(\beta_2 - t_0).$$

D'après le lemme 2.10 page 58 de Gronwall-Bellman, de l'inégalité précédente, on déduit : $\forall t \in [t_0, \beta_2[$,

$$\|u(t)\| \leq m + a \int_{t_0}^t m e^{a(t-s)} ds = m + m[e^{a(t-t_0)} - 1] \leq m e^{a(\beta_2 - t_0)}.$$

En conséquence, u est bornée sur $[t_0, \beta_2[$ ($\limsup_{t \rightarrow \beta_2} \|u(t)\| < +\infty$). Ceci contredit le corollaire 2.14. En conséquence, $\beta_2 = b_2$.

Exemple 11

On considère l'équation $u' = \frac{tu(t)}{1+u(t)^2}$. Ici $f(t, u) = \frac{tu}{1+u^2}$, par conséquent,

$$|f(t, u)| \leq t|u|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que les solutions de cette équation sont globales.

Corollaire 3.1 (Systèmes linéaires)

Soit $A :]b_1, b_2[\rightarrow M_n(\mathbb{R})$, $B :]b_1, b_2[\rightarrow \mathbb{R}^n$, deux fonctions continues sur $]b_1, b_2[$. Si $f(t, u) = A(t)u + B(t)$, alors le problème de Cauchy associé à f admet une unique solution globale.

Corollaire 3.2 (f bornée sur $I \times \mathbb{R}^n$)

Soit $-\infty \leq b_1 < b_2 \leq +\infty$. On suppose f est définie sur $]b_1, b_2[\times \mathbb{R}^n$, continue, localement lipschitzienne par rapport la seconde variable et bornée, i.e. il existe $M \geq 0$ tel que

$$\|f(t, u)\| \leq M, \quad \forall (t, u) \in I \times \mathbb{R}^n.$$

Alors, pour tout $(t_0, u_0) \in]b_1, b_2[\times \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in]b_1, b_2[, \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale **globale** (définie sur $]b_1, b_2[$).

Démonstration : La fonction f est continue sur $I \times \mathbb{R}^n$ et localement lipschitzienne par rapport à u . Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer que pour tout $(t_0, u_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy associé a une unique solution maximale. De plus, il existe $f_1 = 0, f_2(t) = M$, applications continues sur $]b_1, b_2[$ telles que (3.1) soit vérifiée. La conclusion découle du théorème 3.1.

Exemple 12

On considère le système

$$\begin{aligned} x' &= \sin(x(t)y(t)) \\ y' &= 1 + \cos(x(t)) \end{aligned}$$

On vérifie que $f(t, x, y) = \begin{pmatrix} \sin(xy) \\ 1 + \cos(x) \end{pmatrix}$ est bornée. Par conséquent les solutions de ce système différentiel sont globales.

★ Critère géométrique

Théorème 3.2 (Borné stable)

On suppose que f est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et qu'il existe un domaine Ω de frontière Γ régulière tel que

$$f(t, u) \cdot \nu \leq 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, u \in \Gamma,$$

où ν désigne la normale sortante à Γ . Alors, si (I, u) est une solution de l'équation telle que $u(t_0) \in \Omega$ pour $t_0 \in I$, on a $u(t) \in \Omega$ pour tout $t \geq t_0$.

Exemple 13

On considère le système suivant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) - y(t)^3 \end{pmatrix}$$

On désigne par (I, x, y) la solution maximale de problème de Cauchy associé à la condition initiale $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$, avec $I =]T_{\min}, T_{\max}[$ et $t_0 \in I$. Soit $\Omega_{\mathbb{R}}$ la boule de centre 0 et de rayon \mathbb{R} et (x_*, y_*) un point de la frontière (i.e. $x_*^2 + y_*^2 = \mathbb{R}^2$).

On vérifie que $\nu = \frac{1}{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix}$ et par conséquent

$$f(t, x_*, y_*) \cdot \nu = \begin{pmatrix} -y_* \\ x_* - y_*^3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix} = -\frac{1}{\mathbb{R}} y_*^4 < 0$$

Par conséquent, si $(x_0, y_0) \in \Omega_{\mathbb{R}}$ alors pour tout $t > t_0, (x(t), y(t)) \in \Omega_{\mathbb{R}}$. On en déduit que la solution est bornée pour $t > t_0$ et par suite que $T_{\max} = +\infty$.

★ **Utilisation d'une fonctionnelle pour borner les solutions**

Exemple 14

On considère le système de Van der Pol

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) - y(t)^3 + y(t) \end{pmatrix}$$

On désigne par (I, x, y) la solution maximale de problème de Cauchy associé à la condition initiale $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$, avec $I =]T_{\min}, T_{\max}[$ et $t_0 \in I$. Soit H la fonctionnelle

$$H : (x, y) \mapsto H(x, y) = x^2 + y^2$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) &= 2(x'(t)x(t) + y'(t)y(t)) \\ &= -y^4(t) + y^2(t) \leq x^2(t) + y^2(t) = H(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$H(x(t), y(t)) \leq H(x_0, y_0)e^{T_{\max}}.$$

Par conséquent, si T_{\max} est fini, $t \mapsto H(x(t), y(t))$ est bornée, et par suite la solution (x, y) reste bornée, ce qui est impossible d'après le théorème d'explosion.

3.2 Comportement des solutions de systèmes différentiels linéaires pour des temps longs

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. L'unique solution de

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t), & t \in \mathbb{R}, \\ Y(0) = Y_0, \end{cases}$$

est donnée par

$$Y(t) = \exp(tA)Y_0.$$

On s'intéresse au comportement de Y pour des temps longs ($t \rightarrow +\infty$).

Théorème 3.3

1. Les solutions de l'équation différentielle $Y' = AY$ tendent toutes vers 0 quand $t \rightarrow \infty$ si et seulement si toutes les valeurs propres λ de A ont des parties réelles négatives $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.
2. Les solutions de $Y' = AY$ sont toutes bornées quand $t \rightarrow +\infty$ si et seulement si toutes les valeurs propres λ de A ont des parties réelles négatives ou nulles $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$, et si tous les blocs de Jordan des valeurs propres purement imaginaires sont de taille 1.
3. Si aucune valeur propre de A n'est purement imaginaire, alors on peut écrire de façon unique

$\mathcal{C}^n = E^s \oplus E^u$, où

(a) Les sous-espaces E^s et E^u sont stables par le flot de l'équation différentielle (E est stable si $Y(0) \in E \Rightarrow Y(t) \in E \forall t$),

(b) $Y(0) \in E^s$ si et seulement si $Y(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, et

(c) $Y(0) \in E^u$ si et seulement si $Y(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow -\infty$.

L'espace E^s s'appelle l'**espace stable** de l'équation différentielle, et E^u s'appelle l'**espace instable** (*unstable en anglais*).

★ **Portrait de phase en dimension 2**

L'espace des matrices réelles 2×2 est évidemment de dimension 4, et on peut se demander comment cet espace isomorphe à \mathbb{R}^4 se décompose suivant le comportement des solutions de l'équation différentielle

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Le comportement qualitatif de ces solutions dépend essentiellement de deux paramètres : la trace $t = a + d$ et le déterminant $\Delta = ad - bc$ de la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

La figure 3.1 résume grossièrement la situation.

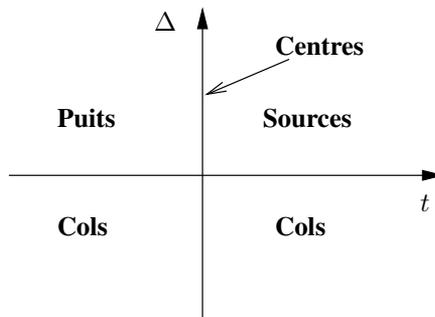


FIGURE 3.1 – Un diagramme de bifurcation grossier pour les systèmes de dimension 2 à coefficients constants.

On sait que le polynôme unitaire réel $\lambda^2 - t\lambda + \Delta$ a deux racines de parties réelles de signe opposé si et seulement si son terme constant Δ est négatif. Sinon, les parties réelles des racines sont toutes deux positives si $t > 0$ (on parle alors de **sources**), et toutes deux négatives si $t < 0$ (on parle alors de **puits**).

On appelle les cas où les racines ont des parties réelles de signes opposés des **cols**. Expliquons cette terminologie. Dans ce cas les racines $\lambda, -\mu$ sont nécessairement réelles, avec par exemple

$\lambda, \mu > 0$. Dans une base de vecteurs propres, l'équation différentielle s'écrit

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{de solution générale} \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha e^{\lambda t} \\ \beta e^{-\mu t} \end{bmatrix}.$$

Il y a deux classes de solutions spéciales : celles où $\alpha = 0$, qui tendent vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$, et dont les trajectoires forment la variété stable de l'équilibre 0, et celles où $\beta = 0$, qui tendent vers 0 quand $t \rightarrow -\infty$, et dont les trajectoires forment la variété instable de l'équilibre 0.

Les trajectoires forment des courbes représentées dans la figure 3.2, qui ressemblent plus ou moins aux courbes de niveau dessinées autour d'un col sur une carte géographique.

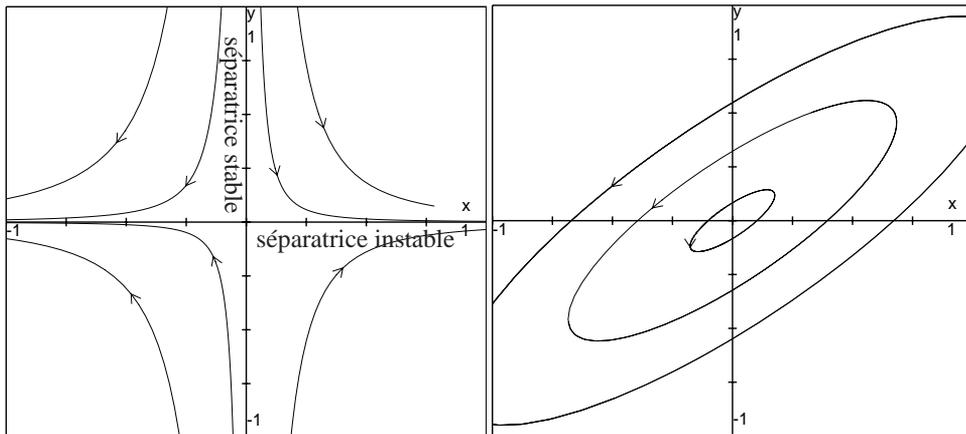


FIGURE 3.2 – A gauche, les trajectoires d'un col. A droite, les trajectoires d'un centre

Examinons d'un peu plus près ce qui se passe si $t = 0$ et $\Delta > 0$. Les valeurs propres sont alors $\pm i\sqrt{\Delta} = \pm i\omega$, et si on choisit $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ un vecteur propre pour $i\omega$, alors $(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}})$ forme une base de \mathbb{C}^2 dans laquelle l'équation différentielle s'écrit

$$\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}.$$

On peut préférer travailler avec des quantités réelles. Notons

$$\mathbf{w} = \operatorname{Re} \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \bar{\mathbf{v}}), \quad \tilde{\mathbf{w}} = \operatorname{Im} \mathbf{v} = \frac{1}{2i}(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}).$$

Les vecteurs \mathbf{w} et $\tilde{\mathbf{w}}$ forment une base de \mathbb{R}^2 , et dans cette base l'équation différentielle devient

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Les solutions sont donc (dans cette base) les fonctions périodiques

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t \\ \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t \end{bmatrix},$$

dont les trajectoires forment des cercles centrés en l'origine, paramétrés à fréquence $\omega/2\pi$; dans une base arbitraire les trajectoires seront des ellipses centrées à l'origine. On dit alors que le point d'équilibre 0 est un **centre**. Les autres cas de figures sont résumés sur la figure 3.3. L'allure des trajectoires dépend des racines du polynôme caractéristique

$$\lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det A.$$

Suivant qu'elles soient réelles ou complexes : les puits et les sources ont un comportement différent. C'est également le cas lorsque la matrice A a une valeur propre double.

3.3 Comportement des solutions au voisinage des équilibres - cas autonome

Théorème 3.4 (Théorème de Hartmann-Grobman ou théorème de linéarisation)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$. On considère le système différentiel $y' = f(y)$. On suppose que y^* est un point d'équilibre du système : $f(y^*) = 0$ dit hyperbolique c'est à dire que les valeurs propres de $A = Df(y^*)$ sont de parties réelles non nulles. Alors il existe un voisinage U de y^* , un voisinage V de 0 et un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ tel que $h(y^*) = 0$ et qui envoie bijectivement les trajectoires du système $y' = f(y)$ sur les trajectoires de $z' = Az$.

Exemple 15

On considère un modèle d'évolution de deux populations de proies-prédateur avec coompetition

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x(t)(1 - y(t) - x(t)) \\ -y(t)(1 - 2x(t)) \end{pmatrix} = f(x(t), y(t))$$

Ce système a deux points d'équilibre $(0, 0)$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. On vérifie que

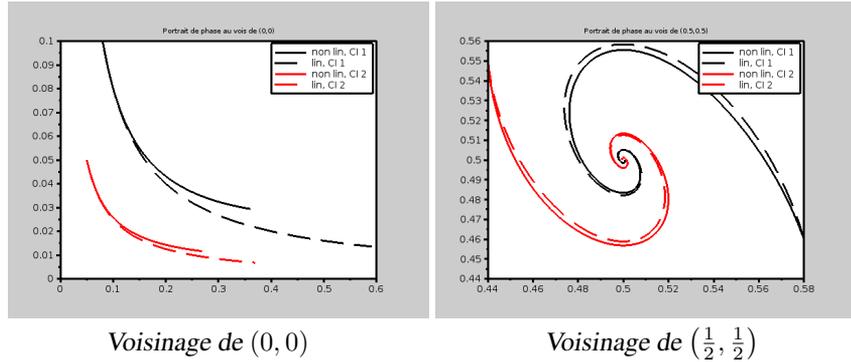
$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - y - 2x & -x \\ 2y & -1 + 2x \end{pmatrix}$$

soit

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } Df\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $Df(0, 0)$ sont 1 et -1. Le théorème de Hartman-Grobman nous dit qu'au voisinage de ce point d'équilibre les trajectoires vont être homéomorphes à celles du linéarisé pour lequel $(0, 0)$ est un équilibre de type col.

Les valeurs propres de $Df\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sont $\frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{7})$, de parties réelle strictement négatives donc non nulles. Par conséquent, au voisinage de cet équilibre, les trajectoires convergent vers le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.



On en déduit le comportement asymptotique des solutions au voisinage des points d'équilibres hyperboliques.

Théorème 3.5 (Comportement asymptotique)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. On considère le système différentiel $y' = f(y)$. On suppose que y^* est un point d'équilibre du système : $f(y^*) = 0$ tel que les valeurs propres de $A = Df(y^*)$ sont de parties réelles strictement négatives. Alors il existe un voisinage U de y^* , tels pour toutes conditions initiales $y_0 \in U$, alors, la solution qui vérifie $y(0) = y_0$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. De plus, pour tout $y_0 \in U$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y^*.$$

On dit que y^* est un point d'équilibre stable.

3.4 Comportement qualitatif des solutions en dimension 1

On se concentre dans cette section au cas d'une équation autonome en dimension 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle $y' = f(y)$.

On suppose que f s'annule en une famille de points $(y^{*,i})_{i \in \mathcal{S}}$. Notons \mathcal{S} cet ensemble de points. On se donne y_0 et on s'intéresse au problème de Cauchy

$$(3.2) \quad y' = f(y), \quad y(0) = y_0$$

Soit (I, y) , avec $I =]T_{\min}, T_{\max}[$ la solution maximale de ce problème.

Alors,

1. si y^* et \bar{y}^* sont deux points consécutifs de \mathcal{S} , i.e. $]y^*, \bar{y}^*[\cap \mathcal{S} = \emptyset$, alors pour tout $y_0 \in]y^*, \bar{y}^*[,$ la solution du problème de Cauchy (3.2) est définie sur $I = \mathbb{R}$. Elle est monotone et converge en $\pm\infty$ vers l'un des deux équilibres y^* et \bar{y}^* :

- Si f est positive sur $]y^*, \bar{y}^*[,$ alors

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = y^* \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \bar{y}^*$$

- Si f est négative sur $]y^*, \bar{y}^*[$, alors

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \bar{y}^* \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^*$$

2. Si $y^* \in \mathcal{S}$,

- Si $f'(y^*) < 0$, alors y^* est un point d'équilibre stable. Pour tout intervalle, J tel que $J \cap \mathcal{S} = \{y^*\}$ et pour tout $y_0 \in J$ alors $T_{\max} = +\infty$ et la solution du problème de Cauchy (3.2) converge lorsque $t \rightarrow +\infty$ vers y^* .
- Si $f'(y^*) > 0$, alors y^* est un point d'équilibre instable. Pour tout intervalle, J tel que $J \cap \mathcal{S} = \{y^*\}$ et pour tout $y_0 \in J$ alors $T_{\min} = -\infty$ et la solution du problème de Cauchy (3.2) converge lorsque $t \rightarrow -\infty$ vers y^* .
- Si $f'(y^*) = 0$ alors il existe un entier $l > 1$ tel que $f^{(l)}(y^*) \neq 0$ et le comportement asymptotique va dépendre de la parité de l et du signe de $f^{(l)}(y^*)$.

3. Si $\mathcal{S} = \{y^{1,*}, \dots, y^{p,*}\}$ est un ensemble fini de points, on peut entièrement caractériser le comportement des solutions. Une façon simple de représenter les choses est de faire un schéma comme dans la figure ?? Les flèches représentent le sens de variation des trajectoires.

3.5 Comportement qualitatif des solutions en dimension 2

On se concentre dans cette section au cas d'un système autonome en dimension 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

On se donne y_0 et on s'intéresse au problème de Cauchy

$$(3.3) \quad y' = f(y), \quad y(0) = y_0$$

3.5.1 Le théorème de Poincaré-Bendixon

En dimension 2, le théorème de Poincaré-Bendixon nous dit que le comportement asymptotique de trajectoires bornés ne peut être que de deux types.

Théorème 3.6 (Poincaré-Bendixon)

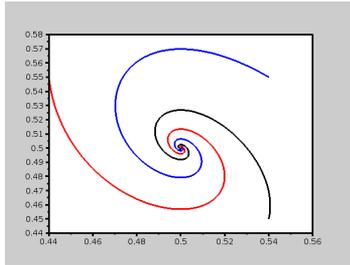
Si la solution maximale (I, y) du problème de Cauchy (3.3) est à valeurs pour $t > 0$ dans un compact $K \subset \mathbb{R}^2$, alors $[0, +\infty[\subset I$ et le comportement asymptotique ne peut être que de deux type

- La solution converge vers un point d'équilibre.
- La solution « converge » vers une solution périodique du système.

Voir le film Chaos des Maths - Chapitre IV [GAL14].

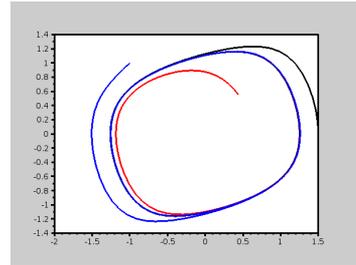
Exemple 16

On donne ici deux exemples



Système Proie-prédateur avec comp.

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x(1 - x - y) \\ -y(1 - 2x) \end{pmatrix}$$



Système de Van der Pol

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x - y^3 + y \end{pmatrix}$$

3.5.2 Le système proie-prédateur

On considère le système différentiel suivant :

$$(3.4) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t)(1 - y(t)), \\ y'(t) = -y(t)(1 - x(t)) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On suppose $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$ avec $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Nous allons voir que ce système est un exemple de système non linéaire pour lequel toutes les solutions sont périodiques.

• **Étape 1 : Existence d'une solution maximale**

Posons $u(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Le système différentiel s'écrit

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

avec $f(t, u) := (x(1 - y), -y(1 - x))$ où $u = (x, y)$. L'application $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est de classe C^1 et en particulier elle est continue et localement Lipschitzienne par rapport à u . Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer que pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy associé à $u(0) = u_0$ admet une unique solution maximale. On la note $(I, (x, y))$.

• **Étape 2 : Solutions particulières**

- Le système a deux points d'équilibre, $(0, 0)$ et $(1, 1)$.
- Si $x_0 = 0$, alors $(x(t), y(t)) = (0, e^{-t}y_0)$, $t \in \mathbb{R}$ est la solution maximale du problème de Cauchy. De même si $y_0 = 0$, alors $(x(t), y(t)) = (e^t x_0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ est la solution maximale du problème de Cauchy.

• **Étape 3 : Stabilité des équilibre**

On vérifie que $Df(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - y & -x \\ y & -(1 - x) \end{pmatrix}$. Par conséquent, $Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et

$$Df(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice $Df(0, 0)$ a une valeur propre double $\lambda = 1$ strictement positive. Le théorème de linéarisation assure que le point $(0, 0)$ est un point d'équilibre instable de type col.
- la matrice $Df(1, 1)$ a pour valeurs propres $\lambda^\pm = \pm i$ qui sont de parties réelle nulle. Par conséquent, on ne peut pas utiliser le théorème de linéarisation.

• **Étape 4 : Positivité des solutions**

Si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t \in I$. En effet, deux trajectoires d'un système autonome ne peuvent pas se croiser (unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz) et on a vu dans l'étape 2 que les demi-droites $\{(x, 0), x \in \mathbb{R}^{+,*}\}$ et $\{(0, y), y \in \mathbb{R}^{+,*}\}$ sont deux trajectoires et le point $(0, 0)$ en est également une.

• **Étape 5 : Les solutions tournent**

Décomposons l'espace $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ en quatre zones

- Zone I : $\{x > 1, y > 1\}$
- Zone II : $\{x < 1, y > 1\}$
- Zone III : $\{x < 1, y < 1\}$
- Zone IV : $\{x > 1, y < 1\}$

La figure 3.6 montre que sur chacune de ces zones les composantes du champ de vecteur f sont de signe constant.

On se donne (x_0, y_0) avec $x_0 > 1$ et $y_0 = 1$.

- Comme $y'(0) > 0$, pour $t_{01} > 0$ proche de 0, $(x(t_{01}), y(t_{01})) \in I$. Il existe un temps $t_1 \leq T_{\max}$ tel que pour $t \in [0, t_1[$, $(x(t), y(t)) \in I$. On a alors soit $t_1 = T_{\max}$ soit $x(t_1) = 1$ et $y(t_1) > 1$. On sait alors que x est décroissante sur $[0, t_1[$ et donc x est borné et

$$y'(t) \leq y(t)(-1 + x_0) \Rightarrow y(t) \leq y_0 e^{(-1+x_0)t}.$$

Supposons que $t_1 = T_{\max}$. On voit qu'en temps fini, la solution $(x(t), y(t))$ est bornée, ce qui est impossible d'après le théorème d'explosion. Par conséquent, si $t_1 = T_{\max}$, alors $T_{\max} = +\infty$. On vérifie ensuite, comme y est croissante sur $[t_0, +\infty[$, que

$$x'(t) = x(t)(1 - y(t)) \leq x(t) \underbrace{(1 - y(t_{01}))}_{<0}, \forall t > t_{01}$$

Par suite

$$\Rightarrow x(t) \leq x(t_{01}) e^{(1-y(t_{01}))(t-t_{01})} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

On a contredit le fait que pour tout $t \in]0, T_{\max}[$, la solution reste dans I .

- On a donc $x(t_1) = 1$ et $y(t_1) > 1$. Comme $x'(t_1) < 0$, la solution rentre dans II. Il existe donc un temps $t_2 > t_1$, tel que pour tout $t \in]t_1, t_2[$, $(x(t), y(t)) \in II$ et soit $t_2 = T_{\max}$ soit $x(t_2) < 1$ et $y(t_2) = 1$.

Supposons que $t_2 = T_{\max}$. Dans la zone II, x et y sont décroissantes, par conséquent la solution reste bornée dans la zone II, et par suite le théorème d'explosion assure que $T_{\max} = +\infty$. Soit $t_{12} \in]t_1, t_2[$ on sait que $x(t_{12}) < 1$, et par conséquent

$$y'(t) = y(t)(-1 + x(t)) \leq y(t) \underbrace{(-1 + x(t_{12}))}_{<0}, \forall t > t_{12}$$

par suite

$$\Rightarrow y(t) \leq y(t_{12}) e^{(-1+x(t_{12}))(t-t_{12})} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

On a contredit le fait que pour tout $t \in]t_1, T_{\max}[$, la solution reste dans II .

- On a donc $x(t_2) < 1$ et $y(t_2) = 1$. Comme $y'(t_2) < 0$, la solution rentre dans III. Il existe donc un temps $t_3 > t_2$, tel que pour tout $t \in]t_2, t_3[$, $(x(t), y(t)) \in III$ et soit $t_3 = T_{\max}$ soit $x(t_3) = 1$ et $y(t_3) < 1$.

Supposons que $t_3 = T_{\max}$. Dans la zone III, x est croissante et y est décroissante et la solution reste bornée, donc forcément $T_{\max} = +\infty$. Soit $t_{23} \in]t_2, T_{\max}[$ on sait que $y(t_{23}) < 1$, et par conséquent

$$x'(t) = x(t)(1 - y(t)) \geq x(t) \underbrace{(1 - y(t_{23}))}_{>0}, \forall t > t_{23}$$

Poursuite

$$\Rightarrow x(t) \geq x(t_{23})e^{(1-y(t_{23}))(t-t_{23})} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

On a contredit le fait que pour tout $t \in]t_2, T_{\max}[$, la solution reste dans III.

- On a donc $x(t_3) = 1$ et $y(t_3) < 1$. Comme $x'(t_3) > 0$, la solution rentre dans IV. Il existe donc un temps $t_4 > t_3$, tel que pour tout $t \in]t_3, t_4[$, $(x(t), y(t)) \in IV$ et soit $t_4 = T_{\max}$ soit $x(t_4) > 1$ et $y(t_4) = 1$.

Supposons que $t_4 = T_{\max}$. Dans la zone III, x et y sont croissantes et y est bornée. On vérifie que

$$x'(t) \leq x(t)(1 - y(t_3)) \Rightarrow x(t) \leq x(t_3)e^{(1-y(t_3))(t-t_3)}$$

On en déduit que x est borné en temps fini, par conséquent $T_{\max} = +\infty$.

Soit $t_{34} \in]t_3, T_{\max}[$, on sait que $x(t_{34}) > 1$, et par conséquent

$$y'(t) = y(t)(-1 + x(t)) \geq y(t) \underbrace{(-1 + x(t_{34}))}_{>0}, \forall t > t_{34}$$

Par suite

$$\Rightarrow y(t) \geq y(t_{34})e^{(-1+x(t_{34}))(t-t_{34})} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

On a contredit le fait que pour tout $t \in]t_3, T_{\max}[$, la solution reste dans IV.

On a donc montré que la solution tourne ! Attention, on n'a toujours pas montré que la solution est globale !

• Etape 6 : Les solutions sont périodiques et donc globale

On introduit la fonctionnelle

$$H(x, y) = \ln(x) + \ln(y) - x - y$$

Vérifions que cette fonctionnelle est conservée le long des trajectoires.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) &= \frac{x'(t)}{x(t)} + \frac{y'(t)}{y(t)} - x'(t) - y'(t) \\ &= (1 - x(t)) + (-1 + y(t)) - x(t)(1 - y(t)) - y(t)(-1 + x(t)) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$H(x(t_4), y(t_4)) = H(x(0), y(0)) \Rightarrow \ln(x(t_4)) + 0 - x(t_4) - 1 = \ln(x(0)) + 0 - x(0) - 1 \Rightarrow x(t_4) = x(0)$$

On a utilisé le fait que la fonction $x \mapsto \ln(x) - x - 1$ est injective sur $(1, +\infty[$.

On en déduit que la solution est périodique, donc bornée, donc $T_{\max} = +\infty$.

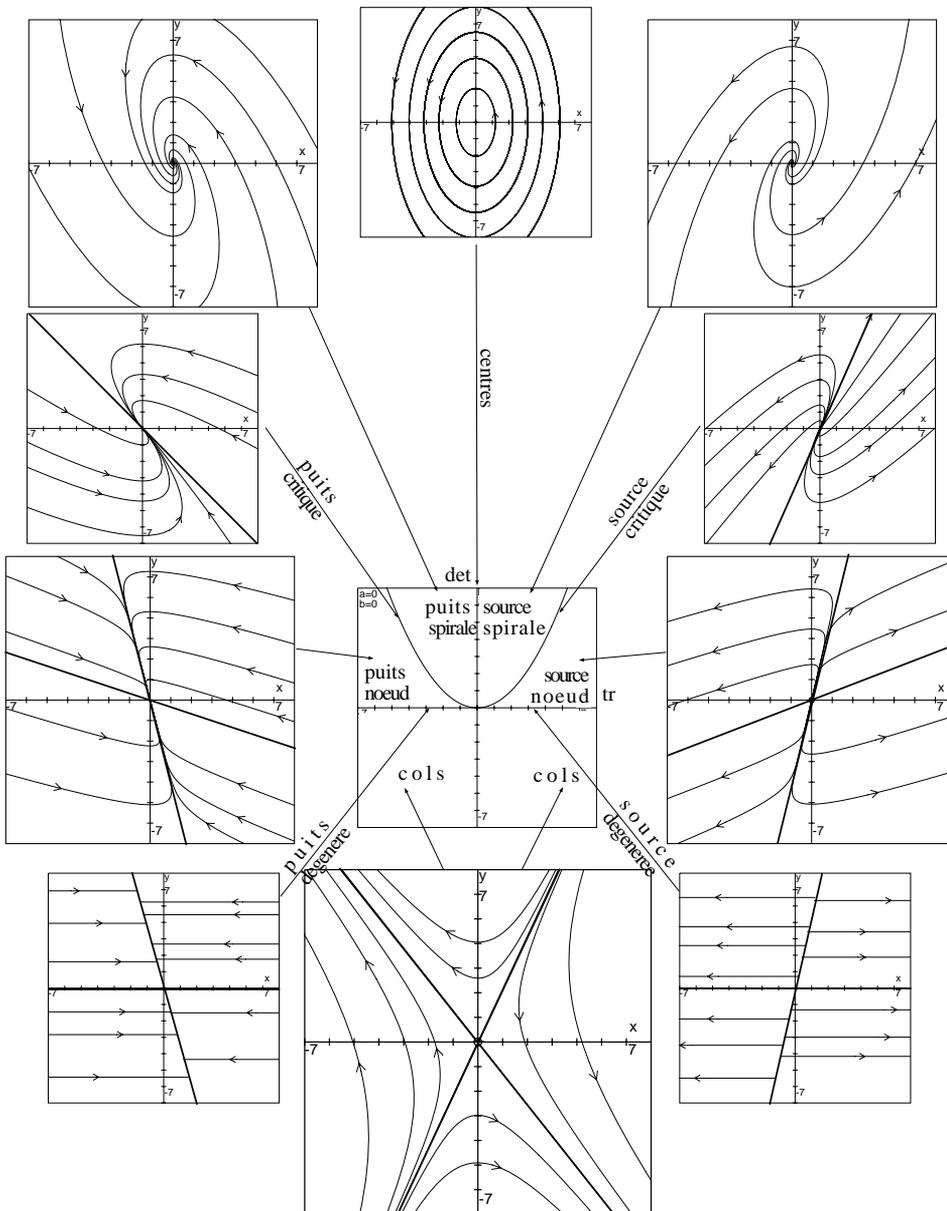


FIGURE 3.3 – Diagramme de bifurcation complet

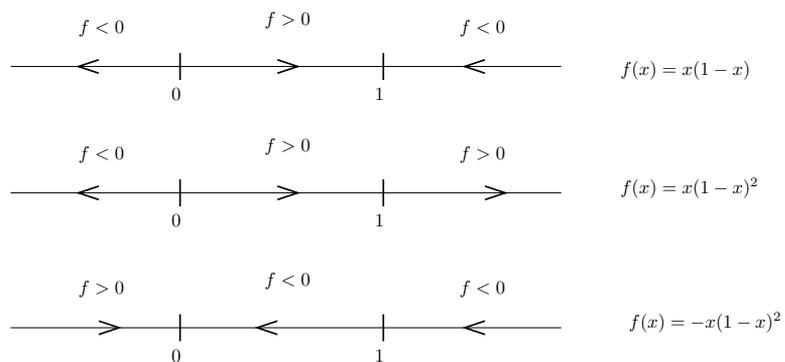


FIGURE 3.4 – Exemples de représentation du comportement qualitatif en 1d

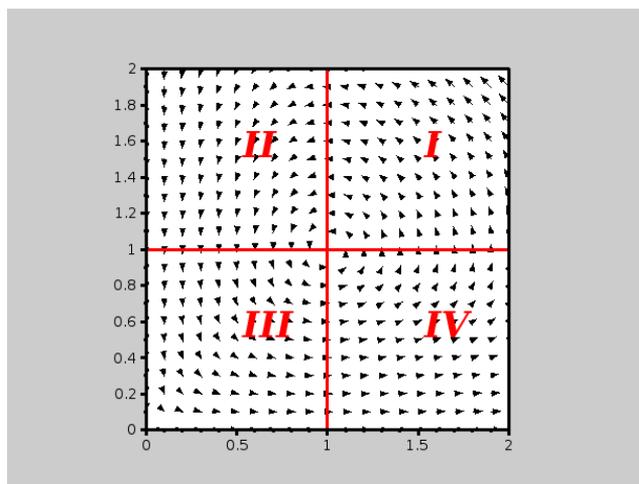


FIGURE 3.5 – Champ de vecteur du système proie-prédateur

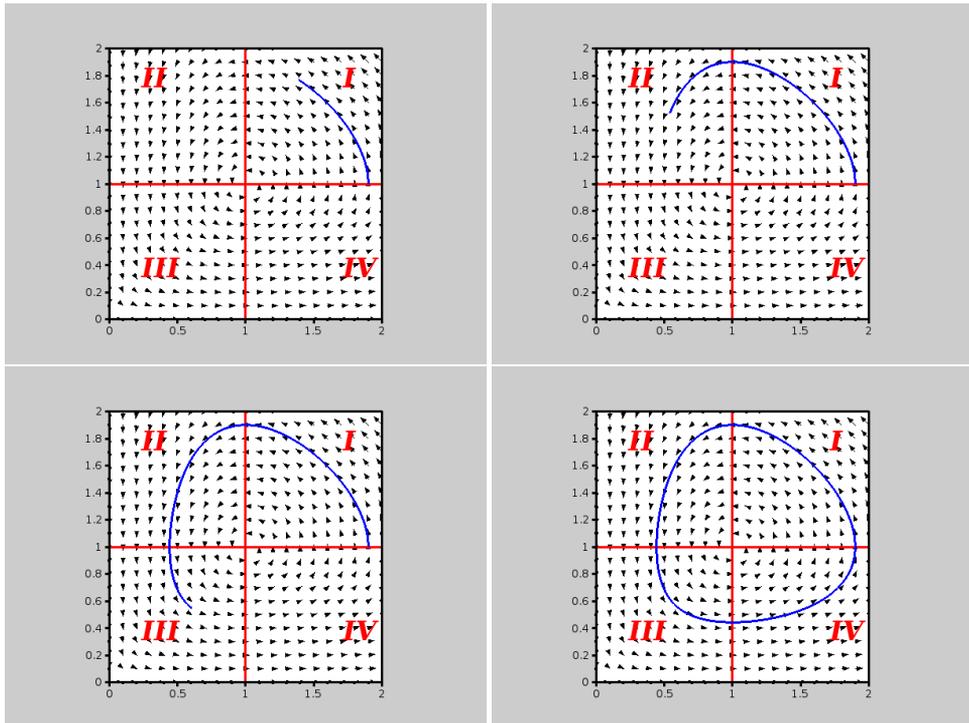


FIGURE 3.6 – Les trajectoires tournent : la trajectoire rentre dans le domaine I, puis II, puis III, puis IV