Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, Equation Différentielles Ordinaires
SMI5U06C. Examen du 17 juin 2021

Les documents (polycopié du cours, notes de TD, notes personnelles) sont autorisés.

Exercice 1 (Existence, unicité, stabilité pour une équation différentielle. Barème 16 points)**.**
Soit $a \in C([0,+\infty[, \mathbb{R})$ t.q. $1 \le a(t) \le 2$ pour tout $t \ge 0$. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$.
On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$y'(t) = a(t)y^2(t) - y^3(t),\ t > 0, \tag{1}$$
$$y(0) = y_0. \tag{2}$$

1. Montrer que le problème (1)-(2) admet une unique solution maximale. Dans la suite, on note y cette solution maximale. Elle est définie sur l'intervalle $[0, T_m[$.
2. On suppose dans cette question que $y_0 < 0$. Montrer que $y(t) \le 0$ pour tout $t < T_m$. En déduire que y est une fonction croissante, que $T_m = +\infty$ et que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

On suppose dans toute la suite que $y_0 > 0$.

3. Montrer que la solution maximale est globale, c'est-à-dire que $T_m = +\infty$.
4. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $t_1 \ge 0$ t.q. $y(t_1) \ge 1 - \varepsilon$. Puis montrer que $y(t) > 1 - \varepsilon$ pour tout $t > t_1$.
   (b) Montrer qu'il existe $t_2 \ge 0$ t.q. $y(t_2) \le 2 + \varepsilon$. Puis montrer que $y(t) < 2 + \varepsilon$ pour tout $t > t_2$.
5. Déduire de la question précédente que le point stationnaire 0 n'est pas uniformément stable. (On rappelle que 0 est uniformément stable si pour tout $\eta > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q. $|y_0| \le \delta$ implique $\sup_{t\ge0} |y(t)| \le \eta$.)
6. On suppose dans cette question que $\lim_{t\to+\infty} a(t) = \ell$. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \ell$.
   Indication : Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $t_0 > 0$ t.q. $\ell - \varepsilon \le a(t) \le \ell + \varepsilon$ pour tout $t \ge t_0$. Puis, en reprenant méthode de la question 4, montrer qu'il existe $t_3 > t_0$ t.q. $\ell - 2\varepsilon \le y(t) \le \ell + 2\varepsilon$ pour tout $t > t_3$.
7. (Question plus difficile).
   On suppose dans cette question que a est uniformément continue et que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \ell$.
   Montrer que $\lim_{t\to+\infty} a(t) = \ell$.

Exercice 2 (Etude de stabilité pour un système. Barème 9 points)**.**
On considère le système suivant, pour $t > 0$,

$$x'(t) = x(t) - x(t)y(t),$$
$$y'(t) = y(t) - x(t)^2.$$

1. Trouver l'unique point d'equilibre $P = (a, b)$, avec $a > 0$, $b > 0$.
2. Linéariser le système autour du point d'équilibre P (trouvé à la question 1). Résoudre le système linéarisé et tracer 3 ou 4 trajectoires proches de P.
3. Discuter la stabilité du point d'équilibre P (trouvé à la question 1).