Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, équations différentielles ordinaires
TD 3, équations non linéaires, unicité, solutions globales

Exercice 1. On s'intéresse pour $t > 0$ aux équations différentielles suivantes :

a) $x'(t) = \sin(tx(t))$ b) $y'(t) = \mathrm{sh}(y(t))$

c) $z'(t) = z^3(t)$ d) $u'(t) = -u^3(t)$

e) $v'(t) = \dfrac{1}{1+v(t)}$ f) $w'(t) = |w|^{3/4}(t)$

Pour chacune de ces équations, a-t-on, selon la valeur de la condition initiale en $t = 0$, existence locale ou globale d'une solution ? A-t-on unicité ?

Corrigé – *Nous allons essayer de faire cet exercice sans calculer les solutions explicitement. Nous allons toutefois utiliser deux résultats (essentiellement vus en cours) sur le problème de Cauchy (y_0, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont données).*

$$y'(t) = f(y(t)),\ t > t_0, \tag{1}$$

$$y(0) = y_0. \tag{2}$$

Premier résultat : *Soit y une solution globale de (1)-(2). On suppose que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \ell \in \mathbb{R}$. Alors $f(\ell) = 0$.*
La démonstration peut se faire en remarquant que pour tout $t > t_0$ il existe $\theta_t \in]t, t+1[$ tel que $y(t+1) - y(t) = y'(\theta_t) = f(y(\theta_t))$ puis en faisant $t \to +\infty$.

Deuxième résultat : *On suppose que y est solution de (1)-(2) sur $]t_0, T[$ avec $y(t) \geq y_0 > 0$ pour tout $t \in [t_0, T[$ et $f(y(t)) \geq y(t)^2$. Alors $T < +\infty$.*
La démonstration peut se faire en remarquant que $y'(t)/(y(t)^2 \geq 1$ d'où on déduit (par intégration) que $T \leq t_0 + 1/y_0$.

Pour chacune des 6 équations, on s'intéresse au problème de Cauchy avec un donnée initiale en 0 (notée avec l'indice 0).

1. *Equation a) $x' = \sin(tx)$. Pour ce problème, il y a existence et unicité de la solution maximale, définie sur $[0, T_m[$. La solution est globale (c'est-à-dire $T_m = +\infty$). Pour le montrer il suffit de remarquer que $-1 \leq x'(t) \leq 1$ pour tout $t > 0$ et donc $x_0 - t \leq x(t) \leq x_0 + t$, la solution n'explose pas en temps fini.*
2. *Equation b) $y' = \mathrm{sh}(y)$. Pour ce problème, il y a existence et unicité de la solution maximale, définie sur $[0, T_m[$. Le point 0 est un point d'équilibre. On suppose $y_0 > 0$, on a alors $y(t) > 0$ pour tout t. La solution est donc strictement croissante (et $y(t) > y_0$ pour tout t). On va montrer que $T_m < +\infty$. En effet, si $T_m = +\infty$, on pose $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \ell \in]y_0, +\infty[\cup \{+\infty\}$. Le premier résultat montre que $\ell = +\infty$. On remarque maintenant que $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x)/x^2 = +\infty$. Il existe donc t_0 tel que $\mathrm{sh}(y(t)) \geq y(t)^2$ pour tout $t \geq t_0$. Le deuxième résultat montre alors que $T_m < +\infty$.*

   Le cas $y_0 < 0$ se ramène au cas $y_0 > 0$ en considérant la fonction $-y$.
3. *Equation c) $z' = z^3$. Cette équation peut se traiter exactement comme pour l'équation b).*
4. *Equation d) $u' = -u^3$. Pour ce problème, il y a existence et unicité de la solution maximale, définie sur $[0, T_m[$. Le point 0 est un point d'équilibre. On suppose $u_0 > 0$, on a alors $u(t) > 0$ pour tout t. La solution est donc strictement décroissante et strictement positive. On en déduit que $T_m = +\infty$ (et par le premier résulat que $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$).*

   Le cas $u_0 < 0$ se ramène au cas $u_0 > 0$ en considérant la fonction $-u$.
5. *Equation e) $v' = \dfrac{1}{1+v}$. La fonction (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) définie par $f(x) = 1/(1+x)$ n'est pas définie en -1. Pour ce ramener aux théorèmes du cours, il faut la modifier (comme au td2 pour le modèle de Gompertz).*

   Si $v_0 > -1$. On peut choisir $-1 < a < v_0$ et modifier la fonction f de manière à la rendre de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Le cours donne alors existence et unicité de la solution maximale, définie sur $[0, T_m[$. C'est aussi la solution pour le problème avec la fonction f initiale car la solution vérifie toujours $v(t) > v_0$ pour tout $t > 0$. Pour s'en convaincre, il suffit de raisonner par contradiction et de poser, si il existe $t > 0$ tel que $v(t) \leq v_0$, $t_\star = \inf\{t > 0, v(t) = v_0\}$ et de montrer que $v'(t_\star) \leq 0$ (car $v(t) > v_0$ pour $t < t_\star$) et $v'(t_\star) = f(v(t_\star)) > 0$. Ce qui est impossible.

   On montre enfin que $T_m = +\infty$ car $v'(t) \leq 1/(1+v_0)$ et donc $v_0 < v(t) < v_0 + t/(1+v_0)$ pour tout $0 < t < T_m$.

   Le cas $v_0 < -1$ se traite de manière analogue
6. *Equation f) $w' = |w|^{3/4}$. La difficulté ici est le caractère non lipschitzien en 0 de la fonction $x \mapsto |w|^{3/4}$. On distingue encore les cas $w_0 > 0$ et $w_0 < 0$.*

   Si $w_0 > 0$, on peut se ramener comme dans la cas précédent aux théorèmes du cours. La solution sera strictement croissante. L'existence globale peut se montrer en remarquant que $w'(t) = |w(t)|^{3/4} \leq |w(t)| + 1$.

   Si $w_0 < 0$, on ne peut pas échapper au caractère non lipschitzien en 0 de la fonction $x \mapsto |w|^{3/4}$. La solution va atteindre 0 en temps fini.

Exercice 2 (Le seau qui se vide)**.** On considère un seau de rayon A, percé en son fond d'un trou de rayon a. Il est rempli d'eau jusqu'à la hauteur h, et cette eau coule du trou à la vitesse v. On fera un dessin.

1. Pendant un petit intervalle de temps dt, l'eau coule par le trou et la hauteur de l'eau dans le seau varie de dh (une quantité négative car h diminue). Quelles sont, dans la liste de formules ci-dessous, celles qui donnent
   - la variation du volume d'eau dans le seau entre 0 et dt,
   - le volume d'eau qui a coulé par le trou entre 0 et dt.

$$\pi A^2 dh, \qquad -2\pi A dh^2, \qquad \frac{4}{3}\pi(dh)^3, \qquad \pi a^2 v(dt), \qquad 2v^2 dt\, dh, \qquad \pi v a A dt.$$

2. La conservation de l'énergie de l'eau contenue dans le seau, implique que h et v sont reliées par $h = \frac{1}{2}v^2$ (*en prenant la constante de gravité* $g = 1$. *Il est intéressant d'essayer d'expliquer pourquoi*). En déduire que h est solution de l'EDO, dite *loi de Torricelli (∼ 1640)*:

$$h'(t) = -\left(\frac{a}{A}\right)^2 \sqrt{2h}.$$

3. Résoudre explicitement cette équation (uniquement pour les temps t positifs). Peut-on appliquer ici le théorème de Cauchy-Lipschitz ? Les solutions (pour $t \geq 0$) de cette équation sont-elles uniques ?

4. Une fois le seau vide, on cherche à savoir quand il était plein. Pour cela, on inverse le sens du temps dans l'équation (*i.e.* on fait le changement de variable $s = -t$). Montrer que l'équation devient

$$\frac{dh}{ds}(s) = \left(\frac{a}{A}\right)^2 \sqrt{2h(s)}.$$

   Existe-t'il des solutions de cette équation qui vérifient $h(0) = 0$? Si oui, les donner toutes. Comparer avec les résultats connus sur l'unicité des solutions d'une EDO, comme le théorème de Cauchy-Lipschitz. Expliquer mathématiquement pourquoi, quand le seau est vide, on ne peut plus savoir quand il a commencé à se vider.

Exercice 3 (Une EDO contractante)**.**

1. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, telle que y et y' convergent toutes les deux lorsque $t \to +\infty$. Montrer que l'on a forcément $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = 0$.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle $xg(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$.

2. Montrer que $g(0) = 0$.

3. On suppose de plus que $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que les solutions maximales de l'équation différentielle $y'(t) = g(y(t))$ sont définies jusqu'à $+\infty$ (c'est-à-dire sur un intervalle dont la borne droite est $+\infty$) et admettent une asymptote horizontale. Préciser laquelle.

Exercice 4 (Bloqué entre deux équilibres)**.** On considère une équation à variables séparables, i.e. que $y'(t) = g(y(t))h(t)$, $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On choisit deux zéros consécutifs $x_1 < x_2$ de la fonction g et une condition initiale (t_0, x_0), avec $x_0 \in]x_1, x_2[$. Montrer qu'alors la solution maximale telle que $y(t_0) = x_0$ est globale.

Corrigé – *Pour $t \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on pose $f(t,y) = g(y)h(t)$. La fonction f appartient à $C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument. Pour $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy*

$$y'(t) = g(y(t))h(t),\ t > t_0,$$
$$y(t_0) = x_0,$$

admet donc une solution maximale. On note T_m le temps d'existence de cette solution maximale, c'est-à-dire que $y \in C([t_0, T_m[, \mathbb{R})$. (Noter que T_m peut dépendre de t_0 et x_0.)
Comme x_1 et x_2 sont des points d'équilibre de l'équation $y'(t) = g(y(t))h(t)$ (et que les trajectoires des solutions de cette équation ne se rencontrent pas), on a, pour tout $t > t_0$, $y(t) \neq x_1$ et $y(t) \neq x_2$ si x_0 est différent de x_1 et x_2. En particulier on a donc

$$x_0 \in]x_1, x_2[\Rightarrow y(t) \in]x_1, x_2[\text{ pour tout } t > t_0.$$

Si $x_0 \in]x_1, x_2[$, $|y(t)|$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $t \to T_m$. Ce qui suffit pour prouver que $T_m = +\infty$.

Application: On considère l'EDO $y' = y(y-1)\cos(t)$.

1. Résoudre explicitement l'équation.

Corrigé – On conserve les notations du début de l'exercice. Les points d'équilibre sont ici 0 et 1 et on suppose $0 < x_0 < 1$. La solution du problème de Cauchy est donc globale et prend ses valeurs strictement entre 0 et 1.
Pour la calculer, on utilise la méthode des variables séparées. Comme $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$,

$$-\frac{y'(t)}{y} - \frac{y'(t)}{(1-y)} = -\frac{y'(t)}{y(1-y)} = \cos(t),$$

et donc

$$(\ln(\frac{1-y}{y}))'(t) = -(\ln(y))'(t) + (\ln(1-y))'(t) = \cos(t).$$

On en déduit que la fonction $t \mapsto \ln((1-y(t))/(y(t)) - \sin(t)$ est constante. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ln(\frac{(1-y(t))}{y(t)}) = C + \sin(t),$$

$$\frac{(1-y(t))}{y(t)} = C_1 e^{\sin(t)} \text{ avec } C_1 = e^C,$$

$$y(t) = \frac{1}{1 + C_1 e^{\sin(t)}}.$$

La constante C_1 est donnée par la condition initiale.

$$y(t) = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{\sin(t)}}.$$

On peut aussi s'intéresser au cas $x_0 \notin [0, 1]$.
Un calcul similaire peut être fait si $x_0 > 1$ (et dans ce cas $y(t) > 1$ pour tout t) et si $x_0 < 0$ (et dans ce cas $y(t) < 0$ pour tout t). On obtient la même formule.
Par exemple, pour $x_0 > 1$ (et donc $y(t) > 1$ pour tout t)

$$-\frac{y'(t)}{y} + \frac{y'(t)}{(y-1)} = -\frac{y'(t)}{y(1-y)} = \cos(t),$$

et donc

$$(\ln(\frac{y-1}{y}))'(t) = -(\ln(y))'(t) + (\ln(y-1))'(t) = \cos(t).$$

On en déduit que la fonction $t \mapsto \ln((y(t)-1)/(y(t)) - \sin(t)$ est constante. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ln(\frac{(y(t)-1)}{y(t)}) = C + \sin(t),$$

$$\frac{(y(t)-1)}{y(t)} = C_1 e^{-\sin(t)} \text{ avec } C_1 = e^C,$$

$$y(t) = \frac{1}{1 - C_1 e^{\sin(t)}}.$$

La constante C_1 est donnée par la condition initiale.

$$y(t) = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{\sin(t)}}.$$

En résumé, si $x_0 \neq 0$ et 1, on distingue 2 cas :

cas 1. $-1/(e-1) < x_0 < e/(e-1)$, *la solution est périodique non constante.*

cas 2. $x_0 \geq e/(e-1)$ *ou* $x_0 \leq -1/(e-1)$ *la solution explose en temps fini et* T_m *est le premier temps pour lequel* $x_0 + (1-x_0)e^{\sin(t)} = 0$.

2. Montrer qu'aucune solution autre que les solutions stationnaires ne possède d'asymptote horizontale.

Corrigé – *On voit que la solution calculée ci dessus n'a pas d'asymptote horizontale si* $x_0 \neq 0$ *et* $x_0 \neq 1$ *car elle est périodique non constante ou explose en temps fini.*

Les seules solutions stationnaires sont données par les deux points d'équilibre, 0 *et* 1.

3. Dessiner l'allure générale des solutions, en distinguant suivant la position de $y(0)$ par rapport à 0 et 1.

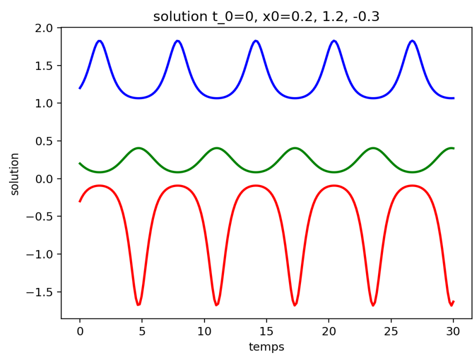

Figure 1: $t_0 = 0$, $x_0 = 0.2$ (vert), 1.2 (bleu), -0.3 (rouge)

Exercice 5 (Explosions ou solutions globales)**.** On choisit un réel $\beta > 0$. Donner les solutions maximales de

$$x' = x^\beta \quad \text{et} \quad x(0) = x_0 > 0.$$

Pour quelles valeurs de β, les solutions "explosent-elles"? Pour quelles valeurs de β, sont-elles globales?

Corrigé – *Commençons par le cas le plus simple :* $\beta = 1$. *Dans ce cas l'équation s'écrit* $x'(t) = x(t)$, *et la solution est* $x(t) = x_0 e^t$, *qui tend vers* $+\infty$ *en* $+\infty$ *mais qui n'explose pas en temps fini. Cette solution est donc globale.*

Intéressons nous maintenant au cas $\beta \neq 1$. *Si* $\beta > 1$, *la fonction* $x \mapsto x^\beta$ *est localement lispchitzienne et donc on a existence et unicité locale d'une solution maximale par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Si* $\beta < 1$, *la fonction* $x \mapsto x^\beta$ *est localement lispchitzienne sur tout intervalle* $[\alpha, +\infty[$, $\alpha > 0$, *et donc en remplaçant la fonction par une fonction* C^1 *égale à* x^β *sur* $[x_0/2, +\infty[$ *(comme on a fait à l'exercice 1 question 3 du TD2), on a également existence et unicité locale d'une solution par le théorème de Cauchy-Lipschitz.*

On peut la calculer en utilisant la méthode des variables séparables ; en supposant $x(t) \neq 0$ *pour tout* $t > 0$ *(ce qu'on vérifiera a posteriori), on a*

$$\frac{x'(t)}{x^\beta(t)} = \frac{1}{1-\beta}\left(x^{1-\beta}(t)\right)'$$

et donc

$$\frac{1}{1-\beta}(x^{1-\beta}(t) - x_0^{1-\beta}) = t.$$

on en déduit que si $(1-\beta)t + x_0^{1-\beta} \geq 0$, *on a une solution* x *qui s'écrit :*

$$x(t) = \left[(1-\beta)t + x_0^{1-\beta}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}. \tag{3}$$

- *Si $\beta < 1$, on a $(1-\beta)t + x_0^{1-\beta} \geq x_0^{1-\beta} > 0$ pour tout $t > 0$ et donc la solution maximale est globale.*
- *Par contre, si $\beta > 1$ on a $(1-\beta)t + x_0^{1-\beta} \geq 0$ si $t \leq T_m = \dfrac{x_0^{1-\beta}}{1-\beta}$, et $(1-\beta)T_m + x_0^{1-\beta} < 0$ sinon. La fonction x définie par (3) n'est donc définie que sur $[0, T_m[$ et elle tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers T_m par valeurs inférieures. La solution maximale n'est donc pas globale, et le temps maximal d'existence est T_m.*

Exercice 6 (Sensibilité par rapport aux perturbations)**.**
Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ une fonction globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et u_0, v_0 deux réels.
Soient u la solution maximale de

$$u'(t) = f(t, u(t))),\ t > 0, \tag{4a}$$
$$u(0) = u_0, \tag{4b}$$

et v la solution maximale de

$$v'(t) = f(t, v(t)) + \varepsilon(t),\ t > 0. \tag{5a}$$
$$v(0) = v_0, \tag{5b}$$

1. Justifier le fait que les solutions maximales u et v de (4) et (5) sont globales (c'est-à-dire définies sur $\mathbb{R}_+$ tout entier) .

Corrigé –
La fonction f est globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, c.à.d. qu'elle vérifie :

$$\exists K \in \mathbb{R}_+ \quad |f(t,x) - f(t,y)| \leq K|x-y|,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{6}$$

Elle est donc aussi évidemment localement lipschitzienne. La fonction $g : (t,x) \mapsto f(t,x) + \varepsilon(t)$ est donc aussi globalement lipschitzienne (et donc localement lipschitzienne) par rapport à la seconde variable. Donc le théorème de Cauchy Lipschitz s'applique et on a donc existence locale et unicité, pour les deux équations.
Pour montrer que la solution maximale est globale, on va montrer qu'elle n'explose pas en temps fini. On fait le raisonnement sur la première équation, il est semblable pour la deuxième. Soit $u : [0, T_m[\to \mathbb{R}$ la solution maximale de (4) *(on a donc $0 < T_m \leq +\infty$). En intégrant* (4a) *entre 0 et t et en utilisant la condition initiale* (4b)*, on obtient*

$$u(t) - u_0 = \int_0^t (f(s, u(s))\, ds,$$

et donc

$$|u(t)| \leq |u_0| + \int_0^t |f(s,u(s)) - f(s,0)|\, ds + \int_0^t |f(s,0)|\, ds.$$

En utilisant (6) *on obtient*

$$|u(t)| \leq |u_0| + K \int_0^t |u(s)|\, ds + \int_0^t |f(s,0)|\, ds. \tag{7}$$

On suppose $T_m < +\infty$ et on pose $C = \int_0^{T_m} |f(s,0)|\, ds$ (de sorte que $C < +\infty$). On obtient, pour tout $0 \leq t < T_m$,

$$|u(t)| \leq |u_0| + K \int_0^t |u(s)|\, ds + C. \tag{8}$$

Le lemme de Gronwall donne alors

$$|u(t)| \leq \varphi(t) \leq (|u_0| + C)e^{Kt},\ \text{pour tout } t \in [0, T_m[.$$

La fonction u n'explose pas en temps fini, et il y a donc existence globale.
Pour rappel, on redonne la démonstration de cette majoration à partir de l'inégalité (8)*.*

Définissons la fonction

$$\varphi \,: t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \varphi(t) = |u_0| + K \int_0^t |u(s)|\, ds + C. \tag{9}$$

Sa dérivée est donnée par

$$\varphi'(t) = K|u(t)|.$$

On a alors, par (8) *et* (9),

$$\varphi'(t) \leq K\varphi(t).$$

Ce qui donne (par exemple avec la méthode du facteur intégrant)

$$|u(t)| \leq \varphi(t) \leq \varphi(0)e^{Kt} = (|u_0| + C)e^{Kt}, \text{ pour tout } t \in [0, T_m].$$

Le raisonnement pour la solution v est le même en remplaçant, dans (8)*, u par v, u_0 par v_0 et C par $C = \int_0^{T_m}(|f(s, u_0)| + |\varepsilon(s)|)ds$.*

2. Montrer que pour tout $t > 0$ on a

$$|u(t) - v(t)| \leq e^{Kt}\Big(|u_0 - v_0| + \int_0^t |\varepsilon(s)|\, ds\Big),$$

où K est une constante de Lipschitz de f.

Corrigé – *on a*

$$u'(t) = f(t, u(t)), \; t > 0,$$
$$v'(t) = f(t, v(t)) + \varepsilon(t), \; t > 0.$$

et donc en faisant la différence,

$$v'(t) - u'(t) = f(t, v(t)) - f(t, u(t)) + \varepsilon(t), \; t > 0.$$

en intégrant,

$$v(t) - u(t) = v_0 - u_0 + \int_0^t f(s, v(s)) - f(s, u(s))ds + \int_0^t \varepsilon(s)ds, \; t > 0.$$

et donc

$$|v(t) - u(t)| \leq |v_0 - u_0| + \int_0^t |f(t, v(s)) - f(t, u(s)|ds + \int_0^t |\varepsilon(s)|ds, \; t > 0.$$

Comme f est globalement lipschitzienne,

$$|v(t) - u(t)| \leq |v_0 - u_0| + K \int_0^t |v(s) - u(s)|ds + \int_0^t |\varepsilon(s)|ds, \; t > 0.$$

On ne peut pas appliquer directement le lemme de Gronwall à cause du dernier terme, mais on fait le raisonnement habituel, on note

$$\varphi(t) = |v_0 - u_0| + K \int_0^t |v(s) - u(s)|ds + \int_0^t |\varepsilon(s)|ds$$

et donc

$$\varphi'(t) = K|v(t) - u(t)| + |\varepsilon(t)|$$

et, comme $|v(t) - u(t)| \leq \varphi(t)$, on a

$$\varphi'(t) \leq K\varphi(t) + |\varepsilon(t)|,$$
$$\varphi'(t) - K\varphi(t) \leq |\varepsilon(t)|,$$
$$(\varphi(t)e^{-Kt})' = (\varphi'(t) - K\varphi(t))e^{-Kt} \leq |\varepsilon(t)|e^{-Kt} \leq |\varepsilon(t)|.$$

En intégrant entre 0 et t, on en déduit

$$\varphi(t)e^{-Kt} - \varphi(0) \leq \int_0^t |\varepsilon(s)|ds$$

$$\varphi(t) \leq \varphi(0)e^{Kt} + e^{Kt}\int_0^t |\varepsilon(s)|ds$$

$$|v(t) - u(t)| \leq \varphi(t) \leq (|u_0 - v_0| + \int_0^t |\varepsilon(s)|ds)e^{Kt}$$

On a ainsi démontré grâce au lemme de Gronwall la dépendance continue des solutions par rapport aux paramètres (la donnée initiale et la fonction f).

En résumé de cet exercice, le lemme de Gronwall nous sert à montrer plusieurs résultats : unicité, existence globale, dépendance continue des solutions par rapport aux paramètres.

Exercice 7.
On considère sur $I =]1, +\infty[$, l'équation

$$x'(t) = 1 + \frac{cos^2 x(t)}{4t^2}.$$

1. Montrer que les solutions maximales existent, sont uniques et globales.

2. On pose $y\colon t \in I \mapsto x(t) - t$. Trouver l'équation différentielle satisfaite par y. Montrer que y est croissante.

3. En majorant sa dérivée, montrer que y est majorée donc converge vers une limite que l'on notera y_∞. En déduire que x admet pour asymptote $t \mapsto t + y_\infty$.

4. y_∞ dépend de la condition initiale $x(1) = x_0$. Pour montrer cette dépendance on notera $y_\infty(x_0)$. Montrer que y_∞ est une fonction croissante de x_0.