Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, équations différentielles ordinaires
TD 4, équations non linéaires du 1er ordre, exemple et champ des tangentes

Exercice 1 (Quotas de pêche)**.**

1. On s'intéresse maintenant à l'étude d'une population x de poissons. En l'absence de pêche, on modélise son évolution grâce à une équation logisitique (dont les coefficents ont été normalisés):

$$x' = x(1-x).$$

Retrouver les solutions de ce système et rappeler leurs propriétés qualitatives.

Corrigé – *On s'intéresse à cette équation avec une condition initiale en $t = 0$ notée x_0 et on suppose $x_0 \geq 0$.*
Cette équation différentielle a deux points d'équilibre, 0 et 1. Si la fonction $t \mapsto x(t)$ est solution de cette équation et si x n'est pas une fonction constante, comme les trajectoires de cette équation différentielle ne se rencontrent pas, on a neċessairement $0 < x(t) < 1$ pour tout t ou $x(t) > 1$ pour tout t. Dans chacun de ces 2 cas, l'équation peut donc s'écrire

$$\frac{x'(t)}{x(t)(1-x(t))} = 1, \text{ pour tout } t > 0.$$

Ce qui peut aussi s'écrire

$$\frac{x'(t)}{x(t)} + \frac{x'(t)}{(1-x(t))} = 1, \text{ pour tout } t > 0.$$

Elle peut s'intégrer en utilisant la fonction $\ln$. Par exemple, dans le cas $0 < x(t) < 1$ pour tout t, on obtient

$$(\ln \frac{x}{1-x})'(t) = (\ln(x))'(t) - (\ln(1-x))'(t) = 1.$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ telle que $\ln \frac{x(t)}{1-x(t)} = t + C$ pour tout t et donc avec $C_1 = e^C > 0$,

$$\frac{x(t)}{1-x(t)} = C_1 e^t,$$

$$x(t) = \frac{C_1 e^t}{1 + C_1 e^t} = \frac{C_1}{C_1 + e^{-t}}.$$

En tenant compte de la condition initiale, $\frac{C_1}{C_1+1} = x_0$ et

$$x(t) = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{-t}} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

dans le cas $1 < x(t)$ pour tout t,

$$(\ln \frac{x}{1-x})'(t) = (\ln(x))'(t) - (\ln(x-1))'(t) = 1.$$

Un calcul similaire donne la même formule pour x.

2. Pour incoporer la pêche dans le modèle, on commence par proposer de rajouter un terme constant négatif $-c$, le quota de pêche que l'on supposera toujours rempli. La population de poissons satisfait alors:

$$x' = x(1-x) - c.$$

Montrer qu'il y a une valeur critique c_c de c à partir de laquelle la pêche fait disparaître les poissons. Ce sera théoriquement le quota maximal pour préserver l'espèce. Y'a-t-il des risques à placer le quota juste en dessous de cette valeur critique ?

Corrigé – *Pour cette équation, il serait possible de calculer, pour toute valeur de c, la solution exacte. Mais nous allons plutôt faire un raisonnement qualitatif qui peut s'adapter à des équations dont on ne sait pas calculer la solution avec des fonctions usuelles.*
La fonction $z \mapsto z(1-z)$ admet un maximum. Ce maximum vaut $1/4$ (et est atteint pour $z = 1/2$). Si x est solution de cette équation difféntielle avec donnée initiale x_0 et que $c > 1/4$, on a donc

$$x'(t) \leq \frac{1}{4} - c < 0 \text{ pour tout } t > 0.$$

Ce qui donne en intégrant $x(t) \leq x_0 - (c - \frac{1}{4})t$, ce qui prouve que $x(t) = 0$ pour un $t \leq t^\star = x_0/(c - (1/4))$.
Pour $c > c_c = 1/4$, la pêche fait disparaître les poissons en temps fini.
Considérons maintenant le cas $0 < c < 1/4$. L'équation différentielle a alors deux points d'équilibre a_1, a_2 avec $0 < a_1 < 1/2 < a_2 < 1$.
Si $a_1 < x_0 < a_2$, la solution maximale de léquation différentielle (avec x_0 comme condition initiale) est globale et prend ses valeurs entre a_1 et a_2 (car les trajectoires de l'équation différentielle ne se rencontrent pas). On remarque alors que $x'(t) > 0$ pour tout $t > 0$. La fonction x est donc croissante, bornée supérieurement par a_2. Elle a donc une limite quand $t \to +\infty$. Cette limite doit être un point d'équilibre (attention : on utilise ici le fait que l'équation est autonome, voir le td3 pour un cas non autonome), c'est donc a_2.
Si $x_0 > a_2$, la solution maximale de léquation différentielle (avec x_0 comme condition initiale) vérifie toujours $x(t) > a_2$ (car les trajectoires de l'équation différentielle ne se rencontrent pas). On remarque alors que $x'(t) < 0$. La fonction x est donc décroissante, bornée inérieurement par a_2. Ceci montre que la solution maximale est globale (car elle n'"explose" pas en temps fini) et qu'elle a une limite quand $t \to +\infty$. Cette limite est un point d'équilibre, c'est donc aussi a_2.
Enfin, $x_0 < a_1$, la solution maximale de l'équation différentielle (avec x_0 comme condition initiale) vérifie toujours $x(t) < a_1$ (car les trajectoires de l'équation différentielle ne se rencontrent pas). Elle est donc décroissante et il existe alors $t^\star > 0$ tel que $x(t^\star) = 0$. En effet, sinon, la solution maximale serait globale et $x(t)$ aurait une limite quand $t \to +\infty$. Cette limite serait un point d'équilibre. Ceci est impossible car il n'y a pas de point d'équilibre inférieur à x_0.
On ainsi montré que si $x_0 < a_1$, la pêche fait disparaître les poissons en temps fini.
Cette gestion de la pêche est donc risquée car elle fait disparaître les poissons en temps fini si $x_0 < a_1$ Il est intéressant aussi de noter que $a_1 \to 1/2$ quand $c \to 1/4$.
On peut enfin remarquer que pour $c = 1/4$, I'équation différentielle a un seul point d'équilibre, $1/2$ (c'est-à-dire $a_1 = a_2 = 1/2$). Un raisonnement semblable au précédent montre que si $x_0 > 1/2$, la solution maximale est globale et tend vers $1/2$ et que si $x_0 < 1/2$ la pêche fait disparaître les poissons en temps fini.

3. Une autre possibilité est de fixer un quota de pêche linéaire en fonction de x (solution rendue possible par la surveillance des populations de poissons). On obtient ainsi une nouvelle équation:

$$x' = x(1 - x) - p\,x.$$

(a) Montrer qu'il y a aussi une valeur critique p_c de p à partir de laquelle la pêche fait disparaître les poissons.

Corrigé – Ici aussi, au lieu de calculer la solution exacte, nous allons faire des raisonnements qualitatifs.
Cette nouvelle équation d'écrit $x'(t) = x(t)(1 - p - x(t))$. Les points d'équilibre sont donc 0 et $1 - p$.
Si $p \geq 1$, le seul point d'équilibre positif est 0. Avec une condition initiale $x_0 > 0$, la solution maximale est donc toujours strictement positive. Ceci donne $x'(t) < 0$ pour tout t et donc $x(t) \in]0, x_0]$. La solution maximale est donc globale. Comme elle est décroissante et bornée inférieurement, elle a une limite quand $t \to +\infty$. Cette limite doit être un point d'équilbre, c'est donc 0. La pêche fait disparaître les poissons.
Si $p < p_c = 1$, la pêche ne fait pas disparaître les poissons. C'est ce que nous allons voir à la question suivante.

(b) Si p est inférieur à p_c, montrer que les solutions tendent alors vers un équilibre $x_{eq} \neq 0$, dont on donnera l'expression en fonction de p.

Corrigé – nous avons maintenant $0 < p < 1$. Les points d'équilibre sont ici 0 et $1 - p > 0$.
Nous considérons l'équation différentielle avec une donnée initiale $x_0 > 0$.
Si $0 < x_0 < 1 - p$, la solution maximale reste entre les points d'équilibre, 0 et $1 - p$. On en déduit que la solution est globale. Puis, on remarque que $x'(t) = x(t)(1 - p - x(t)) > 0$ pour tout t, la fonction x est donc croissante, majorée par $1 - p$. $x(t)$ une limite quand $t \to +\infty$. Cette limite est un point d'équilibre et donc $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1 - p$.
Si $x_0 > 1 - p$, la solution maximale reste au dessus de $1 - p$ (point d'équilibre). On en déduit que $x'(t) = x(t)(1 - p - x(t)) < 0$ pour tout t. La solution maximale x est donc décroissante, bornée inférieurement par $1 - p$. La solution maximale est donc globale, elle a une limite quand $t \to +\infty$ et cette limite ne peut être que le point d'équilibre $(1 - p)$.
On a ainsi montré que pour tout $x_0 > 0$, la solution tend vers $1 - p$ quand $t \to +\infty$.

(c) La quantité de poissons pêchés sera donc, en régime stationnaire (c'est-à-dire quand x est proche de sa limite), de px_{eq}. Comment maximiser cette quantité ? Quelle est sa valeur maximale ?

Corrigé – *La quantité de poissons pêchés (par unité de temps) quand x est proche de sa limite est donc $p(1-p)$. Sa valeur maximale est $1/4$. Elle est atteinte pour $p = 1/2$.*

(d) Y'a-t-il un risque à placer le quota relatif p à ce maximum ? Quel système de quota choisiriez-vous si vous étiez responsable des ressources halieutiques ?

Corrigé – *Il n'y a aucun risque à placer le quota relatif p à ce maximum, c'est-à-dire $1/2$, car tant que $p < 1$, la pêche ne fait pas disparaître les poissons, la population de poissons tendant vers $1 - p > 0$ quelquesoit $x_0 > 0$.*
Bien sûr, le second système est meilleur que le premier.

Remarque: Qu'en est-il des quotas de pêche dans la réalité ? De nombreuses observations ont montré que l'homme a dépassé depuis quelques temps la quantité de pêche critique pour de nombreuses espèces , comme le cabillaud dans l'Atlantique, le thon rouge ou le mérou dans la Méditérrannée, ce dernier étant protégé depuis peu (Pour plus de précision, voir les rapports du Conseil International pour l'Exploitation de la Mer). Des systèmes de quota ont été petit à petit mis en place, d'abord des limites globales du premier type, puis des quotas dépendant du stock de poissons comme dans le second modèle. Ces quota ne permettent pas encore d'assurer la survie des espèces de poissons. Mais, avec cette évolution, la gestion des populations halieutiques (*i.e.* de poissons) demande maintenant des bonnes connaissances en mathématiques et en systèmes dynamiques : un débouché pour les mathématiques ?

Exercice 2 (Représentation graphique)**.**
Pour une EDO en dimension 1, $y'(t) = f(t, y(t))$, on appelle champ des tangentes, la représentation sur $\mathbb{R}^2$ suivante:

au point $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ on dessine le vecteur $(1, f(t, y))$,
qui est en fait tangent à la solution de l'EDO qui passe par (t, y).

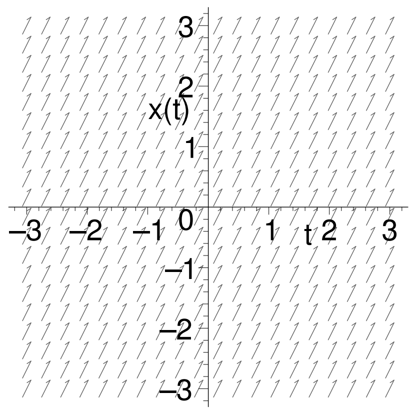
Pour les champs de tangentes 1 à 6 ci-dessous,

1. Dessiner quelques solutions sur les dessins (les courbes doivent être tangentes aux petits vecteurs).
2. Associer chaque dessin à l'une des équations ci-dessous :

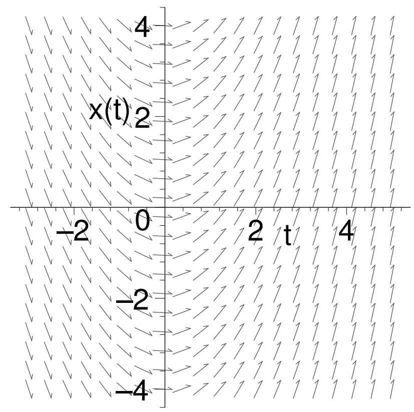
$$x' = 2, \quad x' = x - t, \quad x' = x, \quad x' = \frac{x}{t}, \quad x' = t, \quad x' = -\frac{t}{x}.$$

Corrigé –
$x' = 2$, figure 1
$x' = x - t$, figure 3
$x' = x$, figure 4
$x' = \frac{x}{t}$, figure 5
$x' = t$, figure 2
$x' = -\frac{t}{x}$, figure 6

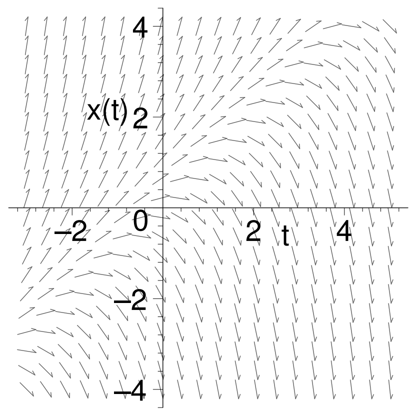
1)



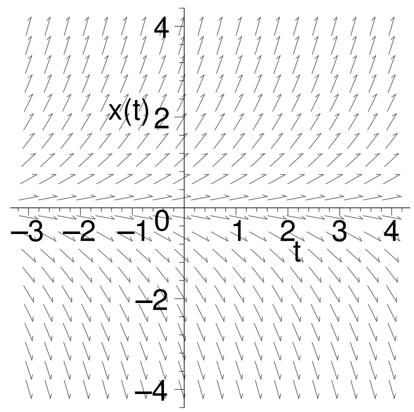
2)



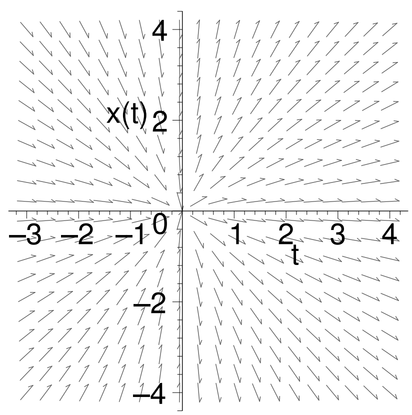
3)



4)



5)



6)