Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, équations différentielles ordinaires
TD 5, équations linéaires du 2eme ordre

Exercice 1. On considère les équations suivantes, pour $t > 0$:

1. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{-t}$,
2. $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = \sin(t)$,
3. $x''(t) + x(t) = 0$,
4. $x'(t)' + x'(t) + x(t) = 0$,
5. $x''(t) - 12x'(t) + 9x(t) = 0$,
6. $x''(t) - x(t) = 5t + 2$,
7. $x''(t) + 6x'(t) + 5x(t) = e^{2t}$,
8. $x''(t) + 4x(t) = 2\sin(2t)$.

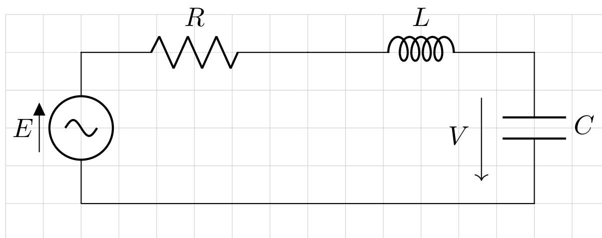
(i) Donner pour chaque équation une base de l'espace vectoriel des solutions (réelles) de l'équation homogène associée. Donner, le cas échéant, l'ensemble des solutions de l'équation non homogène.

Corrigé –

1. $x'' - 3x' + 2x = e^{-t}$,
   Polynôme caractéristique : $r^2 - 3r + 2$, *racines :* $1, 2$
   Solution générale de l'équation homogène : $C_1e^t + C_2e^{2t}$, C_1, C_2 *arbitraires dans* $\mathbb{R}$
   Solution particulière sous la forme γe^{-t} : $\frac{1}{6}e^{-t}$
   Solution générale de l'équation non homogène : $C_1e^t + C_2e^{2t} + \frac{1}{6}e^{-t}$, C_1, C_2 *arbitraires dans* $\mathbb{R}$
2. $x'' - 2x' + x(t) = \sin(t)$,
   Polynôme caractéristique : $r^2 - 2r + 1$, *racine double :* 1
   Solution générale de l'équation homogène : $C_1e^t + C_2te^t$, C_1, C_2 *arbitraires dans* $\mathbb{R}$
   Solution particulière sous la forme $\alpha \sin\ t + \beta \cos\ t$ *:* $\frac{1}{2}\cos\ t$
   Solution générale de l'équation non homogène : $C_1e^t + C_2te^t + \frac{1}{2}\cos\ t$, C_1, C_2 *arbitraires dans* $\mathbb{R}$
3. $x'' + x = 0$,
   Polynôme caractéristique : $r^2 + 1$, *racines :* $i, -i$
   Solution générale de l'équation homogène : $C_1\cos\ t + C_2\sin\ t$, C_1, C_2 *arbitraires dans* $\mathbb{R}$
6. $x'' - x = 5t + 2$,
   Polynôme caractéristique : $r^2 - r$, *racines :* $1, -1$
   Solution générale de l'équation homogène : $C_1e^t + C_2e^{-t}$, C_1, C_2 *arbitraires dans* $\mathbb{R}$
   Solution particulière sous la forme $\alpha t + \beta$: $-5t - 2$
   Solution générale de l'équation non homogène : $C_1e^t + C_2e^{-t} - 5t - 2$, C_1, C_2 *arbitraires dans* $\mathbb{R}$
8. $x'' + 4x = 2sin(2t)$.
   Polynôme caractéristique : $r^2 + 4$, *racines :* $2i, -2i$
   Solution générale de l'équation homogène : $C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)$, C_1, C_2 *arbitraires dans* $\mathbb{R}$
   Solution particulière sous la forme $\alpha t\cos(2t) + \beta t\sin(2t)$: $-\frac{1}{2}t\cos(2t)$
   Solution générale de l'équation non homogène : $C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) - \frac{1}{2}t\cos(2t)$, C_1, C_2 *arbitraires dans* $\mathbb{R}$

(ii) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Donner la solution pour les conditions initiales $x(0) = a$, $x'(0) = b$.

Exercice 2 (Circuit RLC (d'après l'examen de Juin 2016))**.**
On considère le circuit RLC constitué d'une bobine d'inductance L, d'un condensateur de capacité C en série et d'une résistance de résistivité R en série.



Le circuit est soumis à une tension E (en volts). On cherche à calculer la tension V (en volts) aux bornes du condensateur. On note I l'intensité (en ampères) du courant électrique dans le circuit. On rappelle que la fonction $t \mapsto V(t)$ vérifie l'équation

$$LC\,V''(t) + RC\,V'(t) + V(t) = E(t),\; t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

où $L > 0$, $C > 0$, $R \geq 0$ et $E \geq 0$, et où V' et V'' désignent les dérivées première et seconde de V.

1. On suppose que $E = 0$ et $R = 0$. Déterminer la solution qui vérifie $V(0) = 1$ et $V'(0) = 0$.

   Corrigé – *L'équation* (1) *s'écrit alors* $aV''(t) + V(t) = 0$ *avec* $a = LC > 0$. *Le polynôme caractéristique de cette équation est* $ar^2 + 1$ *et ses racines sont* $i\omega$ *et* $-i\omega$ *avec* $\omega = 1/\sqrt{a}$.
   La solution générale de cette équation homogène est l'application $t \mapsto c_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ *avec* C_1, C_2 *arbitraires dans* $\mathbb{R}$.
   Avec les conditions initiales $V(0) = 1$ *et* $V'(0) = 0$, *on obtient* $C_2 = 0$ *et* $C_1 = 1$, *et la solution est donc l'application* $t \mapsto \cos(\omega t)$.

2. On suppose que $L = C = R = 1$ et que $E(t) = \cos(2t)$. Déterminer la solution qui vérifie $V(0) = 1$ et $V'(0) = 0$.

   Corrigé – *L'équation* (1) *devient maintenant*
   $$V''(t) + V'(t) + V(t) = \cos(2t). \tag{2}$$
   Le polynôme caractéristique de cette équation est $r^2 + r + 1$. *Les racines sont* $\alpha \pm i\beta$ *avec* $\alpha = -1/2$ *et* $\beta = \sqrt{3}/2$.
   La solution générale V_h *de l'équation homogène associée à* (2) *est l'application* $t \mapsto V_h(t) = e^{-t/2}(C_1 \cos(\sqrt{3}t/2) + C_2 \sin(\sqrt{3}t/2))$ *avec* C_1, C_2 *arbitraires dans* $\mathbb{R}$.
   En cherche une solution particulière V_p *de* (2) *sous la forme* $V_p(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t)$, *on obtient après calculs* $a = -3/13$ *et* $b = 2/13$.
   La solution générale est donc, pour tout $t \geq 0$,
   $$V(t) = e^{-t/2}(C_1 \cos(\sqrt{3}t/2) + C_2 \sin(\sqrt{3}t/2)) + a\cos(2t) + b\sin(2t),$$
   avec C_1, C_2 *arbitraires dans* $\mathbb{R}$.
   Avec les conditions initiales $V(0) = 1$ *et* $V'(0) = 0$, *on obtient* $C_1 = 1 - a$ *et* $C_2 = (C_1 - 4b)/\sqrt{3}$.

Exercice 3 (Le ressort amorti)**.** On accroche une masse m à un ressort dans un milieu où elle est soumise à un frottement fluide. On notera x la position de la masse par rapport à son équilibre (ressort ni tendu ni comprimé). D'après le principe de Newton, l'équation vérifiée par la fonction $t \mapsto x(t)$ est:

$$mx'' = -\lambda x' - k\,x\;,$$

où x' et x'' désignent les dérivées première et seconde de x. Les nombres λ, k sont positifs.

1. A quels phénomènes physiques, les termes $\lambda x'$ et $k\,x$ correspondent-ils ?

Corrigé – *Le terme $\lambda x'$ correspond au frottement fluide. Le terme $k\,x$ correspond à la force de rappel du ressort. Dans la suite, on supposera $m > 0$, $k > 0$ et $\lambda \geq 0$.*

On pose $z : t \mapsto x\left(\sqrt{\dfrac{m}{k}}t\right)$. Montrer que z vérifie l'EDO suivante

$$z'' = -2\alpha z' - z, \tag{3}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}_+$; on précisera l'expression de α en fonction de m, λ et k.

Corrigé – *Par définition de z, on a $z'(t) = \sqrt{\frac{m}{k}}x'(\sqrt{\frac{m}{k}}t)$ et $z''(t) = \frac{m}{k}x''(\sqrt{\frac{m}{k}}t)$.*
L'équation sur x s'écrit, pour tout $t > 0$,

$$\frac{m}{k}x''(t) = -\frac{\lambda}{k}x'(t) - k\,x(t),$$

ou encore, pour tout $t > 0$,

$$\frac{m}{k}x''(\sqrt{\frac{m}{k}}t) = -\frac{\lambda}{k}x'(\sqrt{\frac{m}{k}}t) - x(\sqrt{\frac{m}{k}}t).$$

L'équation sur z est donc

$$z''(t) = -\frac{\lambda}{\sqrt{mk}}z'(t) - z(t).$$

Ceci donne bien $z'' = -2\alpha z' - z$ avec $\alpha = \frac{\lambda}{2\sqrt{mk}}$ (et donc $\alpha \geq 0$).

2. Cas $\alpha > 1$.

   (a) Donner les valeurs de μ_1 et μ_2 (en fonction de α, avec $\mu_1 < \mu_2$) pour lesquelles les solutions z de l'EDO (3) s'écrivent: $z(t) = \beta_1 \exp^{\mu_1 t} + \beta_2 \exp^{\mu_2 t}$, avec $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

   Corrigé – *Le polynôme caractéristique de l'équation (3) est $r^2 + 2\alpha r + 1$.*
   Les racines sont $\mu_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$ et $\mu_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}$. On remarque que $\mu_1 < \mu_2 < 0$.
   La solution générale de l'équation (3) est donc l'application $t \mapsto \beta_1 \exp^{\mu_1 t} + \beta_2 \exp^{\mu_2 t}$, avec $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.
   On remarque en particulier que $\lim_{t\to+\infty} z(t) = 0$.

   Dessiner l'allure des solutions de l'EDO (3) pour les différents cas :

   i. $\beta_1\beta_2 \geq 0$.

   Corrigé – *Si $\beta_1 = \beta_2 = 0$, on a $z(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. En dehors de ce cas particulier, la fonction z ne s'annule jamais (elle est somme de deux termes de même signe dont l'un au moins est non nul) et tend vers 0 quand $t \to +\infty$*

   ii. $\beta_1\beta_2 < 0$, $|\beta_1| < |\beta_2|$ (remarquer que $z(t) \neq 0$ pour tout $t > 0$).

   Corrigé – *On remarque que $z(t) = 0$ si et seulement si $e^{(\mu_2-\mu_1)t} = \frac{-\beta_1}{\beta_2}$ mais ceci est impossible pour $t \geq 0$ car $(\mu_2 - \mu_1)t \geq 0$ (et donc $e^{(\mu_2-\mu_1)t} \geq 1$) et $0 < \frac{-\beta_1}{\beta_2} < 1$.*
   Ici aussi, la fonction z ne s'annule jamais et tend vers 0 quand $t \to +\infty$.

   iii. $\beta_1\beta_2 < 0$, $|\beta_1| > |\beta_2|$ (pour quel $t > 0$ a-t-on $z(t) = 0$? $z'(t) = 0$?).

   Corrigé – *Dans ce cas, la fonction z s'annule pour une seule valeur de t, notée t_1, dont la valeur est*

   $$t_1 = \frac{\ln(\frac{-\beta_1}{\beta_2})}{\mu_2 - \mu_1}.$$

   On a bien $t_1 > 0$ car $\frac{-\beta_1}{\beta_2} > 1$ et $\mu_2 - \mu_1 > 0$.

On remarque également que z' s'annule pour une seule valeur de t, notée t_2. Sa valeur est

$$t_2 = \frac{\ln(\frac{-\mu_1\beta_1}{\mu_2\beta_2})}{\mu_2 - \mu_1}.$$

On a bien $t_2 > 0$ et même $t_2 > t_1$ car $|\mu_1| > |\mu_2|$ (et donc $\frac{-\mu_1\beta_1}{\mu_2\beta_2} > \frac{-\beta_1}{\beta_2}$).
La fonction z s'annule en t_1, puis atteint un extremum en une seule valeur de t, notée t_2, qui est strictement supérieure à t_1, puis tend vers 0 sans jamais s'annuler et sans que z' ne change de signe.

(b) Donner la solution de l'EDO (3) en fonction de la position initiale et de la vitesse initiale du ressort (c'est-à-dire $x(0)$ et $x'(0)$).

Corrigé – *Si $x(0) = a$ et $x'(0) = b$, on a $z(0) = a$ et $z'(0) = \sqrt{m/k}\, b$. On note $c = \sqrt{m/k}\, b$.*
On en déduit les valeurs de β_1 et β_2. Ce sont les solutions du système suivant

$$\beta_1 + \beta_2 = a,$$
$$\mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2 = c.$$

Ceci donne $\beta_1 = (a\mu_2 - c)/(\mu_2 - \mu_1)$ et $\beta_2 = (a\mu_1 - c)/(\mu_1 - \mu_2)$.

3. Cas $\alpha < 1$. On pose $\omega = \sqrt{1 - \alpha^2}$.

(a) Montrer que les solutions de l'EDO (3) sont de la forme :

$$z(t) = \exp^{-\alpha t}(\beta_1 \cos(\omega t) + \beta_2 \sin(\omega t)), \text{ avec } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}.$$

Dessiner l'allure des solutions.

Corrigé – *Le polynôme caractéristique de l'équation (3) est $r^2 + 2\alpha r + 1$.*
Les racines sont $\mu_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$ et $\mu_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}$. On remarque que $\mu_1 < \mu_2 < 0$.
La solution générale de l'équation (3) est donc l'application $t \mapsto \beta_1 \exp^{\mu_1 t} + \beta_2 \exp^{\mu_2 t}$, avec $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.
On remarque en particulier que $\lim_{t\to+\infty} z(t) = 0$.

(b) On suppose qu'à $t = 0$, la masse qui était retenue en x_0 est soudain libérée. Quelles sont alors les conditions initiales (c'est-à-dire position initiale et vitesse initiale)? Exprimer la solution l'EDO (3) avec ces conditions initiales.

Corrigé – *Les conditions initiales sont alors $x(0) = x_0$ et $x'(0) = 0$.*
On en déduit $\beta_1 = x_0$ et $-\alpha\beta_1 + \omega\beta_2 = 0$, c'est-à-dire $\beta_2 = (\alpha x_0)/\omega$.

(c) Vérifier que dans le cas où $\alpha = 0$, on obtient bien les résultats du ressort sans frottement.

Corrigé – *Pour $\alpha = 0$, on retrouve bien les résultats du ressort sans frottement, c'est-à-dire l'application*

$$t \mapsto \beta_1 \cos(\omega t) + \beta_2 \sin(\omega t),$$

avec $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

4. Cas $\alpha = 1$.

(a) Montrer que les solutions sont de la forme $z(t) = e^{-t}(a + b\,t)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Corrigé – *Le polynôme caractéristique de l'équation (3) est $r^2 + 2r + 1$ dont la racine double est -1.*
La solution générale de l'équation (3) est donc l'application

$$t \mapsto e^{-t}(a + bt)$$

avec a, $b \in \mathbb{R}$.

(b) Donner la solution en fonction de la position initiale et de la vitesse initiale du ressort.

Corrigé – *Si $x(0) = \alpha$ et $x'(0) = \beta$, on a $z(0) = \alpha$ et $z'(0) = \sqrt{m/k}\,\beta$. On note $\gamma = \sqrt{m/k}\,\beta$. On en déduit $a = \alpha$ et $-a + b = \gamma$, c'est-à-dire $b = \gamma + \alpha$.*

Exercice 4 (Equation d'Euler)**.**
Trouver les solutions de l'équation d'Euler.

$$t^2 y''(t) + 2ty'(t) - 6y(t) = 0,\ t \in]0, +\infty[.$$

Corrigé – *On sait que l'ensemble des solution de cette équation est un espace vectoriel de dimension 2. Il suffit donc de trouver deux solutions linéairement indépendantes de cette équation. On propose ci-après deux méthodes.*

1ere méthode. *On cherche des solutions sous la forme de puissance de t.*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $t > 0$, $y(t) = t^\alpha$. La fonction y est alors solution de cette équation si et seulement si

$$\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha - 6 = \alpha^2 + \alpha - 6 = 0,$$

c'est-à-dire $\alpha = 2$ ou $\alpha = -3$. La solution générale de l'équation est donc l'application

$$t \mapsto at^2 + bt^{-3}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$.

2eme méthode. *Pour y fonction de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ on définit z de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par*

$$z(x) = y(e^x),\ \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On a donc $z'(x) = y'(e^x)e^x$ et $z''(x) = y''(e^x)(e^x)^2 + y'(e^x)e^x$, de sorte que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$z''(x) + z'(x) - 6z(x) = (e^x)^2 y''(e^x) + 2e^x y'(e^x) - 6y(e^x).$$

On en déduit que y est solution de l'équation d'Euler (pour tout $t > 0$) si et seulement si $z''(x) + z'(x) - 6z(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Le polynôme caractéristique de l'équation sur z est $r^2 + r - 6$ dont les racines sont 2 et -3.
La solution générale de l'équation en z est donc l'application

$$t \mapsto ae^{2x} + be^{-3x}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$.
La solution générale de l'équation d'Euler est donc l'application

$$t \mapsto at^2 + bt^{-3}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 (L'équation de Bessel)**.** *Exercice plus difficile*
L'équation de Bessel s'écrit

$$t^2 x''(t) + tx'(t) + t^2 x(t) = 0. \tag{4}$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière à l'origine. Quel est leur intervalle de définition ?

   Corrigé – *On cherche une solution de (4) sous la forme*

   $$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^n. \tag{5}$$

   Une condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction soit solution sur l'intervalle $-]T, T[$ de (4) ($0 < T \leq +\infty$) est que

   - *le rayon de convergence R de cette série soit plus grand que T (noter que la série est alors indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]-T, T[$ et les dérivées sont obtenues en dérivant terme à terme),*
   - *la fonction x soit solution de (4).*

En remplaçant x par la série (5) *dans l'équation* (4)*, on obtient que les coefficients doivent vérifier :*

$$\begin{aligned}&a_1 = 0,\\&n(n-1)a_n + na_n + a_{n-2} = 0, \text{ pour tout } n \geq 2.\end{aligned}$$

On a donc $a_n = 0$ pour tout n impair et, pour tout n pair, $n = 2p$, $p > 1$

$$a_{2p} = -\frac{a_{2(p-1)}}{4p^2}.$$

La série définissant x (série (5)*) s'écrit alors, avec $b_p = a_{2p}$, $p \geq 0$,*

$$x(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p (t^2)^p.$$

Comme $b_p = -\frac{b_{(p-1)}}{4p^2}$, le rayon de convergence de la série $\sum_{p=0}^{+\infty} b_p s^p$ est infini (il suffit de remarquer par exemple que, par récurence sur p, $|b_p| \leq |b_0|/p!$). On en déduit que le rayon de convergence de la série définissant x (série (5)*) est infini.*

On a ainsi trouvé toutes les solutions de (4) *développables en série entière au voisinage de* 0*. Ces séries entières sont même convergentes sur tout $\mathbb{R}$ et ces fonctions sont solutions de* (4) *sur tout $\mathbb{R}$.*

Enfin l'ensemble de ces solutions (développables en série entière) est un e.v. de dimension 1 *engendré par la fonction obtenue en prenant $a_0 = 1$.*

On notera dans la suite x_1 cette fonction obtenue en prenant $a_0 = 1$, c'est-à-dire $x_1(0) = 1$.

2. Montrer que l'équation (4) admet sur $]0, +\infty[$ une solution non bornée en 0 (on pourra utiliser la technique de réduction d'ordre vue en cours). En déduire que toutes les solutions définies en 0 sont développables en série entière à l'origine.

Corrigé – *La première question donne une première solution à l'équation* (4)*, que nous avons notée x_1.*

Pour tout $0 < T \leq +\infty$, le cours donne que l'ensemble des solutions de (4) *sur $]0, T[$ est un e.v. de dimension* 2*. On va construire, en prenant $T > 0$ assez petit, une solution de* (4) *sur $]0, T[$, non bornée en* 0*. On pourra alors affirmer que pour tout T (et donc aussi pour $T = +\infty$) l'ensemble des solutions est engendré par x_1 et une deuxième fonction, x_2, non bornée en* 0*. On en déduira que toutes les solutions de* (4) *définies en* 0 *sont colinéaires à x_1 (puisque et donc développables en série entière (elles sont données par la série* (5)*).*

Il nous reste à construire une solution non bornée x_2. Soit $T > 0$; on cherche une solution de (4) *sur $]0, T[$, indépendante de x_1, avec la technique de la réduction d'ordre, c'est-à-dire sous la forme de la fonction $x_2(t) = z(t)x_1(t)$. Comme*

$$\begin{aligned}&x_2(t) = z(t)x_1(t),\\&x_2'(t) = z(t)x_1'(t) + z'(t)x_1(t),\\&x_2''(t) = z(t)x_1''(t) + 2z'(t)x_1'(t) + z''(t)x_1(t),\end{aligned}$$

la fonction x_2 est solution de (4) *sur $]0, T[$ si et seulement si, pour tout $t \in]0, T[$,*

$$tx_1(t)z''(t) + (2tx_1'(t) + x_1(t))z'(t) = 0 \tag{6}$$

On choisit maintenant $T > 0$ tel que $x_1(t) > 0$ pour tout $0 < t < T$ (c'est possible car $x_1(0) = 1$ et x_1 est continue) et on cherche une solution de (6) *telle que $z'(t) > 0$ sur $]0, T[$. La fonction z' doit donc vérifier sur $]0, T[$, en notant $h(t) = -\frac{2x_1'(t)}{x_1(t)}$*

$$(\ln(z'))'(t) = \frac{z''(t)}{z'(t)} = -\frac{2tx_1'(t) + x_1(t)}{tx_1(t)} = -\frac{1}{t} - \frac{2x_1'(t)}{x_1(t)} = .-\frac{1}{t} + h(t). \tag{7}$$

La fonction est continue sur $[0, T[$, elle est même de classe C^∞ sur $] - T, T[$. On note H sa primitive nulle en 0*, c'est-à-dire $H(t) = \int_0^t h(s)ds$ et on obtient donc une solution de* (7) *en prenant*

$$\ln(z')(t) = -\ln(t) + H(t),$$

c'est-à-dire $z'(t) = e^{H(t)}\frac{1}{t}$. (On a bien $z'(t) \geq 0$.) Ceci peut s'écrire, avec $b(t) = \frac{e^{H(t)}-1}{t}$,

$$z'(t) = \frac{1}{t} + b(t).$$

La fonction b est, comme H, de classe C^∞ sur $]-T,T[$. On note B sa primitive nulle en 0. Une solution possible pour z consiste donc à prendre, pour $t \in]0,T[$,

$$z(t) = \ln(t) + B(t),$$

et donc

$$x_2(t) = \ln(t)x_1(t) + B(t).$$

La fonction x_2 est bien solution de (4) sur $]0,T[$ et $\lim_{t\to 0} x_2(t) = -\infty$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Existe-t-il une solution ϕ de (4) telle que $\phi(0) = a$?

   Corrigé – Oui, c'est la fonction ax_1.

4. Soit la fonction B définie par

$$B(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t\sin\theta)d\theta.$$

Montrer que B est solution de (4). Quelles sont les solutions de (4) qui sont définies en 0 ? Pour une telle solution, quelle est la valeur en 0 de la dérivée ?

Corrigé – On applique les théorèmes de dérivation d'une fonction dépendant d'un paramètre.

$$\pi B(t) = \int_0^\pi \cos(t\sin\theta)d\theta,$$
$$\pi B'(t) = -\int_0^\pi \sin(t\sin\theta)\sin\theta d\theta,$$
$$\pi B''(t) = -\int_0^\pi \cos(t\sin\theta)(\sin\theta)^2 d\theta,$$

Ceci donne

$$\pi(t^2B''(t) + tB'(t) + t^2B(t)) = \int_0^\pi (t^2\cos(t\sin\theta)(\cos\theta)^2 - t\sin(t\sin\theta)\sin\theta)d\theta.$$

Une intégration par parties du deuxième terme donne

$$-\int_0^\pi t\sin(t\sin\theta)\sin\theta d\theta = -\int_0^\pi t^2\cos(t\sin\theta)(\cos\theta)^2 d\theta,$$

ce qui donne bien que B est solution de (4). Comme $B(0) = 1$, on a $B = x_1$.

L'ensemble des solutions de (4) qui sont définies en 0 est l'espace vectoriel engendré par x_1. La fonction x_1 est donné par la série (5). Comme $a_1 = 0$, on a $x_1'(0) = 0$. Pour une solution de (4) définie en 0, la valeur en 0 de la dérivée est donc 0.