Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, équations différentielles ordinaires
TD 8, systèmes non linéaires

Exercice 1. On considère le modèle de croissance cellulaire suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = \rho S(t)\left(1 - \dfrac{S(t)+mR(t)}{K}\right) - \alpha C S(t), \quad t>0, \\ R'(t) = \rho R(t)\left(1 - \dfrac{S(t)+mR(t)}{K}\right) - \beta S(t)R(t), \quad t>0, \\ (S(0),R(0)) = (S_0,R_0), \end{cases} \tag{1}$$

où S est le nombre de cellules sensibles au traitement, R le nombre de cellules résistantes au traitement et C désigne la quantité de traitement. Les quantités ρ, m, K, α et β sont des nombres réels strictement positifs. Dans tout l'exercice on supposera

$$\rho - \alpha C > 0,\ S_0 \geq 0,\ R_0 \geq 0.$$

1. Montrer que pour tout $(S_0,R_0) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2$, le problème de Cauchy (1) admet une unique solution maximale. On notera dans la suite $[0,T_m[$ l'intervalle d'existence de cette solution maximale.
2. Montrer que $(0,0)$, $(\frac{K}{\rho}(\rho-\alpha C),0)$ et $(0,\frac{K}{m})$ sont des points d'équilibre de (1).
3. Montrer qu'il y a des solutions globales avec $S(t)=0$ pour tout $t\geq 0$ et des solutions globales avec $R(t)=0$ pour tout $t \geq 0$. Dans chacun des cas, Donner les limites de ces solutions quand $t\to+\infty$.

   En déduire que si $S_0>0$ et $R_0>0$, alors $S(t)>0$ et $R(t)>0$ pour tout $t\in[0,T_m[$.

On suppose maintenant que $m=1$ et note

$$U = \{(S,R)\in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \text{ tel que } S+R \leq K\}.$$

4. Montrer que si $(S_0,R_0)\in U$, alors $(S(t),R(t))\in U$ pour tout $t\in[0,T_m[$. En déduire que si $(S_0,R_0)\in U$, la solution maximale est globale (c'est-à-dire $T_m=+\infty$).

Exercice 2 (Compétition entre deux espèces)**.**
Le système ci-dessous modélise l'évolution des populations de deux espèces vivant sur le même territoire, et se nourrissant des mêmes ressources.

$$x'(t) = x(t)(1-x(t)-\mu_1 y(t)) \text{ pour tout } t>0, \tag{2}$$
$$y'(t) = \rho y(t)(1-\mu_2 x(t) - y(t)) \text{ pour tout } t>0. \tag{3}$$

Les nombres ρ, μ_1 et μ_2 sont des paramètres strictement positifs donnés. Les quantités $x(t)$ et $y(t)$ représentant des populations, le modèle n'est significatif que pour $x(t)\geq 0$ et $y(t) \geq 0$.
A ce système, on ajoute la condition initiale $x(0)=x_0$ et $y(0)=y_0$, où x_0 et y_0 sont des nombres positifs donnés et on note x,y la solution maximale de ce système (on remarquera que les théorèmes du cours donnent l'existence et l'unicité de cette solution maximale).

1. Expliquer les différents termes de ce système. Les deux membres de droite ressemblent-ils ceux de l'équation logistique ?
2. On suppose dans cette question que $x_0=0$ et $y_0>0$. Montrer que la solution maximale est globale et vérifie $x(t)=0$ et $y(t)>0$ pour tout $t\geq 0$. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1$.
3. On suppose dans cette questions que $x_0>0$ et $y_0>0$. Déduire de la question 2 que $x(t)>0$ et $y(t)>0$ pour tout t. Puis, montrer que les fonctions x et y sont bornées et donc que la solution est globale.

4. Quelles sont (en fonctions des paramètres) les points d'équilibre ? Les points d'équilibre sont ils (uniformément) stables ? Instables ?

5. Pour quelles valeurs des paramètres peut-on affirmer que l'on n'a pas $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ ou $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ (c'est-à-dire qu'aucune espèce ne disparaisse) ?

Exercice 3 (L'oscillateur de Van der Pol)**.**
Le comportement d'un circuit RLC, avec une résistance de fonction caractéristique f vérifie l'équation suivante, où x est l'intensité et y est l'opposée de la tension aux bornes du condensateur:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) - f(x(t)), \text{ pour tout } t > 0, \\ \dot{y}(t) = -x(t), \text{ pour tout } t > 0. \end{cases}$$

La fonction f est supposée de classe C^1 et vérifie $f(0) = 0$. Pour toute donnée initiale, notée (x_0, y_0), les théorèmes du cours donnent l'existence et l'unicité d'une solution maximale définie sur l'intervalle de temps $[0, T_m[$.

1. Donner le point d'équilibre du système. Calculer le système linéarisé au voisinage de ce point d'équilibre. Ce point d'équilibre est-il asymptotiquement stable ? Instable ?

2. On suppose dans cette question que $f(x) = x$. Calculer explicitement les solutions du système.

3. On suppose dans cette question que f vérifie $f(x)x > 0$ pour $x \neq 0$. La résistance est alors dite passive. Montrer que x^2+y^2 est une fonction de Lyapounov du système, c'est-à-dire que, pour toute solution du système, la fonction $t \mapsto x(t)^2 + y(t)^2$ est décroissante. En déduire que, quelque soit la donnée initiale, $T_m = +\infty$. En déduire également que le point d'équilibre est uniformément stable.

   Pourquoi ce résultat est-il compatible avec celui de la question 1 ?

4. On suppose dans cette question $f(x) = x^3$.

   (a) Montrer que toutes les solutions du système sont globales.

   (b) Peut-on montrer la stabilité du point $(0, 0)$ par la technique de la question 1 (linéarisation au voisinage du point d'équilibre) ou par celle de la question 3 (utilisation de la norme euclidienne comme fonction de Lyapounov)?

5. On suppose dans cette question que la résistance est une diode à effet tunnel, de fonction caractéristique $f(x) = x^3 - x$.

   (a) Le point $(0, 0)$ est-il stable ?

   (b) Montrer que $x(t)^2 + y(t)^2$ est croissant le long des trajectoires si $|x(t)| < 1$ et décroissant si $|x(t)| > 1$.

   (c) Imaginer l'allure de la solution x ayant pour condition initiale $(0, y_0)$, avec $y_0 > 0$.