Année universitaire 2015/2016

Site :	☒ Luminy	☒ St-Charles	☐ St-Jérôme	☐ Cht-Gombert	☐ Aix-Montperrin	☐ Aubagne-SATIS
Sujet session de : ☐ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☒ Session 2				Durée de l'épreuve : **3H**		
Examen de : ☐ L1 ☐ L2 ☒ L3 ☐ M1 ☐ M2 ☐ LP ☐ DU				Nom diplôme : **Licence de Mathématiques**		

Code Apogée du module : **ENSMI6U2**	Libellé du module : **Equations différentielles**

Document autorisé : ☐ OUI ☒ NON	Calculatrices autorisées : ☐ OUI ☒ NON

Examen - Mardi 28 juin 2016

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 On considère le système différentiel suivant avec $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' = cx + y \\ y' = -x + cy \end{cases}$$

1. Soit A, B deux matrices carrées de même taille. Sous quelle condition peut-on écrire $e^{A+B} = e^A + e^B$?
2. Écrire le système ci-dessus sous la forme $X' = AX$, avec $X = (x, y)^t$ et A une matrice 2×2.
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer l'exponentielle de matrice e^{tA}.
4. En déduire la solution du système ci-dessus qui vérifie $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$.

Exercice 2 On considère le circuit RLC constitué d'une bobine d'inductance L, d'un condensateur de capacité C en série et d'une résistance de résistivité R en série. Le circuit est soumis à un échelon de tension E (en volts). On cherche à calculer la tension V (en volts) aux bornes du condensateur. On note I l'intensité (en ampères) du courant électrique dans le circuit. On rappelle que

$$LC\frac{d^2V}{dt^2} + RC\frac{dV}{dt} + V = E(t) \tag{1}$$

1. Mettre le système sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1.
2. Montrer que si on se donne $V(0)$ et $V'(0)$, l'équation (1) admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que $E = 0$ et $R = 0$. Déterminer la solution qui vérifie $V(0) = 1$ et $V'(0) = 0$.
4. On suppose que $L = C = R = 1$ et que $E(t) = \cos(2t)$. Déterminer la solution qui vérifie $V(0) = 1$ et $V'(0) = 0$.

Exercice 3 On considère le système différentiel suivant, qui modélise l'évolution de deux populations x et y :

$$\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(1-x). \end{cases}$$

1. Écrire le système sous la forme $X' = F(X)$, où $X = (x,y)^t$ est un vecteur de taille 2. Montrer que pour toute condition initiale $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy associé.

2. Chercher et trouver des solutions (I, X) qui vérifient $y(t) = 0$ sur tout leur intervalle de définition. En déduire l'unique solution maximale de l'EDO vérifiant $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$.

3. Donner également l'unique solution maximale qui vérifie $x(0) = 0$, $y(0) = y_0$.

4. On cherche des solutions qui vérifient $x(t) = y(t)$ sur tout leur intervalle de définition.
   (a) Écrire l'équation que doit vérifier $x(t)$ dans ce cas.
   (b) Résoudre cette équation.
   (c) En déduire l'unique solution maximale du système qui vérifie $x(0) = y(0) = x_0$.

5. On considère maintenant une solution maximale vérifiant $x(0) = x_0 > 0$ et $y(0) = y_0 > 0$. On note $]T_{min}, T_{max}[$ son intervalle de définition (avec éventuellement $T_{min} = -\infty$ et $T_{max} = +\infty$).
   (a) Déduire des questions précédentes que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t \in]T_{min}, T_{max}[$.
   (b) En déduire que $x'(t) \leq x(t)$ et $y'(t) \leq y(t)$ sur tout l'intervalle de définition, puis que $T_{max} = +\infty$.

6. On s'intéresse maintenant aux points d'équilibre du système.
   (a) Trouver ces points d'équilibre.
   (b) Calculer la différentielle de F. En déduire les systèmes linéaires approchés au voisinage des différents points d'équilibres.
   (c) Étudier la stabilité de l'origine pour ces systèmes linéaires.
   (d) Que peut-on en déduire sur la stabilité des points d'équilibres du système initial ?

7. Représentation graphique : faire un diagramme des phases, qui devra indiquer
   — les points d'équilibres,
   — les solutions calculées précédemment,
   — les zones où x est croissante, décroissante (idem pour y).

8. Essayer de tracer d'autres solutions sur le diagramme des phases. Avez-vous une idée de l'évolution des deux populations x et y en temps grand ? (*vous pouvez répondre sans justification, mais n'hésitez pas à justifier si le temps le permet*).