

### tp3, équations différentielles du 2eme ordre, visualisation de solutions exactes

**Exercice 1 (RLC).** On considère le circuit RLC constitué d'une bobine d'inductance  $L$ , d'un condensateur de capacité  $C$  en série et d'une résistance de résistivité  $R$  en série. Le circuit est soumis à une tension  $E$  (en volts). On cherche à calculer la tension  $V$  (en volts) aux bornes du condensateur. On note  $I$  l'intensité (en ampères) du courant électrique dans le circuit. On rappelle que

$$LC \frac{d^2V}{dt^2} + RC \frac{dV}{dt} + V = E(t)$$

1. On suppose que  $E = 0$ ,  $R = 0$  et  $L = C = 1$  et on considère deux choix de conditions initiales,  $V(0) = 1$ ,  $V'(0) = 0$  et  $V(0) = 0$ ,  $V'(0) = 1$ . Pour chaque choix de conditions initiales, donner le graphe de l'application  $t \mapsto V(t)$  pour  $t \in [0, 30]$ . Puis, donner les trajectoires dans le plan de phase (c'est-à-dire l'ensemble des points  $(V(t), V'(t))$  pour  $t \in [0, 30]$ ).
2. Reprendre la question précédente avec  $L = C = R = 1$  et  $E(t) = \cos(2t)$ .

### Exercice 2 (Ressorts).

On accroche une masse  $m$  à un ressort dans un milieu où elle est soumise à un frottement fluide. On notera  $x$  la position de la masse par rapport à son équilibre (ressort non tendu ni comprimé). D'après le principe de Newton, l'équation vérifiée par la fonction  $t \mapsto x(t)$  est :

$$m\ddot{x} = -\lambda\dot{x} - kx,$$

où  $\dot{x}$  et  $\ddot{x}$  désignent les dérivées première et seconde de  $x$ . Les nombres  $\lambda$ ,  $k$  sont positifs et on suppose que  $m = 1$ .

1. On suppose que  $\lambda = 0$  et  $k = 1$  et on considère deux choix de conditions initiales,  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  et  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 1$ . Pour chaque choix de conditions initiales, donner le graphe de l'application  $t \mapsto x(t)$  pour  $t \in [0, 30]$ . Puis, donner les trajectoires dans le plan de phase (c'est-à-dire l'ensemble des points  $(x(t), \dot{x}(t))$  pour  $t \in [0, 30]$ ).
2. Reprendre la question (1) avec  $\lambda = 0.1$ ,  $k = 1$  et l'intervalle de temps  $[0, 100]$ .
3. Reprendre la question (1) avec  $\lambda = 10$ ,  $k = 1$  et l'intervalle de temps  $[0, 50]$ .
4. Expliquer les résultats obtenus dans les questions précédentes en fonction des phénomènes physiques que sont censés modéliser les paramètres  $\lambda$  et  $k$ .