tp4, résolution de systèmes différentielles par des schémas numériques

Exercice 1 (Force de Coriolis)**.** Une particule (de masse $m = 1$) se déplace dans un plan sous l'action de la force de Coriolis (d'intensité $\omega = 1$). Sa position à l'instant t est $(x(t), y(t))$ et sa vitesse est notée $(u(t), v(t))$ (on a donc $u(t) = x'(t)$ et $v(t) = y'(t)$). On suppose que $x(0) = y(0) = 0$ et $u(0) = v(0) = 1$. On s'intéresse à la position de la particule et à sa vitesse sur l'intervalle de temps $[0, 20]$. La modélisation de la force de Coriolis donne que u, v est solution du système pour $t > 0$,

$$u'(t) = -v(t), \tag{1}$$
$$v'(t) = u(t). \tag{2}$$

1. Rappeler quelle est la solution exacte de ce système et en déduire la position de la particule à l'instant t. Remarquer que l'energie cinétique du système (c'est-à-dire la quantité $(1/2)(u^2(t) + v^2(t))$) est constante.
2. Discrétiser le système (1)-(2) avec le schéma d'Euler Explicite et un pas de temps $h = 0.5$ puis un pas de temps $h = 0.05$. Pour chacun de ces pas de temps, comparer sur un même graphe la solution approchée obtenue avec la solution exacte. L'energie cinétique de la solution approchée est constante ? croissante ? décroissante ?
3. Reprendre la question 2 avec le schéma d'Euler implicite.
4. Reprendre la question 2 avec le schéma de Crank-Nicholson.
5. Reprendre la question 2 avec le schéma de Heun et le schéma RK4.

Exercice 2 (Modèle proies-prédateurs)**.**
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^\star$, et $x_0, y_0 \in \mathbb{R}_+^\star$; on considère le système différentiel suivant (équations de *Lotka-Volterra*) :

$$x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t), \ t > 0, \tag{3}$$
$$y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t), \ t > 0, \tag{4}$$

avec la condition initiale

$$x(0) = x_0, \tag{5}$$
$$y(0) = y_0. \tag{6}$$

Ce modèle représente l'évolution de deux populations. Par exemple, $x(t)$ répresente la population à l'instant des petits poissons et $y(t)$ la population des requins (qui se nourissent de petites poissons). Ce modèle a été introduit initialement par Volterra pour expliquer l'évolution de la population de requins dans la baie de Naples en fonction de l'intensité de la pêche (qui joue sur le facteur a).
On admet que ce système a une solution globale et que cette solution est périodique. On souhaite ici calculer une approximation de cette solution et obtenir si possible une estimation de la période.
On prend ici, pour les paramètres, $a = 2$, $c = 1$, $b = 3$ et $d = 1$. Pour la condition initiale $x_0 = 3$ et $y_0 = 1$.
On s'intéresse à l'intervalle de temps $[0, T]$ avec $T = 15$.

1. Programmer pour ce système les schémas d'Euler explicite, de Heun et le schéma RK4.
2. Comparer les résultats obtenus avec différents pas de temps, par exemple $h = 0.5$, $h = 0.1$ et $h = 0.01$, en donnant les orbitres de la solution approchée.
3. Donner, si possible, une estimation de la période.

Exercice 3 (COVID et confinement)**.** Terminons les TP par un sujet d'actualité. Un modèle très connu en épidiomogie est le modèle SIR (pour Susceptible, Infectious, Recovered— en anglais).
On note

- c le temps de contagion,
- p le taux de contact entre individus,
- $I(t)$ proportion d'individus infectés au temps t,
- $S(t)$ proportion d'individus susceptibles d' etre infectés au temps t,
- $R(t)$ proportion d'individus remis ou morts au temps t,
- $I + S + R = 1$ car on raisonne en proportion.
- unité=jours

Le taux p de contact entre individus dépend évidemment de la densité de population, des habitudes sociales. Ce taux est fortement diminué lorsque l'on impose un confinement, total ou partiel.

Première partie
La variation de proportion d'infectés au temps t est la différence entre deux termes :

1. la proportion de nouveaux infectés, proportionnel au produit $I(t)S(t)$
2. la proportion d'infectés qui sortent de leur période de contagion, dont le nombre est égal la proportion de nouveaux infectés au temps $t - c$.

Le modèle sécrit donc

$$\begin{array}{ll} I'(t) = p(I(t)S(t) - I(t-c)S(t-c)), & \\ S'(t) = -pI(t)S(t), & \\ R'(t) = pI(t-c)S(t-c), & \forall t \in [0,T], \\ I(t) + R(t) + S(t) = 1, & \end{array} \tag{7}$$

où on a posé $I(t) = 0$ et $S(t) = 1$ pour $t < 0$. On prend $T = 500$ jours.

Le terme R_0 des média correspond dans ce modèle à $R_0 = pc$. On suppose un taux de contamination de 1 pour mille au temps initial, c'est-à-dire $I(0) = 1/1000$. Par exemple on a une population de 1000 personnes, et une seule personne contaminée a l'instant initial (ou 1 million de personnes et 1000 personnes contaminées...).
La durée de contagion c est de 10 jours. On note $p_{ext} = \frac{1}{c}$
On fait une simulation sur 500 jours maximum.
Le système différentiel est discrétisé par Euler explicite avec un pas de temps de 0,01 jour.
Effectuer des simulations pour les cas de figure suivants :

1. $p = 4p_{ext}$ (peu ou pas de confinement)
2. $p = 2p_{ext}$ (confinement)
3. $p = 2p_{ext}$ (confinement), puis, si pendant 10 jours le nombre d'infectés diminue, on passe à $p = 4p_{\text{ext}}$.

Commenter les résultats.

Deuxième partie (facultative)
Le modèle est différent du modème "habituel" [1] (8), où le nombre d'infectés qui sortent de leur période de contagion est approché par $p_{ext}I(t)$. Ce modèle s'écrit maintenant (avec les mêmes notations que précédemment) :

$$\begin{array}{ll} I'(t) = pI(t)S(t) - p_{ext}I(t), & \\ S'(t) = -pI(t)S(t), & \\ R'(t) = p_{ext}I(t), & \forall t \in [0,T], \\ I(t) + R(t) + S(t) = 1, & \end{array} \tag{8}$$

Les plus courageux pourront comparer les résultats des deux modèles...

1. J. Murray, Mathematical Vol. 1, third edition, Springer Verlag