Université de Marseille, année 2019-2020
Licence de Mathématiques, 3eme année, équations différentielles
Petit projet à rendre le jour de l'examen

Â
Ce petit projet présente des exemples d'équations et systèmes différentiels reliés, de manière très simplifiée, à la stabilité des structures (comme celles des ponts)

On considère tout d'abord l'équation différentielle (1) avec condition initiale (2) et $\varepsilon > 0$.

$$x''(t) + x(t) = \varepsilon \sin(t) \text{ pour tout } t > 0, \tag{1}$$

$$x(0) = x'(0) = 0. \tag{2}$$

1. Donner la solution exacte de (1)-(2)

On dit que la solution "explose" si il existe $t > 0$ tel que $|x(t)| > 30$.

2. (Pont de Brougton en 1831, Pont d'Angers en 1850) La solution (exacte) de (1)-(2) explose-t-elle ?
3. Pour $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = 0.1$, calculer (avec python) une solution approchée de (1)-(2) avec un schéma numérique (par exemple le schéma de Heun) et un pas de temps "suffisamment" petit (pour comprendre le sens de "suffisamment", il faut considérer les données du problème). Comparer la solution exacte et la solution approchée pour $0 \le t \le T$ (choisir T). La solution approchée explose-t-elle ?

On remplace maintenant (1) par

$$x''(t) + \sin(x(t)) = \varepsilon \sin(t) \text{ pour tout } t > 0, \tag{3}$$

avec $\varepsilon > 0$ donné.
On peut montrer (mais ceci est difficile) qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que la solution de (3)-(2) reste bornée (sur tout $\mathbb{R}_+$) si $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$.

4. (La non linéarité peut sauver le pont) Pour différentes valeurs de ε (prendre, par exemple $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = 0.1$), calculer (avec python) une solution approchée de (3)-(2) avec un schéma numérique. La solution approchée explose-t-elle (choisir différentes valeurs de T) ?

On considère maintenant le système différentiel (4)-(5) avec condition initiale (6)-(7).

$$x''(t) + \sin(x(t)) = (0.1)\sin(t) \text{ pour tout } t > 0, \tag{4}$$

$$y''(t) + y(t) = x(t) \text{ pour tout } t > 0, \tag{5}$$

$$x(0) = x'(0) = 0. \tag{6}$$

$$y(0) = y'(0) = 0. \tag{7}$$

5. (Pont de Tacoma, 1941) Calculer (avec python) une solution approchée de (4)-(5)-(6)-(7) avec un schéma numérique. Donner sur un graphique les solutions approchées x et y. La solution approchée explose-t-elle (choisir différentes valeurs de T) ?

On considère enfin le système différentiel (8)-(9) avec condition initiale (6)-(7).

$$x''(t) + \sin(x(t)) = (0.1)\sin(t) \text{ pour tout } t > 0, \tag{8}$$

$$y''(t) + \sin(y(t)) = \eta\, x(t) \text{ pour tout } t > 0, \tag{9}$$

avec $\eta > 0$ donné.

6. (La non linéarité peut sauver Tacoma ?) Pour différentes valeurs de η (prendre, par exemple $\eta = 1$ et $\eta = 0.1$), calculer (avec python) une solution approchée de (8)-(9)-(6)-(7) avec un schéma numérique. Donner sur un graphique les solutions approchées x et y. La solution approchée explose-t-elle (choisir différentes valeurs de T) ?

Commentaires : La question 2 illustre le phénomène de “résonance”. Sur une structure solide (comme un pont) une sollicitation de faible amplitude mais dont la fréquence correspond à une fréquence propre da la structure peut provoquer la ruine de la structure. C’est ce qu’on appelle la résonance. Il explique pourquoi certains ponts se sont écroulés lors du passage d’un régiment marchant au pas ((Pont de Brougton et Pont d’Angers). Toutefois, ce phénomène de résonance n’existe que pour des modèles linéaires et sont significatifs, en général, que pour des petits déplacements de la structure réelle. La question 4 montre qu’un modèle non linéaire (plus précis que le modèle linéaire) peut éventuellement limiter ce phénomène de résonance (et donc “sauver le pont”). Enfin les questions 5 et 6 montrent que ce phénomène de résonance et de ruine d’une structure peut être dû au couplage entre deux phénomènes dont les modèles linéarisés ont une fréquence propre commune (l’effondrement du pont de Tacoma est, semble-t-il, lié à un tel problème de couplage).