Chapitre 3

Fonctions mesurables, variables aléatoires

3.1 Introduction, topologie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$

Nous allons, dans ce chapitre, introduire différents outils nécessaires à la définition de l'intégrale de Lebesgue. De la même manière que les fonctions en escalier ont été introduites lors de la définition de l'intégrale des fonctions réglées, nous introduisons maintenant le concept de fonction étagée sur un espace mesurable (E, T). Nous introduirons ensuite les concepts de fonction mesurable et de variable aléatoire, ainsi que les premières notions de convergence de suite de ces fonctions. La notion de variable aléatoire est fondamentale en calcul des probabilités : c'est en général par la connaissance de la variable aléatoire (et par sa loi de probabilité) que se construit le modèle probabiliste, l'espace probabilisé (E, T, p) restant souvent mal connu.

Remarque 3.1

1. L'objectif est d'intégrer des fonctions de E (espace de départ) dans F (espace d'arrivée). Pour construire ainsi une notion d'intégrale, il faut un espace mesuré au départ et un espace topologique à l'arrivée, car nous aurons besoin dans l'espace d'arrivée d'une notion de convergence (pour les procédés de passage à la limite dans la définition de l'intégrale). Les espaces d'arrivée usuels sont (pour la théorie de l'intégration) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^N$ ou un espace de Banach. Le procédé de construction dû à Lebesgue donne un rôle fondamental aux fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (et à la notion de convergence croissante) et nous aurons besoin d'utiliser la topologie de $\overline{\mathbb{R}}_+$ (voir la définition 3.2).
2. On rappelle qu'un espace topologique est la donnée d'un ensemble F muni d'une famille de parties de F, appelées "ouverts de F", contenant $\emptyset$ et F, stable par union (quelconque) et stable par intersection finie. On rappelle aussi que, dans un espace topologique, $x_n \to x$, quand $n \to +\infty$, signifie que, pour tout O ouvert contenant x, il existe n_0 tel que $x_n \in O$ pour tout $n \geq n_0$.
3. Soit F un espace topologique et $G \subset F$. On appelle topologie trace sur G la topologie définie par l'ensemble des restrictions à G des ouverts de F. Si $O \subset G$, O est un ouvert de G si et seulement s'il existe U ouvert de F tel que $O = U \cap G$. Noter donc que O peut ne pas être un ouvert de F si G n'est pas un ouvert de F. Par contre, il est important de remarquer que si G est un borélien de F (c'est-à-dire $G \in \mathcal{B}(F)$, $\mathcal{B}(F)$ étant la tribu engendrée par les ouverts de F), l'ensemble des boréliens de G est exactement l'ensemble des boréliens de F inclus dans G, c'est-à-dire $\mathcal{B}(G) = \{B \subset G\,;\, B \in \mathcal{B}(F)\}$, ceci est démontré dans l'exercice 2.3 page 45.
4. Un exemple fondamental de topologie sur l'ensemble F est celui de la topologie donnée par une distance sur F. Dans le cas de $F = \mathbb{R}$, nous considérerons toujours $\mathbb{R}$ muni de la topologie donnée par la structure métrique de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire par l'application "distance" définie par $d(a, b) = |b - a|$.

Définition 3.2 (Topologie et tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

1. Soit $O \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. O est un ouvert si pour tout $a \in O$ on a :

(a) Si $0 < a < +\infty$, alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset O$,

(b) si $a = 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[0, \alpha[\subset O$,

(c) si $a = +\infty$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $]\alpha, +\infty] \subset O$.

2. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ est la tribu (sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) engendrée par les ouverts de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Soit $B \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on peut montrer (voir la remarque 3.3 ci après) que $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ si et seulement si $B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$).

Remarque 3.3 (Topologie sur $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}_+$)

1. La topologie sur $\mathbb{R}_+$ est la topologie induite par celle de $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est aussi la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$ (la démonstration de ce résultat est un exercice de topologie, exercice 3.4). L'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}_+$ est donc égal à l'ensemble des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}_+$ inclus dans $\mathbb{R}_+$ et c'est aussi l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{R}_+$ (voir la remarque 3.1). On remarque aussi que $\{+\infty\} \in B(\overline{\mathbb{R}}_+)$ (car $\{+\infty\}$ est, par exemple, une intersection dénombrable d'ouverts de $\overline{\mathbb{R}}_+$). On en déduit que, si $B \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on a $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ si et seulement si $B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (noter que $B \cap \mathbb{R} = B \cap \mathbb{R}_+$).
2. Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, A est donc un borélien de $\overline{\mathbb{R}}_+$ si et seulement si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou $A = B \cup \{+\infty\}$, avec $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. La définition de la topologie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ donne bien que, pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on a $x_n \to +\infty$ (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, quand $n \to +\infty$) si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, il existe n_0 tel que $x_n \in]\alpha, +\infty]$ pour tout $n \geq n_0$ (ce qui est la définition usuelle de convergence vers $+\infty$).
4. On peut aussi montrer que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}_1 = \{]a, +\infty];\, a \in \mathbb{R}_+\}$. C'est aussi la tribu engendrée par $\mathcal{C}_2 = \{]a, +\infty[\cap \mathbb{R}_+;\, a \in \mathbb{R}\}$. Par contre, ce n'est pas la tribu engendrée (sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) par $\mathcal{C}_3 = \{]a, +\infty[;\, a \in \mathbb{R}_+\}$ (on a donc $T(\mathcal{C}_3) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et $T(\mathcal{C}_3) \neq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$). Voir à ce propos les exercices 3.13 et 3.14.

3.2 Fonctions étagées

Définition 3.4 (Fonction caractéristique d'un ensemble) *Soient (E, T) un espace mesurable et soit $A \in T$. On appelle fonction caractéristique mesurable de l'ensemble A, et on note 1_A (ou χ_A) la fonction définie par : $1_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $1_A(x) = 0$ si $x \in A^c$.*

Définition 3.5 (Fonction étagée) *Soient (E, T) un espace mesurable et $f : E \to \mathbb{R}$.*

1. On dit que f est étagée (ou T-étagée) si f est une combinaison linéaire (finie) de fonctions caractéristiques mesurables, c'est-à-dire s'il existe une famille finie $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ et n réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$.

2. On dit que f est étagée positive si f est étagée et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions étagées et $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives.

La notion de fonction étagée positive va nous permettre de définir l'intégrale à partir de la notion de mesure. On se limite pour l'instant aux fonctions positives afin de donner un sens à l'addition de mesures infinies. Notons que, dans la définition d'une fonction étagée, les ensembles A_i peuvent être d'intersection non vide. On aura besoin, pour introduire facilement la notion d'intégrale d'une fonction étagée positive, de considérer une décomposition de la fonction étagée sur des ensembles d'intersection vide. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 3.6 (Décomposition canonique d'une fonction étagée positive) *Soit* (E,T) *un espace mesurable, et soit* $f \in \mathcal{E}_+$ *une fonction étagée positive, non identiquement nulle. Alors il existe une unique famille finie* $(a_i,\mathrm{A}_i)_{i=1,\dots,n} \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathrm{T}$ *telle que* $0 < a_1 < \ldots < a_n$, $\mathrm{A}_i \neq \emptyset$, *pour tout* i, $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$, *si* $i \neq j$, *et* $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}$.

DÉMONSTRATION – Soient $(\mathrm{B}_i)_{i=1,\dots,p} \subset \mathrm{T}$, $(b_i)_{i=1,\dots,p} \subset \mathbb{R}$ et $f = \sum_{i=1}^p b_i 1_{\mathrm{B}_i}$ une fonction étagée positive non nulle. L'ensemble $\mathrm{Im} f$ des valeurs prises par f est donc fini. Comme $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}_+$, on a donc $\mathrm{Im} f \setminus \{0\} = \{a_1,\dots,a_n\}$ avec $0 < a_1, \ldots < a_n$. En posant $\mathrm{A}_i = \{x \in \mathrm{E}; f(x) = a_i\}$, on a donc $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}$ avec $\mathrm{A}_i \neq \emptyset$ et $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$. (Noter aussi que $\{x \in \mathrm{E}; f(x) = 0\} = (\bigcup_{i=1}^n \mathrm{A}_i)^c$.) Il reste à montrer que $\mathrm{A}_i \in \mathrm{T}$. Pour $i \in \{1,\dots,n\}$, on pose $\mathrm{I}_i = \{\mathrm{K} \subset \{1,\dots,p\}$; $a_i = \sum_{k\in\mathrm{K}} b_k\}$. On a alors, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $\mathrm{A}_i = \bigcup_{\mathrm{K}\in\mathrm{I}_i} \mathrm{C}_\mathrm{K}$, avec $\mathrm{C}_\mathrm{K} = \bigcap_{j=1}^p \mathrm{D}_j$, $\mathrm{D}_j = \mathrm{B}_j$ si $j \in \mathrm{K}$ et $\mathrm{D}_j = \mathrm{B}_j^c$ si $j \notin \mathrm{K}$. Les propriétés de stabilité d'une tribu nous donnent alors que $\mathrm{A}_i \in \mathrm{T}$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$. On a donc trouvé la décomposition voulue de f. Le fait que cette décomposition est unique est immédiat car on a nécessairement $\{a_1,\dots,a_n\} = \mathrm{Im} f \setminus \{0\}$ et $\mathrm{A}_i = \{x \in \mathrm{E}; f(x) = a_i\}$. ■

On aurait envie à partir de la notion de fonction étagée positive décomposée sous la forme précédente, de définir l'intégrale de f comme $\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(\mathrm{A}_i)$. En fait, on pourra même (cf définition 4.1) définir l'intégrale d'une fonction étagée avec une décomposition plus générale (non unique) grâce au lemme suivant :

Lemme 3.7 *Soit* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *un espace mesuré et soit* $f \in \mathcal{E}_+$ *une fonction étagée positive non nulle, telle que*

$$f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i} \text{ et } f = \sum_{i=1}^p b_i 1_{\mathrm{B}_i}$$

où $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots,b_p$ *sont des réels strictement positifs,* $(\mathrm{A}_i)_{i=1,\dots,n} \subset \mathrm{T}$ *et* $(\mathrm{B}_i)_{i=1,\dots,p} \subset \mathrm{T}$ *sont des familles de parties disjointes deux à deux, i.e. telles que* $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ *et* $\mathrm{B}_i \cap \mathrm{B}_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$. *Alors :*

$$\sum_{i=1}^n a_i m(\mathrm{A}_i) = \sum_{j=1}^p b_j m(\mathrm{B}_j). \tag{3.1}$$

DÉMONSTRATION – On pose, pour $i = 1,\dots,n$ et $j = 1,\dots,p$, $\mathrm{C}_{ij} = \mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j$. En remarquant que $\{x; f(x) > 0\} = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{A}_i = \bigcup_{j=1}^p \mathrm{B}_j$, on écrit $\mathrm{A}_i = \bigcup_{j=1}^p \mathrm{C}_{ij}$ et $\mathrm{B}_j = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{C}_{ij}$. On peut donc écrire

$$\sum_{i=1}^n a_i m(\mathrm{A}_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_i m(\mathrm{C}_{ij})$$

et

$$\sum_{j=1}^p b_j m(\mathrm{B}_j) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n b_j m(\mathrm{C}_{ij})$$

On remarque alors que $a_i = b_j$ dès que $\mathrm{C}_{ij} \neq \emptyset$, d'où l'égalité 3.1. ■

Lemme 3.8 (Décomposition d'une fonction étagée avec une partition) *Soit* (E, T) *un espace mesurable, et soit* $f \in \mathcal{E}$ *une fonction étagée. Alors il existe une unique famille finie* $(a_i, \mathrm{A}_i)_{i=0,\dots,n} \subset \mathbb{R} \times \mathrm{T}$ *telle que* $a_i \neq a_j$ *si* $i \neq j$, $\mathrm{A}_i \neq \emptyset$*, pour tout* i, $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$*, si* $i \neq j$, $\mathrm{E} = \bigcup_{i=0}^{n} \mathrm{A}_i$ *et* $f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i}$.

DÉMONSTRATION – La démonstration est très voisine de celle donnée pour la décomposition d'une fonction étagée positive (lemme 3.6). L'ensemble $\{a_i, \, i \in \{0, \dots, n\}\}$ est l'ensemble de toutes les valeurs prises par f (et pas seulement les valeurs non nulles) et $\mathrm{A}_i = \{x \in \mathrm{E} \, ; \, f(x) = a_i\}$. ■

Enfin, on conclut ce paragraphe en remarquant que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.9 (Structure vectorielle de $\mathcal{E}$) *Soit* (E, T) *un espace mesurable, l'ensemble* $\mathcal{E}$ *des fonctions étagées est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*. De plus, si* $f, g \in \mathcal{E}$*, on a aussi* $fg \in \mathcal{E}$.

DÉMONSTRATION – Soiet $f, g \in \mathcal{E}$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On utilise la décomposition de f et g donnée dans le lemme 3.8. Elle donne $f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i}$ et $g = \sum_{j=0}^{m} b_j 1_{\mathrm{B}_i}$. Comme les familles $(\mathrm{A}_i)_{\{i \in \{0,\dots,n\}\}}$ et $(\mathrm{B}_j)_{\{j \in \{0,\dots,m\}\}}$ forment des partitions de E, on a

$$f = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i 1_{\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j} \text{ et } g = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} b_j 1_{\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j},$$

de sorte que $\alpha f + \beta g = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (\alpha a_i + \beta b_i) 1_{\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j}$, ce qui montre que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}$, et donc que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

D'autre part, on remarque aussi que $fg = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_i 1_{\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j}$, ce qui montre que $fg \in \mathcal{E}$. ■

On montrera aussi les propriétés de linéarité et de monotonie de l'intégrale des fonctions étagées (voir proposition 4.3).

3.3 Fonctions mesurables et variables aléatoires

Afin d'étendre le concept d'intégrale à une classe de fonctions plus générale que celle des fonctions étagées (positives), on introduit les fonctions mesurables (positives). On pourra ensuite utiliser une technique de passage à la limite pour définir l'intégrale de telles fonctions.
On va tout d'abord définir la notion de mesurabilité pour une fonction f de E dans F. L'espace de départ, E, est muni d'une tribu et l'espace d'arrivée, F, est, en général, muni d'une topologie (et donc de sa tribu de Borel, les exemples fondamentaux sont $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathrm{F} = \overline{\mathbb{R}}_+$). On peut aussi considérer le cas où F est muni d'une tribu (non donnée par une topologie sur F).

Définition 3.10 (Fonction mesurable) *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* F *un ensemble muni d'une topologie (par exemple :* $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ *ou* $\overline{\mathbb{R}}_+$*). Une fonction* f*, définie de* E *dans* F*, est une fonction* T*-mesurable si* $f^{-1}(\mathrm{A}) \in \mathrm{T}$*, pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{F})$ *(ce qui est équivalent à dire que la tribu* $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathrm{F})) = \{f^{-1}(\mathrm{B}), \, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathrm{F})\}$ *est incluse dans* T *ou encore que la tribu* $\mathrm{T}_f = \{\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{F}) \, ; \, f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}\}$ *contient* $\mathcal{B}(\mathrm{F})$*, voir l'exercice 2.4 sur les tribus image directe et image réciproque.) En l'absence d'ambiguïté possible on dira "mesurable" au lieu de "*T*-mesurable".*

Plus généralement, si F *n'est pas muni d'une topologie (et donc de la tribu* $\mathcal{B}(\mathrm{F})$*) mais est muni directement d'une tribu* $\mathcal{T}$ *(on a alors deux espaces mesurables :* (E, T) *et* $(\mathrm{F}, \mathcal{T})$*), une fonction* f*, définie de* E *dans* F*, est une fonction* $(\mathrm{T}, \mathcal{T})$*-mesurable si* $f^{-1}(\mathrm{A}) \in \mathrm{T}$*, pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{T}$*. (Ce qui est équivalent à dire que la tribu* $f^{-1}(\mathcal{T}) = \{f^{-1}(\mathrm{B}),$

$\mathrm{B} \in \mathcal{T}\}$ *est incluse dans* T *ou encore que la tribu* $\mathrm{T}_f = \{\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{F})\,;\ f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}\}$ *contient* $\mathcal{T}$*.) En l'absence d'ambiguïté possible on dira "mesurable" au lieu de "*$(\mathrm{T}, \mathcal{T})$*-mesurable".*

Enfin, si E *et* F *sont deux espaces munis d'une topologie, on dit que* f *est borélienne si* f *est mesurable pour les tribus boréliennes sur* E *et* F *(c'est-à-dire les tribus engendrées par les ouverts) .*

Remarque 3.11 Une fonction étagée est toujours mesurable. En effet, soit (E, T) un espace mesurable et soit $f \in \mathcal{E}$ (donc f est une application de E dans $\mathbb{R}$). D'après le lemme 3.8, il existe une partition $(\mathrm{A}_0, \ldots, \mathrm{A}_n)$ de E, et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i}$ et $\mathrm{A}_i \in \mathrm{T}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. Pour tout $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}$, on a donc $f^{-1}(\mathrm{B}) = \bigcup_{\{i;\, a_i \in \mathrm{B}\}} \mathrm{A}_i \in \mathrm{T}$, ce qui prouve que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}$.

Noter que si $f \in \mathcal{E}_+$, on a donc aussi f mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (voir l'exercice 3.5).

La terminologie probabiliste utilise les termes "variable aléatoire" ou "vecteur aléatoire" (selon l'espace d'arrivée) au lieu de "fonction mesurable" (ou "application mesurable").

Définition 3.12 (Variable aléatoire, vecteur aléatoire)

1. *Soit* (E, T) *un espace probabilisable, on appelle variable aléatoire réelle (v.a.r.) une fonction* X *définie de* E *dans* $\mathbb{R}$ *et* T*-mesurable,i.e. telle que* $\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{A}) \in \mathrm{T}$*, pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. *Plus généralement, soient* (E, T) *et* $(\mathrm{F}, \mathcal{T})$ *deux espaces probabilisables. Une fonction* X*, définie de* E *dans* F*, est une variable aléatoire si c'est une fonction* $(\mathrm{T}, \mathcal{T})$*-mesurable (c'est-à-dire si* $\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{A}) \in \mathrm{T}$*, pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{T}$*). Lorsque* F *est un espace vectoriel, on dit que* X *est une variable aléatoire vectorielle ou un "vecteur aléatoire".*

Remarque 3.13 Comme cela a été dit dans la proposition 3.10, on dit, en l'absence d'ambiguïté, "mesurable" au lieu de "T-mesurable". On remarque d'ailleurs que le terme probabiliste "variable aléatoire" ne mentionne pas la dépendance par rapport à la tribu. Dans la définition 3.12, on a noté X la variable aléatoire plutôt que f car c'est l'usage dans la littérature probabiliste.

Définition 3.14 (Tribu engendrée par une fonction mesurable) *Soient* (E, T) *un espace mesurable (resp. probabilisable) et* f *(resp.* X*) une fonction mesurable de* E *dans* $\mathbb{R}$ *(resp. une variable aléatoire) alors l'ensemble* $\{f^{-1}(\mathrm{A}), \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ *(resp.* $\{\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{A}), \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$*) est une tribu sur* E *qu'on appelle tribu engendrée par la fonction mesurable* f *(resp. la variable aléatoire* X*). Cette tribu est aussi la tribu image réciproque de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *par* f *(resp.* X*).*

Définition 3.15 (Espaces $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$) *Soit* (E, T) *un espace mesurable, on note :*

- $\mathcal{M}(\mathrm{E}, \mathrm{T}) = \{f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$*, mesurable},*
- $\mathcal{M}_+(\mathrm{E}, \mathrm{T}) = \{f : \mathrm{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$*, mesurable}.*

En l'absence d'ambiguïté, on notera $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ *et* $\mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathrm{E}, \mathrm{T})$.

Proposition 3.16 (Première caractérisation de la mesurabilité)
Soient (E, T) *un espace mesurable et* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$*, avec* $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ *ou* $\overline{\mathbb{R}}_+$*. Soit* $\mathcal{C}$ *une partie de* $\mathcal{P}(\mathrm{F})$ *engendrant la tribu borélienne de* F*. On a alors :* f *est mesurable si et seulement* $f^{-1}(\mathrm{C}) \in \mathrm{T}$ *pour tout* $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$*. En particulier,* f *est mesurable si et seulement si* f *vérifie l'une des deux propriétés suivantes :*

1. $f^{-1}(]\alpha,\beta[) \in T$, *pour tout* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$,

2. $f^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in T$, *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dans cette caractérisation, l'ensemble $]\alpha,\beta[$ *(ou* $]\alpha,+\infty[$*) désigne, bien sûr, l'ensemble des éléments de* F *appartenant à* $]\alpha,\beta[$ *(ou* $]\alpha,+\infty[$*).*

La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 3.1. Le lecteur pourra trouver lui-même d'autres caractérisations de la mesurabilité, en utilisant la proposition ci-dessus. Par exemple, soit f de E (muni de la tribu T) dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, la fonction f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(]\alpha,+\infty]) \in T$ pour tout $\alpha > 0$ (par contre, $f^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in T$ pour tout $\alpha \geq 0$ n'implique pas que f est mesurable).

La proposition suivante nous permettra de définir l'intégrale des fonctions appartenant à $\mathcal{M}_+$ (comme limite d'intégrales de fonctions étagées, voir le chapitre suivant). Par contre, on ne pourra pas donner un sens, dans le cas général, à l'intégrale des fonctions appartenant à $\mathcal{M}$.

Proposition 3.17 (Mesurabilité positive) *Soient* (E,T) *un espace mesurable et* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$*. Alors* $f \in \mathcal{M}_+$ *si et seulement s'il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$*, telle que :*

1. pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$*, quand* $n \to +\infty$*,*

2. $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$*, pour tout* $x \in E$*, et tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Les deux conditions précédentes seront notées dans la suite sous la forme $f_n \uparrow f$ *quand* $n \to +\infty$*.*

DÉMONSTRATION – Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. On remarque que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(]\alpha,+\infty]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]\alpha,+\infty[).$$

Comme f_n est mesurable, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir la remarque 3.11), on a $f_n^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, par stabilité de T par union dénombrable, $f^{-1}(]\alpha,+\infty]) \in T$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on en déduit, comme $\{]\alpha,+\infty], \alpha \geq 0\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, que f est mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}_+$.

Réciproquement, on suppose que $f \in \mathcal{M}_+$. On va construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{E}_+$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{p}{2^n} \text{ si } f(x) \in [\dfrac{p}{2^n}, \dfrac{p+1}{2^n}[, \text{ avec } p \in \{0,\ldots,n2^n-1\} \\ n \text{ si } f(x) \geq n, \end{cases}$$

de sorte que

$$f_n = n1_{\{x\in E; f(x)\geq n\}} + \sum_{p=0}^{n2^n-1} \frac{p}{2^n} 1_{\{x\in E; f(x)\in[\frac{p}{2^n},\frac{p+1}{2^n}[\}}.$$

Comme $f \in \mathcal{M}_+$, on a $\{x \in E; f(x) \geq n\} \in T$ et $\{x \in E; f(x) \in [\frac{p}{2^n},\frac{p+1}{2^n}[\} \in T$ pour tout n et tout p, on a donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{E}_+$.

On montre maintenant que, pour tout $x \in E$, on a $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$. Soit $x \in E$. On distingue deux cas :

Premier cas. On suppose $f(x) < +\infty$. On a alors, pour $n \geq f(x)$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. On a donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$.

Deuxième cas. On suppose $f(x) = +\infty$. On a alors $f_n(x) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$.

On montre enfin que, pour tout $x \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. Soit $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On distingue trois cas :

Premier cas. On suppose $f(x) \geq n+1$. On a alors $f_{n+1}(x) = n+1 > n = f_n(x)$.

Deuxième cas. On suppose $n \leq f(x) < n+1$. Il existe alors $i \in \{n2^{n+1},\ldots,(n+1)2^{n+1}-1\}$ tel que $f(x) \in [\frac{i}{2^{n+1}},\frac{i+1}{2^{n+1}}[$.
On a alors $f_n(x) = n \leq \frac{i}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$.

Troisième cas. On suppose $f(x) < n$. Il existe alors $p \in \{0, \ldots, n2^n - 1\}$ tel que $f(x) \in [\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}[= [\frac{2p}{2^{n+1}}, \frac{2(p+1)}{2^{n+1}}[$. Si $f(x) \in [\frac{2p}{2^{n+1}}, \frac{2p+1}{2^{n+1}}[$, on a $f_n(x) = \frac{p}{2^n} = \frac{2p}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$. Si $f(x) \in [\frac{2p+1}{2^{n+1}}, \frac{2(p+1)}{2^{n+1}}[$, on a $f_n(x) = \frac{p}{2^n} < \frac{2p+1}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$. On a toujours $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$.

On a bien ainsi construit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{E}_+$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. ■

Proposition 3.18 (Mesurabilité sans signe) *Soient* (E, T) *un espace mesurable, et* $f : E \to \mathbb{R}$. *On suppose que* f *est mesurable. Il existe alors une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ *telle que, pour tout* $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, *quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – On définit la fonction $f^+ : E \to \mathbb{R}_+$ par $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ pour tout $x \in E$. On remarque que $f^+ \in \mathcal{M}_+$ (et $f^+ \in \mathcal{M}$, voir l'exercice 3.5). En effet, f^+ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $(f^+)^{-1}(]\alpha, +\infty]) = f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in T$ si $\alpha > 0$. On conclut en remarquant que $\{]\alpha, +\infty], \alpha > 0\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. On définit également $f^- = (-f)^+$, de sorte que $f = f^+ - f^-$. On a donc aussi $f^- \in \mathcal{M}_+$. La proposition 3.17 donne l'existence de suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ telles que $f_n \uparrow f^+$ et $g_n \uparrow f^-$ quand $n \to +\infty$. On pose $h_n = f_n - g_n$, de sorte que $h_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in E$. D'autre part, comme $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel (voir la proposition 3.9 page 57), on a $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$. ■

La proposition précédente nous donnera, avec les propriétés de stabilité de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$ (voir la proposition 3.19) une deuxième caractérisation de la mesurabilité, voir la proposition 3.20.

L'ensemble des fonctions mesurables est un ensemble très stable, c'est-à-dire que des opérations usuelles (comme addition, multiplication, limite...) sur des fonctions mesurables donnent encore des fonctions mesurables, ceci est précisé dans la proposition suivante. Dans le cas (fondamental) de $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, il est difficile de trouver des fonctions non mesurables (comme il est difficile de trouver des parties non boréliennes, bien que le cardinal de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ soit égal au cardinal de $\mathbb{R}$ et donc strictement inférieur au cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$). En pratique, on peut en gros supposer que les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont *toutes* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurables (bien qu'il y ait "beaucoup" de fonctions non mesurables).

Proposition 3.19 (Stabilité de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$) *Soit* (E, T) *un espace mesurable.*

1. Soit $I \subset \mathbb{N}$.

Soit $(f_n)_{n\in I} \subset \mathcal{M}_+$, *alors* $\sup_{n\in I} f_n \in \mathcal{M}_+$ *et* $\inf_{n\in I} f_n \in \mathcal{M}_+$.

Soit $(f_n)_{n\in I} \subset \mathcal{M}$. *Si* $\sup_{n\in I} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$, *alors* $\sup_{n\in I} f_n \in \mathcal{M}$.
De même, si $\inf_{n\in I} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$, *alors* $\inf_{n\in I} f_n \in \mathcal{M}$.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, *alors* $\limsup_{n\to+\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$ *et* $\liminf_{n\to+\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. *Si* $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$, *alors* $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}$.
De même, si $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$, *alors* $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}$.

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. *On suppose que* $f_n(x) \to f(x)$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$, *pour tout* $x \in E$. *Alors* $f \in \mathcal{M}_+$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. *On suppose que* $f_n(x) \to f(x)$ *dans* $\mathbb{R}$, *pour tout* $x \in E$. *Alors* $f \in \mathcal{M}$.

4. $\mathcal{M}$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et si* $f, g \in \mathcal{M}$, *alors* $fg \in \mathcal{M}$.

DÉMONSTRATION –

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. Il est clair que $f = \sup_{n\in I} f_n$ est bien définie et prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Puis, Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a
$$f^{-1}(]\alpha, +\infty]) = \bigcup_{n\in I} f_n^{-1}(]\alpha, +\infty]) \in T.$$

Comme $\{]\alpha, +\infty] \cap \overline{\mathbb{R}}_+,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, on en déduit que f est mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}_+$.

De même la fonction $f = \inf_{n\in \mathrm{I}} f_n$ est aussi bien définie et prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (elle prend même ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ si les f_n prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ceci n'est pas vrai avec la fonction $\sup_{n\in \mathrm{I}} f_n$). On remarque ensuite que

$$f^{-1}([-\infty, \alpha[) = \bigcup_{n\in \mathrm{I}} f_n^{-1}([-\infty, \alpha[) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Comme $\{[-\infty, \alpha[\cap\overline{\mathbb{R}}_+,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, on en déduit que f est mesurable de E dans $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}_+$.

Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. La fonction $f = \sup_{n\in \mathrm{I}} f_n$ est bien définie si on la considère comme étant à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ car elle peut prendre la valeur $+\infty$ en certains points. On la suppose maintenant à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut alors raisonner comme précédemment en remarquant que $f^{-1}(]\alpha, +\infty[) = \bigcup_{n\in \mathrm{I}} f_n^{-1}(]\alpha, +\infty[)$ et que $\{]\alpha, +\infty[,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. De même, la fonction $f = \inf_{n\in \mathrm{I}} f_n$ est bien définie si on la considère comme étant à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ car elle peut prendre la valeur $-\infty$ en certains points. On la suppose maintenant à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut alors raisonner comme précédemment en remarquant que $f^{-1}(]-\infty, \alpha[) = \bigcup_{n\in \mathrm{I}} f_n^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ et que $\{]-\infty, \alpha[,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. On pose $f = \limsup_{n\to+\infty} f_n$, la fonction f est bien définie à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Pour tout $x \in$ E, on a
$$f(x) = \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} (\sup_{p\geq n} f_p(x)) = \inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{p\geq n} f_p(x)),$$
c'est-à-dire $f = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p)$. En utilisant les résultats précédents (avec sup puis inf), on a donc $f \in \mathcal{M}_+$. Un raisonnement similaire donne $\liminf_{n\to+\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{p\geq n} f_p) \in \mathcal{M}_+$.
Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. On suppose que
$$f = \limsup_{n\to+\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{p\geq n} f_p)$$
(qui est bien définie dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme les f_n prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut alors remarquer que la fonction $\sup_{p\geq n} f_p$ prend aussi ses valeurs dans $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, avec la propriété démontrée en 1, $\sup_{p\geq n} f_p \in \mathcal{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, utilisant encore la propriété démontrée en 1, $f = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p) \in \mathcal{M}$. Un raisonnement analogue donne $\liminf_{n\to+\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{p\geq n} f_p) \in \mathcal{M}$ dès que l'on suppose que $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

3. Cette question est immédiate grâce à la précédente. Il suffit de remarquer que dès que la limite de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ existe, elle est nécessairement égale à la limite supérieure (ou la limite inférieure) de cette même suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to+\infty} f_n(x)$ (pour tout $x \in$ E). Ici on remarque donc simplement que $f = \limsup_{n\to+\infty} f_n$ et on applique la propriété 2.

4. Soit $f, g \in \mathcal{M}$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ On pose $h = \alpha f + \beta g$. D'après la proposition 3.18, il existe des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ telles que $f_n(x) \to f(x)$ et $g_n(x) \to g(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in$ E. On pose $h_n = \alpha f_n + \beta g_n$, de sorte que $h_n(x) \to h(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in$ E. La proposition 3.9 donne que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on a donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$. Comme $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ (voir la remarque 3.11), la propriété 3 ci-dessus donne alors que $h \in \mathcal{M}$. L'ensemble $\mathcal{M}$ est donc un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$).

   Soit $f, g \in \mathcal{M}$. On pose $h = fg$. On raisonne comme ci-dessus, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ telle que $f_n(x) \to f(x)$ et $g_n(x) \to g(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in$ E. On pose $h_n = f_n g_n$, de sorte que $h_n(x) \to h(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in$ E. La proposition 3.9 donne aussi $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{M}$. La propriété 3 ci-dessus donne alors que $h \in \mathcal{M}$.

■

Proposition 3.20 (Deuxième caractérisation de la mesurabilité) *Soit* (E, T) *un espace mesurable et* f : E $\to \mathbb{R}$. *Alors, f est mesurable si et seulement s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ telle que pour tout $x \in$ E, $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$.*

DÉMONSTRATION – Cette caractérisation est donnée par la proposition 3.18 pour le sens “seulement si” et par la propriété 3 de la proposition 3.19 pour le sens “si”. ■

On rappelle aussi qu'une fonction f de E (muni de la tribu T) dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est mesurable (c'est-à-dire appartient à $\mathcal{M}_+$) si et seulement s'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ (voir la proposition 3.17).

Remarque 3.21 Il est intéressant de remarquer que la proposition 3.20 peut être fausse si on prend pour F un espace topologique quelconque (elle reste vraie, par exemple, si F est un espace vectoriel normé de dimension finie) avec une définition immédiate de $\mathcal{E}$ généralisant celle donnée pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Définition 3.22 *Soient* E *un ensemble et* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$*. Pour tout* $x \in \mathrm{E}$*, on pose :*

- $f^+(x) = \max(f(x), 0)$,
- $f^-(x) = -\min(f(x), 0) = (-f)^+(x)$,
- $|f|(x) = |f(x)|$.

Proposition 3.23 *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* $f \in \mathcal{M}$*. On a alors* $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ *et* f^+, f^-, $|f| \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{M}$.

DÉMONSTRATION – Le fait que $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$ est immédiat. On a déjà vu, dans la démonstration de la proposition 3.18, que $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+$ et donc que $f^+, f^- \in \mathcal{M}$ (voir l'exercice 3.5). La proposition 3.19 donne que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On a donc $|f| \in \mathcal{M}$ et donc aussi $|f| \in \mathcal{M}_+$ car $|f| \geq 0$. ■

3.4 Mesure image, loi d'une v.a., v.a. indépendantes

Soit (E, T) et $(\mathrm{F}, \mathcal{T})$ deux espaces mesurables (l'exemple fondamental est $(\mathrm{F}, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$) et f une fonction mesurable de E vers F. Si m est une mesure sur T, alors on peut définir, à partir de f et m, une mesure sur $\mathcal{T}$ de la manière suivante :

Proposition 3.24 (Mesure image) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré,* $(\mathrm{F}, \mathcal{T})$ *un espace mesurable et* f *une fonction mesurable de* E *vers* F *(c'est-à-dire* $(\mathrm{T}, \mathcal{T})$*-mesurable). Alors, l'application* m_f *définie de* $\mathcal{T}$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *par :* $m_f(\mathrm{A}) = m(f^{-1}(\mathrm{A}))$*, pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{T}$*, est une mesure sur* $\mathcal{T}$*, appelée mesure image par* f*.*

DÉMONSTRATION – Il suffit de remarquer que m_f est bien définie, que $m_f(\emptyset) = 0$ et que m_f est σ−additive, ce qui découle naturellement des propriétés de m. ■

Définition 3.25 (Loi de probabilité et fonction de répartition d'une v.a.)
Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle (c'est-à-dire une fonction mesurable de* E*, muni de la tribu* T*, dans* $\mathbb{R}$*, muni de la tribu borélienne). On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire* X *la probabilité* p_X *image de* p *par* X *(cette probabilité est donc définie sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*). On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire* X *la fonction de répartition de la probabilité* p_X*.*

Dans de nombreux cas, les modèles probabilistes seront déterminés par une loi de probabilité d'une variable aléatoire. Une conséquence immédiate du théorème 2.61 est que la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle est entièrement déterminée par sa fonction de répartition. Ceci est énoncé dans la proposition suivante.

Proposition 3.26 (Égalité de deux lois) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *et* $(\mathrm{E}', \mathrm{T}', p')$ *des espaces probabilisés,* X *une variable aléatoire réelle sur* E *(c'est-à-dire une fonction mesurable de* E*, muni de* T*, dans* $\mathbb{R}$ *muni de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*) et* X′ *une variable aléatoire réelle sur* E′*. On a alors* $p_{\mathrm{X}} = p_{\mathrm{Y}}$ *si et seulement si* $p(\{\mathrm{X} \le t\}) = p'(\{\mathrm{Y} \le t\})$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*. On a aussi* $p_{\mathrm{X}} = p_{\mathrm{Y}}$ *si et seulement si* $p(\{s \le \mathrm{X} \le t\}) = p'(\{s \le \mathrm{Y} \le t\})$ *pour tout* $s, t \in \mathbb{R}$*,* $s < t$*. (Les inégalités strictes peuvent être remplacées par des inégalités larges.)*

DÉMONSTRATION – Cette proposition est une conséquence des théorèmes 2.61 et 2.62. Il suffit de remarquer que $p(\{\mathrm{X} \le t\}) = p_{\mathrm{X}}(]-\infty, t])$ et $p(\{s \le \mathrm{X} \le t\}) = p_{\mathrm{X}}([s,t])$ (et les mêmes égalités avec Y au lieu de X). ■

On rappelle que la notation $p(\{\mathrm{X} \le t\})$ (si X est une v. a. réelle sur l'espace probabilisé $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$) signifie $p(\{\omega \in \mathrm{E}\,;\ \mathrm{X}(\omega) \le t\})$. Cette notation sera parfois abrégée sous la forme $p(\mathrm{X} \le t)$.

Définition 3.27 (Variables aléatoires équidistribuées)
Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *et* $(\mathrm{E}', \mathrm{T}', p')$ *des espaces probabilisés,* X *(resp.* X′*) une variable aléatoire de* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *(resp.* $(\mathrm{E}', \mathrm{T}', p')$*) dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, on dit que les variables aléatoires* X *et* X′ *sont équidistribuées si elles ont même loi de probabilité.*

Définition 3.28 (Variable aléatoire discrète, entière, continue) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle sur* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$*,* p_{X} *la loi de la variable aléatoire* X *et* F_{X} *sa fonction de répartition ;*

1. *Si* $\mathrm{X}(\mathrm{E})$ *est dénombrable, on dit que la variable aléatoire* X *est discrète.*
2. *Si* $\mathrm{X}(\mathrm{E}) \subset \mathbb{N}$*, on dit que la variable aléatoire* X *est entière.*
3. *Si la fonction de répartition* F_{X} *définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $[0,1]$ *est continue, on dit que la variable aléatoire est continue.*

Définition 3.29 (Variables aléatoires indépendantes) *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *un espace probabilisé.*

1. *Soit* $\mathrm{N} > 1$ *et* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ *une famille de variables aléatoires réelles. On dit que* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ *sont indépendantes (ou que la famille (* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$*) est indépendante) si les tribus engendrées par* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ *(on notera souvent* $\tau(\mathrm{X})$ *ou* $\sigma(\mathrm{X})$ *la tribu engendrée par la variable aléatoire* X*) sont indépendantes.*
2. *Soit* $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires réelles. On dit cette suite est indépendante (ou que les v.a.* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \ldots$ *sont indépendantes) si, pour tout* $\mathrm{N} > 1$*, les v.a.* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ *sont indépendantes.*

On appellera "suite de v.a.r.i.i.d. " une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées (ce dernier point signifiant que toutes les v.a. de la suite ont même loi).

Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ un espace probabilisé et $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3$ trois v.a.r. (c'est-à-dire variables aléatoires réelles). Le fait que X_1 soit indépendante de X_2 et X_3 n'implique pas que X_1 soit indépendante de (par exemple) $\mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3$, même si X_2 et X_3 sont indépendantes. Mais, on a bien X_1 indépendante de $\mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3$ si la famille $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3)$ est indépendante. Ceci est une conséquence de la proposition suivante.

Proposition 3.30 (Indépendance et composition) *Soit* (E, T, p) *un espace probabilisé,* $n \geq 1$*,* $m \geq 1$ *et* $X_1, \ldots, X_n$*,* $Y_1, \ldots, Y_m$ *des v.a.r. indépendantes. Soit* φ *une fonction borélienne de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* ψ *une fonction borélienne de* $\mathbb{R}^m$ *dans* $\mathbb{R}$*. Alors, les v.a.r.* $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ *et* $\psi(Y_1, \ldots, Y_m)$ *sont indépendantes. Nous avons ici décomposé la famille initiale de v.a.r. indépendantes en 2 groupes. la proposition peut se généraliser à une décomposition en un nombre quelconque de groupes.*

DÉMONSTRATION – La notation $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ est un peu incorrecte (mais est toujours utilisée). Elle désigne (comme on le devine facilement) la composition de φ (qui va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$) avec l'application de E dans $\mathbb{R}^n$ donnée par les X_i, $i = 1, \ldots, n$.

La démonstration de cette proposition (et de sa généralisation à un nombre quelconque de groupes) est une conséquence simple de la proposition 2.59 dés que l'on remarque que la tribu engendrée par $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ est incluse dans la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$, ce que nous démontrons maintenant.

On note τ la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$ et X l'application de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à $\omega \in E$ associe $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))^t$. Il est facile de voir que $\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } X^{-1}(A) \in \tau\}$ est une tribu (sur $\mathbb{R}^n$). Si $A = \prod_{i=1}^n A_i$ avec $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a

$$X^{-1}(A) = \bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(A_i) \in \tau$$

(car $X_i^{-1}(A_i)$ appartient à $\tau(X_i)$ et donc à τ). Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est engendrée par l'ensemble des produits de boréliens de $\mathbb{R}$ (et même par l'ensemble des produits d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, voir l'exercice 2.7), on en déduit que

$$\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } X^{-1}(A) \in \tau\} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a donc $(\varphi(X))^{-1}(B) = X^{-1}(\varphi^{-1}(B)) \in \tau$ car $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (puisque φ est borélienne), ce qui prouve bien que la tribu engendrée par $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ est incluse dans la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$. ■

Nous verrons au chapitre 7 la conséquence principale de l'indépendance. Cette conséquence est que, si X, Y sont des v.a.r. indépendantes, la loi du couple (X, Y) est le produit des lois P_X et P_Y (c'est-à-dire , avec les notations du Chapitre 7, $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$). Une propriété analogue est vraie pour une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de v.a.r. indépendantes.

Nous terminons ce paragraphe par un théorème très utile en probabilités sur la représentation d'une v.a. mesurable par rapport à une autre v.a..

Théorème 3.31 (V.a. mesurable par rapport à une autre v.a.)
Soient X *et* Y *deux v.a. réelles définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*. Alors, la v.a.* Y *est mesurable par rapport à la tribu engendrée par* X *(notée* $\tau(X)$*) si et seulement si il existe une fonction borélienne* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $Y = f(X)$.

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce résultat fait l'objet de l'exercice 3.17. Il est intéressant de remarquer que la démonstration de ce théorème effectuée dans l'exercice 3.17 donne les informations complémentaires suivantes :

- Y est $\tau(X)$-mesurable bornée si et seulement s'il existe f borélienne bornée t.q. $Y = f(X)$,
- Y est $\tau(X)$-mesurable positive si et seulement s'il existe f borélienne positive t.q. $Y = f(X)$.

La partie "si" de ces deux résultats est immédiate. Pour la partie "seulement si", il suffit de remarquer que la démonstration faite dans l'exercice 3.17 donne f t.q.

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(t),\ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Im}(Y) \cup \{0\},\ \text{avec } \mathrm{Im}(Y) = \{Y(\omega),\ \omega \in \Omega\}.$$

■

3.5 Convergence p.p., p.s., en mesure, en probabilité

On introduit ici plusieurs notions de convergence de fonctions définies sur un espace mesuré à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}_+$) et on donne des liens entre ces différentes convergences. On introduit les notions équivalentes pour les variables aléatoires en langage probabiliste.

Définition 3.32 (Égalité presque partout) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* F *un ensemble et* f *et* g *des fonctions définies de* E *dans* F *(*$F = \mathbb{R}$ *ou* $F = \overline{\mathbb{R}}_+$*, par exemple) ; on dit que* $f = g$ *m-presque partout (et on note* $f = g$ *m-p.p.) si l'ensemble* $\{x \in E; f(x) \neq g(x)\}$ *est négligeable, c'est-à-dire qu'il existe* $A \in T$ *tel que* $m(A) = 0$ *et* $f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in A^c$.

On peut remarquer que si f et g sont des fonctions mesurables de E (muni de la tribu T et de la mesure m) dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}_+$), l'ensemble $\{x \in E; f(x) \neq g(x)\}$ (noté aussi $\{f \neq g\}$) appartient à T. Le fait que $f = g$ m p.p. revient donc à dire que $m(\{f \neq g\}) = 0$. Dans la cas où f ou g n'est pas mesurable, l'ensemble $\{f \neq g\}$ peut être négligeable sans appartenir à T (il appartient nécessairement à T si la mesure est complète, voir la définition 2.26).

En l'absence de confusion possible, on remplace m-p.p. par p.p.. Cette définition se traduit en langage probabiliste par :

Définition 3.33 (Égalité presque sûre) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé,* X *et* Y *des variables aléatoires réelles. On dit que* $X = Y$ *presque sûrement (et on note* $X = Y$ *p.s.), si l'ensemble* $\{x \in E; X(x) \neq Y(x)\}$ *est négligeable.*

Définition 3.34 (Convergence presque partout) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* F *un ensemble,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* E *dans* F *et* f *une fonction de* E *dans* F *(*$F = \mathbb{R}$ *ou* $F = \overline{\mathbb{R}}_+$*, par exemple) ; on dit que* f_n *converge presque partout vers* f *(*$f_n \to f$ p.p.*) s'il existe une partie* A *de* E*, négligeable, t.q., pour tout élément* x *de* A^c*, la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(x)$.

Noter que la convergence simple entraîne la convergence presque partout.

La définition 3.34 se traduit en langage probabiliste par :

Définition 3.35 (Convergence presque sûre) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé,* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles et* X *une variable aléatoire réelle. On dit que* X_n *converge presque sûrement vers* X *(*$X_n \to X$ *p.s.) s'il existe une partie* A *de* E*, négligeable, t.q., pour tout élément* x *de* A^c*, la suite* $(X_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $X(x)$.

Définition 3.36 (Convergence presque uniforme) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *et* $f \in \mathcal{M}$. *On dit que* f_n *converge presque uniformément vers* f *(*$f_n \to f$ *p.unif.) si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $A \in T$ *tel que* $m(A) \leq \varepsilon$ *et* f_n *converge uniformément vers* f *sur* A^c.

La convergence presque uniforme entraîne la convergence presque partout (voir exercice 3.26).

Attention, la convergence presque uniforme ne donne pas la convergence uniforme en dehors d'un ensemble de mesure nulle. La convergence uniforme en dehors d'un ensemble de mesure nulle est reliée à la convergence essentiellement uniforme, c'est-à-dire la convergence pour le sup essentiel, défini ci-après, ou pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ que nous verrons dans la section 6.1.2.

Définition 3.37 (Sup essentiel) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}$. *On dit que* f *est essentiellement bornée si il existe* $C \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $|f| \leq C$ *p.p.. On appelle alors sup essentiel de* $|f|$, *et on le note* $\|f\|_\infty$, *l'infimum des valeurs* C *telles que* $|f| \leq C$ *p.p.. Si* f *n'est pas essentiellement bornée, on pose* $\|f\|_\infty = \infty$.

Remarquons que dans le cas où $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, le sup essentiel d'une fonction continue est la borne supérieure de sa valeur absolue (ceci fait l'objet de la proposition 6.18).

Définition 3.38 (Convergence essentiellement uniforme) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathcal{M}$ *et* $f \in \mathcal{M}$. *On dit que* f_n *converge essentiellement uniformément vers* f *(*$f_n \to f$ *ess. unif.) si* $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ *lorsque* $n \to +\infty$.

Il est facile de voir que la convergence essentiellement uniforme entraîne la convergence presque uniforme, mais la réciproque est fausse (voir l'exercice 3.27). Le théorème suivant donne, dans le cas où la mesure est finie, un résultat très important qui fait le lien entre la convergence presque partout et la convergence presque uniforme.

Théorème 3.39 (Egorov) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré, tel que* $m(E) < +\infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *et* $f \in \mathcal{M}$. *On suppose que* $f_n \to f$ *p.p.. Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $A \in T$ *tel que* $m(A) \leq \varepsilon$ *et* f_n *converge uniformément vers* f *sur* A^c. *(Autrement dit, la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque uniformément vers* f*.)*

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 3.27. Attention, lorsque $m(E) = +\infty$, on peut trouver des suites de fonctions qui convergent presque partout et non presque uniformément.

Définition 3.40 (Convergence en mesure) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *et* $f \in \mathcal{M}$. *On dit que* f_n *converge en mesure vers* f *si :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in E\ ; |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Cette définition se traduit en langage probabiliste par :

Définition 3.41 (Convergence en probabilité) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé,* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles et* X *une variable aléatoire réelle . On dit que* X_n *converge en probabilité vers* X *si :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} p(\{x \in X_n\ ; |X(x) - X_n(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

On peut montrer (cf exercice 3.25) que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $f = g$ p.p.. On montre aussi que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$, et, si m est une mesure finie, $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f g \in \mathcal{M}$.
On montre à l'aide du théorème d'Egorov que si f_n converge vers f presque partout, et si $m(\mathrm{E}) < +\infty$, alors f_n converge vers f en mesure. Réciproquement, si f_n converge vers f en mesure, alors il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f presque uniformément (et donc presque partout). Ce second résultat est vrai même si $m(\mathrm{E}) = +\infty$ (voir exercice 3.28).

On donne maintenant un résumé des différents types de convergence connus jusqu'à présent avec les relations existantes entre eux. Les relations entre convergence presque partout et convergence en mesure (resp. convergence presque sûre et convergence en probabilité) sont étudiées dans l'exercice 3.28. (On en introduira bientôt encore quelques-unes)

Terminologie analyste	**Terminologie probabiliste**
convergence simple (cs)	
convergence uniforme (cu)	
convergence presque partout (cpp)	convergence presque sûre (cps)
convergence presque uniforme (cpu)	
convergence en mesure (cm)	convergence en probabilité (cp)

On a les implications suivantes :

Terminologie analyste	**Terminologie probabiliste**
(cu) $\Rightarrow$ (cs) $\Rightarrow$ (cpp)	
(cu) $\Rightarrow$ (cpu) $\Rightarrow$ (cpp)	
(cpp) $\Rightarrow$ (cpu) si la mesure est finie	
(cm) $\Rightarrow$ (cpu) pour une sous-suite	(cp) $\Rightarrow$ (cps) pour une sous-suite
(cpp) $\Rightarrow$ (cm) si la mesure est finie	(cps) $\Rightarrow$ (cp)
(cpu) $\Rightarrow$ (cm)	

3.6 Exercices

Exercice 3.1 (Caractérisation des fonctions mesurables) Soient (E, T) un espace mesurable et f une application de E dans $\mathbb{R}$;

1. Montrer que $\mathrm{T}_f = \{\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\,;\, f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}\}$ est une tribu.
2. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) f est mesurable,
   (ii) $f^{-1}(\mathrm{C}) \in \mathrm{T}$, pour tout $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$.

Exercice 3.2 (Mesurabilité pour f à valeurs dans $\mathbb{R}$) Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F}$ une σ-algèbre sur Ω. Soit f une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne.

1. Montrer que f est mesurable si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega,\, f(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$.
2. Montrer que f est mesurable si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega,\, f(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$.

Exercice 3.3 (Composition de fonctions mesurables) Soit (E, T) et (F, S) deux espaces mesurables. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $\varphi : \mathrm{F} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours, de la tribu borélienne). On suppose que f et φ sont mesurables. Montrer que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

Exercice 3.4 (Topologie de $\mathbb{R}_+$) On définit la topologie de $\mathbb{R}_+$ comme étant la topologie induite sur $\mathbb{R}_+$ par la topologie de $\mathbb{R}$. Soit $O \subset \mathbb{R}_+$, l'ensemble O est donc un ouvert de $\mathbb{R}_+$ si et seulement si il existe U ouvert de $\mathbb{R}$ t.q. $O = U \cap \mathbb{R}_+$.

1. Soit $O \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que O est un ouvert de $\mathbb{R}_+$ si et seulement si il existe U ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $O = U \cap \mathbb{R}_+$. (Ceci montre que la topologie de $\mathbb{R}_+$ est aussi la topologie induite sur $\mathbb{R}_+$ par la topologie de $\overline{\mathbb{R}}_+$.)
2. Montrer que L'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}_+$ est égal à l'ensemble des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}_+$ inclus dans $\mathbb{R}_+$ et est aussi égal à l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que, si $B \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on a $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ si et seulement si $B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (noter que $B \cap \mathbb{R} = B \cap \mathbb{R}_+$).

Exercice 3.5 ($\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$...) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne. Montrer que φ est mesurable (on dit aussi borélienne) si et seulement si φ est mesurable quand on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ ($\overline{\mathbb{R}}_+$ étant aussi muni de la tribu borélienne).

Exercice 3.6 (Stabilité de $\mathcal{M}$)

1. Soient (E, T), (E', T'), (E'', T'') des espaces mesurables, f (resp. g) une application de E dans E′ (resp. de E′ dans E″). On suppose que f et g sont mesurables. Montrer que $g \circ f$ est une application mesurable de E dans E″.
2. Soit (E, T) un espace mesurable, on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; soient f et g des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.
   (a) Pour $x \in E$ on pose $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ et $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$. Montrer que f^+ et f^- sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $f + g$, fg et $|f|$ sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.
3. Soient (E, T) un espace mesurable, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\mathbb{R}$) pour tout $x \in E$. On pose $f(x) = lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (pour tout $x \in E$). Montrer que f est une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.
4. Soit (E, T) un espace mesurable, on suppose qu'il existe $A \in T$ dont les sous-ensembles ne soient pas tous mesurables. Il existe donc $B \subset A$ tel que $B \notin T$. Montrer que $h = 1_B - 1_{A\setminus B}$ n'est pas mesurable (de E dans $\mathbb{R}$), alors que $|h|$ l'est.

Exercice 3.7 (Mesurabilité des fonctions continues) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne

1. On suppose f continue. Montrer que f est mesurable (on dit aussi que f est borélienne).
2. On suppose f continue à droite (resp. gauche). Montrer que f est mesurable.
3. On suppose f croissante. Montrer que f est mesurable.

Exercice 3.8 (Mesurabilité de $1_\mathbb{Q}$) On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. La fonction $1_\mathbb{Q}$ est-elle mesurable ?

Exercice 3.9 (Loi de probabilité de la v.a.r. nulle) Soit (E, T, p) un espace probabilisé et X une v.a.r.. On suppose que $X = 0$ p.s.. Donner la loi de probabilité p_X de X.

Exercice 3.10 Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble E.

1. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que : $B \in \mathcal{A}$ et $B \subset A$ implique $B = \emptyset$ ou $B = A$. Montrer que toute fonction mesurable (de E dans $\mathbb{R}$) est constante sur A.
2. On suppose dans cette question que $\mathcal{A}$ est engendrée par une partition, montrer qu'une fonction mesurable est constante sur chaque élément de la partition.

3. Donner un exemple de fonction constante sur tout élément d'une partition mais qui ne soit pas mesurable pour la tribu engendrée par cette partition. [Prendre comme partition de $\mathbb{R}$ tous les singletons]

Exercice 3.11 (Égalité presque partout) 1. Soient f et g des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue ; montrer que $f = g$ λ p.p. si et seulement si $f = g$.

2. Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et δ_0 la mesure de Dirac en 0 (définie en (2.2)) ; montrer que $f = g$ δ_0 p.p. si et seulement si $f(0) = g(0)$.

Exercice 3.12 (Mesurabilité) Soit $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}^p$ de sa tribu borélienne (pour tout $p \in \mathbb{N}^*$). on suppose que f est mesurable par rapport à $x \in \mathbb{R}^N$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, et que f est continue a gauche par rapport a $y \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.
Pour $n > 1$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose : $a_p^n = \frac{p}{n}$, $p \in \mathbb{Z}$; on définit la fonction f_n, $n > 1$, de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x, y) = f(x, a_p^n), \text{ si } y \in [a_p^n, a_{p+1}^n[.$$

On se limite à $N = 1$.

1. Montrer que f_n converge simplement vers f lorsque $n \to +\infty$.
2. Montrer que f_n est mesurable. [On pourra utiliser, sans le démontrer, le fait que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ si $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci est démontré dans l'exercice 2.6 page 46.]
3. Montrer que f est mesurable.

Exercice 3.13 (Sur la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}_+$)
On note T l'ensemble des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}_+$ contenant les deux points 0 et $+\infty$ ou ne contenant aucun de ces deux points, c'est-à-dire $T = T_1 \cup T_2$ avec

$$T_1 = \{A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) \text{ t.q. } \{0, \infty\} \subset A\} \text{ et } T_2 = \{A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) \text{ t.q. } \{0, \infty\} \subset A^c\}$$

1. Montrer que T est une tribu et que T est strictement incluse dans $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.
2. On pose $\mathcal{C} = \{]\alpha, \beta[,\ 0 \le \alpha < \beta \le +\infty[\}$. Déduire de la première question que $\mathcal{C}$ n'engendre pas la tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Exercice 3.14 (Tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}}_+$)

1. Montrer que $\{[0, \beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^*\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.
2. Montrer que $\{[0, \beta[, \beta \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.
3. Montrer que $\{]0, \beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^*\}$ n'engendre pas $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Exercice 3.15 (Graphe d'une fonction borélienne) Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On se propose de montrer que le graphe de f est un borélien de $\mathbb{R}^2$. On admettra le résultat suivant que l'on verra au chapitre 7 :

$$A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2). \tag{3.2}$$

On munit aussi $\mathbb{R}^2$ de sa tribu borélienne. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $F(x, y) = f(x)$ et $H(x, y) = y$.

1. Montrer que F et H sont mesurables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
2. On pose $G(f) = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 ; y = f(x)\}$ ($G(f)$ est donc le graphe de f). Montrer que $G(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 3.16 (Mesurabilité au sens de Lusin) Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts de $\mathbb{R}^N$. On rappelle (cf. cours) que m est nécessairement régulière (c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F fermé et O ouvert tel que $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) < \varepsilon$).

Soit $f \in \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. On dit que f est mesurable au sens de Lusin si pour tout compact K et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K_1 compact, $K_1 \subset K$, tel que $m(K \setminus K_1) \leq \varepsilon$ et $f_{|K_1} \in C(K_1, \mathbb{R})$.

1. On suppose, dans cette question, que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Montrer que f est mesurable au sens de Lusin. [Construire K_1 avec K, F et O, où F et O sont donnés par la régularité de m appliquée à l'ensemble A.]
2. On suppose, dans cette question, que f est étagée (c'est-à-dire $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$). Montrer que f est mesurable au sens de Lusin.
3. On suppose que f est mesurable (c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$). Montrer que f est mesurable au sens de Lusin. [On rappelle qu'une fonction mesurable est limite simple de fonctions étagées. On pourra utiliser le théorème d'Egorov, Théorème 3.39, et la question précédente.]

Exercice 3.17 (V.a. mesurable par rapport à une autre v.a.) Dans cet exercice, on démontre le théorème 3.31. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On veut veut montrer que Y est mesurable par rapport à la tribu engendrée par X (notée $\tau(X)$) si et seulement si il existe une fonction borélienne f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$ (c'est-à-dire, plus précisément, que $Y = f \circ X$).

1. Montrer que si Y est de la forme $Y = f(X)$ où f est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors Y est $\tau(X)$-mesurable.

   On suppose maintenant que Y est $\tau(X)$-mesurable.

2. On suppose, dans cette question, qu'il existe une suite de réels (a_j) tels que $a_j \neq a_k$ pour $j \neq k$ et une suite d'événements (A_j) disjoints deux à deux tels que

$$Y = \sum_j a_j 1_{A_j}.$$

   On suppose aussi que $\bigcup_j A_j = \Omega$. Montrer que, pour tout j, $A_j \in \tau(X)$ et qu'il existe une fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$.

3. Soit n un entier. On définit la fonction $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $\phi_n(x) = \frac{1}{n}[nx]$ où $[\cdot]$ désigne la partie entière. ($[x]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.)

   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi_n(x)$ converge vers x, quand $n \to +\infty$.

   (b) On pose $Y_n = \phi_n(Y)$. Montrer que Y_n est $\tau(X)$ mesurable.

4. Terminer la preuve du théorème.

   Maintenant, on se demande dans quelle mesure la fonction f est unique. On note P_X la loi de X.

5. Soit f et g deux fonctions boréliennes t.q. $Y = f(X) = g(X)$. Montrer que

$$P_X(f = g) = 1.$$

Exercice 3.18 (Composition de v.a.) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu des boréliens.) On définit Z par

$$\forall \omega \in \Omega, \;\; Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega).$$

Montrer que Z est une variable aléatoire.

Exercice 3.19 (Evénements, tribus et v.a. indépendantes) Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (Indépendance de 2 événements) Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Montrer que A_1 et A_2 sont indépendants (c'est-à-dire $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$) si et seulement si les tribus $\tau(\{A_1\})$ et $\tau(\{A_2\})$ sont indépendantes (c'est-à-dire $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2)$ pour tout $B_1 \in \tau(\{A_1\})$ et $B_2 \in \tau(\{A_2\})$).
2. (Indépendance de n événements, $n \geq 2$) Soit $n \geq 2$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que les événements $A_1, \ldots, A_n$ vérifient la propriété
$$P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i) \text{ pour tout } I \subset \{1, \ldots, n\}$$
si et seulement si les tribus $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_n\})$ sont indépendantes (c'est-à-dire $P(\bigcap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i)$ pour tout $B_i \in \tau(\{A_i\})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$).
3. En donnant un exemple (avec $n \geq 3$), montrer que l'on peut avoir n événements, notés $A_1, \ldots, A_n$, indépendants deux à deux, sans que les événements $A_1, \ldots, A_n$ soient indépendants.
4. Soit $A \in \mathcal{A}$.
   (a) On suppose que $A \in \mathcal{A}_1$ et $A \in \mathcal{A}_2$ et que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus indépendantes (et contenues dans $\mathcal{A}$). Montrer que $P(A) \in \{0, 1\}$.
   (b) Montrer que $P(A) \in \{0, 1\}$ si et seulement si A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$.
5. Soit $n \geq 1$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants si et seulement si les v.a. $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ sont indépendantes.

Exercice 3.20 (Indépendance deux par deux et dépendance globale)
Trouver un espace probabilisé et 3 v.a.r.indépendantes deux à deux mais globalement dépendantes.

Exercice 3.21 (De loi uniforme à loi donnée) Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une v.a.r. et U une v.a.r. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$. Soit F la fonction de répartition de X (*i.e.* $F(x) = P(X \leq x)$ pour $x \in \mathbb{R}$). Pour $u \in \mathbb{R}$, on définit $G(u)$ de la manière suivante :
$$G(u) = \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq u\},\ \text{si } u \in]0, 1[,$$
$$G(u) = 0,\ \text{si } u \notin]0, 1[.$$
On pose $Y = G(U)$ (c'est-à-dire $Y(\omega) = G(U(\omega))$ pour tout $\omega \in E$).

1. Soit $u \in]0, 1[$, montrer que $\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq u\} \neq \emptyset$, $\inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq u\} \in \mathbb{R}$ et
$$\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq u\} = [G(u), +\infty[.$$
2. Montrer que Y est une v.a.r..
3. Montrer que Y a la même loi que X. [On pourra montrer que $P(G(U) \leq x) = P(U \leq F(x))$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.]

Exercice 3.22 (Limite croissante d'une suite de v.a.r.) Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, Y une v.a.r., $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une application de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $X_n \uparrow X$, quand $n \to +\infty$, et que X_n et Y sont indépendantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que X est une v.a.r. et que X et Y sont indépendantes. (*N.B.* La conclusion est encore vraie sans la croissance de la suite X_n.)

Exercice 3.23 (Construction de v.a.i. de lois uniformes) Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, une suite de v.a.r.i.i.d. avec $P(U_n = 0) = P(U_n = 1) = 1/2$. Montrer que V, définie par $V = \sum_{n \geq 1} U_n 2^{-n}$ est une v.a. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$.
2. Soit $U_{n,k}$, $n, k \geq 1$, des v.a.r.i.i.d. avec $P(U_{n,k} = 0) = P(U_{n,k} = 1) = 1/2$. Montrer que les v. a. V_n, $n \geq 1$ définies par $V_n = \sum_{k \geq 1} U_{n,k} 2^{-k}$ sont des v.a.r.i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$.

Exercice 3.24 (Loi du produit de la loi exponentielle par ± 1**)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. indépendantes. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$), c'est-à-dire que P_X est une mesure de densité par rapport à la mesure de Lebesgue et cette densité est la fonction f définie par $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{]0,+\infty[}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On suppose que Y est t. q. $P(\{Y = 1\}) = P(\{Y = -1\}) = 1/2$. Donner la loi de XY.

Exercice 3.25 (Convergence en mesure) Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que s'il existe f et g fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ telles que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f et g, alors $f = g$ p.p..
   [On pourra commencer par montrer que, pour tout $\delta > 0$, $m(\{x \in E ; |f(x) - g(x)| > \delta\}) = 0$.]
2. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$.
3. On suppose maintenant que m est une mesure finie. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers g, alors $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f g \in \mathcal{M}$.
   [On pourra commencer par montrer que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que, si $n \geq n_0$ et $k \geq k_0$, on a $m(\{x \in E ; |f_n(x)| \geq k\}) \leq \varepsilon$.] Donner un contre-exemple au résultat précédent lorsque $m(E) = +\infty$.

Exercice 3.26 (Convergence p.u. et convergence p.p.) Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ (c'est-à-dire une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$) et $f \in \mathcal{M}$. On suppose que $f_n \to f$ presque uniformément (c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \in T$ tel que $m(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c). Montrer que $f_n \to f$ p.p., quand $n \to +\infty$.

Exercice 3.27 (Théorème d'Egorov) Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ p.p., lorsque $n \to +\infty$. Pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$A_{n,j} = \{x ; |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{j}\}, \text{ et } B_{n,j} = \bigcup_{p\geq n} A_{p,j}$$

1. Montrer que à j fixé, $\lim_{n\to+\infty} m(B_{n,j}) = 0$.
2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A tel que $m(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c lorsque $n \to +\infty$. En déduire le théorème d'Egorov (théorème 3.39).
   [On cherchera A sous la forme : $\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} B_{n_j,j}$, avec un choix judicieux de n_j.]
3. Montrer, par un contre–exemple, qu'on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$ dans la question précédente.
4. Montrer, par un contre–exemple, que le résultat du théorème d'Egorov est faux lorsque $m(E) = +\infty$.

Exercice 3.28 (Convergence en mesure et convergence p.p.) Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On rappelle que, par définition, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

1. On suppose dans cette question que $m(\mathrm{E}) < +\infty$.

(a) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f presque partout, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f en mesure [Utiliser le théorème d'Egorov.]

(b) Montrer par un contre–exemple que la réciproque de la question précédente est fausse.

On ne suppose plus que $m(\mathrm{E}) < +\infty$ mais on suppose maintenant (pour la suite de l'exercice) que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f.

2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy en mesure c'est-à-dire que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists n \in \mathbb{N}; p, q \geq n \Rightarrow m(\{x \in \mathrm{E}; |f_p(x) - f_q(x)| > \varepsilon\}) \leq \delta.$$

3. Montrer qu'il existe une fonction mesurable g et une sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$), vérifiant la propriété suivante :
   Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{A}) \leq \varepsilon$ et tel que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur A^c.
   [On pourra construire φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et une suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de T t.q. $m(\mathrm{A}_n) \leq 2^{-n}$ avec $\mathrm{A}_n = \{x \in \mathrm{E}; |f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| > 2^{-n}\}$ pour tout n. Puis, chercher A sous la forme $\bigcup_{k\geq p} \mathrm{A}_k$, où p est convenablement choisi.]

4. Montrer qu'il existe une sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f presque partout. [On pourra commencer par montrer que la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ construite à la question précédente converge presque partout et en mesure.]

Exercice 3.29 (Convergence en mesure et fonctions continues) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré, $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ et X une fonction mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

1. Soit φ une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(\mathrm{X}_n) \to \varphi(\mathrm{X})$ en mesure, quand $n \to +\infty$.
2. On suppose, dans cette question, que m est finie (par exemple, la mesure m peut être une probabilité, on a alors $m(\Omega) = 1$, les fonctions mesurables sont des v.a.r. et la convergence en mesure est la convergence en probabilité). Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(\mathrm{X}_n) \to \varphi(\mathrm{X})$ en mesure, quand $n \to +\infty$. [On pourra commencer par remarquer que $\lim_{a\to+\infty} m(\{|\mathrm{X}| \geq a\}) = 0$.]
3. On prend ici $(\Omega, \mathcal{A}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement X_n et X), qu'on peut avoir $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ en mesure (quand $n \to +\infty$) et $\varphi(\mathrm{X}_n) \not\to \varphi(\mathrm{X})$ en mesure pour certaines fonctions φ continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.30 (suite bornée et convergence en mesure) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to +\infty$.
On suppose aussi qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \mathrm{M}$ p.p.

1. Soit $\varepsilon > 0$ Montrer que $\{|f| > \mathrm{M} + \varepsilon\} \subset \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \cup \{|f_n| > \mathrm{M}\}$. En déduire que $|f| \leq \mathrm{M} + \varepsilon$ p.p..
2. Montrer que $|f| \leq \mathrm{M}$ p.p..

Exercice 3.31 (Mesurabilité d'une limite p.p.) Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ p.p..

1. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E}, \overline{\mathrm{T}})$, où $(\mathrm{E}, \overline{\mathrm{T}}, \overline{m})$ est le complété de $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ (voir le théorème 2.28).
2. En donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f), montrer qu'on peut avoir $f \notin \mathcal{M}(\mathrm{E}, \mathrm{T})$.

Exercice 3.32 (Convergence essentiellement uniforme et presque uniforme) Soit (E, T, m) un espace mesuré. Pour $f \in \mathcal{M}$, on pose $A_f = \{C \in \mathbb{R}, |f| \leq C \text{ p.p.}\}$. Si $A_f \neq \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \inf A_f$. Si $A_f = \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \infty$.

1. Soit $f \in \mathcal{M}$ t.q. $A_f \neq \emptyset$. Montrer que $\|f\|_\infty \in A_f$.
2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}$.
   (a) On suppose, dans cette question, que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$ (on dit que $f_n \to f$ essentiellement uniformément). Montrer que $f_n \to f$ presque uniformément.
   (b) En donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement (E, T, m), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f), montrer qu'on peut avoir $f_n \to f$ presque uniformément, quand $n \to +\infty$, et $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$.

Exercice 3.33 (Mesurabilité des troncatures) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours quand on ne le précise pas, de la tribu borélienne). Pour $a > 0$, on définit la fonction tronquée suivante :

$$f_a(x) = \begin{cases} a & \text{si } f(x) > a \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq a \\ -a & \text{si } f(x) < -a \end{cases}$$

Montrer que f_a est mesurable.

Exercice 3.34 (Mesurabilité de l'ensemble des points de convergence) Soit (E, T) un espace mesurable. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ (on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, comme toujours). On note A l'ensemble des points $x \in E$ tels que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas de Cauchy. Montrer que $A \in T$.

Exercice 3.35 (Tribu et partition) Soit Ω un ensemble. On appelle partition de Ω une famille finie ou dénombrable de parties non vides de Ω et disjointes deux à deux et dont l'union est égale à Ω. Les éléments d'une partition sont appelés atomes.

1. Soit $a = \{A_i\,;\, i \in I\}$ une partition de Ω et soit $\mathcal{T}(a)$ la tribu engendrée par a. Montrer que

$$\mathcal{T}(a) = \{\bigcup_{j\in J} A_j \textit{ où } J \subset I\}.$$

   En déduire qu'une v.a. réelle est $\mathcal{T}(a)$-mesurable si et seulement si elle est constante sur tous les atomes de a.

   Une partition a est dite plus fine qu'une partition b si tous les atomes de b s'écrivent comme union d'atomes de a.
2. Montrer que si a est plus fine que b et si b est plus fine que a alors a et b sont égales.
3. Montrer que si a et b sont deux partitions telles que $\mathcal{T}(a) = \mathcal{T}(b)$ alors a et b sont égales.

Exercice 3.36 (Exemple de tribu engendrée) Dans cet exercice, on s'intéresse à la tribu $\tau(X)$ engendrée par la variable aléatoire X définie sur Ω, muni de la tribu $\mathcal{A}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne.

1. (Cas d'un lancer de dé) Dans cette question, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$) et X est la variable aléatoire définie par $X(\omega) = 1$ lorsque ω est pair, $X(\omega) = 0$ sinon. Montrer que $\tau(X)$ est formé de 4 éléments.
2. (Cas de n tirages à pile ou face) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\Omega = \{0, 1\}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$) et $k \in \{1, \cdots, n\}$. La variable aléatoire X représente le k–ième tirage, X est donc l'application $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \mapsto \omega_k$. Montrer que $\tau(X)$ est ici aussi formé de 4 éléments.
3. Dans cette question, on prend $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \omega - [\omega]$, où $[\omega]$ désigne la partie entière de ω (c'est-à-dire $[\omega] = \max\{n \in \mathbb{Z}, \text{ t.q. } n \leq \omega\}$. Si C est un borélien inclus dans $[0, 1[$ (ce qui est équivalent à dire $C \in \mathcal{B}([0, 1[)$), on pose $\varphi(C) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} C_k$, avec $C_k = \{x + k, x \in C\}$. Montrer que $\tau(X) = \{\varphi(C), C \in \mathcal{B}([0, 1[)\}$.

Exercice 3.37 (Fonctions constantes) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire (réelle). Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(a) = P(X^{-1}(]-\infty, a]))$ (on note souvent $X^{-1}(]-\infty, a]) = \{X \le a\}$). La fonction φ est donc la fonction de répartition de la probabilité P_X.

1. Montrer que φ est une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $\lim_{a\to+\infty} \varphi(a) = 1$, $\lim_{a\to-\infty} \varphi(a) = 0$.
   On suppose maintenant que, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $P(X^{-1}(B)) = 0$ ou 1.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $X = \alpha$ p.s..