Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, probabilités-Statistique
Examen du 17 mai 2018

Le partiel contient 3 exercices. Le barème est sur 23 points. Le polycopié du cours, les notes de cours et de TD sont autorisés.

Exercice 1 (Coordonnées polaires. Barème : 4 points) Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. indépendantes de lois normales réduites $\mathcal{N}(0,1)$. Soient deux nouvelles v.a.r. R et Θ telles que $(X,Y) = (R\cos(\Theta), R\sin(\Theta))$ p.s. , $R \geq 0$ p.s. et $\Theta \in [0, 2\pi[$ p.s..
Déterminer les lois de R et Θ et montrer R et Θ sont indépendantes.

Corrigé – *Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0,0)$, on note $\bar{r}(x,y)$ et $\bar{\theta}(x,y)$ les coordonnées polaires de (x,y), c'est-à-dire $\bar{r} \in \mathbb{R}^\star$ et $\bar{\theta} \in [0, 2\pi[$ avec $(x,y) = (\bar{r}\cos(\bar{\theta}), \bar{r}\sin(\bar{\theta}))$.*

On a alors $R = \bar{r}(X,Y)$ et $\Theta = \bar{\theta}(X,Y)$ p.s. (en notant que $(X,Y) \neq (0,0)$ p.s. car X et Y ont des lois de densité par rapport à λ).

On calcule maintenant les lois de R, Θ et du couple (R,Θ) en utilisant un changement de variables polaires

Soit $\varphi \in B_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a, en utilisant les lois de X, Y, leur indépendance et le changement de variables polaires,

$$E(\varphi(R)) = E(\varphi(\bar{r}(X,Y))) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\bar{r}(x,y)) \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2-y^2}{2}} d(x,y)$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(r) \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-r^2}{2}} r dr d\theta = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(r) e^{\frac{-r^2}{2}} r dr.$$

Ceci prouve que la loi de R est une loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue. On a $P_R = f\lambda$ avec $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} x 1_{\mathbb{R}_+}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$$E(\varphi(\Theta)) = E(\varphi(\bar{\theta}(X,Y))) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\bar{\theta}(x,y)) \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2-y^2}{2}} d(x,y)$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(\theta) \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-r^2}{2}} r dr d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta.$$

Ceci prouve que la loi de Θ est la loi uniforme sur $]0, 2\pi[$. On a donc $P_\Theta = g\lambda$ avec $g(x) = \frac{1}{2\pi} 1_{]0,2\pi[}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Soit maintenant $\varphi \in B_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on a

$$E(\varphi(R,\Theta)) = E(\varphi(\bar{r}(X,Y), \bar{\theta}(X,Y))) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\bar{r}(x,y), \bar{\theta}(x,y)) \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2-y^2}{2}} d(x,y)$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(r,\theta) \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-r^2}{2}} r dr d\theta$$

Ceci prouve que la loi du couple (R,Θ) est une loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$ et que On a $P_{(R,\Theta)} = h\lambda_2$, avec $h(x,y) = f(x)g(y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $P_{(R,\Theta)} = P_R \otimes P_\Theta$, les v.a.r. R, Θ sont indépendantes.

Exercice 2 (Convergence p.s., en probabilité, en loi, L^p. Barème : 14 points)
Pour les deux premières questions de cet exercice, on se place dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ où $\mathcal{B}([0,1])$ désigne la tribu borélienne de l'intervalle $[0,1]$ et λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.
Pour tout entier $n \geq 1$ on considère la variable aléatoire réelle discrète X_n définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par

$$X_n(\omega) = n \text{ si } 0 \leq \omega < \frac{1}{4n},$$
$$X_n(\omega) = -n \text{ si } \frac{1}{4n} \leq \omega < \frac{1}{2n},$$
$$X_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \text{ si } \frac{1}{2n} \leq \omega \leq 1.$$

1. Montrer que la suite $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers 0. Puis étudier la convergence en probabilité, la convergence en loi, la convergence dans L^1 et la convergence dans L^2 de la suite $(X_n)_n$.

   Corrigé – *pour tout $\omega > 0$, $\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0$. Comme $\mathbb{P}(\{0\}) = 0$, on a bien $X_n \to 0$ p.s.. Cette convergence p.s. implique la convergence en probabilité et la convergence en loi.*
   $\int_\Omega X_n d\mathbb{P} \geq 1/2$ et donc la suite $(X_n)_n$ ne tend pas vers 0 dans L^1 (ni vers aucune autre v.a.r. car la convergence L^1 implique, au poins pour une sous suite, la convergence p.s.).
   La suite $(X_n)_n$ ne converge pas dans L^2 (car la convergence L^2 implique la convergence L^1).

2. Pour tout $n \geq 1$, calculer $\mathbb{P}(\{X_n = n\} \cap \{X_{n+1} = n+1\})$. Les variables X_n sont-elles indépendantes ?

   Corrigé – *Pour tout $n \geq 1$, on $\mathbb{P}(\{X_n = n\} \cap \{X_{n+1} = n+1\}) = \mathbb{P}(\{X_{n+1} = n+1\}) = 1/(4n+4)$. Comme $\mathbb{P}(\{X_n = n\} \cap \{X_{n+1} = n+1\}) \neq \mathbb{P}(\{X_n = n\})\,\mathbb{P}(\{X_{n+1} = n+1\})$, les variables X_n ne sont pas indépendantes.*

Dans la suite cet exercice, on se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ quelconque. Soit (α_n) une suite de réels de $]0, 1/2[$. Pour tout entier $n \geq 1$ on considère une variable aléatoire réelle Y_n sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que

$$\mathbb{P}(Y_n = n) = \mathbb{P}(Y_n = -n) = \alpha_n$$
$$\text{et } \mathbb{P}(Y_n = 1/\sqrt{2n}) = 1 - 2\alpha_n.$$

3(a) Calculer la fonction de répartition de Y_n, notée F_n, pour tout $n \geq 1$. Tracer le graphe de F_n.

Corrigé – *$F_n(x) = 0$ pour $x < -n$, $F_n(x) = \alpha_n$ pour $-n \leq x < 1/\sqrt{2n}$, $F_n(x) = 1 - \alpha_n$ pour $1/\sqrt{2n} \leq x < n$, $F_n(x) = 1$ pour $x \geq n$.*

(b) Calculer la fonction de répartition, notée F, de la variable constante égale à 0.

Corrigé – $F(x) = 0$ *pour* $x < 0$, $F(x) = 1$ *pour* $x \geq 0$.

(c) On suppose dans la suite que la suite $(\alpha_n)_n$ tend vers 0. Montrer que pour tout $t \neq 0$ la suite $(F_n(t))_n$ tend vers $F(t)$. La suite $(Y_n)_n$ converge t'elle en loi ?

Corrigé – *Pour* $t < 0$, *on a* $\lim_{n\to+\infty} F_n(t) = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0 = F(t)$.
Pour $t > 0$, *on a* $\lim_{n\to+\infty} F_n(t) = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1 - \alpha_n = F(t)$.
Cette convergence des fonctions de répartition implique la convergence en loi de Y_n *vers la variable constante égale à* 0. *Mais, ceci peut aussi de démontrer directement. En effet pour tout* $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *on a*

$$E(\varphi(Y_n)) = \varphi(n)\alpha_n + \varphi(-n)\alpha_n + \varphi(1/\sqrt{2n})(1 - 2\alpha_n).$$

On en déduit (comme φ *est bornée en continue en* 0*) que* $E(\varphi(Y_n)) = E(\varphi(0))$ *et donc la convergence en loi de* Y_n *vers la variable constante égale à* 0.

4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(\alpha_n)_n$ pour que (Y_n) converge vers 0 dans L^2.

Corrigé – *Comme* $E(Y_n^2) = 2n^2\alpha_n + (1 - \alpha_n)/(2n)$, *la suite* (Y_n) *converge vers* 0 *dans* L^2 *si et seulement si* $\lim_{n\to+\infty} n^2\alpha_n = 0$.

5(a) Soit $0 < \varepsilon < 1$. Calculer $\mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon)$ pour tout entier $n \geq 1$.

Corrigé – $\mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) = 1$ *si* $n \leq 1/(2\varepsilon^2)$ *et* $\mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) = 2\alpha_n$ *si* $n > 1/(2\varepsilon^2)$.

(b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(\alpha_n)_n$ pour que (Y_n) converge en probabilité vers 0.

Corrigé – *La question précédente nous donne que* $Y_n \to 0$ *en probabilité si et seulement si* $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

(c) Déterminer une condition suffisante (C) sur la suite $(\alpha_n)_n$ pour que la suite (Y_n) converge presque sûrement vers 0.

Corrigé –
Pour $j \in \mathbb{N}^\star$, *on pose* $A_j = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{p>n} \{|Y_p| \geq 1/j\}$. *Pour* $\omega \in \Omega$, *on a* $\lim_{n\to+\infty} Y_n(\omega) \neq 0$ *si et seulement, il existe* j *tel que* $\omega \in A_j$. *On a donc* $Y_n \to 0$ *p.s. si et seulement si* $\mathbb{P}(\cup_j A_j) = 0$
Par σ*-sous-additivité d'une probabilité, on a* $\mathbb{P}(\cup_j A_j) \leq \sum_j \mathbb{P}(A_j)$. *On en déduit que* $Y_n \to 0$ *p.s. si et seulement si* $\mathbb{P}(A_j) = 0$ *pour tout* j.
D'après le lemme de Borel-Cantelli, une condition suffisante que $Y_n \to 0$ *p.s est alors que, pour tout* j, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\{|Y_n| \geq 1/j\} < +\infty$. *Grâce à la question 5a ceci est équivavent à la condition* $\sum_n \alpha_n < +\infty$ *(que l'on notera condition (C)).*

(d) Montrer que la condition (C) n'est par contre pas nécessaire en général (indication : utiliser la première question).

Corrigé – *La suite $(X_n)_n$ de la première question converge p.s. vers 0 et pourtant on a, pour cette suite, $\alpha_n = 1/(4n)$ et donc $\sum_n \alpha_n = +\infty$.*

(e) Qu'en est-il dans le cas où les variables Y_n sont de plus indépendantes ?

Corrigé – *Si les variables Y_n sont de plus indépendantes, la condition (C) devient nécessaire pour avoir $Y_n \to 0$ p.s.. Plus précisément, si (C) n'est pas vérifiée, on a $\sum_n \alpha_n = +\infty$. Le lemme de Borel-Cantelli donne alors que $\mathbb{P}(A_j) = 1$ pour tout j. On en d*
'eduit que $Y_n \not\to 0$ p.s..

Exercice 3 (Statistique, barème 5 points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier déterministe connu. On dispose de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ déterministe et inconnu.
On veut construire des estimateurs de θ en utilisant la méthode des moments.
On rappelle des caractéristiques de la loi de Poisson. Sa distribution est $\forall k \in \mathbb{N},\ P_{X_1}(k) = \frac{\theta^k}{k!}\exp(-\theta)$, ses deux premiers moments sont $E(X_1) = \theta$ et $E(X_1^2) = \theta^2 + \theta$.

1. Montrer que la méthode des moments permet de proposer les deux estimateurs suivants:

$$\hat{\theta}_1 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \hat{\theta}_2 := -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}.$$

   Corrigé – *On inverse les relations liant respectivement $E(X_1)$ puis $E(X_1^2)$ avec θ. Pour la 1ère relation, on a simplement $\theta = E(X_1)$. Pour la 2ème, on rappelle qu'on a supposé $\theta > 0$, or l'équation du 2nd degré (en θ): $\theta^2 + \theta - E(X_1^2) = 0$ a une seule solution strictement positive, donnée par $\theta = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + E(X_1^2)}$.*

   On définit les estimateurs en remplaçant respectivement $E(X_1)$ puis $E(X_1^2)$ par $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ puis par $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$, d'où les deux estimateurs demandés.

2. Montrer que $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ sont consistants (vérifiez bien les hypothèses des résultats que vous utiliserez).

   Montrer également qu'un nouvel estimateur $\hat{\theta}_3 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$ est lui aussi consistant.

   Corrigé – *(correction détaillée, on peut aussi utiliser un résultat du cours) Les variables X_i sont iid et d'espérance finie. De plus les variables $Y_i := X_i^2$ sont aussi iid (même transformation déterministe par $u \mapsto u^2$ de variables iid) et d'espérance finie.*

   On peut donc appliquer la loi des grands nombres (par la suite $\to$ désigne la convergence en probabilités quand n tend vers l'infini):

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to E(X_1) = \theta, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \to E(Y_1) = \theta^2 + \theta.$$

Notons φ_1 et φ_2 les deux fonctions déterministes apparaissant dans les expressions des estimateurs: $\forall u \in \mathbb{R}^+$, $\varphi_1(u) = u$, $\varphi_2(u) = -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+u}$. Ainsi $\hat{\theta}_1 := \varphi_1(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)$, et $\hat{\theta}_2 := \varphi_2(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i)$. Or φ_1 et φ_2 sont continues, donc on a bien la consistance:

$$\hat{\theta}_1 \to \varphi_1(\theta) = \theta, \quad \hat{\theta}_2 \to \varphi_2(\theta^2+\theta) = \theta.$$

Pour $\hat{\theta}_3$ on peut reconnaître que c'est l'estimateur usuel de la variance (vu en TD). Rappel sur sa consistance: on a déjà vu que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \to E(X_1^2)$, par ailleurs $-(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)^2 \to -(E(X_1))^2$ (car $u \mapsto -u^2$ continue), et $\hat{\theta}_3$ tend vers la somme des deux limites (propriété de la convergence en probabilité): $\hat{\theta}_3 \to Var(X_1)$, et dans le modèle présent $Var(X_1) = \theta$, donc l'estimateur est consistant lui aussi.

3. Caluler le biais et la variance de l'estimateur $\hat{\theta}_1$.

Corrigé – Biais: $E(\hat{\theta}^{(1)}) - \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i) - \theta = \theta - \theta = 0$ par linéarité de l'espérance et vu que $E(X_i) = \theta$.
Variance: $Var(\hat{\theta}^{(1)}) = \frac{1}{n^2}Var(\sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Var(X_i)$ (car les variables dans la somme sont indépendantes)
$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \theta = \frac{\theta}{n}$.

4. Expliquer pourquoi (d'après le cours ou les TD) le biais de l'estimateur $\hat{\theta}_3$ vaut:

$$E(\hat{\theta}_3) - \theta = -\frac{\theta}{n}.$$

Corrigé – C'est un résultat vu en TD, l'estimateur usuel de la variance a un biais de $-\frac{Var(X_1)}{n}$, et pour le modèle présent ici $Var(X_1) = \theta$.

5. On admet que la variance de $\hat{\theta}_3$ est donnée par:

$$Var(\hat{\theta}_3) = \frac{n-1}{n^3}[2n\theta^2 + (n-1)\theta].$$

On suppose de plus que $\theta \geq 1$. Entre $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_3$, quel est l'estimateur qui a le meilleur biais? et le meilleur risque quadratique?

Corrigé – Le biais est d'autant meilleur que sa valeur absolue est faible: ici $\hat{\theta}_1$ est meilleur que $\hat{\theta}_3$.
Le risque est d'autant meilleur que sa valeur est faible. D'après la décomposition biais variance les riques sont:

$$E[(\hat{\theta}_1 - \theta)^2] = [E(\hat{\theta}_1) - \theta]^2 + Var(\hat{\theta}_1) = \frac{\theta}{n},$$

$$E[(\hat{\theta}_3-\theta)^2] = [E(\hat{\theta}_3)-\theta]^2 + Var(\hat{\theta}_3) = \frac{\theta^2}{n^2} + \frac{n-1}{n^3}[2n\theta^2 + (n-1)\theta].$$

Par des calculs simples on montre que $E[(\hat{\theta}_1-\theta)^2] \leq E[(\hat{\theta}_3-\theta)^2]$ *si et seulement si* $\theta \geq \frac{1}{n}$*, ce qui est toujours vrai lorsque* $\theta \geq 1$*. Donc* $\hat{\theta}_1$ *a un meilleur risque que* $\hat{\theta}_3$*.*