Université de Marseille
Année 2009-2010
Licence de mathématiques : Calcul différentiel

Corrigé du Devoir

Exercice 1

(1) Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$). Montrer que l'application : $x \mapsto \|x\|$ n'est pas différentiable en 0.
(2) On suppose maintenant que E est un espace de Hilbert (réel), on définit ϕ et ψ de E dans $\mathbb{R}$ par :
$$\phi(x) = (x, x), \quad \psi(x) = \|x\|, \text{ pour } x \in E,$$
où (x, y) désigne le produit scalaire de x avec y ($\|x\|^2 = (x, x)$). Montrer que ϕ est différentiable en tout point de E. Calculer $D\phi(x)(h)$, pour tout $(x, h) \in E \times E$. Montrer que ψ est différentiable en tout point de $E \setminus \{0\}$. Calculer $D\psi(x)(h)$, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ et tout $h \in E$.
(3) Sous les hypothèses de la question 2, montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe $v(x) \in E$ tel que $D\psi(x)(h) = (v(x), h)$. Calculer $v(x)$. On appelle ce vecteur le gradient de ψ au point x.

Corrigé

(1) *Soit $L \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, montrons que*
$$\frac{\|0 + h\| - \|0\| - L(h)}{\|h\|} = 1 - \frac{L(h)}{\|h\|}$$
ne tend pas vers 0 lorsque h tend vers 0. Il est clair que c'est le cas si $L = 0$. Supposons donc qu'il existe $h_0 \in E$, $\|h_0\| = 1$, $L(h_0) \neq 0$. Soit $h = th_0$ où $t \in \mathbb{R}$, on obtient
$$\frac{1}{\|th_0\|} L(th_0) = \frac{t}{|t|} L(h_0).$$
Cette expression n'a pas de limite quand t tend vers 0.
(2) *Soit $x \in E$. On a :*
$$\phi(x + h) - \phi(x) = 2(x, h) + \|h\|^2.$$
L'application $h \to (x, h)$ est linéaire et continue de $(E, \|.\|)$ dans $\mathbb{R}$ et $\lim_{h\to 0} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = 0$, donc ϕ est différentiable en x et $D\phi(x)h = (2x, h)$. La différentiabilité de ψ se déduit de celle de ϕ en remarquant que $\psi(x) = \sqrt{\phi(x)}$, que la fonction $\sqrt{}$ est dérivable sur $]\mathbf{0}, +\infty[$ et en appliquant le théorème sur la composition de fonctions diiférentiables. De ce même théorème, on déduit que $D\psi(x)(h) = \frac{1}{\psi(x)}(x, h)$.
(3) *Le calcul précédent montre que pour tout $x \in E$, on a $D\psi(x)(h) = (v(x), h)$, $\forall h \in E$, avec $v(x) = \frac{x}{\|x\|}$. On a donc prouvé que $grad\|x\| = \frac{x}{\|x\|}$.*

Exercice 2

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation

(1)
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

couplée à la condition initiale

(2)
$$u(0, x, y) = h(x, y)$$

où $h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et où l'inconnue est $u \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

(1) On suppose d'abord que $u \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ vérifie l'équation (1). Pour tout $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminez une application (non constante)
$$\gamma_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
telle que u soit contant le long de la courbe $t \to \gamma_X(t)$ (c'est à dire que $u \circ \gamma_X$ est une constante) et telle que $\gamma_X(0) = (0, x, y)$.

(2) Montrez que

$$\Gamma : (t, x, y) \to \gamma_{(x,y)}(t)$$

est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$.

(3) Montrez que l'équation (1) possède une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ vérifiant la condition (2).

Corrigé

(1) *On va chercher γ_X de classe C^1. Comme u est de classe $C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, $u \circ \gamma_X$ est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{d}{dt}(u \circ \gamma_X)(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Notons $(\theta_X(t), \phi_X(t), \psi_X(t)) = \gamma_X(t)$. On a*

$$\frac{d}{dt}(u \circ \gamma_X)(t) = \theta'_X(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \phi'_X(t)\frac{\partial u}{\partial x} + \psi'_X(t)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

De (1), on déduit qu'il suffit de choisir $\theta_X(t) = t$, $\phi_X(t) = t + x$ et $\psi_X(t) = -t + y$. Ce sont bien des applications de classe $C^1(\mathbb{R})$ et donc $\gamma_X = (\theta_X, \phi_X, \psi_X)$ vérifie les hypothèses.

(2) *De la question précédente, on déduit que $\Gamma(t, x, y) = \gamma_X(t) = (t, x + t, y - t) = t(1, 1, -1) + x(0, 1, 0) + y(0, 0, 1)$. Ainsi Γ est une application linéaire, bijective de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$. C'est donc un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$.*

(3) *De la question (1), on déduit que si $u \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ vérifie (1), alors $\frac{\partial u \circ \Gamma}{\partial t}(t, x, y) = 0$ et donc $u \circ \Gamma(t, x, y) = u \circ \Gamma(0, x, y)$. En conséquence, si (2) est vérifiée on a $u \circ \Gamma(t, x, y) = h(x, y)$ et, si u vérifie (1) et (2), alors $u \circ \Gamma$ est* **uniquement déterminé**. *Comme*

$$u = (u \circ \Gamma) \circ \Gamma^{-1},$$

c'est **l'unique solution de (1), (2) qui soit dans $C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$.** *On a vu que $u \circ \Gamma(t, x, y) = u(0, x, y)$ d'où, en notant $\Gamma^{-1}(t, x, y) = (\delta(t, x, y), \alpha(t, x, y), \beta(t, x, y))$,*

$$u(t, x, y) = h(\alpha(t, x, y), \beta(t, x, y)), \ \forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^3.$$

Tous calculs faits, on trouve $u(t, x, y) = h(x - t, y + t)$.

Exercice 3

On note $M_m(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $m \times m$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, muni de la norme de l'application linéaire associée. On rappelle que $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

(1) Démontrez que pour tout $A \in M_m(\mathbb{C})$, la série

$$\sum_0^\infty \frac{1}{n!} A^n$$

converge dans $M_m(\mathbb{C})$. On note $E(A)$ la somme de cette série.

(2) Soit $A \in M_m(\mathbb{C})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note u_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $M_m(\mathbb{C})$ définie par $u_n : t \mapsto \frac{t^n}{n!} A^n$. Montrez que u_n est différentiable, et explicitez la différentielle $Du_n : \mathbb{R} \to L\big(\mathbb{R}, M_m(\mathbb{C})\big)$. En déduire que u_n est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et explicitez sa fonction dérivée $u'_n : \mathbb{R} \to M_m(\mathbb{C})$.

(3) Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit $f(t) = E(tA)$. Montrez que f est différentiable sur $\mathbb{R}$. *(Utilisez le théorème sur la différentiabilité d'une série de fonctions).*

(4) Montrez que f vérifie les propriétés suivantes :
   (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f'(t) = Af(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$,
   (b) $f(s + t) = f(s).f(t)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$,
   (c) $f(0) = I$.

(5) Soit $x \in \mathbb{C}^m$. Montrez que la fonction $v(t) = E(tA)x$ est l'unique application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^m$ solution du problème: $v' = Av$ et $v(0) = x$.

(6) On définit l'application E qui à $A \in M_n(\mathbb{C})$ associe $\sum_0^\infty \frac{1}{n!} A^n$.
   (a) Montrer que E est continue sur $M_n(\mathbb{C})$.
   (b) Montrer que $E(M_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C})$ et que $E(A)^{-1} = E(-A)$.
   (c) Montrer que E est différentiable en 0 et calculer sa différentielle.

Corrigé

(1) *La série de terme général $\frac{1}{n!}\|A^n\|$ est convergente ($\frac{1}{n!}\|A^n\| \leq \frac{1}{n!}\|A\|^n$), et comme l'espace $M_n(\mathbb{C})$ est complet (de dimension finie), la série $\sum_0^\infty \frac{1}{n!} A^n$ est convergente.*

(2) *Si $n \neq 0$, on a*

$$u_n(t + h) - u_n(t) = \frac{(t + h)^n - t^n}{n!} A^n.$$

L'application g qui à $t \in \mathbb{R}$ associe $\frac{t^n}{n!} \in \mathbb{R}$ est différentiable sur $\mathbb{R}$ et sa différentielle est $Dg(t)h = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}h$. On a donc

$$\frac{(t+h)^n - t^n}{n!} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}h + |h|\epsilon(h),$$

où $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$, puis

$$u_n(t+h) - u_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}hA^n + |h|\epsilon(h)A^n.$$

On en déduit que les applications u_n sont différentiables sur $\mathbb{R}$ et $Du_n(t)h = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n h$. Comme $u_0(t) = I$, elle est aussi différentiable sur $\mathbb{R}$ et $Du_0(t)h = 0$. Ainsi, u_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour $n \neq 0$, $u_n'(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n$ et $u_0'(t) = 0$.

(3) *Comme $E(tA) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{n=N} u_n(t)$, on va déduire la différentiabilité de f à partir de celle des u_n. Pour cela on va vérifier les hypothèses du corollaire 2.3, du chapitre 4 du cours avec $\Omega =]-\alpha, \alpha[$, $\alpha > 0$ quelconque. On a déjà montré la différentiabilité du terme général, ainsi que la convergence simple de la série. Il reste à montrer la convergence uniforme de la série de terme général $u_n'(t)$ sur Ω. Comme*

$$\sup_{t \in]-\alpha,\alpha[} \frac{|t|^{n-1}}{(n-1)!}\|A^n\| = \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}\|A^n\| \leq \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}\|A\|^n$$

et que la série numérique de terme général $\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}\|A\|^n$ converge, la série de terme général u_n' converge uniformément sur $\Omega =]-\alpha, \alpha[$. Donc, l'application du corollaire 2.3 du cours implique que f est différentiable en tout point de $]-\alpha, \alpha[$. Comme $\alpha > 0$ est quelconque dans ce qui précède, on a bien montré que f est différentiable sur $\mathbb{R}$.

Remarque : *On a pas convergence uniforme de la série sur $\mathbb{R}$ tout entier, c'est pourquoi on doit travailler dans les intervalles $]-\alpha, \alpha[$.*

(4) (a) *L'application du même corollaire conduit à*

$$f'(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n'(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n.$$

On pose $m = n-1$, ce qui donne

$$f'(t) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{t^m}{m!}A^{m+1}.$$

Comme la série converge dans $M_n(\mathbb{C})$, on obtient

$$f'(t) = A\sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{t^m}{m!}A^m = Af(t).$$

Cette dernière série d'égalités provient de la continuité de l'application (linéaire !) $M \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto AM \in M_n(\mathbb{C})$, ce qui justifie de pouvoir "sortir" un facteur A de la somme de la série.

(b) *On propose deux démonstrations de ce résultat. La première est un calcul direct, la seconde utilise les résultats des questions suivantes.*

Preuve 1. *Posons*

$$W_n = (\sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k}{k!}A^k)(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{s^k}{k!}A^k) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(t+s)^k}{k!}A^k.$$

La formule du binôme s'écrit

$$\frac{(t+s)^k}{k!} = \sum_{i=0}^{i=k} \frac{C_k^i t^{k-i}s^i}{k!} = \sum_{i=0}^{i=k} \frac{t^{k-i}}{(k-i)!}\frac{s^i}{i!}.$$

D'où

$$W_n = (\sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k}{k!}A^k)(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{s^k}{k!}A^k) - \sum_{k=0}^{k=n}\sum_{i=0}^{i=k} \frac{(tA)^{k-i}}{(k-i)!}\frac{(sA)^i}{i!} = \sum_{k=n+1}^{k=2n}\sum_{i=0}^{i=k} \frac{(tA)^{k-i}}{(k-i)!}\frac{(sA)^i}{i!},$$

puis en utilisant la propriété de la norme utilisée sur l'ensemble des matrices, on déduit

$$\|W_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n} \sum_{i=0}^{i=k} \frac{t^{k-i}}{(k-i)!} \frac{s^i}{i!} \|A\|^k,$$

$$\|W_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{(t+s)^k}{k!} \|A\|^k.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$*. Ceci montre bien l'inégalité demandée en passant à la limite dans la définition de* W_n*.*

Preuve 2. *On suppose connue la propriété suivante (qui est démontrée dans la question suivante et qui n'utilise que le résultat de la question 4a):*

Si $v \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ *vérifie* $v'(t) = Av(t), \forall t \in \mathbb{R}$ *et* $v(0) = 0$*, alors* $v \equiv 0$

On fixe $s \in \mathbb{R}$ *et on considère les fonctions* v_1 *et* v_2 *définies par*

$$v_1(t) = f(t+s), \quad v_2(t) = f(t)f(s).$$

D'après ce qui précède, ces deux fonctions sont de classe C^1 *et on a*

$$v_1'(t) = f'(t+s) = Af(t+s) = Av_1(t),$$
$$v_2'(t) = f'(t)f(s) = Af(t)f(s) = Av_2(t).$$

Ainsi, la différence $v = v_1 - v_2$ *vérifie l'équation* $v'(t) = Av(t)$ *ainsi que* $v(0) = v_1(0) - v_2(0) = f(s) - f(s) = 0$*. D'après la propriété rappelée ci-dessus on en déduit que* v *est identiquement nulle, ce qui montre le résultat attendu.*

(c) *Par un calcul direct , on trouve* $f(0) = I$*.*

(5) *On a vu que* v *est dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}^n$*, que* $v'(t) = AE(tA)x = Av(t)$ *et, de plus, on a* $v(0) = E(0)x = x$*, ce qui montre vérifie bien le problème considéré.*

Montrons qu'il s'agit bien de l'unique solution. Soit $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ *dérivable vérifiant* $v'(t) = Av(t), \forall t$ *et* $v(0) = x$*. La fonction* $h(t) = f(-t)v(t)$ *est bien dérivable et on a*

$$h'(t) = -f'(-t)v(t) + f(-t)v'(t) = -Af(-t)v(t) + f(-t)Av(t).$$

Or, il est clair d'après la définition de f *que* A *et* $f(t)$ *sont deux matrices qui commuttent, on a donc* $h'(t) = 0$ *pour tout* t*, ce qui montre que* h *est constante et donc que* $h(t) = h(0) = v(0) = x$ *et ainsi* $v(t) = f(t)x$*.*

(6) (a) *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$*, l'application qui à* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *associe* $A^k \in M_n(\mathbb{C})$ *est continue et même différentiable (voir exercice 12 de la planche 4). Comme la convergence de la série est uniforme sur tout compact de* $M_n(\mathbb{C})$*, on en déduit la continuité de* E*.*

(b) *Comme* $f(1) = E(A)$*, de la question (4)(b), on déduit que*

$$I = E(A - A) = E(A)E(-A).$$

Donc $E(A)$ *est inversible, d'inverse* $E(A)^{-1} = E(-A)$*.*

(c) *Par définition,* $E(A) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!}A^n$*. Donc*

$$E(H) - E(0) = H + \sum_2^\infty \frac{1}{n!}H^n.$$

L'application qui à $H \in M_n(\mathbb{C})$ *associe* H *est linéaire et continue de* $M_n(\mathbb{C})$ *dans* $M_n(\mathbb{C})$*. La série précédente étant convergente dans* $M_n(\mathbb{C})$*, on peut écrire :*

$$\lim_{H\to 0} \frac{1}{\|H\|} \sum_2^\infty \frac{1}{n!}H^n = \lim_{h\to 0} \frac{H^2}{\|H\|} \sum_0^\infty \frac{1}{(n+2)!}H^n = 0.$$

Ainsi, E *est différentiable en* 0 *et* $DE(0) = I$*.*