1. Espaces métriques

1 Distance, boules, ouverts, fermés...

Définition 1.1. *Soit E un ensemble (non vide). On appelle distance sur E une application d de $E \times E$ dans $[0, +\infty[$ vérifiant les trois propriétés suivantes:*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in E$,
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in E$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in E$

Si d est une distance sur E on dit que (E, d) est un espace métrique.

Exemples
1/ $\mathbb{R}$ et la valeur absolue: $d(x, y) = |x - y|$.
2/ $\mathbb{C}$ et le module: $d(x, y) = |x - y|$.
3/ $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) et la distance euclidienne $d(x, y) = \left(\sum |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$
4/ $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) munis de $d_1(x, y) = \sum |x_i - y_i|$ ou encore de $d_\infty(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$
5/ Les espaces vectoriels normés fournissent des exemples très important d'espaces métriques. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle norme sur E une application N de E dans $[0, +\infty[$ telle que:

1. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x), \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$,
2. $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$,
3. $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

On dit alors que (E, N) est un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{K}$). Un espace vectoriel normé est un exemple d'espace métrique car l'application $d(x, y) = N(x - y)$ est une distance. Vérification.

Soit (E, d) un espace métrique. Pour tout $a \in E$ et $R > 0$ on appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B(a, r) := \{x \in E | d(a, x) < r\},$$

et boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B_f(a, r) := \{x \in E | d(a, x) \leq r\}.$$

Par exemple pour la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$, les boules ouvertes sont des disques usuels. Mais la forme des boules dépend beaucoup de la distance choisie. Dessins des boules de d_1, d_2 et d_∞ dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.2. *Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E. On dit que A est un ouvert de (E, d) si pour tout $a \in A$ il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. On dit que A est un fermé de (E, d) si son complémentaire A^c est un ouvert de (E, d). En particulier $\emptyset$ est à la fois un ouvert et un fermé de (E, d), de même que A.*

Proposition 1.3. *Soit (E, d) un espace métrique.*
1. Si pour tout $i \in I$, O_i est un ouvert, alors $\bigcup_{i \in I} O_i$ est encore un ouvert.
2. Si $O_1, \cdots, O_n$ sont des ouverts, alors $\bigcap_{p=1}^n O_i$ est encore un ouvert.

Par passage au complémentaire on a de même

Proposition 1.4. *Soit (E,d) un espace métrique.*

1. *Si pour tout $i \in I$, F_i est un fermé, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est encore un fermé.*
2. *Si $F_1, \cdots, F_n$ sont des fermés, alors $\bigcup_{p=1}^{n} F_p$ est encore un ouvert.*

Voisinages. On dit qu'un sous-ensemble A de E est un voisinage de $a \in E$ s'il existe un ouvert O de (E,d) tel que $a \in O$ et $O \subset A$.

Proposition 1.5. *Une boule ouverte $B(a,r)$ est un ouvert de (E,d). Une boule fermée $B_f(a,r)$ est un fermé de (E,d).*

L'ensemble $\mathcal{T}$ (ou $\mathcal{T}_d$) des sous-ensembles ouverts de (E,d) s'appelle "la topologie" associée à (E,d), ou induite par d sur E:

$$\mathcal{T} = \{O \subset E \mid O \textit{ est un ouvert de } (E,d) \ \}.$$

Des distances différentes d_1 et d_2 peuvent induire des topologies identiques: $d_1 \neq d_2$ mais $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$. On dit dans ce cas que les distances d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes.

On dit que deux distances sur E, d et d' sont métriquement équivalentes s'il existe deux contantes $0 < a, b$ telles que

$$a\ d(x,y) \leq d'(x,y) \leq b\ d(x,y),\ \forall x,y \in E.$$

Proposition 1.6. *Deux distances métriquement équivalentes sont topologiquement équivalentes.*

Exercice 1.7.

1. *Montrez que δ définie par $\delta(x,y) = |arctan(x) - arctan(y)|$ est une distance sur $\mathbb{R}$. Montrez que la topologie induite par δ est la topologie usuelle (celle induite par la valeur absolue). Montrez que δ et la distance usuelle ne sont pas métriquement équivalentes.*

2. *Montrez que deux distances d et d' sur E sont topologiquement équivalentes si et seulement si:*

$$\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 \ t.q.\ B_d(x,r) \subset B_{d'}(x,\varepsilon)$$

et

$$\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0, \exists r' > 0 \ t.q.\ B_{d'}(x,r') \subset B_d(x,\varepsilon).$$

Distance induite, topologie induite. Si (E,d) est un espace métrique et A un sous-ensemble de E, la restriction de d à l'ensemble $A \times A$, c'est à dire $\delta = d_{|A\times A}$ est une distance sur A. On dit que δ est la distance "induite" par d sur A. On dit que (A,δ) est le sous-espace métrique induit par (E,d). En général, quand il n'y pas de risques de confusions, on dit simplement que "A est un sous-espace métrique de E".

Considérons maintenant les boules de A. Notons $B_\delta(x,r)$ les boules ouvertes de A pour la distance δ et $B_d(x,r)$ celles de E pour la distance d. On a:

$$B_\delta(x,r) = B_d(x,r) \cap A,$$

c'est à dire que les boules ouverts de E sont les traces sur A des boules ouvertes de E. La même chose a lieu pour les boules fermées. On en déduit que

Proposition 1.8. *Les ouverts de (A,δ) sont exactement les ensembles $O \cap A$ où O est un ouvert de (E,d), c'est à dire les "traces sur A" des ouverts de E. Cette topologie de A s'appelle la "topologie induite par E sur A", ou plus simplement la "topologie induite". Les fermés de (A,δ) sont exactement les ensembles $F \cap A$ où F est un fermé de E, c'est à dire les "traces sur A" des fermés de E.*

Exercice 1.9.

1. *Montrez que l'intervalle $]1,2]$ est un fermé de $]1,3[$ pour la topologie induite (induite par $\mathbb{R}$ sur $A =]1,3[$).*

2. *L'ensemble $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ peut-t'il être une boule ouverte (d'un certain espace métrique)?*

2 Suites convergentes

Définition 2.1. *Soit (E, d) un espace métrique. Soit $(a_n), n \in \mathbb{N}$ une suite de E. On dit que cette suite est convergente s'il existe $\ell \in E$ tel que:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \ (\forall n \in \mathbb{N}), n \geq N, \ \Rightarrow d(a_n, \ell) \leq \varepsilon. \tag{2.1}$$

Dans ce cas un tel ℓ est unique et s'appelle la limite de la suite a_n et on note $\ell = \lim_\infty a_n$. On dit aussi que a_n converge vers ℓ.

On dit qu'une suite (a_n) de E est bornée s'il existe une boule ouverte (ou fermée) qui contient tout les termes de la suite, c'est à dire s'il existe $b \in E$ et $r > 0$ tels que $a_n \in B(b, r), \forall n \in \mathbb{N}$. Plus généralement, on dit qu'un sous-ensemble A de E est borné si A est contenu dans une boule de E.

Proposition 2.2. *Toute suite convergente est bornée.*

3 Adhérence, intérieur, frontière...

Dans cette section (E, d) est un espace métrique. Soit A une partie de E. On appelle adhérence de A, le sous-ensemble fermé de E formé par l'intersection de tous les fermés de E contenant A. On le note adh(A) ou $\overline{A}$. C'est aussi le plus petit fermé contenant A (au sens de la relation d'inclusion): $A \subset F$ et F fermé $\Rightarrow \overline{A} \subset F$.On dit qu'un point $a \in E$ est "adhérent à A" si $a \in \overline{A}$. En particulier A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Proposition 3.1. *$x \in \overline{A}$ si et seulement si pour tout ouvert O de E tel que $x \in O$: $O \cap A \neq \emptyset$.*

Proposition 3.2. *Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. Un élément $x \in E$ est dans $\overline{A}$ si et seulement si x est limite d'une suite d'éléments de A. En particulier A est fermé si et seulement si toute suite d'éléments de A qui converge dans E, a pour limite un élément de A.*

EXEMPLES (dans $\mathbb{R}$)...
On dit que $A \subset E$ est dense si $\overline{A} = E$. Par exemple $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice. Montrez que $C_c(\mathbb{R})$ (fonctions continues à support borné) est dense dans $C_0(\mathbb{R})$ (fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini) pour la distance : $d(f, g) := \sup |f - g|$.

Intérieur. Soit A une partie de E. On appelle intérieur de A, le sous-ensemble ouvert de E formé par la réunion de tous les ouverts de E contenus dans A. On le note int(A) ou $\mathring{A}$. C'est aussi le plus grand ouvert contenu dans A (au sens de la relation d'inclusion): $O \subset A$ et O ouvert $\Rightarrow O \subset \mathring{A}$. En particulier A est ouvert si et seulement si $A = \text{int}(A)$

Frontière. Si $A \subset E$, on appelle "frontière de A", et on note $Fr(A)$ ou ∂A l'ensemble des points $x \in E$ tels que tout ouvert O de E contenant x vérifie: $O \cap A \neq \emptyset$ et $O \cap A^c \neq \emptyset$. Cela revient à dire que:

$$\forall r > 0 : B(x, r) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset.$$

Points d'accumulation. Si $A \subset E$, on dit que $x \in E$ est un point d'accumulation de A si pour tout $r > 0$ la boule $B_o(x, r)$ contient au moins un point de A autre que x. cela revient à dire que x est dans l'adhérence de $A \setminus \{x\}$. Cela est également équivalent à dire que: pour tout $r > 0$ $B(x, r) \cap A$ contient une infinité de points.

Points isolés. Si $A \subset E$, on dit que $a \in A$ est un point isolé de A si il exite $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \{a\}$, autrement dit si a n'est pas un point d'accumulation de A.
EXEMPLES (dans $\mathbb{R}$)...

4 Produits d'espaces métriques

Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques. On munit le produit cartésien $E_1 \times E_2$ d'une distance δ, qui est l'une des trois distances suivantes, qui sont métriquement équivalentes:

$$\delta_1(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2),$$

ou

$$d(x, y) = \left(d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2\right)^{1/2},$$

ou

$$\delta_\infty(x, y) = \sup\{d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)\ \}.$$

lorsque $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, avec $x_i, y_i \in E_i$. Il s'agt bien d'une distance (vérifier). Il n'y a pas de choix "canonique" de la distance produit (tout comme il n'y a pas de distance canonique sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). En revanche, ces distances sont métriquement équivalentes et induisent la même topologie sur $E_1 \times E_2$ (et il existe bien une unique "topologie" canonique pour le produit, voir le paragraphe suivant). Plus généralement, si $E_1, \cdots E_n$ sont des espaces métriques munis de distances $d_1, \cdots, d_n$, on muni le produit cartésien $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ de l'une des "distances produit" correspondantes comme par exemple

$$\delta_2(x, y) = \Big(\sum_{1 \le i \le n} d_i(x_i, y_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\delta_1(x, y) = \sum_{1 \le i \le n} d_i(x_i, y_i) \text{ ou } \delta_\infty(x, y) = \sup_{1 \le i \le n} d_i(x_i, y_i).$$

Par exemple dans le cas où $E_i = \mathbb{R}$ pour tout i avec $d_i(x, y) = |x - y|$, on retrouve l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne si l'on choisit la distance produit d_2: l'espace $\mathbb{R}^n$ est bien le "produit" des n espaces métriques tous égaux à $\mathbb{R}$.

Le résultat naturel suivant est utile dans la pratique:

Proposition 4.1. *Soit (E, d) l'espace métrique de $(E_1, d_1), \cdots, (E_n d_n)$. Soit x^ν, $\nu \in \mathbb{N}$ une suite de E. Elle converge dans E vers $\ell \in E$ si et seulement si pout tout j, $0 \le j \le n$ la suite x^ν_j, $\nu \in \mathbb{N}$ converge dans E_j vers ℓ_j.*

5 Topologies générales

Soit E un ensemble. On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(E)$ est une "topologie" si les axiomes suivants sont satisfaits par $\mathcal{T}$:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$, $E \in \mathcal{T}$,
2. Si $\forall i \in I$, $Oi \in \mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i \in I} O_i \ \in \ \mathcal{T}$,
3. Si $O_1 \in \mathcal{T}, \cdots O_n \in \mathcal{T}$, alors $\bigcap_{i=1}^{i=n} O_i \ \in \ \mathcal{T}$.

Alors les éléments de $\mathcal{T}$ s'appellent les "ouverts de E" et les "fermés de E" sont les complémentaires des ouverts: $F \subset E$ est dit "fermé" si il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $F = E \setminus O$.

Ainsi un espace métrique est un cas particulier d'espace topologique.

Les définitions qui précèdent se généralisent presque toutes (sauf celles qui nécessitent la notion de distance, comme les suites cauchy, la complétude ...)

6 Limites, continuité dans les espaces métriques

Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques et une application $f : D \to F$, où D est le domaine de définition de f.

Définition 6.1. *Soit $A \subset D$ et $a \in \overline{A}$. On dit que f possède une limite quand x tend vers a et $x \in A$ si il existe $\ell \in F$ tel que:*

$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0$ tel que $x \in B(a,r) \cap A \Rightarrow f(x) \in B(\ell, \varepsilon)$.

(ou $\forall x \in A, d(x,a) < r \Rightarrow d'(f(x), \ell) < \varepsilon$).

Dans ce cas la limite ℓ est unique et on la note

$$\ell = \lim_{x \to a, x \in A} f(x).$$

Noter que f n'a pas besoin d'être définie au point a.

Proposition 6.2. *$\ell = \lim_{x \to a, x \in A} f(x)$ si et seulement si pour toute suite (a_n) de A de limite a, on a $\lim_\infty f(a_n) = \ell$.*

Définition 6.3. *Soit $a \in D$. On dit que f est continue au point a si $\lim_{x \to a, x \in D} f(x) = f(a)$. On dit que f est continue sur D si f est continue en tout point de D.*

Dans la définition 6.3, on a envisagé le cas le plus général ou le domaine de définition D serait différent de l'espace métrique E. Cependant, on pourrait également considérer le sous-espace métrique D (muni de la métrique induite) et s'intéresser à la continuité de f au point a, lorsque l'espace E est remplacé par D. On vérifie aisément que ces deux notions de continuité au point a, coïncident. De sorte qu'il est suffisant de condidérer la continuité de f dans le cas où $D = E$.

Exemples.

1. Si $E = \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$ on retrouve les notions usuelles d'application continue de plusieurs variable de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. cas d'une variable : fonctions polynômiales, fonctions usuelles: $\sin, \cos, \exp$ etc...

2. Si (E, d) est un espace métrique et $a \in E$, l'application $d(a, .)$ est continue sur E. Elle est même lipschitzienne de rapport 1 puisqu'elle vérifie:
$$|d(a,x) - d(y,a)| \leq d(x,y), \quad \forall x, y \in E,$$
d'après l'inégalité triangulaire.

3. Si (E, d) est un espace métrique et si $A \subset E$, l'application $d(., A)$ définie par
$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a), \quad x \in E,$$
est une application continue car Lipschitzienne sur E:
$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \quad \forall x, y \in E.$$

4. Soient $E_1, \cdots E_n$ sont des espaces métriques munis des distances $d_1, \cdots, d_n$, et notons E l'espace produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ muni de l'une des distances produit. Soit $j \in \{1, \cdots, n\}$. Notons p_j l'application de E dans E_j définie par $p_j(x) = x_j$ si $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E$. Alors p_i est continue.

Proposition 6.4. *On suppose $D = E$ et on considère une application f de E dans F. Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *f est continue sur E,*
2. *l'image réciproque de tout ouvert de F, est un ouvert de E,*
3. *l'image réciproque de tout fermé de F, est un fermé de E,*

Attention, il faut distinguer le fait que f, définie sur E, soit continue en tout point d'un ensemble $A \subset E$ (ce qui tient compte du comportement de f "en dehors de A"), et le fait que $f_{|A}$ soit continue (sur A mais pour la distance induite sur A par d) ce qui ne tient compte que du comportement de f "dans A". Par exemple, la fonction $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$ définie sur $\mathbb{R}$, n'est pas continue sur $[0, 1]$. Mais $f_{|[0,1]}$ qui est la fonction constante 1, est continue sur $[0, 1]$.

Exercice 6.5. *1. Montrez que si f est continue en tout point de A, alors $f_{|A}$ est continue (pour la métrique induite).*

2. Montrez que l'ensemble des points $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x^2 < yz + 1$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

3. montrez que f est continue de (E, d) dans (F, d') si et seulement si pour tout $A \subset F$: $adh\big(f^{-1}(A)\big) \subset f^{-1}(\overline{A})$.

Homéomorphismes. Soient E et F deux espaces métriques. On appelle homéomorphisme de E sur F toute bijection continue de E dans F dont la réciproque est continue sur F. On dit alors que E et F sont homéomorphes.

Exemple: $\mathbb{R}$ est homéomorphe à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.

Proposition 6.6. *Soit E et F deux espaces métriques et f, g deux applications continues de E dans F. Si f et g coïncident sur une partie dense de E, alors $f = g$.*

Exercice 6.7. *Soient E et F deux espaces métriques et f, g deux applications continues de E dans F. Montrez l'ensemble $\{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$ est un fermé (de E). En déduire une autre démonstration de la proposition précédente.*

Composition d'applications Considérons des espaces métriques E, F et G (on ne précise pas les distances).

Proposition 6.8. *Considérons des applications $f : E \to F$, $g : F \to G$. On suppose que f est continue au point $a \in E$ et que g est continue au point $f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue au point a.*

Il existe un énoncé analogue avec les limites. par exemple:

Proposition 6.9. *Considérons $a \in E$, $b \in F$ et des applications $f : E \setminus \{a\} \to F$, $g : F \setminus \{b\} \to G$. On suppose que $\forall x \in E \setminus \{a\}$, $f(x) \neq b$. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{y\to b} g(y) = \ell \in F$. Alors $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = \ell$.*

7 Suites de Cauchy, espaces métriques complets

Définition 7.1. *Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n), n \in \mathbb{N}$ une suite de E. On dit que la suite (x_n) est une suite de Cauchy si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad p > N \text{ et } q > N \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

On dit qu'un espace métrique est complet si toute suite de Cauchy est convergente.

1. Munis de la distance usuelle, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet et $\mathbb{R}$ est complet (par construction de $\mathbb{R}$). $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ sont complets (pour la distance usuelle et celles métriquement équivalentes).
2. L'espace $C([0, 1], \mathbb{R})$ est complet pour la norme sup.

Notez bien que la complétude dépend de la métrique choisie, et pas seulement de la topologie. Voir exercice en TD. Autre exemple: $\mathbb{R}$ est complet et $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ n'est pas complet, mais ces deux espaces métriques sont homéomorphes (déja vu).

Exercice 7.2. *1/ Trouvez une métrique d sur $\mathbb{R}$ qui induise la même topologie que la topologie usuelle, mais telle que $(\mathbb{R}, d)$ ne soit pas complet. 2/ Trouvez une métrique d sur $I =]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ qui induise la topologie usuelle, mais pour lequel (I, d) soit complet.*

L'exercice suivant est un résultat pratique qui est juste une reformulation de la notion de suite de Cauchy. Si $A \subset E$ on appelle "diamètre de A" la quantité suivante (qui est infinie si A n'est pas bornée):

$$diam(A) := \sup d_{x,y\in A} d(x, y).$$

Exercice 7.3 ("La propriété des fermés emboités"). *Soit (E,d) un métrique complet et A_n, $n \in \mathbb{N}$ une suite de décroissante (c'est à dire que $A_{n+1} \subset A_n$) de fermés non vides de E telle que diam$(A_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Montrez qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\cap_n A_n = \{x_0\}$.*

Proposition 7.4. *Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$.*

1. *(A,d) complet $\Rightarrow$ A fermé (dans E).*
2. *Si E est complet: A fermé (dans E)$\Leftrightarrow$ (A,d) complet.*

Soit (E,d_1) et (F,d_2) des espaces métriques, on dit qu'une application f de E dans F est bornée si l'ensemble $\{f(x), x \in E\}$ est borné, c'est à dire s'il existe une boule (ouverte pour fixer les idées) $B = B(a,r)$, $r > 0$ telle que $f(x) \in B, \forall x \in E$. Notons $\mathcal{B}(E,F)$ l'ensemble des applications bornées de E dans F. Il existe une distance naturelle sur cet ensemble définie par: $d(f,g) := \sup\{d_2\big(f(x),g(x)\big), x \in E\}$. C'est une distance (vérifier). Le résultat suivant est très utile.

Théorème 7.5. *Soient (E,d_1) et (F,d_2) des espaces métriques. Supposons que (F,d_2) est complet. Alors $\mathcal{B}(E,F)$ muni de sa distance naturelle d est complet.*

Une conséquence est le résultat suivant que l'on utilise fréquemment. On note $C_b(E,F)$ l'espace des applications continues et bornées de E dans F. C'est un sous-espace métrique de $\mathcal{B}(E,F)$ et il est lui aussi muni de la distance d induite.

Théorème 7.6. *Soient (E,d_1) et (F,d_2) des espaces métriques. Supposons que (F,d_2) est complet. Alors $C_b(E,F)$ muni de la distance d est complet.*

(Conséquence: on retrouve le fait que $C([0,1],\mathbb{R})$ est complet puisque $C([0,1],\mathbb{R}) = C_b([0,1],\mathbb{R})$.)

Théorème 7.7. *Soient $(E_1,d_1)\cdots(E_n,d_n)$ des espaces métriques. L'espace métrique produit (E,δ) est complet si et seulement si chacun des espaces $E_1 \cdots E_d$ est complet.*

Enfin une application très utiles de la notion d'espace complet est le théorème suivant, appelé théorème du point fixe de Picard ou de Banach.

Théorème 7.8 (Point fixe). *Soit (E,d) un espace métrique complet et f une application de E dans E. Supposons qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que*

$$\forall x \in E, \forall y \in E: \; d\big(f(x),f(y)\big) \leq k\, d(x,y).$$

Alors il existe un unique point fixe pour f c'est à dire un unique point $x \in E$ tel que $f(x) = x$.

Une application f qui vérifie ces conditions est dite "contractante".

Pour finir ce paragraphe voici un résultat simple mais qui aura de nombreuses conséquences importantes, par exemple dans l'étude des espaces vectoriels normés.

Exercice 7.9 ("Lemme de Baire"). *Soit (E,d) un espace métrique complet. Démontrez les résultats (équivalents) suivants:*

1/ Toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E, est encore dense dans E. C'est à dire: si pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble O_n est un ouvert de E dense dans E, alors $A = \cap_n O_n$ est dense dans E.

2/ Toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est encore d'intérieur vide. C'est à dire: si pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est un fermé de E d'intérieur vide, alors $A = \cup_n F_n$ est encore d'intérieur vide.

8 Compacité

Soit (E,d) un espace métrique et K un sous-ensemble de E. On dit qu'une famille $(O_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de E constitue "un recouvrement de K" si $K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$. C'est un "recouvrement ouvert" (on dit aussi un "recouvrement d'ouverts") si chaque O_i est un ouvert de E. Bien entendu, si $K = E$ et si $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E on a l'égalité $E = \bigcup_{i\in I} O_i$. Dans cette définition l'ensemble des indices I est quelconque. On dit que c'est un "recouvrement fini" si l'ensemble des indices I est fini.

Définition 8.1. *Soit (E, d) un espace métrique.*

1/On dit que (E, d) est compact si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un recouvrement fini. Autrement dit, si pour toute famille $(O_i)_{i\in I}$, d'ouverts de E tels que $E = \bigcup_{i\in I} O_i$, on peut trouver un nombre fini d'indices $i_1, \cdots, i_n$ tels que $E = O_{i_1} \bigcup \cdots \bigcup O_{i_n}$.

2/Soit $K \subset E$ on dit que K est un compact de (E, d) si l'espace métrique induit (K, d) est compact. Autrement dit, si pour toute famille $(O_i)_{i\in I}$, d'ouverts de E tels que $K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$, on peut trouver un nombre fini d'indices $i_1, \cdots, i_n$ tels que $K \subset O_{i_1} \bigcup \cdots \bigcup O_{i_n}$.

Remarques

1/ Cette définition entraîne que si $K \subset A \subset E$ alors: K est un compact de $(A, d) \Leftrightarrow K$ est un compact de (E, d).

2/ Cette définition ne dépend que de la topologie de (E, d).

Queques propriétés immédiates :

Proposition 8.2. *Soit (E, d) un espace métrique et K_n une suite décroissante (c'est à dire $K_{n+1} \subset K_n$) de compacts non vides de E . Alors $\bigcap K_n \neq \emptyset$.*

Proposition 8.3. *1/ Tout compact d'un métrique est fermé et borné (la réciproque est fausse).*

2/ Tout espace métrique compact est complet.

3/ Tout fermé d'un compact est compact.

Suites extraites. Valeurs d'adhérence d'une suite. Soit x_n, $n \in \mathbb{N}$ une suite d'un espace métrique E. On appelle "suite extraite de x_n" une suite y_n de la forme $y_n = x_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifie $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ ($\Leftrightarrow \varphi$ est strictement croissante). Autrement dit les termes de la suite y_n sont "extraits" de la suite x_n : $y_1 = x_{n_1}$, puis $y_2 = x_{n_2}$, etc $\cdots$ avec $n_1 < n_2 < \ldots.$ On dit que ℓ est "une valeur d'adhérence" de la suite x_n si il existe une suite extraite $x_{\varphi(n)}$ qui converge vers ℓ. Cela s'exprime aussi ainsi:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N} : \exists n > N \text{ t.q. } x_n \in B(\ell, \varepsilon),$$

ou encore par : $\forall n \in \mathbb{N} : \ell \in \overline{A_n}$, où $A_n = \{x_p, p \geq n\}$.

Théorème 8.4. *Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si de toute suite de E on peut extraire une sous-suite convergente (ou encore "ssi toute suite possède au moins une valeur d'adhérence").*

Exercice 8.5. *Soit (E, d) un espace métrique compact et x_n une suite de E qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence. Alors x_n est convergente.*

Théorème 8.6. *L'espace métrique produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ de n espaces métriques $E_1, \cdots, E_n$ est compact si et seulement si chaque espace E_i est compact.*

Théorème 8.7 (de Bolzano-Weierstrass). *Les compacts de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{C}^n$) sont les fermés bornés. En particulier, de toute suite bornée de $\mathbb{R}$ on peut extraire une sous-suite convergente.*

Compacité et continuité

Théorème 8.8. *Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques et f continue de E dans F. Si E est compact, $f(E)$ est compact.*

On en déduit le corollaire suivant:

Corollaire 8.9. *Soit f une application continue d'un espace métrique compact K dans $\mathbb{R}$. Alors f est bornée et atteint ses bornes, c'est à dire qu'il existe $x \in K$ tel que $f(x) = \sup_K f$ et il existe $y \in K$ tel que $f(y) = \inf_k f$.*

Définition 8.10. *Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques et f une application de E dans F. On dit que f est uniformément continue sur E si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ t.q. : \ (\forall x, y \in E) \ \ d(x, y) < \eta \Rightarrow d'\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon \quad .$$

Théorème 8.11 (Heine). *Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques et f continue de E dans F. Si E est compact, f est uniformément continue sur E*