4 — Inégalité des accroissements finis

1 Le résultat principal

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application.

Si $a, b \in E$ on note $]a, b[= \{(1-t)a + tb,\ t \in]0,1[\}$ et $[a, b] = \{(1-t)a + tb,\ t \in [0,1]\}$, appelés "segment ouvert" et "segment fermé".

Théorème 1.1. *Soit $f : \Omega \to F$ différentiable, $a, b \in \Omega$ tels que $[a, b] \subset \Omega$. Alors*

$$\|f(a) - f(b)\|_F \ \leq\ \|a - b\|_E \sup_{x \in]a,b[} \|\mathrm{D}F(x)\|_{\mathcal{L}}\ .$$

Attention l'inegalité précédente est fausse en général si le segment $[a, b]$ n'est pas entièrement contenu dans Ω.

Corollaire 1.2. *Si Ω est un convexe et si il existe un réel M tel que $\|\mathrm{D}f(x)\|_{\mathcal{L}} \leq M, (\forall x \in \Omega)$, alors:*

$$\|f(a) - f(b)\|_F \ \leq\ M\ \|a - b\|_E, \quad \forall a, b \in \Omega.$$

Le corollaire ci-dessus s'applique typiquement quand Ω est un boule ouverte.

Corollaire 1.3. *Si Ω est* **connexe** *et si $Df(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$, alors f est une fonction constante sur Ω.*

Pour démontrer le théorème 1.1, on commence par établir la version suivante :

Théorème 1.4. *Soit $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \to F$ continue sur $[\alpha, \beta]$ et dérivable sur $]\alpha, \beta[$. Alors*

$$\|\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)\|_F \leq\ \|\alpha - \beta\| \sup_{t \in]\alpha,\beta[} \|\varphi'(t)\|\ .$$

2 Applications

Théorème 2.1. *Soit Ω un ouvert de E, $x_0 \in \Omega$. On suppose que $f : \Omega \to F$ est une application continue, différentiable sur $\Omega \setminus \{x_0\}$ et on suppose aussi que la limite de $\mathrm{D}f(x)$ existe dans l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ lorsque $x \to x_0$ et $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$ et on note L cette limite. Alors f est différentiable en x_0 et $\mathrm{D}f(x_0) = L$.*

Théorème 2.2. *Soit Ω un ouvert de $(E, \|.\|)$, et $f_n : \Omega \to F$, $n \in \mathbb{N}$ une suite d'application différentiables sur Ω. On suppose que la suite f_n converge simplement sur Ω vers f et que la suite $\mathrm{D}f_n$ converge uniformément sur Ω vers g. Alors:*
1) f est différentiable sur Ω et $\mathrm{D}f = g$.
2) Si les fonctions $f_n \in C^1(\Omega)$ alors $f \in C^1(\Omega)$.

Dans le cas spécial des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on a l'énoncé analogue mais où l'on peut simplement utiliser les dérivées, au lieu des différentielles:

Théorème 2.2.-bis *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, et $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) , $n \in \mathbb{N}$ une suite d'application dérivables sur Ω. On suppose que la suite f_n converge simplement sur Ω vers f et que la suite des dérivées f_n' converge uniformément sur Ω vers g. Alors: f est dérivable sur Ω et $f' = g$.*

Le théorème 2.2 (ou 2.2-bis) s'applique souvent à des séries de fonctions, en prenant $f_n = \sum_0^n u_k$. Il se reformule de la manière suivante, dans le cas des séries de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$:

Corollaire 2.3. *Soit $u_k : \Omega \to F$, $n \in \mathbb{N}$ une suite d'application dérivables de Ω (ouvert de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{C}$. On suppose que la série $\sum_0^\infty u_k$ converge simplement sur Ω vers f et que la série $\sum_0^\infty u_k'$ converge uniformément sur Ω vers g. Alors f est dérivable sur Ω et $f' = g$.*

Exemple 2.1. *a/La fonction* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx+1)}{1+n^3}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$. *(On peut appliquer le théorème 2.2 ou bien le corollaire 2.3 avec* $\Omega = \mathbb{R}$.*)*

b/ Même chose pour la fonction $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx^2+1)}{1+n^3}$. *(Cette fois le théorème s'applique sur n'importe quel ouvert* **borné** *de* $\mathbb{R}$.*)*

L'espace $C_b^1(\Omega, \mathbb{R})$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $C_b^1(\Omega, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1, qui sont bornées sur Ω et dont les dérivés partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sont aussi bornées sur Ω. On définit alors la norme suivante sur $C_b^1(\Omega, \mathbb{R})$ que l'appelle la norme naturelle de $C_b^1(\Omega, \mathbb{R})$:

$$\|f\|_{C_b^1} = \sup_{\Omega} |f| + \sup_{\Omega} |\frac{\partial f}{\partial x_1}| + \cdots + \sup_{\Omega} |\frac{\partial f}{\partial x_n}| = \|f\|_\infty + \sum_j \|\frac{\partial f}{\partial x_j}\|_\infty \ .$$

Théorème 2.4. *L'espace* $C_b^1(\Omega, \mathbb{R})$*, muni de sa norme* $\|.\|_{C_b^1}$ *est complet.*

La démonstration du théorème 2.4 est une application du théorème 2.3.

Théorème 2.5. (Dérivation d'une fonction définie par une intégrale) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*,* $[a, b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : \Omega \times [a, b] \to \mathbb{R}$. *On suppose que* f *est continue sur* $\Omega \times [a, b]$ *et que pour tout* $j \in \{1, \cdots, n\}$ *les fonctions* $\frac{\partial f}{\partial x_j}(., .)$ *existent et sont continues sur* $\Omega \times [a, b]$. *Alors la fonction*

$$\varphi(x) = \int_a^b f(x, t)dt, \quad x \in \Omega$$

est de classe C^1 *sur* Ω *et*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, t)dt, \quad x \in \Omega.$$

Corollaire 2.6. *Si* I *est un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et si* $f \in C^1(\Omega \times I, \mathbb{R})$*, alors pour tout* $a, b \in I$ *(avec* $a < b$*) les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites pour la fonction* f*, sur le domaine* $\Omega \times [a, b]$.

Notez tout de même que dans le théorème on n'a pas besoin que f soit différentiable par rapport à t, comme c'est le cas dans le corollaire .

Notez aussi que, pour tout $x \in \Omega$ fixé, $\varphi(x)$ est définie comme l'intégrale sur $[a, b]$ d'une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, ce qui a bien un sens (intégrale de Riemann d'une fonction continue).

3 Le cas spécial des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On rappelle le théorème dit de "l'égalité des accroissements finis" qui ne s'applique qu'aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 3.1 (Rolle)**.** *Soit* $[a, b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une application. On suppose que* f *est continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$*, alors il existe* $c \in]a, b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a).$$

Exercice 3.2. *Soit* f *dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. *Montrez que* $\lim_{+\infty} f'(x) = 0$.

Exercice 3.3. *Montrez en donnant un exemple que l'égalité du théorème de Rolle n'est plus vraie en général pour une fonction* C^1 *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^2$. *Donnez une interprétation géométrique (ou cinématique) de ce fait (prendre par exemple la fontion* $t \mapsto e^{it}$*).*