

Analyse fonctionnelle

Master de mathématiques, 1ere année, université d'Aix-Marseille

Notes de cours et travaux dirigés, Automne 2021

Thierry Gallouët

Version du 6 février 2023

Ces notes de cours sont présentées en chapitres. Le premier chapitre (noté C0) contient un résumé des principales notions des 13 premiers cours, importantes pour la suite. Chacun des 13 chapitres suivants correspond à un cours/td d'une durée de 3 heures.

C0. Résumé partiel des 12 premières séances

0.1 Espaces métriques

Définition 0.1 (Espace métrique). Soient E un ensemble de d une application de $E \times E$ dans \mathbb{R}_+ . L'application d est une distance si d sépare les points ($x \neq y$ implique $d(x, y) > 0$), d est symétrique ($d(x, y) = d(y, x)$) et d vérifie l'inégalité triangulaire ($d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$).
Un espace métrique est un ensemble muni d'une distance.

Si E est un espace métrique, l'application distance (de $E \times E$ dans \mathbb{R}_+) permet de définir une topologie sur E (voir le cours de topologie de Licence).

On rappelle maintenant quelques notions importantes dans les espaces métriques.

Définition 0.2 (Complet, compact, séparable, continuité). Soient E espace métrique.

- 1) L'espace E est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente (dans E)
- 2) L'espace E est compact si de toute suite de Cauchy dans E on peut extraire une sous suite convergente (dans E). (Cette propriété est équivalente à la propriété de Borel-Lebesgue, non rappelée ici.)
- 3) L'ensemble E est fini si il contient un nombre fini d'éléments. L'ensemble E est dénombrable si il existe une injection de E dans \mathbb{N} . (Avec cette définition, un ensemble fini est donc dénombrable.)
- 4) L'ensemble E est séparable si il existe $A \subset E$, A dénombrable et dense dans E .
- 5) Soit F un espace métrique et f une application de E dans F . L'application f est continue si $x_n \rightarrow x$ (dans E), quand $n \rightarrow +\infty$, implique $f(x_n) \rightarrow f(x)$ (dans F). (Cette propriété est équivalente à dire que l'image réciproque d'un ouvert de F est un ouvert de E . Cette équivalence peut être fautive dans le cas d'espaces topologiques non métrisables.)

Un exemple important d'espace métrique est un espace vectoriel normé, souvent noté e.v.n..

Définition 0.3 (Espace vectoriel normé (e.v.n.)). Soit E un ensemble.

- 1) L'ensemble E est un espace vectoriel réel si E est muni de deux lois, une loi interne et une loi externe vérifiant les propriétés suivantes :
 - (a) La loi interne, de $E \times E$ dans E , notée "+", donne à E une structure de groupe commutatif, c'est-à-dire que cette loi est associative ($(x + y) + z = x + (y + z)$), qu'il existe un élément neutre, noté 0 (et donc $x + 0 = 0 + x = x$), que chaque élément de E admet un élément symétrique (on note $-x$ l'élément symétrique de x et donc $x + (-x) = 0$) et enfin que cette loi est commutative ($x + y = y + x$).
 - (b) La loi externe, de $\mathbb{R} \times E$ dans E , notée $(a, x) \mapsto ax$, doit être distributive ($a(x + y) = ax + ay$ et $(a + b)x = ax + bx$), associative (au sens $(ab)x = a(bx)$) et 1 est un élément neutre (donc $1x = x$).

2) L'ensemble E est un espace vectoriel complexe si E vérifie les mêmes propriétés que (1) avec \mathbb{C} au lieu de \mathbb{R} .

3) L'espace E est un espace vectoriel normé (réel ou complexe) si il existe une application $x \mapsto \|x\|$ de E dans \mathbb{R}_+ telle que

(a) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,

(b) $\|ax\| = |a|\|x\|$,

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un espace vectoriel normé (réel ou complexe) est un espace métrique, la distance dans l'ensemble E est définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.

Définition 0.4 (base et dimension). Soit E un espace vectoriel (réel ou complexe). On appelle "base de E " une famille libre et génératrice. La dimension de E est le nombre d'éléments d'une base de E (ce nombre est indépendant de la base choisie).

Notation : On notera sous espace vectoriel (s.e.v. en abrégé) de E un espace vectoriel inclus dans l'espace vectoriel E .

Théorème 0.1 (Dimension et compacité de la boule unité, théorème dû à F. Riesz). Soit E un espace vectoriel normé (réel ou complexe). La boule unité fermée de E est compacte si et seulement si l'espace vectoriel E est de dimension finie.

Noter aussi qu'un e.v.n. de dimension finie est toujours complet.

Soient X un espace métrique compact et E un espace métrique complet (un exemple intéressant est $X = [0, 1]$ et $E = \mathbb{R}$). On note indifféremment d la distance dans X et la distance dans E . On note $C(X, E)$ l'ensemble des applications continues de X dans E . Grâce à la compacité de X , on peut définir une distance dans $C(X, E)$ (encore notée d) en posant, pour $f, g \in C(X, E)$,

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)). \tag{1}$$

(Noter que la compacité de X permet de montrer que ce "sup" est atteint, on dit alors que c'est un "max".) Avec cette distance $C(X, E)$ est un espace métrique complet (il est intéressant, à titre d'exercice, de démontrer cette propriété). Noter que, pour cette distance, la convergence d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $C(X, E)$ vers un élément f de $C(X, E)$ est ce que l'on appelle la convergence uniforme.

Il est intéressant pour la suite du cours de caractériser les parties compactes (ou relativement compactes, c'est-à-dire incluses dans un compact) de cet espace métrique. Ceci est donné par le théorème d'Ascoli.

Théorème 0.2 (Théorème d'Ascoli). Soient X un espace métrique compact et E un espace métrique complet. On munit $C(X, E)$ de la distance définie par (1). Soit $A \subset C(X, E)$. La partie A est relativement compacte dans $C(X, E)$ si et seulement si :

1) Pour tout $x \in X$, $\{f(x), f \in A\}$ est relativement compact dans E ,

2) pour tout $x \in X$, L'ensemble A est "équicontinu" au point x , c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$(d(x, y) \leq \delta, f \in A) \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

(On a noté indifféremment d la distance dans X et dans E .)

La partie importante du théorème est que (1)-(2) implique la relative compacité de A .

En fait, grâce à la compacité de X , on aurait pu remplacer dans le théorème 0.2 l'assertion (1) par " $\{f(x), f \in A, x \in X\}$ est relativement compact dans E " et dans (2) demander que δ soit indépendant de x dans X (et non seulement de f dans A), c'est-à-dire demander une uniforme équicontinuité des éléments de A .

0.2 Espaces de Banach

Dans toute la suite on considèrera que les e.v.n. considérés ne sont pas réduits à $\{0\}$.

Définition 0.5. On appelle espace de Banach un e.v.n. complet.

On dit qu'il s'agit d'un espace de Banach réel (resp. complexe) s'il s'agit d'un espace vectoriel réel (resp. complexe).

Voici 3 exemples d'espaces de Banach réel :

1) $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ tel que } \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < +\infty\}$ avec la norme $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

2) $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ tel que } \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$ avec la norme $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

L'espace $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est s.e.v. fermé de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3) $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, m)$ où (X, \mathcal{T}, m) est un espace mesuré et $1 \leq p \leq +\infty$. (Voir le cours d'intégration.)

Les 3 exemples précédents donnent des exemples d'espaces de Banach complexes en remplaçant l'espace d'arrivée (qui est \mathbb{R}) par \mathbb{C} .

Proposition 0.1 (Caractérisation de la continuité). Soient E, F deux e.v.n. et T une application de E dans F . L'application f est continue si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $u \in E$, $\|T(u)\|_F \leq C\|u\|_E$.

Définition 0.6. Soient E, F deux e.v.n..

1) On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F . Pour tout $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on pose $\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup\{\|T(u)\|_F, u \in E, \|u\|_E = 1\}$.

2) En particulier si E est un espace vectoriel réel (resp. complexe), on note E' l'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$). Noter que si $T \in E'$,

$$\|T\|_{E'} = \sup\{|T(u)|, u \in E, \|u\|_E = 1\} = \sup\left\{\frac{|T(u)|}{\|u\|_E}, u \in E, u \neq 0\right\}.$$

Noter que si E, F sont deux e.v.n. et T une application de E dans F , on a pour tout $u \in E$,

$$\|T(u)\|_F \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \|u\|_E.$$

Si E est e.v.n. réel (resp. complexe), on note aussi E^* l'ensemble des applications linéaires de E dans \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}). Si E est de dimension finie, $E' = E^*$, mais si E est de dimension infinie l'espace E^* est strictement plus gros que E' .

L'espace E' est l'espace dual de l'espace E (on dit aussi "dual topologique" si l'on veut préciser). L'espace E^* est l'espace dual algébrique de l'espace E .

Noter que la notation française pour E' et E^* est inverse dans d'autres pays.

Théorème 0.3 (Espace dual). Soit E est e.v.n. réel (resp. complexe). L'espace E' est un espace de Banach réel (resp. complexe).

On donne maintenant plusieurs théorèmes importants d'analyse fonctionnelle.

Théorème 0.4 (Hahn-Banach).

Soient E un e.v. réel et p une application de E dans \mathbb{R} telle que

1) $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$, pour tout $u, v \in E$,

2) $p(\lambda u) = \lambda p(u)$, pour tout $u \in E$ et $\lambda > 0$.

Soient F un s.e.v. de E et f une application linéaire de F dans \mathbb{R} telle $f(u) \leq p(u)$ pour tout $u \in F$. Alors f se prolonge en une application linéaire de E dans \mathbb{R} , encore notée f , telle que $f(u) \leq p(u)$ pour tout $u \in E$.

Le théorème de Hahn-Banach se démontre à partir du lemme de Zorn (exercice 1.8). On donne maintenant deux conséquences du théorème de Hahn-Banach appelées “Hahn-Banach analytique” et “Hahn-Banach géométrique”.

Théorème 0.5 (Hahn-Banach analytique, prolongement d’une forme linéaire continue). Soient E un e.v.n. réel, F un s.e.v. de E non réduit à $\{0\}$ et f une application linéaire continue de F dans \mathbb{R} (c’est-à-dire $f \in F'$). Alors, il existe $g \in E'$ telle que $f = g$ sur F et $\|g\|_{E'} = \|f\|_{F'}$.

L’exercice 1.1 donne plusieurs conséquences du théorème de Hahn-Banach analytique :

1) Soient E un e.v.n. réel, F un s.e.v. de E et $u \in E$. Alors, $u \in \bar{F}$ si et seulement si

$$T \in E', T(v) = 0 \text{ pour tout } v \in F \Rightarrow T(u) = 0.$$

En particulier ceci montre que F est dense dans E si et seulement si tout élément de E' nul sur F est nul sur tout E .

2) Soient E un e.v.n. et $u \in E$, $u \neq 0$. Il existe $T \in E'$ tel que $T(u) = \|u\|_E$ et $\|u\|_{E'} = 1$.

Définition 0.7 (Partie convexe). Soit E un e.v. réel ou complexe. Soit $C \subset E$. On dit que C est convexe si :

$$u, v \in C, t \in [0, 1] \Rightarrow tu + (1 - t)v \in C.$$

Théorème 0.6 (Hahn-Banach géométrique, séparation de convexes disjoints). Soient E un e.v.n réel et A, B deux parties de E , convexes, non vides et disjointes. On suppose que A est fermée et que B est compacte. Alors il existe $f \in E'$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $u \in A$ et $v \in B$,

$$f(u) + \varepsilon \leq \alpha \leq f(v) - \varepsilon$$

Une démonstration du théorème 0.6 est détaillée dans les exercices 1.4 et 1.5 dans le cas où B est réduit à un point.

Nous donnons maintenant le théorème de Baire et quelques conséquences.

Théorème 0.7 (Baire). Soient E un espace métrique complet et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fermé de E . On pose $F = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est d’intérieur vide, alors F est d’intérieur vide.

Théorème 0.8 (Banach-Steinhaus. “faiblement borné” implique “fortement borné”). Soient E, F deux espaces de Banach et $(T_i)_{i \in I}$ une famille d’éléments de $\mathcal{L}(E, F)$. On suppose que, pour tout $u \in E$,

$$\sup_{i \in I} \|T_i(u)\|_F < +\infty.$$

Alors $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E, F)} < +\infty$.

Remarque 0.1.

Soient E un espace de Banach réel et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E' . On suppose que, pour tout $u \in E$, la suite $(T_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ converge (dans \mathbb{R}). Le théorème 0.8 donne alors $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{E'} < +\infty$.

La question importante est plutôt la réciproque de ce résultat : On suppose que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{E'} < +\infty$, peut-on en déduire qu'il existe une sous suite de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, encore notée $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que, pour tout $u \in E$, la suite $(T_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ converge (dans \mathbb{R})? Nous verrons dans la suite du cours (théorème 4.1) que la réponse est "oui" si E est séparable.

Théorème 0.9 (Banach). *Soient E, F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que T est bijectif (de E dans F). Alors $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.*

Dans le théorème 0.9, T^{-1} désigne l'opérateur réciproque de T (qui existe car T est bijectif et il est, bien sûr, linéaire de F dans E). La conclusion importante du théorème est que T^{-1} est continu.

Théorème 0.10 (Graphe fermé). *Soient E, F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E dans F . On pose $G(T) = \{(u, T(u)), u \in E\}$ (c'est donc une partie de $E \times F$). Alors, T est continue si et seulement si $G(T)$ est fermé.*

(On rappelle que l'espace $E \times F$ est muni de la norme $\|(u, v)\|_{E \times F} = \|u\|_E + \|v\|_F$ (ou d'une norme équivalente). L'espace $E \times F$ est aussi un espace de Banach.)

0.3 Espaces de Hilbert

Définition 0.8 (Produit scalaire). *Soit H un espace vectoriel réel (resp. complexe). On appelle produit scalaire sur H une application de $H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{C}), notée $(\cdot | \cdot)$ ou $(\cdot | \cdot)_H$ t.q.*

- 1) $(u | u) \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $u \in H \setminus \{0\}$,
- 2) $(u | v) = (v | u)$ (resp. $\overline{(v | u)}$) pour tout $u, v \in H$,
- 3) $u \mapsto (u | v)$ est une application linéaire de H dans \mathbb{R} , pour tout $v \in H$.

Proposition 0.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit H un espace vectoriel, réel ou complexe, muni d'un produit scalaire. Pour tout $u, v \in H$,*

$$|(u | v)|^2 \leq (u | u)(v | v). \quad (2)$$

De plus, $|(u | v)|^2 = (u | u)(v | v)$ si et seulement si u et v sont colinéaires.

Proposition 0.3 (Norme induite par un produit scalaire). *Soit H un espace vectoriel, réel ou complexe, muni d'un produit scalaire. Pour tout $u \in H$, on pose $\|u\|_H = \sqrt{(u | u)}$. Alors, $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H . On l'appelle norme induite par le produit scalaire.*

Définition 0.9 (Espace de Hilbert). *Un espace de Hilbert un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.*

L'exemple fondamental d'espace de Hilbert réel (resp. complexe) est l'espace $L_{\mathbb{R}}^2(X, \mathcal{T}, m)$ (resp. l'espace $L_{\mathbb{C}}^2(X, \mathcal{T}, m)$) où (X, \mathcal{T}, m) est un espace mesuré. Le produit scalaire est l'application $(f, g) \mapsto \int f \bar{g} dm$ (resp. $\int f \bar{g} dm$). (Voir le cours d'intégration.)

Proposition 0.4 (Identité du parallélogramme). *Soit H un espace de Banach (réel ou complexe). Alors, H est un espace de Hilbert (c'est-à-dire que la norme est induite par un produit scalaire) si et seulement si, pour tout $u, v \in H$, on a*

$$\|u + v\|_H^2 + \|u - v\|_H^2 = 2\|u\|_H^2 + 2\|v\|_H^2. \quad (3)$$

Cette identité s'appelle identité du parallélogramme.

Nous donnons maintenant la notion fondamentale d'orthogonalité dans un espace de Hilbert. Cette notion est liée au produit scalaire. Elle permettra en particulier de construire une isométrie entre un espace de Hilbert et son dual (théorème 0.14).

Définition 0.10 (Orthogonal). *Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe).*

- 1) *Soit $u, v \in H$. On dit que u et v sont orthogonaux (et on note $u \perp v$) si $(u | v) = 0$.*
- 2) *Soit $A \subset H$. On appelle orthogonal de A l'ensemble $A^\perp = \{u \in H ; (u | v) = 0 \text{ pour tout } v \in A\}$.*

Proposition 0.5 (Propriétés de l'orthogonal). *Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $A \subset H$. Alors :*

- 1) *A^\perp est un s.e.v. fermé de H ,*
- 2) *$A^\perp = \overline{A}^\perp$,*
- 3) *$A \subset (A^\perp)^\perp$ (que l'on note aussi $A^{\perp\perp}$).*

Théorème 0.11 (Pythagore). *Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $u_1, \dots, u_n \in H$ tels que $(u_i | u_j) = 0$ si $i \neq j$. Alors :*

$$\left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\|_H^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|_H^2.$$

Théorème 0.12 (Projection sur un convexe fermé non vide).

Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $C \subset H$ une partie convexe fermée non vide. Soit $u \in H$. Alors, il existe un et un seul $u_0 \in C$ t.q. $d(u, u_0) = d(u, C) = \inf_{v \in C} d(u, v)$ (avec $d(u, v) = \|u - v\|_H$). On note $u_0 = P_C(u)$. P_C est donc une application de H dans H (dont l'image est égale à C). On écrit souvent $P_C u$ au lieu de $P_C(u)$.

Proposition 0.6 (Première caractérisation de la projection).

Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $C \subset H$ une partie convexe fermée non vide. Soient $u \in H$ et $u_0 \in C$.

- 1) *On suppose que H est un Hilbert réel. Alors :*

$$u_0 = P_C u \Leftrightarrow (u - u_0 | u_0 - v) \geq 0, \text{ pour tout } v \in C. \quad (4)$$

- 2) *On suppose que H est un Hilbert complexe. Alors :*

$$u_0 = P_C u \Leftrightarrow \Re(u - u_0 | u_0 - v) \geq 0, \text{ pour tout } v \in C. \quad (5)$$

Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe), $C \subset H$ une partie convexe fermée non vide et $u, v \in H$. Une conséquence de la proposition 0.6 est que $\|P_C u - P_C v\|_H \leq \|u - v\|_H$.

Proposition 0.7 (Deuxième caractérisation de la projection).

Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et F un s.e.v. fermé de H . Soient $u \in H$ et $u_0 \in F$. Alors :

$$u_0 = P_F u \Leftrightarrow (u - u_0) \in F^\perp. \quad (6)$$

Théorème 0.13 (Projecteur orthogonal).

Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et F un s.e.v. fermé de H . Alors :

- 1) $H = F \oplus F^\perp$,
- 2) pour tout $u \in H$, $u = P_F u + P_{F^\perp} u$.
- 3) $F = F^{\perp\perp}$.

Le théorème 0.13 a un corollaire très utile :

Corollaire 0.1. Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et F un s.e.v. de H . Alors :

$$\overline{F} = H \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}.$$

Remarque 0.2. Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Pour $v \in H$, on pose $\varphi_v(u) = (u | v)$ pour tout $u \in H$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (inégalité (2)), on a $|\varphi_v(u)| \leq \|u\|_H \|v\|_H$. On a donc $\varphi_v \in H'$ et $\|\varphi_v\|_{H'} \leq \|v\|_H$. En remarquant que $\varphi_v(v) = \|v\|_H^2$, on montre alors que $\|\varphi_v\|_{H'} = \|v\|_H$. On considère maintenant l'application $\varphi : H \rightarrow H'$ définie par $\varphi(v) = \varphi_v$ pour tout $v \in H$.

- Si H est un espace de Hilbert réel, φ est une application linéaire de H dans H' car, pour tout $v, w \in H$ tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $u \in H$,

$$\varphi_{\alpha v + \beta w}(u) = (u | \alpha v + \beta w) = \alpha(u | v) + \beta(u | w) = \alpha\varphi_v(u) + \beta\varphi_w(u),$$

Ceci donne $\varphi_{\alpha v + \beta w} = \alpha\varphi_v + \beta\varphi_w$. L'application φ est donc une isométrie (linéaire) entre H et $\text{Im}(\varphi) \subset H'$. (En particulier φ est donc injective.)

- Si H est un espace de Hilbert complexe, φ est une application anti-linéaire de H dans H' car, pour tout $v, w \in H$ tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $u \in H$

$$\varphi_{\alpha v + \beta w}(u) = (u | \alpha v + \beta w) = \overline{\alpha}(u | v) + \overline{\beta}(u | w) = \overline{\alpha}\varphi_v(u) + \overline{\beta}\varphi_w(u),$$

ceci donne $\varphi_{\alpha v + \beta w} = \overline{\alpha}\varphi_v + \overline{\beta}\varphi_w$. L'application φ est donc une isométrie (anti-linéaire) entre H et $\text{Im}(\varphi) \subset H'$. (En particulier φ est donc, ici aussi, injective.)

Le théorème de représentation de Riesz (théorème 0.14) montre que l'application φ est surjective de H dans H' , c'est-à-dire que $\text{Im}(\varphi) = H'$.

Théorème 0.14 (Représentation de Riesz).

Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Soit $T \in H'$. Alors, il existe un et un seul élément de H , noté v , tel que

$$T(u) = (u | v), \text{ pour tout } u \in H. \quad (7)$$

L'application φ définie dans la remarque 0.2 est donc surjective (le résultat ci-dessus donne $T = \varphi_v$).

Remarque 0.3 (Structure hilbertienne de H'). Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). On sait déjà que H' est un espace de Banach. Le théorème 0.14 permet aussi de montrer que H' est un espace de Hilbert. En effet, en prenant les notations de la remarque 0.2, l'application φ est un isométrie bijective, linéaire ou anti-linéaire entre H et H' . Cela suffit pour montrer que l'identité du parallélogramme est vraie sur H' et donc que H' est une espace de Hilbert. Mais on peut même construire le produit scalaire sur H' (induisant la norme usuelle de H') :

Soient $T_1, T_2 \in H'$. Par le théorème 0.14, il existe v_1 et $v_2 \in H$ tels que $T_1 = \varphi_{v_1}$ et $T_2 = \varphi_{v_2}$. On pose $(T_1 | T_2)_{H'} = (v_2 | v_1)_H$ (où $(\cdot | \cdot)_H$ désigne ici le produit scalaire dans H). Il est facile de voir que $(\cdot | \cdot)_{H'}$ est un produit scalaire sur H' . Il induit bien la norme usuelle de H' car $(T_1 | T_1)_{H'} = (v_1 | v_1)_H = \|v_1\|_H^2 = \|\varphi_{v_1}\|_{H'}^2 = \|T_1\|_{H'}^2$ car φ est une isométrie.

On donne maintenant la définition de base hilbertienne dans le cas d'un espace de Hilbert.

Définition 0.11 (Base hilbertienne). Soient H un espace de Hilbert et $B = \{e_i, i \in I\} \subset H$ une famille d'éléments de H (l'ensemble I est quelconque). La famille B est une base hilbertienne de H si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$1) (e_i | e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \text{ pour tout } i, j \in I.$$

$$2) \overline{\text{vect}\{e_i, i \in I\}} = H.$$

On rappelle que $\text{vect}\{e_i, i \in I\} = \{\sum_{i \in J} \alpha_i e_i, J \subset I, \text{card}(J) < +\infty, (\alpha_i)_{i \in J} \subset K\}$ ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , selon que l'espace est réel ou complexe).

Remarque 0.4. Soit H un espace de Hilbert.

- 1) Si H est de dimension finie, il existe des bases hilbertiennes (qui sont alors aussi des bases algébriques). Le cardinal d'une base hilbertienne est alors égal à la dimension de H puisque, par définition, la dimension de H est égal au cardinal d'une base algébrique (ce cardinal ne dépendant pas de la base choisie).
- 2) Si H est de dimension infinie et que H est séparable, il existe des bases hilbertiennes dénombrables (voir la proposition 0.8).
- 3) Si H est de dimension infinie et que H est non séparable, il existe toujours des bases hilbertiennes (ceci se démontre avec l'axiome du choix), mais elles ne sont plus dénombrables.

Proposition 0.8 (Existence d'une base hilbertienne). Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. On suppose que H est séparable. Alors, il existe une base hilbertienne $B = \{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ de H .

La proposition 0.8 montre donc que tout espace de Hilbert séparable et de dimension infinie admet une base hilbertienne dénombrable. On peut aussi démontrer la réciproque de ce résultat. Tout espace de Hilbert admettant une base hilbertienne dénombrable est séparable.

La proposition suivante s'adresse donc uniquement aux espaces de Hilbert séparables.

Proposition 0.9. Soient H un espace de Hilbert et $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H (l'espace H est donc séparable et de dimension infinie et, dans ce cas, une telle base existe d'après la proposition 0.8). Alors :

$$1) (\text{Identité de Bessel}) \|u\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |(u | e_n)|^2, \text{ pour tout } u \in H,$$

$$2) u = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u | e_n) e_n, \text{ pour tout } u \in H, \text{ c'est-à-dire } \sum_{i=0}^n (u | e_i) e_i \rightarrow u \text{ dans } H, \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

$$3) \text{soient } u \in H \text{ et } (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K \text{ (} K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \text{ selon que le Hilbert est réel ou complexe) t.q. } u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n e_n \text{ (c'est-à-dire } \sum_{i=0}^n \alpha_i e_i \rightarrow u \text{ dans } H \text{ quand } n \rightarrow +\infty), \text{ alors } \alpha_i = (u | e_i) \text{ pour tout } i \in \mathbb{N},$$

4) (*identité de Parseval*) $(u | v) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u | e_n) \overline{(v | e_n)}$, pour tout $u, v \in H$.

Remarque 0.5. Soit H un espace de Hilbert séparable et de dimension infinie.

1) Soit $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H et soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijective. On pose $\tilde{e}_n = e_{\varphi(n)}$. Comme $\{e_n, n \in \mathbb{N}\} = \{\tilde{e}_n, n \in \mathbb{N}\}$, la famille $\{\tilde{e}_n, n \in \mathbb{N}\}$ est donc aussi une base hilbertienne de H . On peut donc appliquer la proposition 0.9 avec la famille $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ ou avec la famille $\{\tilde{e}_n, n \in \mathbb{N}\}$. Le deuxième item de la proposition 0.9 donne alors, pour tout $u \in H$,

$$u = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u | e_n) e_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u | e_{\varphi(n)}) e_{\varphi(n)}.$$

Ceci montre que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u | e_n) e_n$ est commutativement convergente, c'est-à-dire qu'elle est convergente, dans H , quel que soit l'ordre dans lequel on prend les termes de la série et la somme de la série ne dépend pas de l'ordre dans lequel les termes ont été pris. Noter pourtant que cette série peut ne pas être absolument convergente. On peut remarquer, pour donner un exemple, que la suite $(\sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} e_i)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ est de Cauchy, donc converge, dans H , quand $n \rightarrow +\infty$, vers un certain u . Pour cet élément u de H , on a $(u | e_i) = \frac{1}{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u | e_n) e_n$ est donc commutativement convergente mais n'est pas absolument convergente car $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|(u | e_n) e_n\| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1} = +\infty$. En détaillant cet exemple, on peut construire une isométrie bijective naturelle entre H et $\ell^2(\mathbb{N})$.

Par contre, on rappelle que, dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , une série est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente. On peut d'ailleurs remarquer que la série donnée à l'item 4 de la proposition 0.9 est commutativement convergente (pour la même raison que pour la série de l'item 2, donnée ci-dessus) et est aussi absolument convergente. En effet, pour $u, v \in H$, on a $|(u | e_i)(v | e_i)| \leq |(u | e_i)|^2 + |(v | e_i)|^2$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, ceci montre bien (grâce à l'identité de Bessel) que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u | e_n) \overline{(v | e_n)}$ est absolument convergente.

On conclut avec une caractérisation des bases hilbertiennes.

Proposition 0.10 (Caractérisation des bases hilbertiennes). *Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe. Soit $\{e_i, i \in I\} \subset H$ t.q. $(e_i | e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $i, j \in I$. Alors, $\{e_i, i \in I\}$ est une base hilbertienne si et seulement si :*

$$u \in H, (u | e_i) = 0 \text{ pour tout } i \in I \Rightarrow u = 0.$$

C1. Convergence faible et faible-étoile

On rappelle que si E est un espace de Banach, on note E' son dual (topologique), c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires continues de E dans \mathbb{R} , si le Banach est réel, ou \mathbb{C} si le Banach est complexe. (Ne pas confondre avec E^* qui est le dual algébrique, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires de E dans \mathbb{R} , si le Banach est réel, ou \mathbb{C} si le Banach est complexe. Si E est dimension infinie, l'espace E' est strictement inclus dans E^* . Nous utilisons ici les notions habituelles en France.

Soit E un espace de Banach et E' son dual. Pour $T \in E'$ on pose $\|T\|_{E'} = \sup\{|T(u)|, u \in E, \|u\|_E = 1\}$. Avec cette norme E' est aussi un espace de Banach.

Noter que l'on aussi, par linéarité de T ,

$$\begin{aligned} \|T\|_{E'} = \sup\{|T(u)|, u \in E, \|u\|_E = 1\} &= \sup\left\{\frac{|T(u)|}{\|u\|_E}, u \in E, u \neq 0\right\} \\ &= \sup\{|T(u)|, u \in E, \|u\|_E \leq 1\}. \end{aligned}$$

Il sera souvent utile d'utiliser l'inégalité $|T(u)| \leq \|T\|_{E'} \|u\|_E$.

Notations : Soit E un espace de Banach.

1) Si $T \in E'$ et $u \in E$, on note souvent $T(u) = \langle T, u \rangle_{E', E}$.

2) On note E'' le dual de E' , c'est-à-dire $E'' = (E')'$. L'espace E'' est donc aussi un espace de Banach et pour $\varphi \in E''$

$$\|\varphi\|_{E''} = \sup\{|\varphi(T)|, T \in E', \|T\|_{E'} = 1\}, \quad (\varphi(T) = \langle \varphi, T \rangle_{E'', E'}).$$

Rappel : Soit E un espace de Banach. L'espace E est de dimension finie si et seulement si de toute suite bornée de E , on peut extraire une sous suite convergente.

En dimension infinie, d'une suite bornée de E il est donc possible que l'on ne puisse pas extraire une sous suite convergente. C'est en particulier pour essayer de retrouver la propriété "de toute suite bornée de E on peut extraire une sous suite convergente" que l'on va introduire dans E une notion plus faible de convergence. (Nous aurons alors la propriété désirée dans les espaces "réflexifs", voir C2 et C4.)

Définition 1.1 (Convergence faible). Soient E un espace de Banach, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $u \in E$. On dit que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans E quand $n \rightarrow +\infty$ si, pour tout $T \in E'$,

$$T(u_n) \rightarrow T(u) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

(Ceci s'écrit aussi $\langle T, u_n \rangle_{E', E} \rightarrow \langle T, u \rangle_{E', E}$ quand $n \rightarrow +\infty$. La convergence est ici, bien sûr, dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} selon que E est un Banach réel ou complexe.)

Proposition 1.1. Soient E un espace de Banach, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $u \in E$.

1) $u_n \rightarrow u$ dans E (quand $n \rightarrow +\infty$) $\Rightarrow u_n \rightarrow u$ faiblement dans E quand $n \rightarrow +\infty$.

2) On suppose que E est de dimension finie, alors,

$u_n \rightarrow u$ faiblement dans E (quand $n \rightarrow +\infty$) $\Rightarrow u_n \rightarrow u$ dans E quand $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration. La démonstration du premier item (convergence implique convergence faible) est immédiate. Cette implication est due à la continuité des éléments de E' .

Pour le deuxième item, on suppose que E est de dimension finie. On note m la dimension de E et on choisit une base de E notée $\{e_1, \dots, e_m\}$.

Tout élément v de E se décompose sur cette base, $v = \sum_{i=1}^m v^{(i)} e_i$. On note aussi $\|v\|_\infty = \sup_{i=1}^m |v^{(i)}|$. L'application $v \mapsto \|v\|_\infty$ est une norme sur E . (On rappelle que, comme E est de dimension finie, toutes les normes dans E sont équivalentes.)

Pour $i \in \{1, \dots, m\}$ on note T_i l'application $v \mapsto v^{(i)}$. Comme $T_i \in E'$ on a $T_i(u_n) \rightarrow T_i(u)$, c'est-à-dire $u_n^{(i)} \rightarrow u^{(i)}$, quand $n \rightarrow +\infty$ et donc $\|u_n - u\|_\infty = \sup_{i=1}^m |u_n^{(i)} - u^{(i)}| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Ceci prouve que $u_n \rightarrow u$ dans E quand $n \rightarrow +\infty$. \square

En général, dans un espace de Banach de dimension infinie, la convergence faible n'est pas équivalente à la convergence (c'est-à-dire la convergence pour la norme de E). L'exercice 2.3 donne un exemple curieux d'espace de Banach de dimension infinie pour lequel la convergence faible est équivalente à la convergence, il s'agit de l'espace $\ell^1(\mathbb{N})$.

Par contre dans le cas des espaces de Hilbert de dimension infinie la convergence faible n'est jamais équivalente à la convergence. Pour le montrer nous rappelons le (très important) théorème de représentation de Riesz (théorème 0.14).

Soit H un espace de Hilbert, on note $(\cdot | \cdot)_H$ le produit scalaire dans H . Pour $u \in H$, on pose, pour tout $v \in H$, $T_u(v) = (v | u)_H$. Il est facile de voir que $T_u \in H'$ car l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $T_u(v) \leq \|u\|_H \|v\|_H$ et donc $T_u \in H'$ et $\|T_u\|_{H'} \leq \|u\|_H$. En remarquant que $T_u(u) = \|u\|_H^2$ on a même $\|T_u\|_{H'} = \|u\|_H$.

L'application ϕ qui à u associe T_u est donc isométrie (linéaire) de H sur son image (qui est une partie de H' , c'est-à-dire $\{T_u, u \in H\} \subset H'$). Le théorème de représentation de Riesz (théorème 0.14) donne que cette image est exactement H' c'est-à-dire que pour tout $T \in H'$ il existe $u \in H$ tel que $T = T_u$. Nous rappelons ici cette démonstration.

Démonstration du théorème 0.14. Soient H un espace de Hilbert de $T \in H'$. On veut montrer qu'il existe $u \in H$ tel que $T(v) = (v | u)_H$ pour tout $v \in H$. On suppose $T \neq 0$ (sinon $u = 0$ donne $T_u = T$). On pose

$F = \text{Ker} T = \{v \in H; T(v) = 0\}$. F est un s.e.v. fermé de H (car $T \in H'$). On a donc (par le théorème 0.13) $H = F \oplus F^\perp$. l'ensemble F^\perp n'est par réduit à $\{0\}$, sinon $H = F$ et donc $T = 0$. On peut donc choisir $u_0 \neq 0$ tel que $u_0 \in F^\perp$.

Soit $v \in H$. On remarque que

$$v = v - \frac{T(v)}{T(u_0)} u_0 + \frac{T(v)}{T(u_0)} u_0.$$

Comme $v - \frac{T(v)}{T(u_0)} u_0 \in \text{Ker} T = F$ et $u_0 \in F^\perp$, $(v - \frac{T(v)}{T(u_0)} u_0 | u_0)_H = 0$.

On en déduit $(v | u_0)_H = \frac{T(v)}{T(u_0)} (u_0 | u_0)_H$ et donc $T(v) = (v | u)_H$ avec $u = \frac{T(u_0)}{\|u_0\|_H^2}$. \square

Remarque 1.1. Dans la démonstration du théorème 0.14, le point crucial a été de choisir $u_0 \in F^\perp$, $u_0 \neq 0$. Cette démonstration prouve donc aussi que si $T \in H^*$ mais que $T \notin H'$ (c'est-à-dire que T n'est pas continue) alors $F^\perp = \{0\}$ et donc $\bar{F} = H$ selon le corollaire 0.1). (On rappelle que $F = \text{Ker}T$.)

Une conséquence simple du théorème 0.14 est la proposition suivante qui donne dans le cas des espaces de Hilbert un autre moyen de présenter la convergence faible.

Proposition 1.2. *Soient H un espace de Hilbert, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H et $u \in H$. Alors, $u_n \rightarrow u$ faiblement dans E (quand $n \rightarrow +\infty$) si et seulement si pour tout $v \in H$ $(u_n | v)_H \rightarrow (u | v)_H$ (quand $n \rightarrow +\infty$).*

Démonstration. La preuve consiste simplement à remarquer $H' = \{T_v, v \in H\}$ avec $T_v \in H'$ définie par $T_v(w) = (w | v)_H$. \square

Remarque 1.2. De la proposition 1.2 on peut déduire que dans un espace de Hilbert de dimension infinie il existe des suites non convergentes mais faiblement convergentes. Voici une démonstration simple si H est séparable.

On suppose que H est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. On peut alors choisir une base hilbertienne de H notée $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$. (voir la proposition 0.8).

Soit $u \in H$, la proposition 0.9 donne $u = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u | e_n)_H e_n$ et l'identité de Bessel donne $\|u\|_H^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u | e_n)_H^2$. On en déduit $(u | e_n)_H \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Comme u est arbitraire dans H , la proposition 1.2 donne $e_n \rightarrow 0$ faiblement dans H quand $n \rightarrow +\infty$. Pourtant $e_n \not\rightarrow 0$ dans H car $\|e_n\|_H = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.3. L'exercice 2.2 montre que dans un espace de Banach une suite faiblement convergente est nécessairement bornée. Mais, comme dans la remarque 0.1, c'est plutôt la réciproque qui nous intéresse, c'est-à-dire "de toute suite bornée de E on peut extraire une sous suite faiblement convergente". Nous aurons cette propriété dans les espaces "réflexifs", voir C2 et C4.

Soit E un espace de Banach. Pour $u \in E$ on définit l'application de E' dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} (selon que E est un Banach réel ou complexe) qui à T (de E') associe $\langle T, u \rangle_{E', E}$. Cette application, notée $J(u)$ est clairement linéaire. Elle est aussi continue car $|\langle T, u \rangle_{E', E}| \leq \|u\|_E \|T\|_{E'}$, c'est donc un élément de E'' et l'inégalité précédente donne même $\|J(u)\|_{E''} \leq \|u\|_E$. On montrera dans l'exercice 1.1 que $\|J(u)\|_{E''} = \|u\|_E$. L'application $u \mapsto J(u)$ est donc une isométrie de E sur son image (qui est une partie de E'').

Définition 1.2 (Injection canonique de E dans E''). *Soit E un espace de Banach. Pour $u \in E$, On définit l'élément $J(u)$ de E'' par*

$$\langle J(u), T \rangle_{E'', E} = \langle T, u \rangle_{E', E}, \text{ pour tout } T \in E'.$$

L'application J qui à u associe $J(u)$ est une isométrie de E sur son image, $\text{Im}(J) \subset E''$.

L'espace E est dit réflexif si $\text{Im}(J) = E''$.

Les espaces de Hilbert sont réflexifs. En fait, pour un espace de Hilbert, noté H , il y a même, grâce au théorème 0.14, une isométrie naturelle entre H et H' . Si $u \in H$, on définit $T_u \in H'$ par $\langle T_u, v \rangle_{H', H} = (v | u)_H$. Le théorème 0.14 donne que l'application $u \mapsto T_u$ est une isométrie entre H et H' (en particulier $\{T_u, u \in H\} = H'$). Ceci montre aussi que H' est un espace de Hilbert. Si $f, g \in H'$, il existe $u, v \in H$ tels que $f = T_u$ et $g = T_v$. On a alors $(f | g)_{H'} = (v | u)_H$.

On note I_H cette isométrie naturelle entre H et H' . On peut alors montrer que l'injection canonique de H dans H'' , notée J dans la définition 1.2, est égale à $I_{H'} \circ I_H$ (ceci est laissé comme exercice), ceci prouve que J est surjective et donc que H est réflexif. (En fait H est bien plus que réflexif car il y a déjà cette isométrie entre H et H' .)

Définition 1.3 (Convergence faible- \star). Soient E un espace de Banach, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E' et $T \in E'$. On dit que $T_n \rightarrow T$ \star -faiblement dans E' quand $n \rightarrow +\infty$ si, pour tout $u \in E$,

$$\langle T_n, u \rangle_{E', E} \rightarrow \langle T, u \rangle_{E', E} \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Soit E un espace de Banach. On note J l'injection canonique de E dans E'' . On rappelle que pour tout $u \in E$, $J(u) \in E''$ et $\langle J(u), T \rangle_{E'', E'} = \langle T, u \rangle_{E', E}$. Soient $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E' et $T \in E'$.

On a donc (définition 1.1) :

$T_n \rightarrow T$ faiblement dans E' si, pour tout $\varphi \in E''$, $\langle \varphi, T_n \rangle_{E'', E'} \rightarrow \langle \varphi, T \rangle_{E'', E'}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

et (définition 1.3) :

$T_n \rightarrow T$ \star -faiblement dans E' si, pour tout $u \in E$, $\langle J(u), T_n \rangle_{E'', E'} \rightarrow \langle J(u), T \rangle_{E'', E'}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Si E est réflexif, $\text{Im}(J) = \{J(u), u \in E\} = E''$ et donc la convergence faible- \star dans E' est identique à la convergence faible dans E' . Par contre si E n'est pas réflexif, la convergence faible- \star dans E' est plus faible que la convergence faible dans E' car $\text{Im}(J)$ est strictement inclus dans E'' .

Remarque 1.4. L'exercice 2.2 montre que dans le dual, noté E' , d'un espace de Banach (noté E) une suite \star -faiblement convergente est nécessairement bornée. Mais, ici encore, c'est plutôt la réciproque qui nous intéresse, c'est-à-dire "de toute suite bornée de E' on peut extraire une sous suite \star -faiblement convergente". Nous aurons cette propriété si E est séparable. Le théorème fondamental est le théorème 4.1 (voir C4).

td1. Conséquences de Hahn-Banach, convergence faible

Exercice 1.1 (Trois applications de Hahn-Banach). Soit E un espace de Banach réel.

1) Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Montrer qu'il existe $T \in E'$ t.q. $T(x) = \|x\|_E$ et $\|T\|_{E'} = 1$. En déduire que

$$\|x\|_E = \max\{S(x), S \in E'; \|S\|_{E'} = 1\}.$$

Corrigé – On pose $F = \text{vect}\{x\}$ et on définit l'application T_1 linéaire continue de F dans \mathbb{R} par

$$T_1(\alpha x) = \alpha \|x\|_E \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$

L'application T_1 appartient à F' (F étant muni de la norme de E) et $\|T_1\|_{F'} = 1$. Par le théorème de Hahn-Banach analytique (théorème 0.5) T_1 se prolonge en $T \in E'$ avec $\|T\|_{E'} = \|T_1\|_{F'}$.

L'application T vérifie les conditions demandées.

Puis, comme $|S(x)| \leq \|x\|_E$ pour tout $S \in E'$ tel que $\|S\|_{E'} = 1$, on en déduit bien

$$\|x\|_E = \max\{S(x), S \in E'; \|S\|_{E'} = 1\}.$$

2) Soient F un s.e.v de E et $x \in E$. Montrer que $x \notin \bar{F}$ si et seulement si il existe $T \in E'$ t.q. $T(x) \neq 0$ et $T(y) = 0$ pour tout $y \in F$.

Corrigé –

Si $x \in \bar{F}$, $T(y) = 0$ pour tout $y \in F$ implique $T(x) = 0$ (il suffit de considérer une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$).

Si $x \notin \bar{F}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|x - y\|_E \geq \varepsilon$ pour tout $y \in F$.

On considère alors $G = F \oplus \text{vect}\{x\}$ et on définit l'application S linéaire de G dans \mathbb{R} par

$$S(y + \alpha x) = \alpha \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } y \in F.$$

L'application S appartient à G' car pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $y \in F$,

$$\|y + \alpha x\|_E = |\alpha| \|x - \frac{y}{-\alpha}\|_E \geq |\alpha| \varepsilon \text{ car } \frac{y}{-\alpha} \in F,$$

et donc

$$|S(y + \alpha x)| = |\alpha| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|y + \alpha x\|_E.$$

Ceci donne $\|S\|_{G'} \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Par le théorème de Hahn-Banach analytique (théorème 0.5) S se prolonge en $T \in E'$ et on a bien $T(y) = 0$ pour tout $y \in F$ et $T(x) \neq 0$.

- 3) Pour $x \in E$, on définit $J(x)$ de E' dans \mathbb{R} par $J(x)(T) = T(x)$ pour tout $T \in E'$. Montrer que $J(x) \in E''$ pour tout $x \in E$ et que l'application $J : x \mapsto J(x)$ est une isométrie de E sur $\text{Im}(J) \subset E''$. (Définition : On dit que E est réflexif si $\text{Im}(J) = E''$.)

Corrigé – Soit $x \in E$. L'application $J(x)$ est bien linéaire de E' dans \mathbb{R} . Elle est aussi continue car $|J(x)(T)| \leq \|T\|_{E'} \|x\|_E$ et donc $J(x) \in E''$ et $\|J(x)\|_{E''} \leq \|x\|_E$.

D'autre part, la question 1 montre qu'il existe $T \in E'$ t.q. $T(x) = \|x\|_E$ et $\|T\|_{E'} = 1$. On en déduit que $\|J(x)\|_{E''} = \|x\|_E$ et donc que l'application J (qui est, bien sûr, linéaire) est une isométrie de E sur son image.

Exercice 1.2 (Hahn-Banach positif).

Soit F un sous espace vectoriel de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{R}) et T une application linéaire positive de F dans \mathbb{R} (T positive signifie : $f \geq 0 \Rightarrow T(f) \geq 0$).

- 1) On suppose que F contient les fonctions constantes. Montrer qu'il existe \bar{T} , application linéaire positive de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R} , t.q. $\bar{T} = T$ sur F . [On pourra s'inspirer de la démonstration du théorème de Hahn-Banach ou se ramener au théorème de Hahn-Banach.]
- 2) Montrer (en donnant un exemple) que le résultat de la question précédente peut être faux si F ne contient pas les fonctions constantes.

Exercice 1.3 (Pas de théorème de Riesz sur $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

Si μ est une mesure finie sur les boréliens de \mathbb{R} , on définit T_μ sur $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par : $T_\mu(f) = \int f d\mu$, pour tout $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. T_μ est donc une application linéaire positive de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R} .

Construire une application linéaire positive, notée T , de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R} t.q. $T \neq T_\mu$ pour toute mesure finie μ sur les boréliens de \mathbb{R} . [Utiliser l'exercice 1.2.]

Théorème dû à Riesz : si T est application linéaire positive de $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R} , il existe alors une unique mesure finie sur les boréliens de \mathbb{R} , notée μ , telle que $T(f) = \int f d\mu$, pour tout $f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 1.4 (Jauge d'un convexe).

Soient E un espace de Banach réel et $C \subset E$ un convexe ouvert contenant 0.

- 1) Pour $x \in E$, montrer que $\{\lambda > 0, (x/\lambda) \in C\} \neq \emptyset$.

Pour $x \in E$, on pose $p(x) = \inf\{\lambda > 0, (x/\lambda) \in C\}$.

- 2) Soit $x \in E$, montrer que $\{\lambda > 0, (x/\lambda) \in C\} =]p(x), +\infty[$.

3) Montrer que $p(ax) = ap(x)$ et $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout $x, y \in E$ et tout $a > 0$.

4) Soit $x \in E$ Montrer que

$x \in C$ si et seulement si $p(x) < 1$.

$x \in \bar{C}$ si et seulement si $p(x) \leq 1$,

Exercice 1.5 (Séparation d'un point et d'un convexe (Hahn-Banach "géométrique")).

Soient E un espace de Banach réel, $C \subset E$ un convexe non vide et $a \in E \setminus \bar{C}$. Dans cet exercice, on se propose de montrer la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \exists \varphi \in E', \exists \alpha \in \mathbb{R}, \\ \varphi(a) > \alpha, \varphi(x) \leq \alpha, \forall x \in C. \end{aligned} \quad (1.1)$$

1) On suppose dans cette question que C est ouvert et $0 \in C$. Montrer (1.1). [Utiliser l'exercice 1.4 et le théorème de Hahn-Banach.]

2) On suppose dans cette question que $0 \in C$. Montrer (1.1). [Se ramener à la question précédente en introduisant le convexe $C_\star = \cup_{x \in C} B(x, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ convenablement choisi.]

3) Montrer (1.1). [Se ramener à la question précédente.]

Exercice 1.6 (Lemme de Mazur).

Soit E un espace de Banach réel.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ et $x \in E$ t.q. $x_n \rightarrow x$ faiblement dans E , quand $n \rightarrow \infty$.

On pose $C_n = \text{Conv}\{x_m, m \geq n\}$ (c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons convexes des $x_m, m \geq n$).

1) Montrer que $x \in \bar{C}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. [Utiliser le théorème de Hahn-Banach "géométrique".]

2) Montrer qu'il existe $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ t.q. $y_n \in \text{Conv}\{x_m, m \geq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $y_n \rightarrow x$ quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 1.7 (Minimisation d'une fonction convexe).

Soit E un espace de Banach réel et f une application continue et convexe de E dans \mathbb{R} .

On suppose qu'il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ et $x \in E$ t.q. $x_n \rightarrow x$ faiblement dans E et $f(x_n) \rightarrow \inf_E f$, quand $n \rightarrow \infty$. Montrer que $f(x) = \inf_E f$.

Montrer en donnant un exemple que ce résultat peut être faux si f n'est pas convexe.

Théorème 1.1 (Hahn-Banach).

Soient E un e.v. réel et p une application de E dans \mathbb{R} telle que

1) $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$, pour tout $u, v \in E$,

2) $p(\lambda u) = \lambda p(u)$, pour tout $u \in E$ et $\lambda > 0$.

Soient F un s.e.v. de E et f une application linéaire de F dans \mathbb{R} telle $f(u) \leq p(u)$ pour tout $u \in F$. Alors f se prolonge en une application linéaire de E dans \mathbb{R} , encore notée f , telle que $f(u) \leq p(u)$ pour tout $u \in E$.

Exercice 1.8 (Lemme de Zorn).

Dans cette exercice, on démontre le lemme de Zorn et on en déduit le théorème de Hahn-Banach.

Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre notée \leq .

hypothèse : On suppose que l'ensemble E , muni de cette relation d'ordre, est inductif, c'est-à-dire que toute partie de E totalement ordonnée admet un majorant.

Objectif : Le but de l'exercice est de montrer que E possède un élément maximal (c'est-à-dire un élément qui n'admet pas de majorant strict). (Ce résultat est le lemme de Zorn.)

On commence par utiliser l'axiome du choix. Pour toute partie P totalement ordonnée de E admettant au moins un majorant strict, on choisit un tel majorant, on note ce majorant $m(P)$ (donc $m(P) \notin P$). (En particulier, si $E \neq \emptyset$, on choisit donc pour $m(\emptyset)$ un élément de E .)

On définit maintenant la notion de "partie finissante" et de "bonne partie".

Partie finissante : Soit P une partie totalement ordonnée de E et $Q \subset P$. La partie Q est une partie finissante de la partie P si, pour tout $x \in Q$ et $y \in P \setminus Q$, $x \leq y$. La partie Q est une partie finissante stricte de la partie P si de plus $P \setminus Q \neq \emptyset$. (Noter qu'une partie finissante stricte a nécessairement au moins un majorant.)

Bonne partie : Soit P une partie totalement ordonnée de E . La partie P est une bonne partie si pour toute partie finissante stricte Q , $m(Q) \in P$ et est le plus petit élément de P majorant Q . (Par exemple, si $E \neq \emptyset$ et $P \neq \emptyset$ est une bonne partie, $m(\emptyset)$ est le plus élément de P .)

On note \mathcal{B} l'ensemble des bonnes parties.

1) Soient P_1, P_2 deux bonnes parties. Montrer que l'une des ces deux parties est une partie finissante de l'autre.

[Considérer la plus grande partie possible étant à la fois finissante de P_1 et finissante de P_2 (en montrant tout d'abord l'existence d'une telle partie).]

Corrigé – On note Q l'union des parties de $P_1 \cap P_2$ qui sont des parties finissantes à la fois de P_1 et de P_2 (il y a en a car l'ensemble vide est une telle partie). L'ensemble Q est bien une partie finissante de P_1 et de P_2 (si $x \in Q$ et $y \in P_1 \setminus Q$, il existe \bar{Q} partie finissante de P_1 et de P_2 telle que $x \in \bar{Q}$ et comme $\bar{Q} \subset Q$, on a $y \notin \bar{Q}$ et donc $x < y$. Bien sûr, le même raisonnement est valable pour P_2).

Si Q est une partie finissante stricte de P_1 , $m(Q) \in P_1$ et c'est le plus petit élément de P_1 , ceci montre que $Q \cup \{m(Q)\}$ est une partie finissante de P_1 car $m(Q)$ est le plus petit élément de P_1 majorant Q . De même si Q est une partie finissante stricte de P_2 , $Q \cup \{m(Q)\}$ est une partie finissante de P_2 . Ceci contredit la définition de Q . On a donc $Q = P_1$ ou $Q = P_2$.

ceci montre bien que P_1 est une partie finissante de P_2 ou que P_2 est une partie finissante de P_1 .

2) On pose $P_f = \cup_{P \in \mathcal{B}} P$. Montrer que P_f est une bonne partie et en déduire qu'un majorant de P_f (qui existe par hypothèse puisque P_f est totalement ordonné) est un élément maximal (ceci démontre le lemme de Zorn).

Corrigé – On remarque tout d'abord que P_f est bien totalement ordonnée car si $x, y \in P_f$, il existe $P_1, P_2 \in \mathcal{B}$ tels que $x \in P_1$ et $y \in P_2$ et comme l'une de ces parties est finissante de l'autre, on a bien $x, y \in P_1$ ou $x, y \in P_2$. Les éléments x, y sont donc comparables.

On montre maintenant que P_f est une bonne partie. Soit Q une partie finissante stricte de P_f . Il s'agit de montrer que $m(Q) \in P_f$ et que $m(Q)$ est le plus petit élément de P_f majorant Q .

Soit $x \in P_f \setminus Q$, il existe $P_1 \in \mathcal{B}$ telle que $x \in P_1$. On va montrer que $Q \subset P_1$ (et donc que Q est une partie finissante de P_1 et donc que $m(Q) \in P_1$ et $x \geq m(Q)$ car $m(Q)$ est le plus petit élément de P_1 majorant Q).

Soit $y \in Q$, il existe $P_2 \in \mathcal{B}$ telle que $y \in P_2$. Comme $x > y$, P_1 ne peut pas être une partie finissante de P_2 , c'est donc P_2 qui est une partie finissante de P_1 et donc $y \in P_1$. On a bien montré que $Q \subset P_1$.

Comme Q est une partie finissante de P_1 (stricte car $x \in P_1 \setminus Q$), on a $m(Q) \in P_1 \subset P_f$ et $x \geq m(Q)$. Ceci montre que P_f est une bonne partie.

La partie P_f étant totalement ordonnée, elle admet un majorant. Ce majorant est un élément maximal, car si P_f avait un majorant strict, on aurait $P_f \cup \{m(P_f)\} \in \mathcal{B}$ en contradiction avec la définition de P_f .

3) Démontrer le théorème de Hahn-Banach (théorème 1.1) en utilisant le lemme de Zorn.

Exercice 1.9 (Séparation d'un point et d'un convexe fermé non vide dans un espace de Hilbert réel).

Soient H un espace de Hilbert réel, $C \subset H$ un convexe fermé non vide et $a \in H \setminus C$. Dans cet exercice, on se propose de montrer, sans le théorème de Hahn-Banach, qu'il existe $T \in H'$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$T(u) \leq \gamma \text{ pour tout } u \in C, \quad (1.2)$$

$$T(a) > \gamma. \quad (1.3)$$

On note b la projection orthogonale de a sur C (l'existence de b est donnée par le théorème 0.12), c'est-à-dire que $b \in C$ et $\|a - b\| \leq \|a - u\|$ pour $u \in C$.

1) Montrer $(a - b | b - u) \geq 0$ pour tout $u \in C$. [Soit $u \in C$ et $t \in]0, 1[$. Utiliser $\|a - b\|^2 \leq \|a - v\|^2$ avec $v = tu + (1 - t)b$ et faire tendre t vers 0.]

Cette question est dans la proposition 0.6.

2) On définit $T \in H'$ par $T(u) = (a - b | u)$ pour tout $u \in H$. Montrer que $T \in H'$ et qu'il existe γ tel que le couple (T, γ) vérifie (1.2)-(1.3).

C2. Espaces réflexifs

Soit E un espace de Banach. On rappelle qu'il y a une injection de E dans E'' , notée J .

Pour $u \in E$, $J(u)$ vérifie

$$\langle J(u), f \rangle_{E'', E} = \langle f, u \rangle_{E', E}, \text{ pour tout } f \in E'.$$

L'application J est une isométrie de E sur son image, $\text{Im}(J) \subset E''$.

L'espace E est dit réflexif si $\text{Im}(J) = E''$.

Si E est dimension finie, $\dim E = n \in \mathbb{N}$. On a alors $\dim E' = \dim E'' = n$. Comme J est une isométrie, on a aussi $\dim(\text{Im}(J)) = \dim E = n$ et donc $\text{Im}(J) = E''$. L'espace E est réflexif.

Le cas des espaces de Hilbert est plus simple que le cas général des espaces de Banach. Si H est un espace de Hilbert, il y a une isométrie naturelle entre H et H' . Pour $u \in H$, on note $I_H(u)$ l'élément de H' défini par

$$\langle I_H(u), v \rangle_{H', H} = (v | u)_H.$$

Le théorème 0.14 donne que I_H est surjective et on en déduit que I_H est une isométrie entre H et H' . L'espace H' est aussi un espace de Hilbert. Le produit scalaire dans H' est donné par $(I_H(u) | I_H(v))_{H'} = (v | u)_H$.

On peut alors remarquer que l'injection canonique J de H dans H'' est égale à $I_{H'} \circ I_H$.

En effet, soit $u \in H$. Pour tout $f \in H'$, on a, avec $v \in H$ tel que $I_H(v) = f$,

$$\begin{aligned} \langle I_{H'} \circ I_H(u), f \rangle_{H'', H'} &= (f | I_H(u))_{H'} = (u | v)_H = \langle I_H(v), u \rangle_{H', H} \\ &= \langle J(u), I_H(v) \rangle_{H'', H'} = \langle J(u), f \rangle_{H'', H'}, \end{aligned}$$

ceci prouve que $I_{H'} \circ I_H(u) = J(u)$ et donc $J = I_{H'} \circ I_H$.

Les espaces de Hilbert sont donc réflexifs (et même "mieux que réflexifs" car il y a cette isométrie entre H et H'). Par contre, les espaces de Banach ne sont pas toujours réflexifs. L'objectif principal du cours C2 est de montrer que l'espace de Banach réel E est réflexif si sa norme est uniformément convexe (définition 2.1). Il s'agit d'une condition suffisante, elle n'est pas nécessaire (comme le montre l'exemple des espaces de dimension finie, voir l'exemple 2.1).

Définition 2.1 (Norme uniformément convexe). *Soit E un espace de Banach. L'espace E est uniformément convexe (on devrait plutôt dire "la norme de E est uniformément convexe") si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$(\|u\| \leq 1, \|v\| \leq 1, \|u - v\| > \varepsilon) \Rightarrow \left\| \frac{u+v}{2} \right\| < 1 - \delta. \quad (2.1)$$

Exemple 2.1. On prend $E = \mathbb{R}^2$ (mais cet exemple se généralise facilement à tout espace vectoriel de dimension finie). La condition (2.1) correspond alors à la stricte convexité de la sphère unité de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire au fait que, pour $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x - y\| \neq 0$ implique $\|(x + y)/2\| < 1$. Pour certaines normes, cette condition n'est pas vérifiée.

Pour $x = (x_1, x_2)^t$ on pose

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty &= \max\{|x_1|, |x_2|\}, \\ \|x\|_1 &= |x_1| + |x_2|, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}.\end{aligned}$$

Avec la norme $\|\cdot\|_\infty$, l'espace E n'est pas uniformément convexe. Pour le voir, il suffit de prendre, pour $0 < \varepsilon < 1$, $x = (\varepsilon, 1)^t$ et $y = (-\varepsilon, 1)^t$. On a alors $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = \|(x + y)/2\|_\infty = 1$ et $\|x - y\|_\infty = 2\varepsilon$. Avec la norme $\|\cdot\|_1$, l'espace E n'est pas uniformément convexe. Pour le voir, il suffit de prendre, pour $0 < \varepsilon < 1/2$, $x = (1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon)^t$ et $y = (1/2 + \varepsilon, 1/2 - \varepsilon)^t$. On a alors $\|x\|_1 = \|y\|_1 = \|(x + y)/2\|_1 = 1$ et $\|x - y\|_1 = 4\varepsilon$.



Sphère unité de \mathbb{R}^2 pour $\|\cdot\|_\infty$ (à gauche) et pour $\|\cdot\|_1$ (à droite)

Par contre, avec la norme $\|\cdot\|_2$, l'espace E est un espace de Hilbert, il est donc uniformément convexe (voir l'exemple 2.2). (On rappelle toutefois que ces 3 normes sont équivalentes.)

Exemple 2.2. On montre dans cet exemple qu'un espace de Hilbert H est toujours uniformément convexe. Ceci est une conséquence de l'identité du parallélogramme (proposition 0.4). Soient $\varepsilon > 0$ et $u, v \in H$ tels que $\|u\| \leq 1$, $\|v\| \leq 1$ et $\|u - v\| > \varepsilon$ (et donc nécessairement $\varepsilon < 2$). L'identité du parallélogramme donne

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2,$$

et donc $\|u + v\|^2 < 4 - \varepsilon^2$ et

$$\left\|\frac{u + v}{2}\right\|^2 < 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad \left\|\frac{u + v}{2}\right\| < \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}.$$

Il suffit donc de prendre $\delta = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$. On a bien $\delta > 0$.

L'objectif principal de ce cours C2 est de démontrer le théorème 2.1.

Théorème 2.1. Soit E un espace de Banach réel. On suppose E uniformément convexe. Alors E est réflexif.

Pour démontrer le théorème 2.1, nous allons commencer par démontrer le lemme 2.1.

Lemme 2.1. Soient E un espace de Banach réel, $f, g \in E'$ et $\varphi \in E''$, $\|\varphi\|_{E''} = 1$. Alors, pour tout $\zeta > 0$ il existe $u \in B_E = \{v \in E; \|v\|_E \leq 1\}$ tel que

$$\begin{aligned}|\langle f, u \rangle_{E', E} - \langle \varphi, f \rangle_{E'', E'}| &\leq \zeta, \\ |\langle g, u \rangle_{E', E} - \langle \varphi, g \rangle_{E'', E'}| &\leq \zeta.\end{aligned}$$

Remarque 2.1. Le lemme est immédiat si E est réflexif. En effet, comme J (l'injection canonique de E dans E'' donné par la définition 1.2) est surjective, on peut choisir $u \in E$ tel que $J(u) = \varphi$. Comme J est une isométrie, on a bien $\|u\|_E = \|\varphi\|_{E''} = 1$ (et donc $u \in B_E$) et la définition de $J(u)$ donne

$$\begin{aligned}\langle f, u \rangle_{E', E} &= \langle J(u), f \rangle_{E'', E'} = \langle \varphi, f \rangle_{E'', E'}, \\ \langle g, u \rangle_{E', E} &= \langle J(u), g \rangle_{E'', E'} = \langle \varphi, g \rangle_{E'', E'}.\end{aligned}$$

Donc, ce choix de u convient pour tout $\zeta \geq 0$.

Démonstration du lemme 2.1.

Pour $u \in B_E$, on note C_u le point de \mathbb{R}^2 défini par $C_u = (\langle f, u \rangle_{E', E}, \langle g, u \rangle_{E', E})^t$. On pose $C = \{C_u, u \in B_E\}$. L'ensemble C est une partie convexe de \mathbb{R}^2 . En effet, soient $u, v \in B_E$ et $t \in [0, 1]$. On a alors (par linéarité des applications f et g) $tC_u + (1-t)C_v = C_{tu+(1-t)v} \in C$ car $tu+(1-t)v \in B_E$ (grâce à l'inégalité triangulaire). L'adhérence de C , notée \bar{C} , est donc convexe et fermée (et non vide).

On veut montrer que pour tout $\zeta > 0$ il existe $u \in B_E$ tel que

$$\begin{aligned}|\langle f, u \rangle_{E', E} - \langle \varphi, f \rangle_{E'', E'}| &\leq \zeta, \\ |\langle g, u \rangle_{E', E} - \langle \varphi, g \rangle_{E'', E'}| &\leq \zeta.\end{aligned}$$

Ceci consiste simplement à dire que le point $(\langle \varphi, f \rangle_{E'', E'}, \langle \varphi, g \rangle_{E'', E'})^t \in \bar{C}$.

On raisonne par l'absurde. On suppose que $a = (\langle \varphi, f \rangle_{E'', E'}, \langle \varphi, g \rangle_{E'', E'})^t \notin \bar{C}$. Le théorème de Hahn-Banach géométrique (théorème 0.6, mais qui est très facile ici, voir la remarque 2.2) dans \mathbb{R}^2 donne alors qu'il existe une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} séparant strictement \bar{C} et a , c'est-à-dire qu'il $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha \langle f, u \rangle_{E', E} + \beta \langle g, u \rangle_{E', E} \leq \gamma \text{ pour tout } u \in B_E, \quad (2.2)$$

$$\alpha \langle \varphi, f \rangle_{E'', E'} + \beta \langle \varphi, g \rangle_{E'', E'} > \gamma. \quad (2.3)$$

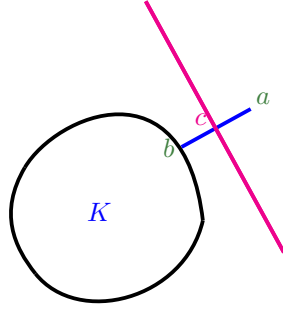
L'inégalité (2.2) donne $\langle \alpha f + \beta g, u \rangle_{E', E} \leq \gamma$ pour tout $u \in B_E$ et donc (en prenant la borne supérieure quand u décrit B_E) $\|\alpha f + \beta g\|_{E'} \leq \gamma$.

L'inégalité (2.2) donne $\gamma < \langle \varphi, \alpha f + \beta g \rangle_{E'', E'} \leq \|\varphi\|_{E''} \|\alpha f + \beta g\|_{E'} = \|\alpha f + \beta g\|_{E'}$ (car $\|\varphi\|_{E''} = 1$).

On a donc $\gamma < \|\alpha f + \beta g\|_{E'} \leq \gamma$, ce qui est impossible. On en déduit que $(\langle \varphi, f \rangle_{E'', E'}, \langle \varphi, g \rangle_{E'', E'})^t \in \bar{C}$, ceci donne la conclusion du lemme. \square

Remarque 2.2. Dans \mathbb{R}^2 (et plus généralement dans un espace vectoriel réel de dimension finie ou même dans un espace de Hilbert réel) le théorème sur la séparation d'un point et d'un convexe fermé non vide est assez facile (et peut se démontrer sans le théorème de Hahn-Banach, voir l'exercice 1.9).

En effet, soient K est un convexe fermé non vide de \mathbb{R}^2 et $a \notin K$. On note b la projection orthogonale de a sur K et c le milieu du segment $[a, b]$. la droite orthogonale au segment $[a, b]$ et passant par le point c sépare a et K . Cette droite est bien définie par 3 nombres α, β et γ comme indiqué dans le lemme 2.1.



Séparation du point a et du convexe fermé non vide K

Démonstration du théorème 2.1. L'espace E est un espace de Banach réel uniformément convexe. On veut montrer que $\text{Im}(J) = E''$, où J est l'injection canonique de E dans E'' donnée dans la définition 1.2.

Étape 1. On sait que J est une isométrie. On en déduit que $\text{Im}(J)$ est une partie fermée de E'' . En effet, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\text{Im}(J)$ telle que $J(u_n) \rightarrow \varphi$ dans E'' quand $n \rightarrow +\infty$. On veut montrer que $\varphi \in \text{Im}(J)$.

Comme J est une isométrie linéaire et que la suite $(J(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nécessairement une suite de Cauchy. Comme E est complet, il existe donc $u \in E$ tel que $u_n \rightarrow u$ dans E quand $n \rightarrow +\infty$ et donc $J(u_n) \rightarrow J(u)$ dans E'' , c'est-à-dire $\varphi = J(u)$. On a bien montré que $\text{Im}(J)$ est une partie fermée de E'' .

Étape 2. Dans l'étape 1, on a montré que $\text{Im}(J)$ est fermé, c'est-à-dire $\text{Im}(J) = \overline{\text{Im}(J)}$. On est donc ramené à montrer que $\overline{\text{Im}(J)} = E''$, c'est-à-dire que :

pour tout $\varphi \in E''$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in E$ tel que $\|J(u) - \varphi\|_{E''} \leq \varepsilon$.

Soient donc $\varphi \in E''$ et $\varepsilon > 0$. On cherche $u \in E$ tel que $\|J(u) - \varphi\|_{E''} \leq \varepsilon$. Comme J est linéaire, on peut supposer sans perte de généralité que $\|\varphi\|_{E''} = 1$.

On choisit alors $\delta > 0$ donné par l'uniforme convexité de E , c'est-à-dire que ε et δ vérifient (2.1).

On rappelle que $1 = \|\varphi\|_{E''} = \sup\{\langle \varphi, f \rangle_{E'', E'}, f \in E', \|f\|_{E'} = 1\}$. Il existe donc $f \in E'$ tel que $\|f\|_{E'} = 1$ et

$$1 - \delta/2 \leq \langle \varphi, f \rangle_{E'', E'} \leq 1. \quad (2.4)$$

De même, comme $1 = \|f\|_{E'} = \sup\{\langle f, u \rangle_{E', E}, u \in E, \|u\|_E = 1\}$, il existe $u \in E$ tel que $\|u\|_E = 1$ et

$$1 - \delta/2 \leq \langle f, u \rangle_{E', E} \leq 1. \quad (2.5)$$

On va montrer que $\|J(u) - \varphi\|_{E''} \leq \varepsilon$.

On raisonne par l'absurde et on suppose que $\|J(u) - \varphi\|_{E''} > \varepsilon$.

Comme $\|J(u) - \varphi\|_{E''} = \sup\{\langle J(u) - \varphi, g \rangle_{E'', E'}, g \in E', \|g\|_{E'} = 1\} > \varepsilon$, il existe $g \in E'$ tel que $\|g\|_{E'} = 1$ et

$$\langle J(u) - \varphi, g \rangle_{E'', E'} > \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\langle J(u) - \varphi, g \rangle_{E'', E'} = \varepsilon + \eta, \text{ avec } \eta > 0. \quad (2.6)$$

On utilise maintenant le lemme 2.1 avec f, g, φ et $\zeta = \min\{\delta/2, \eta/2\}$. Il donne qu'il existe $v \in B_E$ tel que

$$|\langle f, v \rangle_{E', E} - \langle \varphi, f \rangle_{E'', E'}| \leq \zeta \leq \frac{\delta}{2} \quad (2.7)$$

$$|\langle g, v \rangle_{E', E} - \langle \varphi, g \rangle_{E'', E'}| \leq \zeta \leq \frac{\eta}{2}. \quad (2.8)$$

On va maintenant montrer que $\|u - v\|_E > \varepsilon$ et $\|(u + v)/2\|_E \geq 1 - \delta$ en contradiction avec le choix de δ donné par l'uniforme convexité.

Avec (2.6) et (2.8) (on rappelle que $\langle J(v), g \rangle_{E'', E'} = \langle g, v \rangle_{E', E}$), on obtient

$$\langle J(u) - J(v), g \rangle_{E'', E'} = \langle J(u) - \varphi, g \rangle_{E'', E'} + \langle \varphi - J(v), g \rangle_{E'', E'} \geq \varepsilon + \eta - \frac{\eta}{2} > \varepsilon,$$

comme J est une isométrie linéaire, ceci donne bien $\|u - v\|_E > \varepsilon$ (et donc par l'uniforme convexité $\|(u + v)/2\|_E < 1 - \delta$).

Pour montrer que $\|(u + v)/2\|_E \geq 1 - \delta$, on utilise (2.4)-(2.5) et (2.7). De (2.4)-(2.5) on déduit

$$\langle f, u \rangle_{E', E} \geq 1 - \frac{\delta}{2} \geq \langle \varphi, f \rangle_{E'', E'} - \frac{\delta}{2}. \quad (2.9)$$

D'autre part, (2.7) donne

$$\langle f, v \rangle_{E', E} \geq \langle \varphi, f \rangle_{E'', E'} - \frac{\delta}{2}. \quad (2.10)$$

En additionnant (2.9) et (2.10) on obtient (on rappelle aussi que $\langle \varphi, f \rangle_{E'', E'} \geq 1 - \delta/2$)

$$\|\frac{u+v}{2}\|_E = \|f\|_{E'} \|\frac{u+v}{2}\|_E \geq \langle f, \frac{u+v}{2} \rangle_{E', E} \geq \langle \varphi, f \rangle_{E'', E'} - \frac{\delta}{2} \geq 1 - \delta,$$

En contradiction avec l'uniforme convexité. \square

L'exemple principal d'espace de Banach réel uniformément convexe est $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, m)$ où (X, \mathcal{T}, m) est un espace mesuré et $1 < p < +\infty$. Ceci peut démontrer avec les inégalités de Clarkson (non démontrées ici).

Pour $2 \leq p < +\infty$ et $f, g \in L^p = L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, m)$,

$$\|\frac{f+g}{2}\|_{L^p}^p + \|\frac{f-g}{2}\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p).$$

Pour $1 < p < 2$ et $f, g \in L^p = L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, m)$,

$$\|\frac{f+g}{2}\|_{L^p}^{p/(p-1)} + \|\frac{f-g}{2}\|_{L^p}^{p/(p-1)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/(p-1)}(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p)^{1/(p-1)}.$$

Le théorème 2.1 donne donc que $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, m)$ est réflexif si $1 < p < +\infty$ (et (X, \mathcal{T}, m) est un espace mesuré). Il est alors assez facile de voir que $L^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{T}, m)$ est aussi réflexif si $1 < p < +\infty$ (car $L^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{T}, m)$ peut être vu comme deux "copies" de $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, m)$). Par contre, les espaces $L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, m)$ et $L^\infty_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, m)$ ne sont pas réflexifs, sauf cas particuliers.

On rappelle enfin que $L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, m)$ et $L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{T}, m)$ sont des espaces de Hilbert.

La réflexivité de $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, m)$ (et de $L^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{T}, m)$) donne un moyen pour caractériser le dual de l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, m)$ (et $L^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{T}, m)$) pour $1 < p < +\infty$.

On rappelle maintenant brièvement la définition des espaces L^p et cette caractérisation de $(L^p)'$.

Définition 2.2 (Les espaces \mathcal{L}^p). Soient (X, \mathcal{T}, m) un espace mesuré, $1 \leq p < +\infty$ et f une fonction définie de X dans K (avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), mesurable. On dit que $f \in \mathcal{L}^p_K = \mathcal{L}^p_K(X, \mathcal{T}, m)$ si $\int |f|^p dm < +\infty$. On pose alors :

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De manière analogue au cas $p = 1$ on quotiente les espaces \mathcal{L}_K^p par la relation d'équivalence “= p.p.” afin que l'application $f \mapsto \|f\|_p$ définisse une norme sur l'espace vectoriel des classes d'équivalence.

Définition 2.3 (Les espaces L^p). Soient (X, \mathcal{T}, m) un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$.

- 1) On définit l'espace $L_K^p(X, \mathcal{T}, m)$ (avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de \mathcal{L}_K^p pour la relation d'équivalence (= p.p.). En l'absence d'ambiguïté on notera L^p l'espace $L_K^p(X, \mathcal{T}, m)$ (avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).
- 2) Soit $F \in L_{\mathbb{R}}^p(X, \mathcal{T}, m)$. On pose $\|F\|_p = \|f\|_p$ si $f \in F$. (Cette définition est cohérente car ne dépend pas du choix de f dans F . On rappelle aussi que $F = \tilde{f} = \{g \in \mathcal{L}^p ; g = f \text{ p.p.}\}$.)

Proposition 2.1. Soient (X, \mathcal{T}, m) un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$. Alors : $L_K^p(X, \mathcal{T}, m)$, avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , est un espace de Banach, réel ou complexe selon que $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

Pour caractériser les espaces $(L^p)'$ on utilise l'inégalité de Hölder. On se limite pour simplicité au cas des Banach réels. La généralisation au cas des Banach complexes est facile.

Lemme 2.2 (Inégalité de Hölder). Soient (X, \mathcal{T}, m) un espace mesuré et $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $f \in L_{\mathbb{R}}^p(X, \mathcal{T}, m)$ et $g \in L_{\mathbb{R}}^q(X, \mathcal{T}, m)$. Alors, $fg \in L_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, m)$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (2.11)$$

Soient (X, \mathcal{T}, m) un espace mesuré et $p \in]1, +\infty[$, on pose $q = \frac{p}{p-1}$ (de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, q s'appelle le conjugué de p).

Soit $f \in L_{\mathbb{R}}^q$, on considère l'application :

$$\varphi_f : g \in L_{\mathbb{R}}^p \mapsto \int g f dm. \quad (2.12)$$

L'inégalité de Hölder montre que $\varphi_f(g)$ est effectivement bien définie pour $g \in L_{\mathbb{R}}^p$ et que φ_f est continue de $L_{\mathbb{R}}^p$ dans \mathbb{R} ; donc $\varphi_f \in (L_{\mathbb{R}}^p)'$. On peut aussi obtenir un majorant de la norme de φ_f car l'inégalité de Hölder donne

$$|\varphi_f(g)| \leq \|f\|_q \|g\|_p, \text{ pour tout } g \in L_{\mathbb{R}}^p,$$

d'où l'on déduit que $\|\varphi_f\|_{(L_{\mathbb{R}}^p)'} \leq \|f\|_q$.

On définit donc une application $\varphi : f \mapsto \varphi_f$ de $L_{\mathbb{R}}^q$ dans $(L_{\mathbb{R}}^p)'$. La définition de φ_f (formule (2.12)) montre que cette application est linéaire. Elle est continue. On montre maintenant que c'est une isométrie.

Proposition 2.2 (Injection de L^q dans $(L^p)'$). Soit (X, \mathcal{T}, m) un espace mesuré. Soient $p \in]1, +\infty[$ et $q = \frac{p}{p-1}$. L'application $\varphi : f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est définie par (2.12) est une application linéaire de $L_{\mathbb{R}}^q$ dans $(L_{\mathbb{R}}^p)'$. De plus, c'est une isométrie de $L_{\mathbb{R}}^q$ sur son image, c'est-à-dire que $\|\varphi_f\|_{(L_{\mathbb{R}}^p)'} = \|f\|_q$ pour tout $f \in L_{\mathbb{R}}^q$.

Démonstration de la proposition 2.2. On sait déjà que φ est une application linéaire de $L_{\mathbb{R}}^q$ dans $(L_{\mathbb{R}}^p)'$. On sait aussi que $\|\varphi_f\|_{(L_{\mathbb{R}}^p)'} \leq \|f\|_q$ pour tout $f \in L_{\mathbb{R}}^q$. Pour terminer la démonstration de cette proposition, Il suffit donc de montrer que, pour tout $f \in L_{\mathbb{R}}^q$,

$$\|\varphi_f\|_{(L_{\mathbb{R}}^p)'} \geq \|f\|_q. \quad (2.13)$$

Soit $f \in L_{\mathbb{R}}^q$. On suppose $f \neq 0$ (sinon (2.13) est immédiat). On confond f avec l'un de ses représentants, de sorte que $f \in \mathcal{L}^q = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^q(X, \mathcal{T}, m)$. Pour montrer 2.13, on définit $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = |f(x)|^{q-1} \text{sign}(f(x))$. Pour ce choix de g , on a

$$\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p} = \frac{1}{\|f\|_q^{\frac{q}{p}}} \int fg dm = \frac{1}{\|f\|_q^{\frac{q}{p}}} \|f\|_q^q = \|f\|_q,$$

car $q - \frac{q}{p} = 1$. On en déduit que

$$\|\varphi_f\|_{(L_K^p)'} = \sup\left\{\frac{|\varphi_f(h)|}{\|h\|_p}, h \in L_K^p \setminus \{0\}\right\} \geq \frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p} = \|f\|_q,$$

ceci donne (2.13). □

Il reste maintenant à montrer que l'application φ donnée dans la proposition 2.2 est surjective. On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 2.2 (Dualité $L^p - L^q$). Soient (X, \mathcal{T}, m) un espace mesuré, $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$ et $T \in (L_{\mathbb{R}}^p)'$. Alors, il existe un unique $f \in L_{\mathbb{R}}^q$ t.q.

$$T(g) = \int gf dm \text{ pour tout } g \in L_{\mathbb{R}}^p.$$

c'est-à-dire telle que $T = \varphi_f$ avec φ_f donnée par (2.12). On a donc montré la surjectivité de l'application $\varphi : L_{\mathbb{R}}^q \rightarrow (L_{\mathbb{R}}^p)'$ définie par $\varphi(f) = \varphi_f$ pour $f \in L_{\mathbb{R}}^q$. L'application φ est une isométrie entre $L_{\mathbb{R}}^q$ et $(L_{\mathbb{R}}^p)'$.

Démonstration du théorème 2.2. La démonstration de ce théorème, en utilisant la réflexivité de $L_{\mathbb{R}}^q$, fait l'objet de l'exercice 5.1. □

La situation pour $p = 1$ est différente. On définit d'abord l'espace $L_{\mathbb{R}}^{\infty}$.

Définition 2.4 (L'espace \mathcal{L}^{∞}). Soient (X, \mathcal{T}, m) un espace mesuré et f une fonction mesurable (de X dans \mathbb{R});

- 1) on dit que f est essentiellement bornée, ou encore que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\infty}$, s'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f| \leq C$ p.p.;
- 2) si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\infty}$, on pose $\|f\|_{\infty} = \inf\{C \in \mathbb{R}_+ ; |f| \leq C \text{ p.p.}\}$,
- 3) si $f \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\infty}$, on pose $\|f\|_{\infty} = +\infty$.

Définition 2.5. Soient (X, \mathcal{T}, m) un espace mesuré et

- 1) On définit $L_{\mathbb{R}}^{\infty} = L_{\mathbb{R}}^{\infty}(X, \mathcal{T}, m)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence sur $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\infty}$ pour la relation d'équivalence " $=$ p.p."
- 2) Soit $F \in L_{\mathbb{R}}^{\infty}$. On pose $\|F\|_{\infty} = \|f\|_{\infty}$ avec $f \in F$, de sorte que $F = \{g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\infty} ; g = f \text{ p.p.}\}$. (Cette définition est cohérente car $\|f\|_{\infty}$ ne dépend pas du choix de f dans F .)

Proposition 2.3. Soient (E, \mathcal{T}, m) un espace mesuré. L'espace $L_{\mathbb{R}}^{\infty}$ est un espace de Banach réel.

Le théorème 2.2 est alors vrai si $p = 1$, $q = \infty$ et que la mesure m est σ -finie.

Théorème 2.3 (Dualité $L^1 - L^{\infty}$). Soient (X, \mathcal{T}, m) un espace mesuré σ -fini. Pour $f \in L_{\mathbb{R}}^{\infty}$, on note φ_f l'élément de $(L_{\mathbb{R}}^1)'$ défini par

$$\varphi_f(g) = \int gf dm \text{ pour tout } g \in L_{\mathbb{R}}^1.$$

Alors l'application $f \mapsto \varphi_f$ est une isométrie entre $L_{\mathbb{R}}^{\infty}$ et $(L_{\mathbb{R}}^1)'$ (en particulier, elle est surjective).

Démonstration du théorème 2.3. La démonstration du fait que φ est une isométrie de $L_{\mathbb{R}}^{\infty}$ dans $(L_{\mathbb{R}}^1)'$ se fait de manière semblable à celle donnée dans la proposition 2.2, elle est non détaillée ici.

La démonstration du caractère surjectif de φ fait l'objet de l'exercice 5.2.

Noter que la démonstration du caractère surjectif de φ ne peut pas se faire en utilisant la réflexivité car l'espace $L_{\mathbb{R}}^1$ est en général non réflexif. \square

Si $p = \infty$ et $q = 1$, la proposition 2.2 est encore vraie mais l'application φ n'est, en général, pas surjective (sinon, l'espace L^1 serait réflexif). L'application φ est donc seulement une isométrie non surjective de L^1 dans $(L^{\infty})'$.

td2. Convergence faible, convergence faible-*

Exercice 2.1 (Unicité de la limite).

Soit E est un espace de Banach réel.

- 1) Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$, $x, y \in E$ t.q. $x_n \rightarrow x$ faiblement dans E et $x_n \rightarrow y$ faiblement dans E (quand $n \rightarrow \infty$). Montrer que $x = y$.
- 2) Soient $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$, $T, S \in E'$ t.q. $T_n \rightarrow T$ \star -faiblement dans E' et $T_n \rightarrow S$ \star -faiblement dans E' (quand $n \rightarrow \infty$). Montrer que $T = S$.
- 3) Soient $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$, $T, S \in E'$ t.q. $T_n \rightarrow T$ \star -faiblement dans E' et $T_n \rightarrow S$ faiblement dans E' (quand $n \rightarrow \infty$). Montrer que $T = S$.

Exercice 2.2 (Convergence faible et faible- \star impliquent bornée).

Soit E est un espace de Banach réel. Soient $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$, $T \in E'$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$, $x \in E$.

- 1) On suppose que $T_n \rightarrow T$ \star -faiblement dans E' . Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- 2) On suppose que $x_n \rightarrow x$ faiblement dans E . Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- 3) On suppose que $T_n \rightarrow T$ dans E' et $x_n \rightarrow x$ faiblement dans E .
Montrer que $\langle T_n, x_n \rangle_{E', E} \rightarrow \langle T, x \rangle_{E', E}$.
- 4) On suppose que $T_n \rightarrow T$ \star -faiblement dans E' et $x_n \rightarrow x$ dans E .
Montrer que $\langle T_n, x_n \rangle_{E', E} \rightarrow \langle T, x \rangle_{E', E}$.

Exercice 2.3 (Dans $\ell^1(\mathbb{N})$, convergence faible = convergence forte).

On pose :

$$\ell^{\infty} = \ell^{\infty}(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}; x_n \in \mathbb{R} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \sup\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\} < \infty\},$$

$$\ell^1 = \ell^1(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}; x_n \in \mathbb{R} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty\}.$$

Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^{\infty}$ on pose $\|x\|_{\infty} = \sup\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\}$.

Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ on pose $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$.

1) Montrer que ℓ^{∞} et ℓ^1 sont des espaces de Banach.

2) Soit $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^{\infty}$.

On définit $T_y : \ell^1 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$T_y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n, \forall x \in \ell^1.$$

(Remarque que la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ est bien convergente, pour tout $x \in \ell^1$.)

Montrer que $T_y \in (\ell^1)'$, et que $\|T_y\|_{(\ell^1)'} = \|y\|_{\infty}$.

3) Soit $T \in (\ell^1)'$. Montrer qu'il existe $y \in \ell^{\infty}$ tel que $T = T_y$.

[On pourra poser $y_n = T(e^{(n)})$, avec $e^{(n)} = (\delta_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$.]

4) Soit $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^1$ une suite telle que :

i) $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$, $x_i^{(n)} \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

ii) $\|x^{(n)}\|_1 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que l'on peut extraire de la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite $(x^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ et trouver une suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ telles que :

$$\alpha_k < \alpha_{k+1}, \sum_{i=0}^{\alpha_k} |x_i^{(n_k)}| \leq \frac{1}{5}, \sum_{i=\alpha_k+1}^{\alpha_{k+1}} |x_i^{(n_k)}| \geq \frac{3}{5}, \sum_{i=\alpha_{k+1}+1}^{\infty} |x_i^{(n_k)}| \leq \frac{1}{5}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

b. Montrer qu'il existe $y \in \ell^{\infty}$ telle que $T_y(x^{(n_k)}) \geq \frac{1}{5}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ ($(x^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ donnée en a.).

5) Soient $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^1$ et $x \in \ell^1$. Montrer que $x^{(n)} \rightarrow x$ faiblement dans ℓ^1 (c'est-à-dire $T(x^{(n)}) \rightarrow T(x)$ pour tout $T \in (\ell^1)'$) si et seulement si $x^{(n)} \rightarrow x$ dans ℓ^1 .

Exercice 2.4 (Convergences forte, faible et faible- \star).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par $f_n(t) = e^{int} e^{-t^2}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On note $L_{\mathbb{C}}^p(\mathbb{R})$ l'espace $L_{\mathbb{C}}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L_{\mathbb{C}}^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

2) Soit $\psi \in L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{int} \psi(t) dt \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

[Utiliser la continuité en moyenne dans L^1 , c'est-à-dire $\|\psi(\cdot + h) - \psi\|_1 \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.]

3) Soit $1 \leq p < \infty$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle faiblement dans $L_{\mathbb{C}}^p(\mathbb{R})$? La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle (fortement) dans $L_{\mathbb{C}}^p(\mathbb{R})$?

4) On identifie (voir cours) $L_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{R})$ au dual de $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R})$.

(a) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle \star -faiblement dans $L_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{R})$?

(b) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle (fortement) dans $L_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{R})$?

(c) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle faiblement dans $L_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{R})$?

[On pourra, par exemple, considérer l'application T de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans \mathbb{R} définie par

$\langle T, \varphi \rangle_{C_b, C_b} = \varphi(0)$ et la prolonger (par Hahn-Banach) sur tout $L_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{R})$.]

Exercice 2.5 (Convergence L^{∞} -faible donne convergence p.p.).

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R} . On note L^p l'espace $L_{\mathbb{R}}^p(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda)$.

Pour $x \in \Omega$ et $h > 0$, on pose $B(x, h) = \{y \in \Omega \text{ t.q. } |x - y| < h\}$ et on désigne par $|B(x, h)|$ la mesure de Lebesgue de $B(x, h)$. Pour $f \in L^1$, $x \in \Omega$ et $h > 0$, on pose

$$f_h(x) = \frac{1}{|B(x, h)|} \int_{B(x, h)} f(y) dy.$$

On dit que x est un point de Lebesgue de f si $f_h(x)$ a une limite dans \mathbb{R} quand $h \rightarrow 0$.

Si $x \in \Omega$, on pose $F_x = \{f \in L^{\infty} \text{ tel que } x \text{ est un point de Lebesgue de } f\}$.

1) Soit $x \in \Omega$. Pour $f \in F_x$ on pose $T_x(f) = \lim_{h \rightarrow 0} f_h(x)$. Montrer que F_x est un sous espace vectoriel de L^∞ et que T_x est une application linéaire continue de F_x , muni de la norme de L^∞ , dans \mathbb{R} . En déduire qu'il existe $\bar{T}_x \in (L^\infty)'$ telle que $\bar{T}_x(f) = T_x(f)$ pour tout $f \in F_x$.

Pour la suite de cet exercice, on admet que, si $f \in L^1$, presque tout point x de Ω est un point de Lebesgue de f et on a, pour presque tout $x \in \Omega$, $\lim_{h \rightarrow 0} f_h(x) = f(x)$ (ceci est démontré dans les cours d'intégration). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de L^∞ et $f \in L^\infty$. On suppose que $f_n \rightarrow f$ faiblement dans L^∞ , quand $n \rightarrow +\infty$.

2) Montrer que $f_n \rightarrow f$ p.p..

3) Montrer que $f_n \rightarrow f$ dans L^1 .

4) Soit $1 < p < \infty$. Montrer que $f_n \rightarrow f$ dans L^p .

Remarque : la convergence faible- \star dans L^∞ n'implique pas la convergence p.p.. On pourra essayer de construire un exemple.

Exercice 2.6 (Comparaison $\ell^p(\mathbb{N})$ - $\ell^q(\mathbb{N})$).

Pour $1 \leq p < +\infty$, $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}; x_n \in \mathbb{R} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$
 et pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$, $\|x\|_p = (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$.

Pour $p = \infty$, $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}; x_n \in \mathbb{R} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \sup\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\} < \infty\}$
 et pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$, $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

Avec cette norme, ℓ^p est, pour $1 \leq p \leq +\infty$, un espace de Banach (voir un cours d'intégration ou, pour $p = 1$ et $p = \infty$, l'exercice 2.3).

1) Soit $1 \leq p < q \leq +\infty$. Montrer que $\ell^p \subset \ell^q$ et que, pour tout $x \in \ell^p$,

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p.$$

Corrigé – On considère d'abord le cas $q < +\infty$.

Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$. On suppose $\|x\|_p = 1$, on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq 1$ et donc $|x_n|^q \leq |x_n|^p$. En sommant sur n , on en déduit

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^q \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p = 1,$$

et donc $x \in \ell^q$ et $\|x\|_q \leq 1$.

Soit maintenant $x \in \ell^p$, $x \neq 0$. Comme $\|\frac{x}{\|x\|_p}\|_p = 1$, on déduit du résultat précédent que $\frac{x}{\|x\|_p} \in \ell^q$ et $\|\frac{x}{\|x\|_p}\|_q \leq 1$. Ceci donne $x \in \ell^q$ et $\|x\|_q \leq \|x\|_p$.

On considère maintenant le cas $q = +\infty$.

Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $|x_m| \leq (\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p)^{1/p} = \|x\|_p$ et donc $x \in \ell^\infty$ et $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$.

2) Soit $1 \leq p \leq q < +\infty$. Montrer que ℓ^p est dense dans ℓ^q .

Corrigé –

On note B l'ensemble des suites réelles ayant seulement un nombre fini de termes non nuls. Il suffit alors de remarquer que $B \subset \ell^p$ et que B est dense dans ℓ^q (car si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i > n} |x_i|^q = 0$).

3) Soit $1 \leq p < +\infty$. Montrer que l'adhérence de ℓ^p dans ℓ^∞ est l'ensemble A défini par

$$A = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}; \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0\}.$$

En déduire que ℓ^p n'est pas dense dans ℓ^∞ .

Corrigé – L'ensemble A est une partie fermée de ℓ^∞ et c'est l'adhérence dans ℓ^∞ de la partie B introduite dans la question 2. Comme $B \subset \ell^p \subset A$, l'ensemble A est aussi l'adhérence de ℓ^p dans ℓ^∞ .

Comme $A \neq \ell^\infty$, ℓ^p n'est pas dense dans ℓ^∞ .

NB : Lorsque (X, \mathcal{T}, m) est une espace de mesure finie, on a toujours l'inégalité inverse, c'est-à-dire $L^p(X, \mathcal{T}, m) \subset L^q(X, \mathcal{T}, m)$ si $1 \leq q \leq p \leq +\infty$.

Exercice 2.7 (Caractérisation de la densité d'un s.e.v. d'un espace de Banach).

Soient E un espace de Banach réel et G un s.e.v. de E .

1) Montrer que $\bar{G} = E$ si et seulement si

$$(f \in E', \langle f, u \rangle_{E', E} = 0 \text{ pour tout } u \in G) \Rightarrow f = 0. \quad (2.14)$$

[Utiliser l'exercice 1.1.]

*Corrigé – La condition (2.14) peut s'écrire " $G \subset \text{Ker}(f) \Rightarrow \text{Ker}(f) = E$ "
Si $\bar{G} = E$, comme, pour tout $f \in E'$, $\text{Ker}(f)$ est fermé, on a bien $\text{Ker}(f) = E$.*

*Réciproquement, on suppose que, pour tout $f \in E'$, " $G \subset \text{Ker}(f) \Rightarrow \text{Ker}(f) = E$ "
On raisonne par l'absurde. Si $\bar{G} \neq E$, il existe $x \notin \bar{G}$. L'exercice 1.1 (deuxième item) montre alors qu'il existe $f \in E'$ tel que $\langle f, u \rangle_{E', E} \neq 0$ et $G \subset \text{Ker}(f)$, en contradiction avec l'hypothèse (car $u \notin \text{Ker}(f)$).*

2) On suppose maintenant que $E = F'$ (où F est un espace de Banach réel).

(a) On suppose F réflexif, Montrer que $\bar{G} = F'$ si et seulement si

$$(v \in F, \langle g, v \rangle_{F', F} = 0 \text{ pour tout } g \in G) \Rightarrow v = 0. \quad (2.15)$$

Corrigé – On note J l'injection canonique de F dans F'' (définition 1.2). La condition (2.15) peut s'écrire

$$(v \in F, \langle J(v), g \rangle_{F'', F'} = 0 \text{ pour tout } g \in G) \Rightarrow v = 0.$$

Comme F est réflexif, J est une isométrie entre F et F'' . cette dernière condition est donc équivalente à

$$(\varphi \in F'', \langle \varphi, g \rangle_{F'', F'} = 0 \text{ pour tout } g \in G) \Rightarrow \varphi = 0,$$

ce qui est équivalent à $\text{Ker}(G) = F'$ d'après la question 1.

(b) On ne suppose plus que F est réflexif. Donner un exemple pour lequel $\bar{G} \neq F'$ et pourtant (2.15) est vérifié, c'est-à-dire

$$(v \in F, \langle g, v \rangle_{F', F} = 0 \text{ pour tout } g \in G) \Rightarrow v = 0.$$

[On pourra prendre $F = \ell^1$ et, en identifiant $(\ell^1)'$ avec ℓ^∞ , $G = \ell^1$.]

Corrigé – Comme suggéré, on prend $F = \ell^1$ (et donc $(\ell^1)'$ identifié avec ℓ^∞) et $G = \ell^1$ (l'ensemble G est bien un s.e.v de ℓ^∞).

Soit $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ tel que $\langle g, v \rangle_{\ell^\infty, \ell^1} = 0$ pour tout $g \in \ell^\infty$. Soit $m \in \mathbb{N}$. En prenant $g = (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $g_n = 0$ si $n \neq m$ et $g_m = 1$, on en déduit que $v_m = 0$. on a donc $v = 0$. La condition (2.15) est donc vérifiée. Pourtant $\bar{G} \neq F'$ car $\bar{G} = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}; \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\}$ (exercice 2.6 question 3).

C3. Espaces séparables

Définition 3.1.

Soit E un espace de Banach. L'espace E est séparable si il contient une partie dénombrable dense.

Quelques rappels sur les cardinaux. Soient A, B deux ensembles :

- 1) On dit que $\text{card}A \leq \text{card}B$ si il existe une application injective de A dans B (on dit alors qu'il existe une injection de A dans B).
- 2) Théorème de Bernstein. On suppose qu'il existe une application injective de A dans B et une application injective de B dans A .
Alors, il existe une application φ bijective de A dans B (donc $\text{Im}\varphi = B$).
- 3) On dit que $\text{card}A = \text{card}B$ s'il existe une application φ bijective de A dans B .
- 4) Grâce au théorème de Bernstein, on a bien

$$(\text{card}A \leq \text{card}B \text{ et } \text{card}B \leq \text{card}A) \Rightarrow (\text{card}A = \text{card}B).$$

- 5) On a toujours $\text{card}\mathcal{P}(A) > \text{card}(A)$ (c'est-à-dire qu'il y a une injection de A dans $\mathcal{P}(A)$ mais pas de bijection).

Démonstration de l'item 5. Il est facile de construire une injection de A dans $\mathcal{P}(A)$, il suffit de considérer l'application $a \mapsto \{a\}$ (c'est-à-dire que à l'élément a de A , on associe la partie de A réduite à l'élément a). Pour montrer que $\text{card}\mathcal{P}(A) \neq \text{card}(A)$, on raisonne par l'absurde. On suppose qu'il y a une bijection, notée φ de A dans $\mathcal{P}(A)$ et on considère la partie P de $\mathcal{P}(A)$ définie par $P = \{a \in A; a \notin \varphi(a)\}$. Puisque φ est surjective il existe $a \in A$ tel que $P = \varphi(a)$ et la définition de P donne :

Si $a \notin P = \varphi(a)$, alors $a \in P$,

Si $a \in P = \varphi(a)$, alors $a \notin P$.

L'application φ ne peut pas être surjective. □

Définition 3.2.

Soit A un ensemble. L'ensemble A est dénombrable si $\text{card}A \leq \text{card}\mathbb{N}$, c'est-à-dire si il existe une injection de A dans \mathbb{N} .

Exemple 3.1. Quelques exemples.

- 1) \mathbb{Q} est dénombrable,
- 2) \mathbb{R} est non dénombrable,
- 3) $(A, B \text{ dénombrables}) \Rightarrow (A \times B \text{ dénombrable})$,
- 4) $(\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, A_n \text{ est dénombrable}) \Rightarrow (\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ est dénombrable})$.

Démonstration de l'item 4. On pose $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. On va construire une injection de A dans \mathbb{N} .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une injection φ_n de A_n dans \mathbb{N} .

Soit $x \in A$. On pose $n_x = \min\{n \in \mathbb{N}; x \in A_n\}$ (c'est-à-dire $x \in A_{n_x}$ et $x \notin A_n$ pour $n < n_x$).

Puis, on pose $\varphi(x) = 2^{n_x} 3^{\varphi_{n_x}(x)}$.

L'application φ est une injection de A dans \mathbb{N} . En effet, soit $x, y \in A$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, on a $n_x = n_y$ et $\varphi_{n_x}(x) = \varphi_{n_x}(y)$. Comme φ_{n_x} est injective, on en déduit $x = y$ et donc φ est injective. \square

A titre d'exemple, on étudie maintenant la séparabilité des espaces $\ell^p(\mathbb{N})$.

Définition 3.3. Soit $1 \leq p < +\infty$.

$\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}; x_n \in \mathbb{R} \text{ pour tout } n \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty\}$. Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$,

$$\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

$\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}; x_n \in \mathbb{R} \text{ pour tout } n \text{ et } \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}$. Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$,

$$\|x\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $\ell^p(\mathbb{N})$ est un espace de Banach réel.

(On peut d'ailleurs remarquer que $\ell^p(\mathbb{N})$ est un espace d'intégration, $\ell^p = L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ où m est la mesure du dénombrement, c'est-à-dire $m(A) = \text{card}(A)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.)

Proposition 3.1. Soit $1 \leq p < +\infty$. L'espace de Banach réel $\ell^p(\mathbb{N})$ est séparable.

Démonstration de la proposition 3.1.

On note ℓ^p l'espace $\ell^p(\mathbb{N})$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $A_n = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^p; x_i \in \mathbb{Q} \text{ pour tout } i \text{ et } x_i = 0 \text{ si } i \geq n\}$.

L'application $x \mapsto \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ est une bijection entre A_n et \mathbb{Q}^n . Ceci montre que A_n est dénombrable.

On pose $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. L'ensemble A est aussi dénombrable et on va montrer que A est dense dans ℓ^p (et donc ℓ^p est séparable).

Soit $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ et $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe $y \in A$ tel que $\|x - y\|_{\ell^p} \leq \varepsilon$.

Comme $\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p < +\infty$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^p \leq \varepsilon^p$. On définit $z \in \ell^p$ en prenant $z_i = x_i$ si $i < n$ et $z_i = 0$ si $i \geq n$ de sorte que

$$\|x - z\|_{\ell^p} = \left(\sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

Puis, comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , on peut choisir, pour $i < n$, $y_i \in \mathbb{Q}$ tel que $|z_i - y_i|^p \leq \varepsilon^p/n$ et, pour tout $i \geq n$, $y_i = 0$. On obtient ainsi $y \in A_n$ tel que $\|y - z\|_{\ell^p}^p = \sum_{i=0}^{n-1} |y_i - z_i|^p \leq \varepsilon^p$.

Par inégalité triangulaire $\|x - y\|_{\ell^p} \leq \|x - z\|_{\ell^p} + \|z - y\|_{\ell^p} \leq 2\varepsilon$.

On a bien montré que A est dense dans ℓ^p . \square

Proposition 3.2. L'espace de Banach réel $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable.

Démonstration de la proposition 3.2. On note ℓ^∞ l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

On pose $B = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}; x_i \in \{0, 1\} \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}\}$. L'ensemble B est une partie de ℓ^∞ .

Etape 1 On montre dans cette étape que B est non dénombrable.

On considère l'application $\varphi : x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto \{i \in \mathbb{N}; x_i = 1\}$. L'application φ est une bijection entre B et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Comme $\text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) > \text{card}(\mathbb{N})$, l'ensemble B est non dénombrable.

Etape 2 On montre maintenant que ℓ^∞ est non séparable.

Soit $A \subset \ell^\infty$, A dense dans ℓ^∞ . Pour montrer que A est non dénombrable (on en déduit que ℓ^∞ est non séparable) on va construire une injection ψ de B dans A (cela donnera $\text{card}(A) \geq \text{card}(B)$ et donc A non dénombrable).

Comme A est dense dans ℓ^∞ , on peut choisir, pour tout $x \in B$, un élément z_x de A tel que $\|x - z_x\|_{\ell^\infty} < 1/2$.

On définit alors ψ en posant $\psi(x) = z_x$.

L'application ψ est une application de B dans A . On va montrer qu'elle est injective.

Soit $x, y \in B$ tel que $z_x = \psi(x) = \psi(y) = z_y$. On en déduit

$$\|x - y\|_{\ell^\infty} \leq \|x - z_x\|_{\ell^\infty} + \|z_x - z_y\|_{\ell^\infty} + \|z_y - y\|_{\ell^\infty} < (1/2) + (1/2) = 1. \quad (3.1)$$

Or, pour tout $x, y \in B$, $x \neq y$ implique $\|x - y\|_{\ell^\infty} = 1$ (car il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $x_i \neq y_i$ et donc $|x_i - y_i| = 1$). L'inégalité (3.1) donne donc $x = y$. L'application ψ est injective.

Finalement $\text{card}(A) \geq \text{card}(B) > \text{card}(\mathbb{N})$ et donc tout ensemble A dense dans ℓ^∞ est non dénombrable. L'espace ℓ^∞ est non séparable. \square

Par des méthodes voisines de celles que nous venons de voir pour les espaces ℓ^p , on peut démontrer des résultats similaires pour les espaces L^p . Nous les donnons ci-après.

Proposition 3.3. Soit $1 \leq p < +\infty$ et $d \geq 1$. L'espace de Banach réel $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ est séparable.

Démonstration de la proposition 3.3. On donne brièvement la preuve pour $d = 1$. L'adaptation au cas $d > 1$ est assez facile à deviner. La preuve se fait en deux étapes. La deuxième étape est voisine de la preuve donnée pour la proposition 3.1. La première étape est très importante pour démontrer d'autres propriétés des espaces L^p . Nous donnons l'une de ces conséquences dans le théorème 3.1.

On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

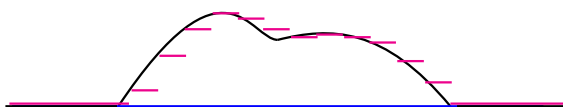
Etape 1. Densité de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans L^p .

Le point clé de cette étape consiste à approcher d'aussi près que l'on veut (en norme L^p) la fonction $f = 1_A$, avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(A) < +\infty$, par une fonction continue à support compact. Pour montrer cette propriété, on commence par remarquer qu'il suffit de considérer le cas où A est borné. Pour A borné, on utilise alors la régularité de la mesure de Lebesgue qui donne pour tout $\varepsilon > 0$ l'existence d'un ouvert O et d'un compact K tels que $K \subset A \subset O$ et $\lambda(O \setminus K) \leq \varepsilon$ (pour approcher 1_A , on construit alors un élément $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, [0, 1])$ tel que $\varphi = 1$ sur K et $\varphi = 0$ sur $O^c = \mathbb{R} \setminus O$).

On considère ensuite le cas où f est une fonction étagée positive et dans L^p (c'est alors une combinaison linéaire finie de fonctions du type 1_A), puis le cas f mesurable positive et dans L^p (c'est une suite croissante de fonctions étagées positives) et enfin le cas $f \in L^p$ en décomposant $f = f^+ - f^-$.

Etape 2. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $A_{N,n}$ l'ensemble des fonctions f qui ne prennent que des valeurs rationnelles, sont nulles hors de $] -N, N[$ et constantes sur chaque intervalle $]i/n, (i+1)n[$, $i \in \mathbb{Z}$, et on pose $B_N = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_{N,n}$ et $A = \cup_{N \in \mathbb{N}} B_N$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $A_{N,n}$ est dénombrable (car en bijection avec \mathbb{Q}^{2nN}). L'ensemble A est donc aussi dénombrable. Le fait que l'on puisse approcher $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en norme L^p d'aussi près que l'on veut par un élément de A découle alors de la continuité uniforme de f et de la densité de Q dans \mathbb{R} .



$f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en noir et $\varphi \in A$ en magenta

□

Proposition 3.4. *L'espace de Banach réel $L_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ n'est pas séparable.*

Démonstration de la proposition 3.4. Pour $d = 1$, la preuve est très voisine de celle donnée pour $l^{\infty}(\mathbb{N})$. L'ensemble B de la preuve de la proposition 3.2 est ici l'ensemble des fonctions qui ne prennent (presque partout) que les valeurs 1 ou 0 et qui sont (presque partout) constantes sur chaque intervalle $]n, n + 1[$, $n \in \mathbb{N}$. L'adaptation au cas $d > 1$ est ici aussi facile à deviner. □

Pour conclure ce cours C3, nous donnons une conséquence importante de la première étape de la preuve de la proposition 3.3.

Théorème 3.1 (Continuité en moyenne dans L^p , $p < +\infty$).

Soient $d \geq 1$, $1 \leq p < +\infty$ et $f \in L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Alors

$$\|f(\cdot + h) - f\|_p \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Démonstration du théorème 3.1.

Etape 1. Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $h \in \mathbb{R}^d$, $|h| \leq 1$ (on désigne ici par $|\cdot|$ la norme euclidienne dans \mathbb{R}^d). Il existe $a > 0$ tel que $f = 0$ hors de la boule de centre 0 et de rayon a . On remarque alors que

$$\int |f(x+h) - f(x)|^p dx = \lambda_d(B_{a+1}) \sup_{y \in \mathbb{R}^d} |f(y+h) - f(y)|^p,$$

où B_{a+1} désigne la boule de centre 0 et rayon $a + 1$.

Comme f est uniformément continue, on en déduit que $\|f(\cdot + h) - f\|_p \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Etape 2. Pour conclure, il suffit d'utiliser la densité de $C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ dans $L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ et l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue. En effet, si $f \in L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ et $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \|f(\cdot + h) - f\|_p &\leq \|f(\cdot + h) - \varphi(\cdot + h)\|_p + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_p + \|\varphi - f\|_p \\ &= 2\|\varphi - f\|_p + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_p. \end{aligned}$$

Soient $f \in L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ et $\varepsilon > 0$. On choisit d'abord $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $2\|\varphi - f\|_p \leq \varepsilon$. Ceci est possible grâce à la densité de $C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ dans $L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ (vue à la première étape de la

preuve de la proposition 3.3). Puis, grâce à première étape, il existe $\eta > 0$ tel que $\|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_p \leq \varepsilon$ si $|h| \leq \eta$ et donc

$$|h| \leq \eta \Rightarrow \|f(\cdot + h) - f\|_p \leq 2\varepsilon.$$

Ceci est bien la propriété recherchée. □

td3. Séparabilité, Réflexivité

Exercice 3.1 (Espace $L^p(\mathbb{R})$).

- 1) Soit $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $L^p(\mathbb{R})$ est-il séparable ?
- 2) Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^d ($d \geq 1$) et $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est-il séparable ?

Exercice 3.2 (Espaces de fonctions continues).

- 1) L'espace $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est-il séparable ?
- 2) L'espace $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est-il séparable ?

Exercice 3.3 (Suite dans le dual d'un espace de Banach non séparable).

- 1) On note E l'espace $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donner une suite bornée du dual de E n'admettant aucune sous suite \star -faiblement convergente.

[On pourra considérer la suite T_n de E' définie par $\langle T_n, f \rangle_{E', E} = f(n)$.

(Vérifier d'abord que $T_n \in E'$.)]

Corrigé – Soit $n \in \mathbb{N}$.

L'application T_n est bien linéaire. Elle est continue car $|f(n)| \leq \|f\|_{C_b} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. On a donc $T_n \in E'$ et on remarque aussi que $\|f\|_{E'} \leq 1$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_p par

$$\begin{aligned} f_p(x) &= 0 \text{ si } x \notin [p-1, p+1], \\ f_p(x) &= x - p + 1 \text{ si } x \in [p-1, p], \\ f_p(x) &= p + 1 - x \text{ si } x \in]p, p+1]. \end{aligned}$$

En prenant $f = \sum_{p \in \mathbb{N}} f_{2p}$, on a $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et la suite $(\langle T_n, f \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas car

$$\langle T_n, f \rangle_{E', E} = f(n) = 1 \text{ si } n \text{ est pair et } 0 \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Un raisonnement analogue montre que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne contient aucune sous suite \star -faiblement convergente. En effet, soit φ une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . En prenant $f = \sum_{p \in \mathbb{N}} f_{\varphi(2p)}$, la suite $(\langle T_{\varphi(n)}, f \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas car $\langle T_{\varphi(n)}, f \rangle_{E', E} = f(\varphi(n)) = 1$ si n est pair et 0 si n est impair.

- 2) La suite donnée à la question 1 est aussi une suite du dual de $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cette suite admet-elle une sous suite \star -faiblement convergente ?

Corrigé – La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge \star -faiblement vers 0 car $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$ si $f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarque : De la question 1, on peut aussi déduire que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas séparable car nous verrons qu'une suite bornée du dual d'un espace de Banach séparable admet une sous suite \star -faiblement convergente.

Exercice 3.4 (Séparabilité de E versus Séparabilité de E').

- 1) Donner un exemple d'espace de Banach séparable dont le dual n'est pas séparable.
- 2) Soit E une espace de Banach. On suppose que E' est séparable. Montrer que E est séparable.

Corrigé – Soit $A = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ une famille dénombrable dense dans E' . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $u_n \in E$ tel que $\|u_n\|_E \leq 1$ et $\langle f_n, u_n \rangle_{E',E} \geq \|f_n\|_{E'}/2$.

On note $F = \text{vect}\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ (c'est-à-dire que F est l'ensemble des combinaisons linéaires finis d'éléments de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$). On note aussi $F_{\mathbb{Q}} = \text{vect}_{\mathbb{Q}}\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ (c'est-à-dire que $F_{\mathbb{Q}}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finis à coefficients dans \mathbb{Q} d'éléments de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$). Comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , il est facile de voir que $F_{\mathbb{Q}}$ est dense dans F . Puis, comme \mathbb{Q} est dénombrable il est aussi facile de voir que $F_{\mathbb{Q}}$ est dénombrable (on utilise encore ici le fait qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable).

Pour conclure cet exercice il suffit donc de démontrer que F est dense dans E , c'est-à-dire $\bar{F} = E$.

Soit $u \in E$. On raisonne par l'absurde et on suppose donc que $u \notin \bar{F}$. D'après l'exercice 1 du td 1, il existe alors $g \in E'$ tel que

$$\begin{aligned} \langle g, v \rangle_{E',E} &= 0 \text{ pour tout } v \in F, \\ \langle g, u \rangle_{E',E} &\neq 0. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme A est dense dans E' , il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|g - f_n\|_{E'} \leq \varepsilon$.

On remarque alors que, comme $\langle g, u_n \rangle_{E',E} = 0$ et $\|u_n\|_E \leq 1$,

$$\frac{\|f_n\|_{E'}}{2} \leq \langle f_n, u_n \rangle_{E',E} = \langle f_n - g, u_n \rangle_{E',E} + \langle g, u_n \rangle_{E',E} \leq \|f_n - g\|_{E'} \leq \varepsilon.$$

On en déduit que $\|g\|_{E'} \leq \|g - f_n\|_{E'} + \|f_n\|_{E'} \leq 3\varepsilon$, et donc, comme ε est arbitraire, $g = 0$, en contradiction avec $\langle g, u \rangle_{E',E} \neq 0$.

On a bien ainsi montré de $u \in \bar{F}$.

Exercice 3.5 (Réflexivité).

- 1) soient E et F deux espaces de Banach. On suppose qu'ils sont isométriques, c'est-à-dire qu'il existe J linéaire bijective de E dans F et conservant la norme. Montrer que E est réflexif si et seulement si F est réflexif.

Corrigé – On suppose E réflexif et on va montrer que F est réflexif. et on note K l'application J^{-1} . Elle est linéaire bijective de F dans E et conserve la norme.

Soit $v \in F''$. On cherche $y \in F$ t.q. $v = J_F(y)$ où J_F est l'injection vue en cours de F dans F'' .

Pour cela on considère l'application u de E' dans \mathbb{R} définie par $f \mapsto \langle v, f \circ K \rangle_{F'',F'}$. Cette application est bien définie car $f \circ K \in F'$. On a $u \in E''$ (et $\|u\|_{E''} \leq \|v\|_{F''}$). Comme E est réflexif, il existe $x \in E$ tel que $u = J_E(x)$ où J_E est l'injection vue en cours de E dans E'' . Il existe alors $y \in F$ tel que $x = K(y)$. ceci donne

$$\langle v, f \circ K \rangle_{F'',F'} = \langle u, f \rangle_{E'',E'} = \langle J_E(x), f \rangle_{E'',E'} = \langle f, x \rangle_{E',E} = \langle f, K(y) \rangle_{E',E} = \langle f \circ K, y \rangle_{F',F}.$$

Comme $f \circ K$ est arbitraire dans F' , ceci signifie que $v = J_F(y)$.

- 2) Soit F un s.e.v. fermé d'un espace de Banach réflexif. Montrer que F est aussi un espace de Banach réflexif.
- 3) Montrer que l'espace de Banach E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.

Corrigé – Pour $F = E$ et $F = E'$, on note J_F est l'injection vue en cours de F dans F'' .

On suppose E' réflexif. On veut montrer que E est réflexif. On raisonne par l'absurde. Si $\text{Im}(J_E) \neq E''$, on choisit $\varphi \in E''$ tel que $\varphi \notin \text{Im}(J_E)$. Comme $\text{Im}(J_E)$ est un s.e.v. fermée de E'' , Il existe alors $T \in E'''$ tel

que $T = 0$ sur $\text{Im}(J_E)$ et $\langle T, \varphi \rangle_{E''', E''} = 1$ (ceci a été montré dans l'exercice 1 du td 1). Mais, comme E' est réflexif il existe $f \in E''$ tel que $T = J_{E'}(f)$, c'est-à-dire

$$\langle T, \psi \rangle_{E''', E''} = \langle \psi, f \rangle_{E'', E'} \text{ pour tout } \psi \in E''.$$

On a donc $\langle \psi, f \rangle_{E'', E'} = 0$ pour tout $\psi \in \text{Im}(J_E)$, c'est-à-dire

$$\langle f, u \rangle_{E', E} = 0, \text{ pour tout } u \in E.$$

Ceci donne donc $f = 0$, en contradiction avec $\langle \varphi, f \rangle_{E'', E'} = \langle T, \varphi \rangle_{E''', E''} = 1$. On a donc $\text{Im}(J_E) = E$, c'est-à-dire E réflexif.

Réciproquement, si E est réflexif, E'' est réflexif (car il y a une isométrie entre E et E'') et donc E' est réflexif (grâce à la preuve précédente).

- 4) Soit E un espace de Banach. Montrer que E est réflexif séparable si et seulement si E' est réflexif séparable.
- 5) Soit F un s.e.v. fermé d'un espace de Banach réflexif séparable. Montrer que F est aussi un espace de Banach réflexif séparable.

Exercice 3.6 (Non réflexité de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

On note E l'espace $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ou l'espace $C([-1, 1], \mathbb{R})$ et on le munit de sa norme naturelle (pour laquelle c'est un espace de Banach).

On définit la fonction f_n par

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 0 \text{ si } x \notin [-1/n, 1/n], \\ f_n(x) &= nx + 1 \text{ si } x \in [-1/n, 0], \\ f_n(x) &= 1 - nx \text{ si } x \in]0, 1/n]. \end{aligned}$$

On note $F = \{T \in E', \text{ t.q. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T, f_n \rangle_{E', E} \text{ existe et appartient à } \mathbb{R}\}$.

- 1) Montrer que l'application $T \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T, f_n \rangle_{E', E}$ est linéaire continue de F dans \mathbb{R} .

Corrigé – On note v l'application $T \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T, f_n \rangle_{E', E}$ de F dans \mathbb{R} .

L'ensemble F est clairement un s.e.v. de E' et l'application v est linéaire de F dans \mathbb{R} .

Pour montrer sa continuité, il suffit de remarquer que $|\langle T, f_n \rangle_{E', E}| \leq \|T\|_{E'} \|f_n\|_E = \|T\|_{E'}$. Ceci montre que $v \in F'$ et $\|v\|_{F'} \leq 1$.

Pour voir que $\|v\|_{F'} = 1$, il suffit de considérer T définie par $\langle T, f \rangle_{E', E} = f(0)$. Pour cet élément T de F on a $\langle v, T \rangle_{F', F} = 1 = \|T\|_F$.

- 2) Montrer qu'il existe $u \in E''$ t.q. $\|u\|_{E''} = 1$ et, pour tout $T \in F$, $\langle u, T \rangle_{E'', E'} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T, f_n \rangle_{E', E}$.

Corrigé – C'est une application directe de Hahn-Banach (analytique).

- 3) Montrer que pour tout $f \in E$, il existe $T \in E'$ t.q. $\langle u, T \rangle_{E'', E'} \neq \langle T, f \rangle_{E', E}$ (avec u défini à la question précédente).

[On pourra choisir un point convenable a et prendre T défini par $\langle T, f \rangle_{E', E} = f(a)$.]

En déduire que E n'est pas réflexif.

Corrigé – Soit $f \in E$. On suppose $f \neq 0$. Il existe $a \neq 0$ tel que $f(a) \neq 0$. En prenant T définie par $\langle T, f \rangle_{E', E} = f(a)$ (on a bien $T \in E'$), $\langle T, f \rangle_{E', E} = f(a) \neq 0$. Mais $T \in F$ et $\langle u, T \rangle_{E'', E'} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T, f_n \rangle_{E', E} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a) = 0$.

Enfin, on suppose $f = 0$. En prenant T définie par $\langle T, f \rangle_{E', E} = f(0)$, on a $\langle T, f \rangle_{E', E} = f(0) = 0$ et $\langle u, T \rangle_{E'', E'} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T, f_n \rangle_{E', E} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 1$.

Ceci montre que $u \notin \text{Im}(J_E)$, où J_E est l'injection vue en cours de E dans E'' , et donc que E n'est pas réflexif.

NB : On peut montrer que $F = E'$, mais c'est inutile pour cet exercice. On peut aussi montrer qu'un élément T de E' induit une mesure signée μ sur les boréliens et que $u(T) = \mu(\{0\})$ (cours d'intégration).

Exercice 3.7 (Convergence faible et nonlinéarité).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^2(]0, 1[)$.

Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que φ croissante et il existe C t.q. $|\varphi(s)| \leq C(|s| + 1)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

On suppose que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $L^2(]0, 1[)$ et $\varphi(u_n) \rightarrow f$ faiblement dans $L^2(]0, 1[)$.

- 1) On suppose dans cette question que $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(]0, 1[)$. Montrer que $\varphi(u) = f$ p.p..
- 2) (Question difficile, facultative) Donner un exemple (choisir φ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$) pour lequel $\varphi(u) \neq f$.
- 3) (Astuce de Minty) On suppose dans cette question que $\int \varphi(u_n) u_n dx \rightarrow \int f u dx$.
 - (a) Soit $v \in L^2(]0, 1[)$. Montrer que $\int (f - \varphi(v))(u - v) \geq 0$.
 - (b) Montrer que $\varphi(u) = f$ p.p..
[Choisir $v = u + tw$, avec $w \in L^2$ et $t > 0$, et faire tendre t vers 0.]
- 4) On suppose dans cette question que $\varphi(u_n) \rightarrow f$ dans $L^2(]0, 1[)$. Montrer que $\varphi(u) = f$ p.p..

C4. Compacité faible- \star et compacité faible

On commence ce cours par le théorème fondamental sur la convergence faible- \star .

Théorème 4.1 (Compacité faible- \star des bornés du dual d'un Banach séparable, Banach-Alaoglu séquentiel). Soient E un espace de Banach séparable et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite bornée de E' . Alors il existe une sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ (c'est-à-dire une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante) et il existe $f \in E'$ tels que

$$f_{\varphi(n)} \rightarrow f \text{ } \star\text{-faiblement dans } E' \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

(c'est-à-dire que pour tout $u \in E$, $\langle f_{\varphi(n)}, u \rangle_{E', E} \rightarrow \langle f, u \rangle_{E', E}$ quand $n \rightarrow +\infty$.)

Démonstration du théorème 4.1. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de E' . Donc, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_{E'} \leq C$.

Soit $u \in E$. Comme $|\langle f_n, u \rangle_{E', E}| \leq \|f_n\|_{E'} \|u\|_E \leq C \|u\|_E$, la suite $(\langle f_n, u \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans K , avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ selon que le Banach est réel ou complexe. Il existe donc une sous suite, c'est-à-dire une application φ_u strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , et $\ell_u \in K$ tels que

$$\langle f_{\varphi_u(n)}, u \rangle_{E', E} \rightarrow \ell_u \text{ (dans } K) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Le problème est que cette sous suite dépend de u . La séparabilité de E va nous permettre de trouver une sous suite indépendante de u grâce à une technique due, semble-t-il, à Cantor, appelée "procédé diagonal".

Comme l'espace E est séparable, on peut choisir une partie A (de E) dénombrable et dense. On peut indexer cette partie A par \mathbb{N} , de sorte que $A = \{u_p, p \in \mathbb{N}^*\}$.

Étape 1, procédé diagonal.

Dans cette étape, on construit d'abord, par récurrence, une suite $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ d'applications strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} et une suite $(\ell_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\langle f_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \dots \circ \varphi_p(n)}, u_p \rangle_{E', E} \rightarrow \ell_p \text{ (dans } K) \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (4.1)$$

Initialisation. Comme la suite $(\langle f_n, u_1 \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans K , on peut en extraire une sous suite convergente, c'est-à-dire qu'il existe φ_1 strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , et $\ell_1 \in K$ vérifiant (4.1) pour $p = 1$ ($\varphi_1 \circ \varphi_2 \dots \circ \varphi_p$ est alors réduit à φ_1).

Itération. Soit $p \geq 1$. On suppose $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ et ℓ_1, \dots, ℓ_p construits.

Comme la suite $(\langle f_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \dots \circ \varphi_p(n)}, u_{p+1} \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans K , on peut en extraire une sous suite convergente, c'est-à-dire qu'il existe φ_{p+1} strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , et $\ell_{p+1} \in K$ vérifiant (4.1) pour $p + 1$ au lieu de p . La récurrence est terminée.

On définit maintenant ψ de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* par $\psi(n) = \varphi_1 \circ \varphi_2 \dots \circ \varphi_n(n)$

On remarque que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(f_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est extraite de la suite $(f_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \dots \circ \varphi_p}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ à partir du rang p (c'est-à-dire que $\{\psi(n), n \geq p\} \subset \text{Im}(\varphi_1 \circ \varphi_2 \dots \circ \varphi_p)$) et donc

$$\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}^*, \langle f_{\psi(n)}, u_p \rangle_{E', E} \rightarrow \ell_p \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (4.2)$$

On peut remarquer aussi que ψ est bien strictement croissante, ceci découle du fait que, pour tout $n \geq 2$, $\varphi_n(n) \geq n$ (car φ_n est strictement croissante) et $\varphi_1 \circ \varphi_2 \dots \circ \varphi_{n-1}$ est strictement croissante. Ceci donne

$$\psi(n) = \varphi_1 \circ \varphi_2 \dots \circ \varphi_n(n) \geq \varphi_1 \circ \varphi_2 \dots \circ \varphi_{n-1}(n) > \varphi_1 \circ \varphi_2 \dots \circ \varphi_{n-1}(n-1) = \psi(n-1).$$

Etape 2, convergence simple de la suite $(f_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}^}$.*

Dans cette étape, on montre que la suite $(\langle f_{\psi(n)}, u \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge (dans K) pour tout $u \in E$. Pour cela on va utiliser la densité de A dans E .

Soit $u \in E$ et soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, en utilisant $\|f_n\|_{E'} \leq C$,

$$\begin{aligned} & |\langle f_{\psi(n)}, u \rangle_{E', E} - \langle f_{\psi(m)}, u \rangle_{E', E}| \leq \\ & |\langle f_{\psi(n)}, u \rangle_{E', E} - \langle f_{\psi(n)}, u_p \rangle_{E', E}| + |\langle f_{\psi(n)}, u_p \rangle_{E', E} - \langle f_{\psi(m)}, u_p \rangle_{E', E}| + |\langle f_{\psi(m)}, u_p \rangle_{E', E} - \langle f_{\psi(m)}, u \rangle_{E', E}| \\ & \leq C\|u - u_p\|_E + |\langle f_{\psi(n)}, u_p \rangle_{E', E} - \langle f_{\psi(m)}, u_p \rangle_{E', E}| + C\|u - u_p\|_E \\ & \leq 2C\|u - u_p\|_E + |\langle f_{\psi(n)}, u_p \rangle_{E', E} - \langle f_{\psi(m)}, u_p \rangle_{E', E}|. \end{aligned}$$

Comme A est dense dans E , on peut choisir $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $2C\|u - u_p\|_E \leq \varepsilon$. Puis, comme la suite $(\langle f_{\psi(n)}, u_p \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy (car convergente par l'étape 1), il existe n_0 tel que

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |\langle f_{\psi(n)}, u_p \rangle_{E', E} - \langle f_{\psi(m)}, u_p \rangle_{E', E}| \leq \varepsilon.$$

On obtient donc finalement

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |\langle f_{\psi(n)}, u \rangle_{E', E} - \langle f_{\psi(m)}, u \rangle_{E', E}| \leq 2\varepsilon.$$

La suite $(\langle f_{\psi(n)}, u \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc de Cauchy (dans K) et donc elle converge vers une limite que l'on note L_u .

On a ainsi obtenu que pour tout $u \in E$

$$\langle f_{\psi(n)}, u \rangle_{E', E} \rightarrow L_u \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (4.3)$$

Etape 3, continuité de la limite.

Il nous reste à montrer que l'application $u \mapsto L_u$ est linéaire continue de E dans K , c'est-à-dire qu'il existe $f \in E'$ tel que $L_u = \langle f, u \rangle_{E', E}$.

La linéarité de $u \mapsto L_u$ est immédiate (la limite d'applications linéaires est toujours une application linéaire). La continuité de $u \mapsto L_u$ découle du fait que (pour tout $u \in E$)

$$|\langle f_{\psi(n)}, u \rangle_{E', E}| \leq \|f_{\psi(n)}\|_{E'} \|u\|_E \leq C\|u\|_E,$$

et donc, quand $n \rightarrow +\infty$, $|L_u| \leq C\|u\|_E$, l'application $u \mapsto L_u$ est donc un élément de E' . On note f cet élément de E' et (4.3) donne $f_{\psi(n)} \rightarrow f$ \star -faiblement dans E' quand $n \rightarrow +\infty$. La preuve du théorème 4.1 est ainsi terminée. \square

L'hypothèse de séparabilité pour le théorème 4.1 est importante. L'exercice 3.3 donne un exemple d'une suite bornée du dual d'une espace de Banach ne contenant aucune sous suite \star -faiblement convergente (cet espace de Banach est donc non séparable, il s'agit dans l'exercice 3.3 de l'espace $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

Avec le théorème 4.1, on obtient des résultats semblables pour la convergence faible.

Corollaire 4.1 (Compacité faible séquentielle des bornés d'un Banach réflexif séparable).

Soient E un espace de Banach réflexif séparable et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite bornée de E .

Alors il existe une sous suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ (c'est-à-dire une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante) et il existe $u \in E$ tels que

$$u_{\varphi(n)} \rightarrow u \text{ faiblement dans } E \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

(c'est-à-dire que pour tout $f \in E'$, $\langle f, u_{\varphi(n)} \rangle_{E', E} \rightarrow \langle f, u \rangle_{E', E}$ quand $n \rightarrow +\infty$.)

Démonstration du corollaire 4.1. E est un espace de Banach réflexif séparable et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E . On veut montrer qu'il existe une sous suite faiblement convergente dans E .

On rappelle l'existence de l'injection naturelle de E dans E'' notée J . L'application J est linéaire et isométrique. Comme E est réflexif; $\text{Im}(J) = E''$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = J(u_n)$ de sorte que $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de E'' (car $\|J_n\|_{E''} = \|u_n\|_E$). Comme E est réflexif séparable, on va montrer que l'espace E'' est séparable. Soit $A \subset E$ dénombrable dense dans E . On note $B = \{J(u), u \in A\}$. L'ensemble B est donc une partie dénombrable de E'' . Soit $\psi \in E''$, comme E est réflexif, il existe $v \in E$ tel que $J(v) = \psi$. Comme A est dense dans E , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $w \in A$ tel que $\|v - w\|_E \leq \varepsilon$ et donc $\|J(v) - J(w)\|_{E''} = \|J(v - w)\|_{E''} = \|v - w\|_E \leq \varepsilon$. Ceci prouve que B est dense dans E'' et donc que E'' est séparable.

Le fait que E'' est séparable implique que E' est séparable. En effet, l'exercice 3.4 donne que la séparabilité du dual d'un Banach (ici E'') implique la séparabilité du Banach (ici E'). (Noter que la réciproque est fausse.)

Comme E' est séparable, on peut appliquer le théorème 4.1. Il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante et il existe $\psi \in E''$ tels que

$$J_{\varphi(n)} \rightarrow \psi \text{ } \star\text{-faiblement dans } E'' \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Comme E est réflexif, il existe $u \in E$ tel que $J(u) = \psi$. On a ainsi, pour tout $f \in E'$, avec la définition de J , quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\langle f, u_{\varphi(n)} \rangle_{E', E} = \langle J_{\varphi(n)}, f \rangle_{E'', E'} \rightarrow \langle \psi, f \rangle_{E'', E'} = \langle J(u), f \rangle_{E'', E'} = \langle f, u \rangle_{E', E},$$

ce qui signifie que $u_{\varphi(n)} \rightarrow u$ faiblement dans E quand $n \rightarrow +\infty$. □

L'hypothèse "séparable" est inutile dans le corollaire 4.1 mais la démonstration demande un petit travail supplémentaire (corollaire 4.2).

Corollaire 4.2 (Compacité faible séquentielle des bornés d'un Banach réflexif).

Soient E un espace de Banach réflexif et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite bornée de E .

Alors il existe une sous suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ (c'est-à-dire une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante) et il existe $u \in E$ tels que

$$u_{\varphi(n)} \rightarrow u \text{ faiblement dans } E \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

(c'est-à-dire que pour tout $f \in E'$, $\langle f, u_{\varphi(n)} \rangle_{E', E} \rightarrow \langle f, u \rangle_{E', E}$ quand $n \rightarrow +\infty$.)

Démonstration du corollaire 4.2.

E est un espace de Banach réflexif et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E . On veut montrer qu'il existe une sous suite faiblement convergente dans E . On ne peut pas appliquer le corollaire 4.1 car E n'est pas supposé séparable. On donne brièvement la méthode pour se ramener au corollaire 4.1.

L'idée est de poser $G = \text{vect}\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $F = \bar{G}$. L'espace F est donc un s.e.v. fermé de E . On en déduit que F est aussi un Banach réflexif (on démontrera dans l'exercice 7.2 qu'un s.e.v. fermé d'un Banach réflexif est un Banach réflexif).

On remarque ensuite que F est séparable. ceci peut se montrer en posant

$$F_{\mathbb{Q}} = \left\{ \sum_{n \in I} \alpha_n u_n, \alpha_n \in \mathbb{Q} \text{ pour tout } n \in I, \text{card}(I) < +\infty \right\}$$

et en montrant que $F_{\mathbb{Q}}$ est une partie de F , dénombrable et dense dans F .

Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de F (qui est réflexif séparable), on peut appliquer le corollaire 4.1, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante, et il existe $u \in F$ tels que

$$u_{\varphi(n)} \rightarrow u \text{ faiblement dans } F \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Donc, pour tout $g \in F'$, $\langle g, u_{\varphi(n)} \rangle_{F', F} \rightarrow \langle g, u \rangle_{F', F}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Soit maintenant $f \in E'$. La restriction de f à F , notée g , est alors un élément de F' et, comme $u_{\varphi(n)} \in F$ et $u \in F$,

$$\langle f, u_{\varphi(n)} \rangle_{E', E} = \langle g, u_{\varphi(n)} \rangle_{F', F} \rightarrow \langle g, u \rangle_{F', F} = \langle f, u \rangle_{E', E}.$$

Comme f est arbitraire dans E' , ceci prouve bien que

$$u_{\varphi(n)} \rightarrow u \text{ faiblement dans } E \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Il est suggéré dans l'exercice 4.2 de détailler cette démonstration. □

Exemple 4.1. On donne deux exemples importants de ces résultats de compacité faible et faible- \star .

1) Compacité faible séquentielle des bornés dans $L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, $1 < p < +\infty$.

On prend ici $E = L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, avec $1 < p < +\infty$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E .

L'espace de Banach E est réflexif (C2) et séparable (C3), le corollaire 4.1 s'applique. Il existe une sous suite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ faiblement convergente dans E , c'est-à-dire qu'il existe φ application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} et $u \in E$ tels que

$$u_{\varphi(n)} \rightarrow u \text{ faiblement dans } E \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

On pose $q = p/(p-1)$. Le théorème 2.2 donne une isométrie entre $(L_{\mathbb{R}}^p)'$ et $L_{\mathbb{R}}^q$. La convergence faible dans E de $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ vers u est donc équivalente à :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_{\varphi(n)}(x)v(x)dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} u(x)v(x)dx, \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \text{ pour tout } v \in L_{\mathbb{R}}^q(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d).$$

2) Compacité faible- \star séquentielle des bornés dans $L_{\mathbb{R}}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, $1 < p < +\infty$.

On prend ici $E = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. L'espace de Banach E est séparable (voir C3, mais il n'est pas réflexif¹). On peut donc appliquer le théorème 4.1.

On sait aussi qu'il existe une isométrie entre $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ et $(L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d))'$, voir le théorème 2.3.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

Compte tenu de cette isométrie entre $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ et $(L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d))'$, le théorème 4.1 donne l'existence d'une sous suite de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire d'une application strictement croissante φ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , et de $f \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ tels que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_{\varphi(n)}(x)g(x)dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)dx, \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \text{ pour tout } g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d).$$

Par un léger abus de langage on dit que $f_{\varphi(n)} \rightarrow f$ \star -faiblement dans $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ quand $n \rightarrow +\infty$ (c'est-à-dire que l'on a confondu $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ avec $(L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d))'$).

td4. Réflexivité, compacité faible ou faible- \star des bornés

Rappel du cours : Une suite bornée du dual d'un espace de Banach séparable admet une sous suite \star -faiblement convergente

Exercice 4.1 (suite bornée de L^p).

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^d ($d \geq 1$), $1 \leq p \leq +\infty$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$.

(On note $L^p(\Omega)$ l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_d)$.)

- 1) On suppose $1 < p < +\infty$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite faiblement convergente.
- 2) On suppose $p = +\infty$. Montrer qu'il existe $u \in L^\infty(\Omega)$ et une sous suite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, encore notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que

$$\int_{\Omega} u_n \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} u \varphi dx, \text{ pour tout } \varphi \in L^1(\Omega).$$

En donnant un exemple (avec $\Omega = \mathbb{R}$), montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut n'avoir aucune sous suite faiblement convergente.

- 3) On suppose $p = 1$. En donnant un exemple (avec $\Omega = \mathbb{R}$), montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut n'avoir aucune sous suite faiblement convergente.

Exercice 4.2 (Suite bornée d'un Banach réflexif). Soient E un Banach réflexif et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E . On pose $G = \text{vect}\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $F = \tilde{G}$.

- 1) Montrer que F est un espace de Banach réflexif séparable (on pourra admettre qu'un s.e.v. fermé d'un Banach réflexif est encore un Banach réflexif, ceci est démontré dans l'exercice 7.2).
- 2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite faiblement convergente.

Exemple : un exemple d'application de cet exercice est $E = L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, m)$, avec $1 < p < +\infty$ et (X, \mathcal{T}, m) est un espace mesuré.

1. On a vu dans la preuve du corollaire 4.1 que E réflexif séparable implique E'' séparable et E'' séparable implique E' séparable. Or $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ est non séparable (proposition 3.4), on en déduit que $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, qui est séparable, ne peut pas être réflexif, car il y a une isométrie entre $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ et $(L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d))'$.

Exercice 4.3 (Uniforme convexité, cv faible + cv de la norme donne cv).

Soit E un espace de Banach (réel). On suppose que E est uniformément convexe, c'est-à-dire que :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. :

$$u, v \in E, \|u\|_E \leq 1, \|v\|_E \leq 1, \|u - v\|_E > \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{u + v}{2} \right\|_E < 1 - \delta.$$

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $u \in E$. On suppose que $u_n \rightarrow u$ faiblement (dans E) et $\|u_n\|_E \rightarrow \|u\|_E$, quand $n \rightarrow +\infty$. Montrer que $u_n \rightarrow u$.

Corrigé – Si $u = 0$ la réponse est immédiate, $u_n \rightarrow 0$ dans E quand $n \rightarrow +\infty$.

On suppose donc $\|u\|_E = a \neq 0$ et on peut supposer (quitte à retirer les premiers termes de la suite) que $\|u_n\|_E = a_n \neq 0$.

On pose alors

$$v_n = \frac{u_n}{a_n} \text{ et } v = \frac{u}{a},$$

de sorte que $v_n \rightarrow v$ faiblement (dans E) quand $n \rightarrow +\infty$ car pour tout $f \in E'$,

$$\langle f, v_n \rangle_{E', E} = \frac{1}{a_n} \langle f, u_n \rangle_{E', E} \rightarrow \frac{1}{a} \langle f, u \rangle_{E', E} = \langle f, v \rangle_{E', E} \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

De plus, $\|v_n\|_E = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\|v\|_E = 1$.

On va montrer que $v_n \rightarrow v$ quand $n \rightarrow +\infty$ (et on pourra en déduire que $u_n = a_n v_n \rightarrow av = u$).

D'après l'exercice 1, question 1 du TD 1, il existe $f \in E'$ tel que $\|f\|_{E'} = 1$ et $\langle f, v \rangle_{E', E} = \|v\|_E = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$ et δ donné par l'hypothèse d'uniforme convexité. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f, v_n \rangle_{E', E} = \langle f, v \rangle_{E', E} = 1$, il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$,

$$\left\| \frac{v_n + v}{2} \right\|_E = \|f\|_{E'} \left\| \frac{v_n + v}{2} \right\|_E \geq \langle f, \frac{v_n + v}{2} \rangle_{E', E} \geq 1 - \delta,$$

ce qui prouve que $\|v_n - v\|_E \leq \varepsilon$.

On a bien montré que $v_n \rightarrow v$ (et donc $u_n \rightarrow u$) quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 4.4 (Convergence presque partout et convergence des normes, par Fatou).

Soit (E, T, m) un espace mesuré. Pour $p \in [1, \infty]$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Soit $p \in [1, \infty[$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p et $f \in L^p$. On suppose que $f_n \rightarrow f$ p.p. et que $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$, quand $n \rightarrow +\infty$.

1) On suppose que $p = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = |f_n| + |f| - |f_n - f|$ (en ayant choisi des représentants de f_n et f). Montrer que $g_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le lemme de Fatou, montrer que $f_n \rightarrow f$ dans L^1 .

Corrigé – Comme $|f - f_n| \leq |f| + |f_n|$, on a bien $g_n \geq 0$. Comme g_n tend p.p. vers $2|f|$, le lemme de Fatou donne :

$$\int 2|f| dm \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int g_n dm.$$

Comme $\|f_n\|_1 \rightarrow \|f\|_1$, on a $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int g_n dm = 2 \int |f| dm - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int |f - f_n| dm$. On a donc :

$$\int 2|f| dm \leq 2 \int |f| dm - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int |f - f_n| dm.$$

On en déduit que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int |f - f_n| dm \leq 0$, et donc que $f_n \rightarrow f$ dans L^1 .

2) On suppose maintenant que $p \in]1, \infty[$. En utilisant le lemme de Fatou pour une suite convenable, montrer que $f_n \rightarrow f$ dans L^p .

Corrigé – On prend maintenant $g_n = 2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p - |f_n - f|^p$. Comme $|f - f_n| \leq |f| + |f_n| \leq 2 \max\{|f_n|, |f|\}$, on a $|f - f_n|^p \leq 2^p \max\{|f_n|, |f|\}^p \leq 2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p$. On a donc $g_n \geq 0$. Comme g_n tend p.p. vers $2^{p+1}|f|^p$, le lemme de Fatou donne :

$$\int 2^{p+1}|f|^p dm \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int g_n dm.$$

Comme $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int g_n dm = 2^{p+1} \int |f|^p dm - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int |f - f_n|^p dm.$$

On a donc

$$\int 2^{p+1}|f|^p dm \leq 2^{p+1} \int |f|^p dm - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int |f - f_n|^p dm.$$

On en déduit que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int |f - f_n|^p dm \leq 0$, et donc que $f_n \rightarrow f$ dans L^p .

Exercice 4.5 (Cv faible + cv de la norme donne cv, autre preuve dans L^p , $1 < p < +\infty$).

Soit (X, \mathcal{T}, m) un espace mesuré. Pour $1 \leq r \leq +\infty$. On note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, m)$ et $\|\cdot\|_r$ la norme dans l'espace L^r .

Soient $1 \leq p < +\infty$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p et f un élément de L^p .

On suppose que f_n converge faiblement vers f dans L^p .

On pose $q = p/(p-1)$ si $p > 1$ et $q = +\infty$ si $p = 1$.

1) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n g dm = \int f g dm$ pour tout $g \in L^q$.

2) On suppose dans cette question que $p = 2$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2$.

Montrer que $f_n \rightarrow f$ dans L^2 quand $n \rightarrow +\infty$.

On suppose maintenant que $1 < p < +\infty$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$.

3) Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$|b|^p - |a|^p = p|a|^{p-2}a(b-a) + \int_0^1 p(p-1)(1-t)|a + t(b-a)|^{p-2}(b-a)^2 dt.$$

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} |f_n(x)|^p - |f(x)|^p &= p|f(x)|^{p-2}f(x)(f_n(x) - f(x)) \\ &\quad + \int_0^1 p(p-1)(1-t)|f(x) + t(f_n(x) - f(x))|^{p-2}(f_n(x) - f(x))^2 dt. \end{aligned}$$

4) Montrer que

$$\int_X \left(\int_0^1 (1-t)|f(x) + t(f_n(x) - f(x))|^{p-2}(f_n(x) - f(x))^2 dt \right) dm(x) \rightarrow 0$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$ on pose $g_n(x) = \int_0^1 (1-t)|f(x) + t(f_n(x) - f(x))|^{p-2}(f_n(x) - f(x))^2 dt$.

5) Montrer que l'on peut extraire de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite, encore notée $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (pour ne pas alourdir les notations), telle que $g_n \rightarrow 0$ p.p. quand $n \rightarrow +\infty$.

6) Soit $x \in X$ tel que $g_n(x) \rightarrow 0$ (quand $n \rightarrow +\infty$). Montrer que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.

7) Si $f_n \rightarrow f$ p.p. et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$, montrer que $f_n \rightarrow f$ dans L^p .

[Utiliser l'exercice 4.4.]

8) Montrer que $f_n \rightarrow f$ dans L^p (sans extraction de sous suite).

On suppose maintenant que $p = 1$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_1 = \|f\|_1$.

9) Soit φ une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+ , strictement convexe, de classe C^2 , sous-linéaire (c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ telle que $\varphi'(s) \leq \alpha$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, ce qui permet de montrer que $\varphi(g) \in L^1$ pour tout $g \in L^1$) et $\liminf_{s \rightarrow +\infty} s^2 \varphi''(s) > 0$.

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \varphi(f_n) dm = \int \varphi(f) dm$. Montrer que $f_n \rightarrow f$ dans L^1 quand $n \rightarrow +\infty$.

[On pourra reprendre la méthode utilisée pour $p > 1$ en remplaçant la fonction $s \mapsto |s|^p$ par φ .]

10) (Contre exemple)

En prenant $(X, \mathcal{T}, m) = (]0, 1[, B(]0, 1[), \lambda)$, donner un exemple pour lequel $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_1 = \|f\|_1$ et $f_n \not\rightarrow f$ dans L^1 (toujours avec l'hypothèse $f_n \rightarrow f$ faiblement dans L^1).

C5. Opérateurs transposé et adjoint. Opérateurs compacts

Soient E et F deux espaces de Banach (et E non réduit à $\{0\}$, ce que l'on supposera toujours). On suppose que E et F sont des Banach réels (la généralisation aux Banach complexes ne pose pas de difficulté). On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F (c'est donc un espace vectoriel). On munit l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ d'une norme en posant, pour $T \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup\{\|T(u)\|_F, u \in E, \|u\|_E = 1\}.$$

Avec cette norme, l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

Notation : Soient E et F deux espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in E$.

Très souvent $T(u)$ est notée Tu (cela évite parfois l'accumulation de parenthèses, nuisant à la lecture).

Remarque 5.1. Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On rappelle que par homogénéité des normes dans E et F ,

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup\left\{\frac{\|T(u)\|_F}{\|u\|_E}, u \in E \setminus \{0\}\right\} = \sup\{\|T(u)\|_F, u \in E, \|u\|_E \leq 1\},$$

ce qui donne l'inégalité fondamentale $\|T(u)\|_F \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \|u\|_E$.

A partir de T , on va définir une application de F' dans E' (que l'on notera T^t).

Soit $f \in F'$. On considère l'application g de E dans \mathbb{R} définie par

$$g(u) = \langle f, T(u) \rangle_{F', F} \text{ pour tout } u \in E.$$

L'application g est linéaire (car T et f sont linéaires). Elle est aussi continue car

$$|g(u)| \leq \|f\|_{F'} \|T(u)\|_F \leq \|f\|_{F'} \|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \|u\|_E$$

et donc $g \in E'$ et

$$\|g\|_{E'} \leq \|f\|_{F'} \|T\|_{\mathcal{L}(E, F)}. \tag{5.1}$$

L'application qui à f dans F' associe g dans E' est la transposée de l'application T (définition 5.1).

Définition 5.1 (Opérateur transposé). Soient E et F deux espaces de Banach (réels) et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle "transposée de T ", et on note T^t , l'application que à f dans F' associe l'application $u \mapsto \langle f, T(u) \rangle_{F', F}$ de E dans \mathbb{R} .

Cette dernière application est un élément de E' . On a donc, pour tout $f \in F'$ et tout $u \in E$,

$$\langle f, T(u) \rangle_{F', F} = \langle T^t(f), u \rangle_{E', E}.$$

Proposition 5.1. Soient E et F deux espaces de Banach (réels) et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $T^t \in \mathcal{L}(F', E')$ et $\|T^t\|_{\mathcal{L}(F', E')} = \|T\|_{\mathcal{L}(E, F)}$.

Démonstration de la proposition 5.1. La linéarité de T^t est immédiate. Pour montrer la continuité de T^t , on rappelle l'inégalité (5.1), elle donne

$$\|T^t(f)\|_{E'} \leq \|f\|_{F'} \|T\|_{\mathcal{L}(E, F)},$$

ce qui montre que $T^t \in \mathcal{L}(F', E')$ et $\|T^t\|_{\mathcal{L}(F', E')} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E, F)}$.

Pour montrer l'inégalité inverse (c'est-à-dire $\|T^t\|_{\mathcal{L}(F', E')} \geq \|T\|_{\mathcal{L}(E, F)}$), on utilise l'exercice 1.1. Soit $u \in E$, $\|u\|_E = 1$. Par l'exercice 1.1, il existe $f \in F'$ tel que $\|f\|_{F'} = 1$ et $\langle f, T(u) \rangle_{F', F} = \|T(u)\|_F$. On a donc

$$\begin{aligned} \|T(u)\|_F &= \langle f, T(u) \rangle_{F', F} = \langle T^t(f), u \rangle_{E', E} \leq \|T^t(f)\|_{E'} \|u\|_E \\ &\leq \|T^t\|_{\mathcal{L}(F', E')} \|f\|_{E'} \|u\|_E = \|T^t\|_{\mathcal{L}(F', E')}. \end{aligned}$$

En prenant le sup pour $u \in E$, $\|u\|_E = 1$, on obtient bien $\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \|T^t\|_{\mathcal{L}(F', E')}$. ce qui termine la preuve de cette proposition. \square

Dans le cas où $E = F = H$, avec H espace de Hilbert réel, et $T \in \mathcal{L}(H, H)$, on va utiliser l'isométrie naturelle entre H et H' pour transformer T^t en un opérateur de H dans H (que nous noterons T^*). On rappelle l'isométrie naturelle entre H et H' . elle est notée I_H . Pour $u \in H$, $I_H(u)$ est défini par

$$\langle I_H(u), v \rangle_{H', H} = (v | u)_H \text{ pour tout } v \in H.$$

Si $f \in H'$, il existe $u \in H$ tel que $f = I_H(u)$ et donc

$$\langle f, v \rangle_{H', H} = \langle I_H(u), v \rangle_{H', H} = (v | I_H^{-1}(f))_H,$$

en notant I_H^{-1} l'opérateur réciproque de I_H .

Définition 5.2 (Opérateur adjoint). Soient H un espace de Hilbert (réel) et $T \in \mathcal{L}(H, H)$. On définit l'opérateur adjoint de T , noté T^* , par

$$T^* = I_H^{-1} \circ T^t \circ I_H,$$

de sorte que $T^* \in \mathcal{L}(H, H)$ et $\|T^*\|_{\mathcal{L}(H, H)} = \|T\|_{\mathcal{L}(H, H)}$ (car I_H est une isométrie entre H et H' et $\|T^t\|_{\mathcal{L}(H', H')} = \|T\|_{\mathcal{L}(H, H)}$, cf. proposition 5.1).

Soient H un espace de Hilbert (réel), $T \in \mathcal{L}(H, H)$ et $u, v \in H$. Alors, en posant $f = T^t \circ I_H(v)$,

$$\begin{aligned} (u | T^*(v))_H &= (u | I_H^{-1} \circ T^t \circ I_H(v))_H = (u | I_H^{-1}(f))_H = \langle f, u \rangle_{H', H} = \langle T^t \circ I_H(v), u \rangle_{H', H} \\ &= \langle I_H(v), T(u) \rangle_{H', H} = (v | T(u))_H. \end{aligned}$$

Comme H est un espace de Hilbert réel, on obtient l'égalité fondamentale

$$(u | T^*(v))_H = (T(u) | v)_H.$$

Définition 5.3 (Opérateur autoadjoint). Soient H un espace de Hilbert réel et $T \in \mathcal{L}(H, H)$. On dit que T est autoadjoint si $T = T^*$ (ce qui est équivalent à dire $(u | T(v))_H = (T(u) | v)_H$ pour tout $u, v \in H$).

Définition 5.4 (Opérateur compact). Soient E et F deux espaces de Banach (réels) et $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) On dit que T est compact si T transforme les parties bornées de E en parties relativement compactes de F , c'est-à-dire

$$(B \subset E, B \text{ bornée}) \Rightarrow \{T(u), u \in B\} \text{ relativement compacte.}$$

2) On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F .

Remarque 5.2. Soient E et F deux espaces de Banach (réels) et $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) L'opérateur T est compact si et seulement si de toute suite bornée de E on peut extraire une sous suite dont l'image par T est convergente (dans F), c'est-à-dire que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de E , il existe φ strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} et $f \in F$ tels que

$$T(u_{\varphi(n)}) \rightarrow f \text{ dans } F \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

2) L'opérateur T est compact si et seulement si $\{T(u), u \in B_1\}$ (où $B_1 = \{u \in E, \|u\|_E \leq 1\}$) est relativement compact (dans F).

3) Si $\dim(E)$ est finie, $\mathcal{K}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.

On conseille, à titre d'exercice, pour le lecteur novice, de détailler les preuves de ces 3 affirmations.

Proposition 5.2 (Convergence forte ou faible). Soient E et F deux espaces de Banach (réels), $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de E .

1) On suppose que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans E quand $n \rightarrow +\infty$.

Alors $T(u_n) \rightarrow T(u)$ faiblement dans F quand $n \rightarrow +\infty$.

2) On suppose que $T \in \mathcal{K}(E, F)$ et que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans E quand $n \rightarrow +\infty$.

Alors $T(u_n) \rightarrow T(u)$ dans F quand $n \rightarrow +\infty$.

3) On suppose que E est réflexif et que $T \in \mathcal{K}(E, F)$.

Alors, il existe φ strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} et $u \in E$ tels que

$$\begin{aligned} u_{\varphi(n)} &\rightarrow u \text{ faiblement dans } E \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \\ T(u_{\varphi(n)}) &\rightarrow T(u) \text{ dans } F \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Démonstration de la proposition 5.2. On démontre tout d'abord le premier item.

On veut montrer que $T(u_n) \rightarrow T(u)$ faiblement dans F quand $n \rightarrow +\infty$.

Soit $f \in F'$, on utilise le fait que $T^t(f) \in E'$,

$$\langle f, T(u_n) \rangle_{F', F} = \langle T^t(f), u_n \rangle_{E', E} \rightarrow \langle T^t(f), u \rangle_{E', E} = \langle f, T(u) \rangle_{F', F} \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Ceci est exactement la définition de $T(u_n) \rightarrow T(u)$ faiblement dans F quand $n \rightarrow +\infty$.

On montre maintenant le deuxième item.

Comme l'opérateur T est compact, la suite $(T(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet des sous suites convergentes. Mais comme la limite des sous suites convergentes est toujours $T(u)$ (car on sait déjà que $T(u_n) \rightarrow T(u)$ faiblement, par le premier item, et que la convergence dans F implique la convergence faible), on en déduit que $T(u_n) \rightarrow T(u)$ dans F , quand $n \rightarrow +\infty$, sans extraction de sous suite. (Si nécessaire, on peut s'en convaincre avec un raisonnement par l'absurde.)

On montre enfin le troisième item. Il suffit d'appliquer le corollaire 4.2. Il donne l'existence de φ strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} et de $u \in E$ tels que $u_{\varphi(n)} \rightarrow u$ faiblement dans E (quand $n \rightarrow +\infty$).

Puis le deuxième item donne $T(u_{\varphi(n)}) \rightarrow T(u)$ dans F quand $n \rightarrow +\infty$. \square

Un exemple intéressant de la proposition 5.2 est lorsque E est un s.e.v. de F (mais la norme sur E n'est pas la même que celle que F) et T est l'application $u \mapsto u$ de E dans F .

Proposition 5.3 ($\mathcal{K}(E, F)$ est un s.e.v. fermé). *Soient E et F deux espaces de Banach (réels). L'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ est un s.e.v. fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.*

Démonstration de la proposition 5.3. Le fait que $\mathcal{K}(E, F)$ est stable par multiplication par un scalaire est immédiat. En effet, soit $T \in \mathcal{K}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il suffit de remarquer $T(u_n) \rightarrow f$ dans F implique $\lambda T(u_n) \rightarrow \lambda f$.

Le fait que $\mathcal{K}(E, F)$ est stable par addition est un peu moins immédiat. Soient $T, S \in \mathcal{K}(E, F)$. On utilise le premier item de la remarque 5.2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E . Par compacité de T , Il existe φ strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} et $f \in F$ tels que $T(u_{\varphi(n)}) \rightarrow f$ dans F (quand $n \rightarrow +\infty$). Puis, par compacité de S , Il existe ψ strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} et $g \in F$ tels que $S(u_{\varphi \circ \psi(n)}) \rightarrow g$ dans F (quand $n \rightarrow +\infty$). On en déduit que $(T + S)(u_{\varphi \circ \psi(n)}) \rightarrow f + g$ dans F (quand $n \rightarrow +\infty$) et donc que $S + T$ est un opérateur compact.

Il reste à démontrer que $\mathcal{K}(E, F)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{K}(E, F)$ telle que $T_n \rightarrow T$ dans $\mathcal{L}(E, F)$, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = 0.$$

On veut montrer que $T \in \mathcal{K}(E, F)$, c'est-à-dire (selon le premier item de la remarque 5.2) que de toute suite bornée de E on peut extraire une sous suite dont l'image par T est convergente.

Soit $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E , on veut montrer qu'il existe une sous suite $(u_{\varphi(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(T(u_{\varphi(p)}))_{p \in \mathbb{N}}$ est convergente. On procède en deux étapes.

Procédé diagonal. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, comme $T_n \in \mathcal{K}(E, F)$, il existe une sous suite $(u_{\varphi(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(T_n(u_{\varphi(p)}))_{p \in \mathbb{N}}$ est convergente, mais cette sous suite peut dépendre de n . En utilisant le procédé diagonal décrit dans la preuve du théorème 4.1 (non redétaillé ici), on peut construire une sous suite indépendante de n , c'est-à-dire qu'il existe φ strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} et une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n(u_{\varphi(p)}) \rightarrow z_n, \text{ dans } F, \text{ quand } p \rightarrow +\infty.$$

Convergence de la suite $(T(u_{\varphi(p)}))_{p \in \mathbb{N}}$.

Comme F est complet, il suffit de montrer que la suite $(T(u_{\varphi(p)}))_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $p, q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \|T(u_{\varphi(p)}) - T(u_{\varphi(q)})\|_F \\ & \leq \|T(u_{\varphi(p)}) - T_n(u_{\varphi(p)})\|_F + \|T_n(u_{\varphi(p)}) - T_n(u_{\varphi(q)})\|_F + \|T_n(u_{\varphi(q)}) - T(u_{\varphi(q)})\|_F \\ & \leq \|T - T_n\|_{\mathcal{L}(E, F)} (\|u_{\varphi(p)}\|_E + \|u_{\varphi(q)}\|_E) + \|T_n(u_{\varphi(p)}) - T_n(u_{\varphi(q)})\|_F \\ & \leq 2\|T - T_n\|_{\mathcal{L}(E, F)} \sup_{r \in \mathbb{N}} \|u_{\varphi(r)}\|_E + \|T_n(u_{\varphi(p)}) - T_n(u_{\varphi(q)})\|_F. \end{aligned}$$

Comme $T_n \rightarrow T$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ et que $\sup_{r \in \mathbb{N}} \|u_r\|_E < +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $2\|T - T_n\|_{\mathcal{L}(E, F)} \sup_{r \in \mathbb{N}} \|u_r\|_E \leq \varepsilon$.

Puis, comme $T_{n_0}(u_{\varphi(p)}) \rightarrow z_{n_0}$ (quand $p \rightarrow +\infty$), il existe p_0 tel que

$$p, q \geq p_0 \Rightarrow \|T_{n_0}(u_{\varphi(p)}) - T_{n_0}(u_{\varphi(q)})\|_F \leq \varepsilon.$$

On obtient donc finalement

$$p, q \geq p_0 \Rightarrow \|T(u_{\varphi(p)}) - T(u_{\varphi(q)})\|_F \leq 2\varepsilon,$$

ce qui prouve que la suite $(T(u_{\varphi(p)}))_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc convergente (dans F) et termine la preuve de la proposition 5.3. \square

Remarque 5.3.

Soient E et F deux espaces de Banach (réels) et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. L'exercice 5.5 montre que $T \in \mathcal{K}(E, F)$ si et seulement si $T^t \in \mathcal{K}(F', E')$.

Proposition 5.4 (Opérateurs de rang fini). *Soient E et F deux espaces de Banach (réels) et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que $\dim(\text{Im}(T)) < +\infty$. Alors T est compact (c'est-à-dire $T \in \mathcal{K}(E, F)$).*

Démonstration de la proposition 5.4. Soit $G = \text{Im}(T)$. L'espace G est s.e.v. de dimension finie de F . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E . Comme T est continu, la suite $(T(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de G . Comme $\dim(G) < +\infty$, la suite $(T(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente dans G (théorème de Bolzano-Weierstass) et donc dans F . Ceci prouve que $T \in \mathcal{K}(E, F)$. \square

Proposition 5.5 (Limite d'opérateurs de rang fini). *Soient E et F deux espaces de Banach (réels), $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(E, F)$ et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que $\dim(\text{Im}(T_n)) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $T_n \rightarrow T$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Alors T est compact (c'est-à-dire $T \in \mathcal{K}(E, F)$).*

Démonstration de la proposition 5.5. La proposition 5.4 donne que $T_n \in \mathcal{K}(E, F)$. Comme $\mathcal{K}(E, F)$ est un fermé dans $\mathcal{L}(E, F)$ (proposition 5.3), on en déduit que $T \in \mathcal{K}(E, F)$. \square

Remarque 5.4. La réciproque du résultat montré dans la proposition 5.5 est fausse, mais on verra au cours C7 qu'elle est vraie au moins dans le cas $E = F = H$, espace de Hilbert, et $T \in \mathcal{K}(H, H)$.

Remarque 5.5 (Rappel de la dimension finie). Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, alors

$$T \text{ injectif} \Leftrightarrow T \text{ surjectif} \Leftrightarrow T \text{ bijectif.}$$

Démonstration de la remarque 5.5. L'application T est représentée par une matrice carrée A ayant n lignes et n colonnes, c'est-à-dire que $T(x) = Ax$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. (En général on identifie T et A .)

On veut montrer que T est injective si et seulement si T est surjective. Le plus rapide est probablement d'utiliser le théorème du rang, c'est-à-dire

$$n = \dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A)),$$

ceci donne bien $\text{Ker}(A) = \{0\}$ (c'est-à-dire A injective) si et seulement si $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire A surjective).

On donne maintenant une autre démonstration que l'on va ensuite essayer de généraliser en dimension infinie dans la proposition 5.6 (En dimension infinie le théorème du rang donne $+\infty = \dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A))$).

On remarque tout d'abord que

$$\text{Ker}(A) = (\text{Im}(A^t))^\perp. \quad (5.2)$$

En effet, on note $x \cdot y$ le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n (c'est-à-dire $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ où les x_i et y_i sont les composantes de x et y), on obtient, pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(A) &\Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow (Ax \cdot y = 0 \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^n) \\ &\Leftrightarrow (x \cdot A^t y = 0 \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^n) \Leftrightarrow x \in (\text{Im}(A^t))^\perp. \end{aligned}$$

En prenant l'orthogonal de l'égalité (5.2), on obtient

$$\text{Ker}(A)^\perp = (\text{Im}(A^t)^\perp)^\perp = \text{Im}(A^t). \quad (5.3)$$

Enfin, on conclut en remarquant que $\text{rang}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = \dim(\text{Im}(A^t)) = \text{rang}(A^t)$ et donc $\text{Ker}(A) = \{0\}$ si et seulement si $\text{rang}(A) = n$. \square

Une conséquence de la remarque 5.5 est que si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (et donc $T \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ car $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \mathcal{K}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$) et $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $T - \lambda I$ est injective si et seulement si elle est surjective. (L'application I est l'application $u \mapsto u$). Mais nous verrons qu'elle reste "presque" vraie si $T \in \mathcal{K}(H, H)$ et que H est un espace de Hilbert.

Remarque 5.6 ($\text{rang}(T)$ versus $\text{rang}(T^t)$). Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, alors, comme cela a été rappelé dans la preuve de la remarque 5.5, $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Im}(T^t))$. L'exercice 5.6 montre que cette propriété reste vraie si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F espaces de Banach. (En particulier, elle est vraie si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$ avec n éventuellement différent de p .)

Proposition 5.6 ($\text{Ker}(T)$ versus $\text{Im}(T^*)$). Soient H un espace de Hilbert (réel) et $T \in \mathcal{L}(H, H)$. Alors

- 1) $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T^*)^\perp$,
- 2) $\text{Ker}(T)^\perp = (\text{Im}(T^*)^\perp)^\perp = \overline{\text{Im}(T^*)}$.

Démonstration de la proposition 5.6. On reprend la preuve de la remarque 5.5. L'égalité (5.2) devient

$$\text{Ker}(T) = (\text{Im}(T^*))^\perp.$$

En effet,

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker}(T) &\Leftrightarrow T(u) = 0 \Leftrightarrow (T(u) | v)_H = 0 \text{ pour tout } v \in H \\ &\Leftrightarrow ((u | T^*(v))_H = 0 \text{ pour tout } v \in H) \Leftrightarrow u \in (\text{Im}(T^*))^\perp. \end{aligned}$$

En prenant l'orthogonal de l'égalité précédente, on obtient

$$\text{Ker}(T)^\perp = (\text{Im}(T^*)^\perp)^\perp = \overline{\text{Im}(T^*)},$$

car on a déjà vu que si F est s.e.v. de H , $F^\perp = \bar{F}^\perp$ (proposition 0.5) et $(\bar{F}^\perp)^\perp = \bar{F}$ (Théorème 0.13). \square

Exemple 5.1 (exemple avec $\text{Ker}(T) \neq \text{Im}(T^*)^\perp$).

On prend $H = \ell^2(\mathbb{N})$. L'opérateur T est l'application

$$u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto T(u) = \left(\frac{u_i}{i+1} \right)_{i \in \mathbb{N}}.$$

Pour cet exemple, on peut montrer (ceci est laissé en exercice) que

- 1) $T \in \mathcal{L}(H, H)$, $\|T\|_{\mathcal{L}(H, H)} = 1$,
- 2) $T = T^*$,
- 3) $\text{Ker}(T) = \{0\}$,
- 4) $\text{Im}(T) \neq \ell^2(\mathbb{N})$.

On a donc $(\text{Ker}(T))^\perp = \ell^2(\mathbb{N}) \neq \text{Im}(T) = \text{Im}(T^*)$.
(Mais on a bien, comme démontré dans la proposition 5.6, $(\text{Ker}(T))^\perp = \overline{\text{Im}(T^*)}$.)

td5. Dualité, transposé, adjoint, compacité

Exercice 5.1 (Isométrie entre L^q et $(L^p)'$, $1 < p < +\infty$, par la réflexivité).

Soit (E, T, m) un espace mesuré, $1 < p < +\infty$ et $q = p/(p-1)$. On rappelle que l'espace $L_{\mathbb{R}}^p(E, T, m)$ est réflexif. Montrer que l'application $f \mapsto \varphi_f$ avec φ_f défini par $\varphi_f(g) = \int fg \, dm$ est une isométrie entre $L_{\mathbb{R}}^q(E, T, m)$ et $(L_{\mathbb{R}}^p(E, T, m))'$ (en particulier, elle est donc surjective).

[On pourra utiliser la conséquence suivante du théorème de Hahn-Banach : Si F est un s.e.v. fermé de l'espace de Banach B , alors $F \neq B$ si et seulement si il existe $\psi \in B'$, $\psi \neq 0$ et $\psi(u) = 0$ pour tout $u \in F$.]

Exercice 5.2 (Dualité L^1 - L^∞).

Soit (E, \mathcal{T}, m) un espace mesuré σ -fini. Pour $1 \leq r \leq +\infty$, on note L^r l'espace $L_{\mathbb{R}}^r(E, \mathcal{T}, m)$.

Pour $g \in L^\infty$, on note Φ_g l'élément de $(L^1)'$ défini par $\Phi_g(f) = \int fg \, dm$ pour tout $f \in L^1$. (Vérifier que c'est bien un élément de $(L^1)'$.)

L'objet de cet exercice est de démontrer que l'application $g \mapsto \Phi_g$ est une isométrie entre L^∞ et $(L^1)'$ et, en particulier, qu'elle est surjective (ce qui est le point difficile).

- 1) Montrer que Φ est une injection (linéaire) de L^∞ dans $(L^1)'$ et que $\|\Phi_g\|_{(L^1)'} = \|g\|_{L^\infty}$ pour tout $g \in L^\infty$. (Pour cette question le caractère σ -fini de m est important, un contre exemple est donné dans l'exercice 5.3.)

Il reste maintenant à montrer que Φ est surjective. On se donne donc $T \in (L^1)'$ et il s'agit de montrer qu'il existe $g \in L^\infty$ t.q. $T = \Phi_g$.

- 2) On considère dans cette question le cas où $m(E) < +\infty$.

(a) Montrer que $L^2 \subset L^1$ et que l'injection canonique de L^2 dans L^1 est continue.

(b) Montrer qu'il existe $g \in L^2$ t.q. $T(f) = \int fgd m$ pour tout $f \in L^2$.

[Utiliser le théorème de représentation de Riesz.]

(c) Montrer que la fonction g , trouvée à la question précédente, appartient à L^∞ .

[prendre $f = sgn(g)1_A$ où $A = \{|g| > \|T\|_{(L^1)'}\}$.]

(d) Si $f \in L^1$, montrer que $f_n = f1_{\{|f| \leq n\}} \in L^2$. En déduire que il existe $g \in L^\infty$ t.q. $T(f) = \int fgd m$, pour tout $f \in L^1$.

- 3) On considère maintenant le cas où $m(E) = +\infty$. Montrer qu'il existe $g \in L^\infty$ t.q. $T = \Phi_g$.

[Utiliser la question 2 pour une suite croissante d'ensembles de mesure fini recouvrant E .]

Exercice 5.3 (Exemple de non injectivité de L^∞ dans $(L^1)'$). On prend $X = \{0\}$ (l'espace X est donc réduit à un seul élément), $T = \mathcal{P}(X)$ et la mesure m définie par $m(\{0\}) = +\infty$. On note L^p l'espace $L_{\mathbb{R}}^p(X, \mathcal{T}, m)$ (pour $1 \leq p \leq +\infty$).

1) Quelle est la dimension des espaces L^1 , L^∞ et $(L^1)'$?

Soit φ l'application définie de L^∞ dans $(L^1)'$ par $f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est définie par $\varphi_f(g) = \int fg \, dm$, pour tout $g \in L^1$.

2) L'application φ est-elle injective ? A-t-on $\|\varphi_f\|_{(L^1)'} = \|f\|_{(L^\infty)}$?

3) L'espace L^1 est-il réflexif ?

Exercice 5.4 (Exemple d'opérateur compact).

Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset l^\infty(\mathbb{N})$. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On considère l'opérateur T de $l^p(\mathbb{R})$ dans lui-même défini par $T((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1) L'opérateur T est-il continu ?

2) L'opérateur T est-il compact ? (La réponse dépend des valeurs de p et de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, l'objectif est de préciser cette dépendance.)

3) On suppose $p = 2$.

(a) On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Donner toutes les valeurs propres et toutes les valeurs spectrales de T .

(b) On suppose $a_n \in]-1, 1[$ pour tout n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$. Donner toutes les valeurs propres et toutes les valeurs spectrales de T .

Exercice 5.5 (Equivalence entre compacité de T et compacité de T^t).

Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence entre la compacité de T et la compacité de T^t .

Soient E, F deux espaces de Banach (réels) et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On rappelle que l'opérateur transposé de T , noté T^t , appartient à $\mathcal{L}(F', E')$ (définition 5.1). Il vérifie, pour tout $g \in F'$ et $u \in E$,

$$\langle T^t(g), u \rangle_{E', E} = \langle g, T(u) \rangle_{F', F}.$$

On rappelle aussi que la proposition 5.1 montre que $\|T^t\|_{\mathcal{L}(F', E')} = \|T\|_{\mathcal{L}(E, F)}$.

On suppose jusqu'à la question 5 que T est un opérateur compact, c'est-à-dire que de toute suite bornée de E on peut extraire une sous suite dont l'image par T converge dans F .

On note $B_E = \{u \in E, \|u\|_E \leq 1\}$.

1) Montrer que $T(B_E)$ est précompact, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $I \subset B_E$ tel que $\text{card}(I) < +\infty$ et

$$T(B_E) = \{T(u), u \in B_E\} \subset \cup_{u \in I} B_F(T(u), \varepsilon),$$

où $B_F(T(u), \varepsilon) = \{v \in F, \|v - T(u)\|_F < \varepsilon\}$.

Corrigé – Par hypothèse, la boule $T(B_E)$ est relativement compacte donc précompacte. En effet, soit $\varepsilon > 0$, supposons par l'absurde qu'il n'existe pas de recouvrement fini de $T(B_E)$ par des boules de la forme $B_F(T(u), \varepsilon)$. Soit $u_0 \in B_E$, on a donc $T(B_E) \not\subset B_F(T(u_0), \varepsilon)$. Puis, par récurrence, on suppose u_0, \dots, u_n choisis dans B_E . Comme $T(B_E) \not\subset \cup_{i=0}^n B_F(T(u_i), \varepsilon)$, on choisit $u_{n+1} \in B_E$ tel que

$$T(u_{n+1}) \notin \cup_{i=0}^n B_F(T(u_i), \varepsilon).$$

On construit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de B_E telle que la suite $(T(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet aucune sous suite convergente (car $\|T(u_n) - T(u_m)\|_F \geq \varepsilon$ si $n \neq m$), ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de compacité de T .

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on choisit I_p conformément à la question 1 avec $\varepsilon = 1/p$ et on pose $I = \cup_{p \in \mathbb{N}^*} I_p$ (de sorte que I est dénombrable). Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de F' .

- 2) Montrer qu'il existe une sous suite de la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour cette sous suite, encore notée $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite $(\langle T^t(g_n), u \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour tout $u \in I$. [Utiliser le procédé diagonal.]

Corrigé – Pour tout $u \in I$, la suite $(\langle T^t(g_n), u \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans \mathbb{R} . Elle admet donc une sous suite convergente. Comme I est dénombrable, le procédé diagonal (décrit par exemple dans la preuve du théorème 4.1) permet d'extraire une sous suite telle que la suite $(\langle T^t(g_n), u \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente pour tout $u \in I$. Dans la suite on note f_u cette limite.

Noter que, pour cette question, il suffit que I_p soit fini ou dénombrable.

Pour les deux questions suivantes on considère cette sous suite.

- 3) Montrer que la suite $(\langle T^t(g_n), u \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour tout $u \in E$.

Corrigé – Soit $u \in B_E$. On remarque alors que la suite $(\langle T^t(g_n), u \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. En effet, Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/p \leq \varepsilon$. Il existe $v \in I_p$ tel que $\|T(v) - T(u)\|_F \leq \varepsilon$. On a alors, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, avec $C = \sup_n \|g_n\|_{F'}$,

$$\begin{aligned} |\langle T^t(g_n), u \rangle_{E', E} - \langle T^t(g_m), u \rangle_{E', E}| &\leq |\langle T^t(g_n), v \rangle_{E', E} - \langle T^t(g_m), v \rangle_{E', E}| \\ &\quad + |\langle g_n, T(v) - T(u) \rangle_{F', F}| + |\langle g_m, T(v) - T(u) \rangle_{F', F}| \\ &\leq |\langle T^t(g_n), v \rangle_{E', E} - \langle T^t(g_m), v \rangle_{E', E}| + 2C\varepsilon. \end{aligned}$$

Puis, comme $v \in I_p \subset I$, il existe n_0 tel que $|\langle T^t(g_n), v \rangle_{E', E} - \langle T^t(g_m), v \rangle_{E', E}| \leq \varepsilon$ pour $n, m \geq n_0$. On a donc, pour $n, m \geq n_0$,

$$|\langle T^t(g_n), u \rangle_{E', E} - \langle T^t(g_m), u \rangle_{E', E}| \leq (2C + 1)\varepsilon. \quad (5.4)$$

Ceci montre bien que la suite $(\langle T^t(g_n), u \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Si $u \in E$, $u \neq 0$, on se ramène au cas précédent en divisant u par sa norme. On obtient bien ainsi la convergence de la suite $(\langle T^t(g_n), u \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}}$ pour tout $u \in E$ et nous notons encore f_u cette limite.

L'application $u \mapsto f_u$ est trivialement linéaire (de E dans \mathbb{R}) car limite d'applications linéaires. Mais elle est aussi continue car $|f_u| \leq C\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)}\|u\|_E$. Il existe donc $f \in E'$ tel que $f_u = \langle f, u \rangle_{E', E}$ pour tout $u \in E$. Cette question montre que $T^t(g_n) \rightarrow f$ \star -faiblement dans E' quand $n \rightarrow +\infty$.

- 4) Montrer qu'il existe $f \in E'$ tel que $T^t(g_n) \rightarrow f$ dans E' .

Corrigé – C'est pour cette question que l'on va utiliser que I_p est fini. On reprend la méthode de la question précédente.

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/p \leq \varepsilon$.

Soit $u \in B_E$. Il existe $v \in I_p$ tel que $\|T(v) - T(u)\|_F \leq \varepsilon$. L'inégalité (5.4) donne alors

$$|\langle T^t(g_n), u \rangle_{E', E} - \langle T^t(g_m), u \rangle_{E', E}| \leq (2C + 1)\varepsilon, \quad (5.5)$$

pour $n, m \geq n_0$. Mais, comme I_p est fini, n_0 peut être choisit indépendamment de v (et donc de u). On obtient ainsi, quand $m \rightarrow +\infty$ dans (5.5), pour tout $n \geq n_0$ et tout $u \in B_E$,

$$|\langle T^t(g_n), u \rangle_{E', E} - \langle f, u \rangle_{E', E}| \leq (2C + 1)\varepsilon,$$

et donc, pour tout $n \geq n_0$, $\|T^t(g_n) - f\|_{E'} \leq (2C + 1)\varepsilon$.

On a bien montré que $T^t(g_n) \rightarrow f$ dans E' .

- 5) Dédurre des questions précédentes que T^t est un opérateur compact.

Corrigé – On a montré que de toute suite bornée de F' on peut extraire une sous suite dont l'image par T^t converge dans E' . Ceci montre bien que T^t est un opérateur compact.

6) On ne suppose plus maintenant que T est un opérateur compact, mais on suppose que T^t est un opérateur compact. Montrer que T est un opérateur compact.

Corrigé – On pose $S = T^t$. L'opérateur S est compact de F' dans E' . La question 5 montre donc que S^t est un opérateur compact de E'' dans F'' .

On note J l'injection canonique de E dans E'' . On remarque que, pour tout $u \in E$ et $g \in F'$,

$$\langle S^t(J(u)), g \rangle_{F'', F'} = \langle J(u), S(g) \rangle_{E'', E'} = \langle S(g), u \rangle_{E', E} = \langle T^t(g), u \rangle_{E', E} = \langle g, T(u) \rangle_{F', F}.$$

Comme $\|T(u)\|_F = \max\{\langle g, T(u) \rangle_{F', F}, g \in F'; \|g\|_{F'} = 1\}$ (premier item de l'exercice 1.1), on en déduit que

$$\|S^t(J(u))\|_{F''} = \|T(u)\|_F. \quad (5.6)$$

On déduit de cette égalité la compacité de T .

En effet, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E . La suite $(J(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une suite bornée de E'' (car J est une isométrie). Comme S^t est un opérateur compact (de E'' dans F''), la suite $(S^t(J(u_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente (dans F'') et donc, grâce à (5.6), la suite $(T(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente (dans F). On a bien montré que T est un opérateur compact.

Exercice 5.6 (rang(T) versus rang(T^t)). Soient E et F deux espaces de Banach (réels) et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Le but de l'exercice est de montrer que $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Im}(T^t))$.

On suppose dans un premier temps que $1 \leq \dim(\text{Im}(T)) = r < +\infty$.

On choisit une base de $\text{Im}(T)$ notée $\{f_1, \dots, f_r\}$, et pour $i \in \{1, \dots, r\}$, on choisit $a_i \in E$ tel que $T(a_i) = f_i$. On définit alors l'espace G par $G = \text{vect}\{a_1, \dots, a_r\}$.

1) Montrer que $\dim G = r$ et $E = G \oplus \text{Ker}(T)$.

Corrigé –

Montrons que $\{a_1, \dots, a_r\}$ est une famille libre, et donc une base de G . Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^r \alpha_i a_i = 0$. On a alors $\sum_{i=1}^r \alpha_i T(a_i) = 0$ et donc $\sum_{i=1}^r \alpha_i f_i = 0$. Comme $\{f_1, \dots, f_r\}$ est une base, on en déduit $\alpha_i = 0$ pour tout i et donc $\dim G = r$.

Soit $u \in E$. Comme $\{f_1, \dots, f_r\}$ est une base de $\text{Im}(T)$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tels que $T(u) = \sum_{i=1}^r \alpha_i f_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i T(a_i)$ et donc

$$u = v + \sum_{i=1}^r \alpha_i a_i \text{ avec } v = (u - \sum_{i=1}^r \alpha_i a_i) \in \text{Ker}(T),$$

ce qui prouve que $E = G + \text{Ker}(T)$.

Enfin, si $u \in G \cap \text{Ker}(T)$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tels que $u = \sum_{i=1}^r \alpha_i a_i$. Comme $T(u) = 0$, on a $\sum_{i=1}^r \alpha_i T(a_i) = \sum_{i=1}^r \alpha_i f_i = 0$ et donc $\alpha_i = 0$ pour tout i , ce qui donne bien $E = G \oplus \text{Ker}(T)$.

2) Soit $i \in \{1, \dots, r\}$. Montrer qu'il existe $g_i \in F'$ tel que $\langle g_i, f_j \rangle_{F', F} = \delta_{i,j}$ pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$.

Corrigé – On pose $H = \text{vect}\{f_1, \dots, f_r\}$ et on définit $h_i \in H'$ par $\langle h_i, f_j \rangle_{H', H} = \delta_{i,j}$. (Noter que h_i est continue car $\dim H < +\infty$.) Par le théorème de Hahn-Banach analytique (théorème 0.5), h_i se prolonge en $g_i \in F'$.

Dans les deux questions suivantes on utilise cette famille $\{g_1, \dots, g_r\}$.

3) Montrer que $\{T^t(g_1), \dots, T^t(g_r)\}$ engendre $\text{Im}(T^t)$.

Corrigé – Soit $c \in \text{Im}(T^t)$. Il existe $h \in F'$ tel que $c = T^t(h)$.

Soit $u \in E$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ et $v \in \text{Ker}(T)$ tels que $u = \sum_{i=1}^r \alpha_i a_i + v$. Ceci donne

$$\langle c, u \rangle_{E',E} = \langle T^t(h), u \rangle_{E',E} = \langle h, T(u) \rangle_{F',F} = \langle h, \sum_{i=1}^r \alpha_i f_i \rangle_{F',F} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \langle h, f_i \rangle_{F',F}.$$

Mais on a aussi $\langle T^t(g_i), u \rangle_{E',E} = \langle g_i, T(u) \rangle_{F',F} = \langle g_i, \sum_{j=1}^r \alpha_j f_j \rangle_{F',F} = \alpha_i$, et donc

$$\langle c, u \rangle_{E',E} = \sum_{i=1}^r \langle T^t(g_i), u \rangle_{E',E} \langle h, f_i \rangle_{F',F} = \langle \sum_{i=1}^r \langle h, f_i \rangle_{F',F} T^t(g_i), u \rangle_{E',E}.$$

Ceci donne $c = \sum_{i=1}^r \langle h, f_i \rangle_{F',F} T^t(g_i)$. On a bien montré que $\{T^t(g_1), \dots, T^t(g_r)\}$ engendrent $\text{Im}(T^t)$.

4) Montrer que $\{T^t(g_1), \dots, T^t(g_r)\}$ est une famille libre. En déduire que $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Im}(T^t))$.

Corrigé – Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^r \alpha_i T^t(g_i) = 0$. On a alors, pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$,

$$0 = \langle \sum_{i=1}^r \alpha_i T^t(g_i), a_j \rangle_{E',E} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \langle T^t(g_i), a_j \rangle_{E',E} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \langle g_i, f_j \rangle_{F',F} = \alpha_j.$$

Ceci prouve que $\{T^t(g_1), \dots, T^t(g_r)\}$ est une famille libre.

Avec la question précédente ceci montre que $\dim(\text{Im}(T^t)) = r = \dim(\text{Im}(T))$.

On se place maintenant dans le cas général, et on ne suppose plus que $1 \leq \dim(\text{Im}(T)) < +\infty$.

5) montrer que $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Im}(T^t))$.

Corrigé – Il reste à traiter les cas $\dim(\text{Im}(T)) = 0$ et $\dim(\text{Im}(T)) = +\infty$.

Si $\dim(\text{Im}(T)) = 0$, on a $T = 0$ et donc $T^t = 0$, ce qui donne $\dim(\text{Im}(T^t)) = \dim(\text{Im}(T)) = 0$.

Si $\dim(\text{Im}(T)) = +\infty$. Pour tout $1 \leq r < +\infty$, il existe une famille libre de F , $\{f_1, \dots, f_r\}$. Comme $r < +\infty$, la question 2 donne une famille $\{g_1, \dots, g_r\}$ de F' . La question 4 montre alors que $\{T^t(g_1), \dots, T^t(g_r)\}$ est une famille libre et donc $\dim(\text{Im}(T^t)) \geq r$. On en déduit bien que $\dim(\text{Im}(T^t)) = +\infty$.

6) A-t-on aussi $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Ker}(T^t))$?

Corrigé – Si E et F sont de dimensions finies, la réponse est facile grâce au théorème du rang ($\dim(E) = \dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T))$ et $\dim(F') = \dim(\text{Im}(T^t)) + \dim(\text{Ker}(T^t))$).

En effet, si $\dim(E) = \dim(F) \in \mathbb{N}$, on a aussi $\dim(E') = \dim(F') = \dim(E)$ et le théorème du rang (avec $\dim(\text{Im}(T^t)) = \dim(\text{Im}(T))$) donne $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Ker}(T^t))$.

Par contre si $\dim(E) \neq \dim(F) \in \mathbb{N}$, on a $\dim(E') = \dim(E)$, $\dim(F') = \dim(F)$, et le théorème du rang donne $\dim(\text{Ker}(T)) \neq \dim(\text{Ker}(T^t))$.

En dimension infinie, on peut aussi avoir $\dim(\text{Ker}(T)) \neq \dim(\text{Ker}(T^t))$ (voir, par exemple, l'opérateur T de l'exercice 6.5).

C6. Valeurs spectrales et valeurs propres d'opérateurs. Alternative de Fredholm

On s'intéresse dans ce cours C6 aux valeurs propres et plus généralement aux valeurs spectrales d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, E)$ où E est espace de Banach. On notera toujours I l'application identité, c'est-à-dire l'application $u \mapsto u$ de E dans E .

On rappelle que si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ($n \geq 1$) et $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\lambda \in \mathbb{C}$), l'application $T - \lambda I$ est injective si et seulement si elle est surjective.

La situation est plus complexe si E est de dimension infinie.

Définition 6.1 (Valeurs spectrales et valeurs propres). Soient E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, E)$.

- 1) L'ensemble des valeurs spectrales de T est l'ensemble $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } (T - \lambda I) \text{ est non bijectif}\}$.
- 2) L'ensemble des valeurs propres de T est l'ensemble $vp(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } (T - \lambda I) \text{ est non injectif}\}$.
- 3) L'ensemble des valeurs régulières de T est l'ensemble $r(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } (T - \lambda I) \text{ est bijectif}\}$.

Remarque 6.1 (Comparaison entre valeurs spectrales et valeurs propres).

Soient E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, E)$.

- 1) $vp(T) \subset \sigma(T)$ et $r(T) = \mathbb{R} \setminus \sigma(T)$.
- 2) Si $\dim(E) < +\infty$, $vp(T) = \sigma(T)$. (En effet, en prenant une base de E , on se ramène au cas $E = \mathbb{R}^n$.)
- 3) Dans le cas $\dim(E) = +\infty$, il est possible de construire des exemples pour lesquels T est injectif et non surjectif et des exemples pour lesquels T est surjectif et non injectif (voir l'exercice 6.5).
- 4) Soit $\lambda \in r(T)$. Alors $(T - \lambda I)^{-1}$ est continu, ceci est donné par le théorème de Banach, théorème 0.9.
- 5) Il est parfois intéressant (comme dans le cas $E = \mathbb{R}^n$) de considérer $\lambda \in \mathbb{C}$. Les définitions sont alors identiques à celle de la définition 6.1.

Proposition 6.1 (Propriété de $\sigma(T)$ et $r(T)$). Soient E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, E)$. Alors

- 1) $\sigma(T) \subset [-\|T\|_{\mathcal{L}(E,E)}, \|T\|_{\mathcal{L}(E,E)}]$.
- 2) $r(T)$ est un ouvert de \mathbb{R} .

Démonstration de la proposition 6.1.

preuve de $\sigma(T) \subset [-\|T\|_{\mathcal{L}(E,E)}, \|T\|_{\mathcal{L}(E,E)}]$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| > \|T\|_{\mathcal{L}(E,E)}$, on veut montrer que $\lambda \in r(T)$, c'est-à-dire que $T - \lambda I$ est bijectif ou encore que pour tout $z \in E$, il existe un et un seul $u \in E$ tel que

$$T(u) - \lambda u = z. \tag{6.1}$$

Pour cela on définit S de E dans E par

$$S(u) = \frac{T(u) - z}{\lambda}.$$

L'application S est strictement contractante (de E dans E) car pour tout $u, v \in E$

$$\|S(u) - S(v)\|_E = \frac{\|T(u - v)\|_E}{|\lambda|} \leq \frac{\|T\|_{\mathcal{L}(E,E)}}{|\lambda|} \|T(u - v)\|_E,$$

et $\frac{\|T\|_{\mathcal{L}(E,E)}}{|\lambda|} < 1$.

On en déduit avec le théorème du point fixe de contraction que S a un et un seul point fixe (c'est-à-dire tel que $S(u) = u$) et donc que (6.1) a une et une seule solution.

preuve de $r(T)$ est un ouvert de \mathbb{R} .

Soit $\lambda_0 \in r(T)$. On veut montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $] \lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon [\subset r(T)$. On va encore utiliser le théorème du point fixe de contraction.

Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que, pour tout $u \in E$,

$$\begin{aligned} T(u) - \lambda u &= f \\ \Leftrightarrow T(u) - \lambda_0 u + \lambda_0 u - \lambda u &= f \\ \Leftrightarrow T(u) - \lambda_0 u &= f + (\lambda - \lambda_0)u \\ \Leftrightarrow u &= (T - \lambda_0)^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)u). \end{aligned}$$

On définit maintenant S de E dans E par

$$S(u) = (T - \lambda_0)^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)u).$$

On a donc $T(u) - \lambda u = f$ si et seulement si $S(u) = u$.

On rappelle que $(T - \lambda_0)^{-1}$ est continu (ceci est donné par l'item 4 de la remarque 6.1) et donc que $S \in \mathcal{L}(E, E)$ et pour tout $u, v \in E$,

$$\begin{aligned} S(u) - S(v) &= (T - \lambda_0)^{-1}(\lambda - \lambda_0)(u - v), \\ \|S(u) - S(v)\|_E &= \|(T - \lambda_0)^{-1}(\lambda - \lambda_0)(u - v)\|_E \leq |\lambda - \lambda_0| \|(T - \lambda_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E,E)} \|u - v\|_E. \end{aligned}$$

On choisit $\varepsilon = \frac{1}{\|(T - \lambda_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E,E)}}$ (noter que ε ne dépend pas de f) et on remarque alors que si $\lambda \in] \lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon [$ l'application S est strictement contractante (de E dans E) car

$$|\lambda - \lambda_0| \|(T - \lambda_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E,E)} < \varepsilon \|(T - \lambda_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E,E)} = 1.$$

Pour $\lambda \in] \lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon [$, il existe donc, pour tout $f \in E$, un et un seul u tel que $T(u) - \lambda u = f$, ce qui prouve que $\lambda \in r(T)$. \square

On s'intéresse maintenant au cas des espaces de Hilbert de dimension infinie et on suppose que $T \in \mathcal{K}(H, H)$ et $T = T^*$. Comme T est compact et $\dim(H) = +\infty$, la valeur 0 joue un rôle très particulier car $T - \lambda I$ est non compact pour $\lambda \neq 0$ (voir l'exercice 6.1). Le théorème 6.1 montre alors que, si $\lambda \neq 0$, $T - \lambda I$ est injectif si et seulement si $T - \lambda I$ est surjectif. (On retrouve donc pour $\lambda \neq 0$ le résultat de la dimension finie.)

Le théorème 6.1 donne donc, pour T compact autoadjoint, $\sigma(T) \setminus \{0\} = vp(T) \setminus \{0\}$.

Théorème 6.1 (Noyau et Image de $T - \lambda I$ pour un opérateur compact autodjoint).

Soient H un espace de Hilbert réel (de dimension infinie) et $T \in \mathcal{K}(H, H)$, $T = T^*$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

Alors

- 1) $\text{Ker}(T - \lambda I)$ est de dimension finie.
- 2) $\text{Ker}(T - \lambda I) = \text{Im}(T - \lambda I)^\perp$ et $\text{Ker}(T - \lambda I)^\perp = \text{Im}(T - \lambda I)$.
- 3) $\text{Ker}(T - \lambda I) = \{0\}$ si et seulement si $\text{Im}(T - \lambda I) = H$.

Démonstration du théorème 6.1.

preuve du premier item.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $\text{Ker}(T - \lambda I)$ (par exemple, $\|u_n\|_E \leq 1$ pour tout n). On va montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente. Comme $\text{Ker}(T - \lambda I)$ est un e.v.n., ceci prouvera que sa dimension est finie (par le théorème 0.1).

Comme T est compact, il existe une sous suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $f \in H$ tels que $T(u_{\varphi(n)}) \rightarrow f$ quand $n \rightarrow +\infty$. Comme $u_n \in \text{Ker}(T - \lambda I)$, $T(u_n) = \lambda u_n$ et donc (comme $\lambda \neq 0$),

$$u_{\varphi(n)} = \frac{T(u_{\varphi(n)})}{\lambda} \rightarrow \frac{f}{\lambda} \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

ce qui prouve que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente et donc que $\text{Ker}(T - \lambda I)$ est de dimension finie.

preuve du deuxième item.

La proposition 5.6 donne $\text{Ker}(T - \lambda I) = \text{Im}(T^* - \lambda I)^\perp$ et $\text{Ker}(T - \lambda I)^\perp = \overline{\text{Im}(T^* - \lambda I)}$ et donc, comme $T = T^*$, $\text{Ker}(T - \lambda I) = \text{Im}(T - \lambda I)^\perp$ et $\text{Ker}(T - \lambda I)^\perp = \overline{\text{Im}(T - \lambda I)}$.

Pour montrer le deuxième item du théorème 6.1, il suffit donc de montrer que $\overline{\text{Im}(T - \lambda I)} = \text{Im}(T - \lambda I)$, c'est-à-dire que $\text{Im}(T - \lambda I)$ est fermé.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\text{Im}(T - \lambda I)$ telle que $f_n \rightarrow f$ (dans H) quand $n \rightarrow +\infty$. On veut montrer que $f \in \text{Im}(T - \lambda I)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in H$ tel que $T(u_n) - \lambda u_n = f_n$. Comme $H = \text{Ker}(T - \lambda I) \oplus \text{Ker}(T - \lambda I)^\perp$ (théorème 0.13), $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n \in \text{Ker}(T - \lambda I)$ et $w_n \in \text{Ker}(T - \lambda I)^\perp$. On a donc

$$\begin{aligned} (w_n | z)_H &= 0 \text{ pour tout } z \in \text{Ker}(T - \lambda I), \\ T(w_n) - \lambda w_n &= T(u_n - v_n) - \lambda(u_n - v_n) = T(u_n) - \lambda u_n = f_n. \end{aligned}$$

On va commencer par montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On suppose pour cela (par l'absurde) que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée. On peut alors extraire une sous suite, encore notée $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que $\|w_n\|_E \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ de sorte que

$$T\left(\frac{w_n}{\|w_n\|_E}\right) - \lambda \frac{w_n}{\|w_n\|_E} = \frac{f_n}{\|w_n\|_E} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (6.2)$$

Comme T est compact, on peut supposer, quitte à extraire une sous suite, que $T\left(\frac{w_n}{\|w_n\|_E}\right) \rightarrow \zeta$ (dans H) quand $n \rightarrow +\infty$ et donc $\frac{w_n}{\|w_n\|_E} \rightarrow \frac{\zeta}{\lambda} = z$ quand $n \rightarrow +\infty$ (ici, on utilise $\lambda \neq 0$). En passant à limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans (6.2), on en déduit (comme T est continu)

$$T(z) - \lambda z = 0,$$

c'est-à-dire $z \in \text{Ker}(T - \lambda I)$. On a aussi $\|z\|_H = 1$ (car z est limite d'éléments de H de norme 1).

On remarque enfin que, comme $w_n \in \text{Ker}(T - \lambda I)^\perp$, $(\frac{w_n}{\|w_n\|_E} | z)_H = 0$ et donc, quand $n \rightarrow +\infty$, $(z | z)_H = 0$, en contradiction avec $\|z\|_H = 1$.

On a bien montré que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

On utilise maintenant encore une fois le fait que T est compact. On peut supposer (après extraction éventuelle d'une sous suite encore notée $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$) que $T(w_n) \rightarrow \chi$ quand $n \rightarrow +\infty$ et donc, comme

$$\lambda w_n = T(w_n) - f_n,$$

$w_n \rightarrow w = (\chi - f)/\lambda$ (on utilise encore $\lambda \neq 0$).

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans $T(w_n) - \lambda w_n = f_n$ on obtient

$$T(w) - \lambda w = f,$$

et donc $f \in \text{Im}(T - \lambda I)$. On a bien montré que $\text{Im}(T - \lambda I)$ est fermé (et donc $\text{Ker}(T - \lambda I)^\perp = \text{Im}(T - \lambda I)$).

preuve du troisième item.

Le troisième item est une conséquence immédiate du deuxième item car $\text{Ker}(T - \lambda I) = \{0\}$ si et seulement si $\text{Ker}(T - \lambda I)^\perp = H$ (et le deuxième item donne $\text{Ker}(T - \lambda I)^\perp = \text{Im}(T - \lambda I)$). \square

Une conséquence immédiate du théorème 6.1 est l'alternative de Fredholm, proposition 6.2.

Proposition 6.2 (Alternative de Fredholm).

Soient H un espace de Hilbert réel et $K \in \mathcal{K}(H, H)$, $T = T^*$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, et $f \in H$.

On cherche $u \in H$ tel que

$$Tu - \lambda u = f. \tag{6.3}$$

1) Si $\lambda \notin \text{vp}(T)$, Il existe un unique $u \in H$ solution de (6.3).

2) Si $\lambda \in \text{vp}(T)$, l'équation (6.3) a une solution si et seulement si $f \in \text{Ker}(T - \lambda I)^\perp$.

(Si $f \in \text{Ker}(T - \lambda I)^\perp$, L'ensemble des solutions est $\{u_0 + u; u \in \text{Ker}(T - \lambda I)\}$ où u_0 est une solution de (6.3).)

Démonstration de la proposition 6.2. La preuve est laissée en exercice (exercice 6.3) \square

Théorème 6.2 (Valeurs propres d'un opérateur compact autodajoint).

Soient H un espace de Hilbert réel de dimension infinie et $T \in \mathcal{K}(H, H)$, $T = T^*$. Alors

1) $0 \in \sigma(T)$ et $\sigma(T) \setminus \{0\} = \text{vp}(T) \setminus \{0\}$.

2) Si l'ensemble $\sigma(T)$ n'est pas fini, alors $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ ($\lambda_n \neq \lambda_m$ si $n \neq m$) avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$.

Démonstration du théorème 6.2.

preuve du premier item.

On suppose que $0 \in r(T)$, c'est-à-dire T bijectif. On sait alors (par le théorème de Banach, théorème 0.9) que T^{-1} est continue. Comme $I = T \circ T^{-1}$ On en déduit que I transforme les parties bornées en parties relativement compactes (car T^{-1} transforme les parties bornées en parties bornées puis T transforme les parties bornées en parties relativement compactes). Ceci prouve que H est de dimension finie (par le théorème 0.1) en contradiction avec l'hypothèse. Donc, $0 \in \sigma(T)$.

En fait, on peut même démontrer que T est toujours non surjectif. En fait, si T est surjectif, la proposition 6.1 donne (comme $T = T^*$)

$$\text{Ker}(T)^\perp = \overline{\text{Im}(T^*)} = \overline{\text{Im}(T)} = H,$$

et donc $\text{Ker}(T) = \{0\}$ et T est bijectif.

Le troisième item du théorème 6.1 donne $\sigma(T) \setminus \{0\} = \text{vp}(T) \setminus \{0\}$.

preuve du second item.

On va montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\text{vp}(T) \cap [-\varepsilon, \varepsilon]^c$ est fini (et ceci permettra de conclure). On raisonne par l'absurde. Soit $\varepsilon > 0$, on suppose qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de valeurs propres de T telle que $\lambda_n \neq \lambda_m$ si $n \neq m$ et $|\lambda_n| > \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $u_n \in \text{Ker}(T - \lambda_n I)$ (donc $T(u_n) = \lambda_n u_n$) et $\|u_n\|_E = 1$.

On pose $E_n = \text{vect}\{u_0, \dots, u_n\}$ et on montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dim(E_n) = n + 1$, c'est-à-dire que la famille $\{u_0, \dots, u_n\}$ est libre.

Il est clair que $\dim(E_0) = 1$. On suppose que $\dim(E_n) = n + 1$ c'est-à-dire que la famille $\{u_0, \dots, u_n\}$ est libre. il s'agit de montrer que la famille $\{u_0, \dots, u_{n+1}\}$ est aussi libre, ce qui revient à montrer que $u_{n+1} \notin E_n$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ dans \mathbb{R} tels que

$$u_{n+1} = \sum_{i=0}^n \alpha_i u_i.$$

On a alors

$$\begin{aligned} T(u_{n+1}) &= T\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=0}^n \alpha_i T(u_i) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda_i u_i, \\ \lambda_{n+1} u_{n+1} &= \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda_{n+1} u_i. \end{aligned}$$

Comme $T(u_{n+1}) = \lambda_{n+1} u_{n+1}$, ceci donne

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{n+1}) u_i = 0.$$

Or $\lambda_i \neq \lambda_{n+1}$ pour tout $i = 0, \dots, n$ et donc, comme la famille $\{u_0, \dots, u_n\}$ est libre, $\alpha_i = 0$ pour tout $i = 0, \dots, n$, ce qui donne $u_{n+1} = 0$ en contradiction avec $\|u_{n+1}\|_E = 1$.

On a bien ainsi montré que $\dim(E_n) = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc que $E_n \subset E_{n+1}$ mais $E_n \neq E_{n+1}$.

On peut alors construire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \in E_n$ tel que $\|v_n\|_H = 1$ et, pour tout $w \in E_{n-1}$, $\|v_n - w\|_H \geq 1$ (on utilise le lemme 6.1 avec $H = E_n$ et $F = E_{n-1}$) et on considère la suite $(v_n/\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette suite est bornée (car $|\lambda_n| > \varepsilon$ et $\|v_n\|_H = 1$) et on va montrer que l'image par T de cette suite ne contient aucune sous suite convergente, en contradiction avec la compacité de T . Pour cela, il suffit de montrer que $\|T(v_n/\lambda_n) - T(v_m/\lambda_m)\|_H \geq 1$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$.

Or, pour $m < n$,

$$\left\| \frac{T(v_n)}{\lambda_n} - \frac{T(v_m)}{\lambda_m} \right\|_H = \left\| \frac{T(v_n) - \lambda_n v_n}{\lambda_n} + v_n - v_m - \frac{T(v_m) - \lambda_m v_m}{\lambda_m} \right\|_H \geq 1.$$

car

- $\frac{T(v_n) - \lambda_n v_n}{\lambda_n} \in E_{n-1}$ (car $v_n = \sum_{i=0}^n \alpha_i u_i$ et donc $T(v_n) - \lambda_n v_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) u_i$),
- $v_m \in E_m \subset E_{n-1}$ (car $m < n$)
- $\frac{T(v_m) - \lambda_m v_m}{\lambda_m} \in E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1}$.

En supposant que l'ensemble $vp(T) \cap [-\varepsilon, \varepsilon]^c$ est infini, on est donc arrivé à une contradiction avec la compacité de T .

On a donc montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, $vp(T) \cap [-\varepsilon, \varepsilon]^c$ est fini, ce qui donne aussi que $\sigma(T) \cap [-\varepsilon, \varepsilon]^c$ est fini car $\sigma(T) \cap [-\varepsilon, \varepsilon]^c = vp(T) \cap [-\varepsilon, \varepsilon]^c$ (par le premier item). Ceci prouve bien que $\sigma(T)$ est dénombrable, par exemple en remarquant que

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (vp(T) \cap [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]^c).$$

Si l'ensemble $\sigma(T)$ n'est pas fini, on peut donc écrire $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}^*\}$. Il existe alors, pour tout $\varepsilon > 0$, comme $\sigma(T) \cap [-\varepsilon, \varepsilon]^c$ est fini, $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\lambda_n| \leq \varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$. □

Lemme 6.1. Soient H un espace de Hilbert réel et F un s.e.v. fermé de H . On suppose que $F \neq H$. Alors, il existe $u \in H$ tel que $\|u\|_H = 1$ et, pour tout $v \in F$, $\|u - v\|_H \geq 1$.

Démonstration du lemme 6.1. On sait que $H = F \oplus F^\perp$ (proposition 0.13). Comme $F \neq H$, $F^\perp \neq \{0\}$ et on peut choisir $u \in F^\perp$ tel que $\|u\|_H = 1$. On a alors, pour tout $v \in F$, $\|u - v\|_H \geq 1$ (par exemple parce que l'identité de pythagore donne $\|u - v\|_H^2 = \|u\|_H^2 + \|v\|_H^2$). □

au cours C7, nous montrons le théorème 7.1 qui est un théorème fondamental pour un opérateur compact autoadjoint.

td6. Valeurs spectrales, valeurs propres, opérateurs adjoints, opérateurs compacts

Exercice 6.1 (T compact implique $T - \lambda I$ non compact).

Soit E un espace de Banach réel de dimension infinie et $T \in \mathcal{K}(E, E)$.

Soit $\lambda \neq 0$, montrer que $(T - \lambda I)$ n'est pas un opérateur compact.

[On pourra, par exemple, utiliser la proposition 5.3.]

Exercice 6.2 (Opérateur compact non nécessairement autoadjoint).

Soit H un espace de Hilbert réel de dimension infinie et $T \in \mathcal{K}(H, H)$.

Dans les questions suivantes, on se limite à $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) Soit $\lambda \in vp(T)$, $\lambda \neq 0$.

Montrer que $\dim \text{Ker}(T - \lambda I) < +\infty$ et que $\text{Im}(T - \lambda I)$ est une s.e.v. fermé de H .

2) Soit $\lambda \in vp(T)$, $\lambda \neq 0$. Montrer que $\lambda \in \sigma(T)$ si et seulement si $\lambda \in vp(T)$.

3) Montrer que

(a) $0 \in \sigma(T)$,

(b) si $\sigma(T)$ n'est pas un ensemble fini, alors $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ avec $\lambda_{n+1} < \lambda_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$.

[Pour les trois questions, s'inspirer des preuves des théorèmes 6.1 et 6.2.]

Exercice 6.3 (Alternative de Fredholm).

Démontrer la proposition 6.2

Exercice 6.4 ($T^{**} = T$).

Soit H un espace de Hilbert réel et $T \in \mathcal{L}(H, H)$. Montrer que $(T^*)^* = T$.

Exercice 6.5 (Surjectif non injectif, injectif non surjectif).

On prend ici $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et on définit $T \in \mathcal{L}(H, H)$ par

Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $T(x) = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $y_0 = 0$, $y_n = x_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

- 1) Calculer $T^*(x)$ pour tout $x \in \ell^2(\mathbb{N})$.
- 2) Donner $\text{Ker}(T)$, $\text{Im}(T)$, $\text{Ker}(T^*)$, $\text{Im}(T^*)$.
- 3) A-t-on T injectif?, surjectif?, T^* injectif?, surjectif?
- 4) A-t-on $\text{Ker}(T)^\perp = \text{Im}(T^*)$?, $\text{Ker}(T^*)^\perp = \text{Im}(T)$?

C7. Décomposition spectrale des opérateurs compacts autoadjoints

L'objectif de ce cours C7 est le théorème 7.1. Nous commençons par montrer deux petits lemmes utiles pour la preuve du théorème 7.1.

Lemme 7.1 (Norme d'un opérateur autoadjoint).

Soient H un espace de Hilbert réel (non réduit à $\{0\}$) et $T \in \mathcal{L}(H, H)$, $T = T^*$.

On note S_H la sphère unité de H , c'est-à-dire $S_H = \{u \in H, \|u\|_H = 1\}$, et

$$\begin{aligned} m &= \inf\{(T(u) | u)_H, u \in S_H\}, \\ M &= \sup\{(T(u) | u)_H, u \in S_H\}, \\ N &= \max\{M, -m\} = \max\{|(T(u) | u)_H|, u \in S_H\}. \end{aligned}$$

Alors

- 1) $m, M \in \sigma(T)$,
- 2) $\|T\|_{\mathcal{L}(H,H)} = N$.

Démonstration du lemme 7.1.

Preuve de $M \in \sigma(T)$ ¹

On remarque tout d'abord que $M \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H,H)}$ (car $(T(u) | u)_H \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H,H)} \|u\|_H^2$ pour tout $u \in H$).

Par la définition de M , Il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\|u_n\|_H = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$(T(u_n) | u_n)_H \rightarrow M \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

On va montrer que $T(u_n) - Mu_n \rightarrow 0$ (et on pourra en déduire que $M \in \sigma(T)$).

Pour cela, on définit a de $H \times H$ dans \mathbb{R} par, pour $u, v \in H$, $a(u, v) = (Mu - T(u) | v)_H$.

L'application a est symétrique (car $T = T^*$) et, pour tout $u \in H$, $a(u, u) \geq 0$ (car $(T(u) | u)_H \leq M(u | u)_H$ par définition de M et linéarité de T et du produit scalaire).

Pour $u, v \in H$, on définit φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par (et on utilise la symétrie de a)

$$\varphi(t) = a(u + tv, u + tv) = t^2 a(v, v) + 2ta(u, v) + a(u, u).$$

1. La preuve est plus simple si $T \in \mathcal{K}(H, H)$, voir la remarque 7.1.

L'application φ est donc un polynôme du second degré qui ne prend que des valeurs positives ($\varphi(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$). Ce polynôme ne peut donc pas avoir deux racines réelles. Son discriminant est donc négatif, ce qui donne

$$a(u, v)^2 \leq a(u, u)a(v, v) = (Mu - T(u) | u)_H (Mv - T(v) | v)_H \leq (Mu - T(u) | u)_H (M + \|T\|_{\mathcal{L}(H, H)}) \|v\|_H^2. \quad (7.1)$$

Dans (7.1), on prend $u = u_n$ et $v = Mu_n - T(u_n)$ de sorte que

$$a(u, v) = (Mu_n - T(u_n) | Mu_n - T(u_n))_H, \\ \|v\|_H \leq M + \|T\|_{\mathcal{L}(H, H)} \text{ car } u_n \in S_H.$$

L'inégalité (7.1) donne alors

$$\|Mu_n - T(u_n)\|_H^4 \leq (Mu_n - T(u_n) | u_n)_H (M + \|T\|_{\mathcal{L}(H, H)})^3.$$

Comme $(Mu_n - T(u_n) | u_n)_H = M - (T(u_n) | u_n)_H \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, on en déduit que $Mu_n - T(u_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Pour conclure la preuve de $M \in \sigma(T)$, on raisonne par l'absurde.

Si $M \in r(T)$ on a $u_n = (MI - T)^{-1}(Mu_n + T(u_n))$ et donc, comme $(MI - T)^{-1}$ est continu, $u_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, en contradiction avec $u_n \in S_H$ pour tout n .

Preuve de $m \in \sigma(T)$.

La preuve précédente appliquée à l'opérateur $-T$ donne $-m \in \sigma(-T)$ et donc $m \in \sigma(T)$.

Preuve de $\|T\|_{\mathcal{L}(H, H)} = N$.

On remarque tout d'abord que, pour tout $u \in S_H$,

$$|(T(u) | u)_H| \leq \|T(u)\|_H \|u\|_H \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H, H)} \|u\|_H^2 = \|T\|_{\mathcal{L}(H, H)},$$

et donc $N = \max\{M, -m\} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H, H)}$. ($T = T^*$ est inutile ici.)

Pour démontrer l'inégalité inverse, on rappelle que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(H, H)} = \sup\{\|T(u)\|_H, u \in S_H\},$$

$$\|T(u)\|_H = \sup\{(T(u) | v)_H, v \in S_H\},$$

et donc

$$\|T\|_{\mathcal{L}(H, H)} = \sup\{(T(u) | v)_H, u, v \in S_H\}.$$

On utilise maintenant $T = T^*$ et l'identité du parallélogramme pour écrire, pour tout $u, v \in H$,

$$4|(T(u) | v)_H| = |(T(u+v) | u+v)_H - (T(u-v) | u-v)_H| \\ \leq N\|u+v\|_H^2 + N\|u-v\|_H^2 = 2N(\|u\|_H^2 + \|v\|_H^2),$$

et donc, si $u, v \in S_H$, $|(T(u) | v)_H| \leq N$. En passant au sup quand u, v décrivent S_H on obtient bien $\|T\|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq N$ et, finalement $\|T\|_{\mathcal{L}(H, H)} = N$. \square

Remarque 7.1. En dimension finie (non nulle) la preuve de $M \in \sigma(T)$ dans le lemme 7.1 est plus simple. En effet, grâce à la compacité de S_H il existe $u \in S_H$ tel que $(T(u) | u)_H = M$. On écrit ensuite que $(T(u + tv) | u + tv)_H \leq M(u + tv | u + tv)_H$ pour tout $v \in H$ et $t > 0$. On développe les deux produits scalaires et on fait $t \rightarrow 0$. On obtient $T(u) = Mu$ donc $M \in vp(T)$. En dimension infinie, S_H n'est plus compact. Si $T \in \mathcal{K}(H, H)$, cette preuve peut toutefois s'adapter pour montrer que $M \in vp(T)$ si $M > 0$ (on sait déjà que $0 \in \sigma(T)$ mais on peut avoir $0 \notin vp(T)$). En effet, on arrive à montrer, grâce à $T \in \mathcal{K}(H, H)$, qu'il existe $u \in S_H$ tel que $(T(u) | u)_H = M$ et la suite est identique au cas $\dim(H) < +\infty$.

Lemme 7.2 (Condition donnant $T = 0$ si $T = T^*$).

Soient H un espace de Hilbert réel (non réduit à $\{0\}$) et $T \in \mathcal{L}(H, H)$, $T = T^*$.

On suppose que $\sigma(T) = \{0\}$, alors $T = 0$.

Démonstration du lemme 7.2.

On applique le lemme 7.1. $\sigma(T) = \{0\}$ implique que $M = m = 0$ et donc $N = 0$. On en déduit $\|T\|_{\mathcal{L}(H, H)} = 0$, c'est-à-dire $T = 0$. \square

On rappelle que si A est une matrice carrée symétrique de taille n (c'est-à-dire $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), Il existe une base orthonormée de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de A .

Le théorème 7.1 généralise ce théorème en dimension infinie pour un opérateur compact autoadjoint dans un espace de Hilbert réel en remplaçant "base orthonormée" par "base hilbertienne" (en dimension finie une base hilbertienne est justement une base orthonormée).

Théorème 7.1 (Décomposition spectrale d'un opérateur compact autoadjoint).

Soient H un espace de Hilbert réel séparable et $T \in \mathcal{K}(H, H)$, $T = T^*$. Alors, il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T .

Démonstration du théorème 7.1.

Par le théorème 6.2 on sait que $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est dénombrable, donc $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n, n \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}^*$ et $\lambda_n \neq \lambda_m$ si $n \neq m$.

Par le théorème 6.1, on sait que pour tout $n \in I$, $\lambda_n \in vp(T)$ et $1 \leq \dim(\text{Ker}(T - \lambda_n I)) < +\infty$. On pose $E_n = \text{Ker}(T - \lambda_n I)$ et on peut choisir une base orthonormée de E_n notée B_n .

On pose $E_0 = \text{Ker}(T)$. On a $0 \leq \dim(E_0) \leq +\infty$, l'ensemble E_0 peut être de dimension infinie mais comme H est séparable, E_0 est aussi séparable (on peut montrer que toute partie d'un ensemble séparable est séparable). L'ensemble E_0 est donc un espace de Hilbert (avec le produit scalaire de H) séparable (il est séparable et c'est un s.e.v. fermé de H). Il admet donc des bases hilbertiennes (proposition 0.8). On choisit une base hilbertienne de E_0 , on la note B_0 .

On prend maintenant $B = \cup_{n \in I \cup \{0\}} B_n$ et $F = \text{vect}\{B\}$. On va montrer B est une famille orthonormée puis que $F^\perp = \{0\}$, ce qui donne, par la proposition 0.10 que B est une base hilbertienne de H .

Preuve que B est une famille orthonormée.

Il suffit de montrer que $E_n \perp E_m$ si $n, m \in I \cup \{0\}$, $n \neq m$. Soit donc $u \in E_n$ et $v \in E_m$ (on pose $\lambda_0 = 0$), $n \neq m$.

$$T(u) = \lambda_n u, \quad T(v) = \lambda_m v,$$

et donc, comme $T = T^*$,

$$\lambda_n (u | v)_H = (T(u) | v)_H = (u | T(v))_H = \lambda_m (u | v)_H.$$

Comme $\lambda_n \neq \lambda_m$ on en déduit $(u|v)_H = 0$ et donc $E_n \perp E_m$.

Preuve de $F^\perp = \{0\}$.

On remarque tout d'abord que T envoie E_n dans E_n (pour tout $n \in I \cup \{0\}$) et donc T envoie F dans F .

On en déduit que T envoie F^\perp dans F^\perp . En effet, si $u \in F^\perp$, on a pour tout $v \in F$, comme $T = T^*$,

$$(T(u)|v)_H = (u|T(v))_H = 0 \text{ car } T(v) \in F,$$

et donc $T(u) \in F^\perp$.

L'espace F^\perp est s.e.v. fermé de H (c'est donc aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire de H). On note S la restriction de T à F^\perp . On va montrer que $S = 0$ (et on déduira que $F^\perp = \{0\}$).

L'opérateur S appartient à $\mathcal{L}(F^\perp, F^\perp)$.

Il est autoadjoint car si $u, v \in F^\perp$,

$$(S(u)|v)_{F^\perp} = (T(u)|v)_H = (u|T(v))_H = (u|S(v))_{F^\perp}.$$

Il est compact car si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de F^\perp , comme T est compact, il existe une sous suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(T(u_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans H et donc $(S(u_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans F^\perp (car $T = S$ dans F^\perp et F^\perp est fermé dans H).

Donc, $S = S^*$ et $S \in \mathcal{K}(F^\perp, F^\perp)$.

Soit $\lambda \in \text{vp}(S)$, $\lambda \neq 0$. Il existe $u \in F^\perp$, $u \neq 0$, tel que $S(u) = \lambda u$ et donc $T(u) = \lambda u$. Ceci prouve que $\lambda \in \{\lambda_n, n \in I\}$ et donc $u \in F$. Donc $u \in F \cap F^\perp$, c'est-à-dire $u = 0$ en contradiction avec $u \neq 0$.

L'opérateur S n'a donc aucune valeur propre ou valeur spectrale non nulle. Si F^\perp n'est pas réduit à $\{0\}$, On a ainsi montré que $\sigma(S) = \{0\}$. Le Lemme 7.2 donne alors $S = 0$, c'est-à-dire $F^\perp \subset \text{Ker}(T) = E_0 \subset F$ et donc $F^\perp = \{0\}$.

On rappelle que la proposition 0.10 donne alors que B est une base hilbertienne de H . □

Evaluation du 24 novembre 2021

L'évaluation contient 3 exercices. Le barème est sur 22 points. Les documents (polycopié du cours, notes personnelles, photocopies de documents) sont autorisés. Chaque réponse devra être justifiée. Il est autorisé d'utiliser les résultats qui ont été démontré en TD (sauf pour la question 1 de l'exercice 1 où il est demandé de redonner cette démonstration).

Le but des deux premiers exercices est de démontrer deux résultats vus en cours et TD mais non démontrés. Le troisième exercice donne un résultat important dans l'étude des probabilités.

Exercice 7.1 (Convergence faible- \star contre convergence (forte), barème 3 points).

Soit E est un espace de Banach réel. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E' , $f \in E'$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $x \in E$.

On suppose que $f_n \rightarrow f$ \star -faiblement dans E' et que $x_n \rightarrow x$ dans E .

1) (Question vue en TD) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Corrigé – C'est une conséquence de Banach-Steinhaus.

Pour tout $x \in E$, la suite $(\langle f_n, x \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (car convergente). Le théorème de Banach-Steinhaus donne alors que la suite $(\|f_n\|_{E'})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

2) Montrer que $\langle f_n, x_n \rangle_{E', E} \rightarrow \langle f, x \rangle_{E', E}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé – Il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. (pour tout $n \in \mathbb{N}$) $\|f_n\|_{E'} \leq C$ et donc

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n \rangle_{E', E} - \langle f, x \rangle_{E', E}| &\leq |\langle f_n, x_n \rangle_{E', E} - \langle f_n, x \rangle_{E', E}| + |\langle f_n, x \rangle_{E', E} - \langle f, x \rangle_{E', E}| \\ &\leq C \|x_n - x\|_E + |\langle f_n, x \rangle_{E', E} - \langle f, x \rangle_{E', E}|. \end{aligned}$$

Les deux termes de droite tendent vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 7.2 (Sous espace vectoriel fermé d'un espace de Banach réflexif, barème 8 points).

Soit E est un espace de Banach (réel) réflexif et F un sous espace vectoriel fermé de E . L'espace F (muni de la norme de E) est donc aussi un espace de Banach.

Pour $G = E$ ou $G = F$ On note J_G l'injection vue en cours de G dans G'' .

Soit $u \in F''$.

1) Si $f \in E'$, on désigne par $f|_F$ la restriction de f à F (et donc $f|_F \in F'$).

Montrer que l'application $f \mapsto \langle u, f|_F \rangle_{F'', F'}$ est linéaire continue de E' dans \mathbb{R} . C'est donc un élément de E'' que l'on note v dans la suite (de sorte que $\langle v, f \rangle_{E'', E'} = \langle u, f|_F \rangle_{F'', F'}$).

Montrer que $\|v\|_{E''} \leq \|u\|_{F''}$.

Corrigé –

L'application v est bien linéaire. Elle est continue car, pour tout $f \in E'$, $\|f|_F\|_{F'} \leq \|f\|_{E'}$ et donc

$$|\langle u, f|_F \rangle_{F'', F'}| \leq \|u\|_{F''} \|f|_F\|_{F'} \leq \|u\|_{F''} \|f\|_{E'}.$$

Ceci montre que $v \in E''$ et $\|v\|_{E''} \leq \|u\|_{F''}$.

2) (Question inutile pour la suite de l'exercice) A-t-on $\|v\|_{E''} = \|u\|_{F''}$?

Corrigé – La réponse est "oui". En effet, soit $\varepsilon > 0$, il existe $g \in F'$ tel que $\|g\|_{F'} = 1$ et $\langle u, g \rangle_{F'', F'} \geq \|u\|_{F''} - \varepsilon$. Le théorème de Hahn-Banach analytique donne l'existence de $f \in E'$ tel que $f|_F = g$ et $\|f\|_{E'} = \|g\|_{F'}$. On en déduit que

$$\|v\|_{E''} \geq \langle v, f \rangle_{E'', E'} = \langle u, g \rangle_{F'', F'} \geq \|u\|_{F''} - \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, ceci donne $\|v\|_{E''} \geq \|u\|_{F''}$ et donc finalement $\|v\|_{E''} = \|u\|_{F''}$.

3) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\langle v, f \rangle_{E'', E'} = \langle f, x \rangle_{E', E}$ pour tout $f \in E'$. [Utiliser le fait que E est réflexif.]

Corrigé – Comme E est réflexif, $\text{Im} J_E = E''$ et donc il existe $x \in E$ tel que $v = J_E(x)$ et donc

$$\langle v, f \rangle_{E'', E'} = \langle J_E(x), f \rangle_{E'', E'} = \langle f, x \rangle_{E', E} \text{ pour tout } f \in E'.$$

4) On considère l'élément x de E trouvé à la question 3.

(a) Montrer que $x \in F$. [Utiliser une conséquence du théorème de Hahn-Banach vue au TD1.]

Corrigé – Si $x \notin F$. Le théorème de Hahn-Banach donne qu'il existe $f \in E'$ t.q. $f|_F = 0$ et $\langle f, x \rangle_{E', E} \neq 0$, ce qui est impossible car

$$0 \neq \langle f, x \rangle_{E', E} = \langle v, f \rangle_{E'', E'} = \langle u, f|_F \rangle_{F'', F'} = 0.$$

(b) Montrer que $J_F(x) = u$.

Corrigé – Soit $g \in F'$. Par Hahn-Banach, il existe $f \in E'$ tel que $f|_F = g$. On a donc, comme $x \in F$,

$$\begin{aligned} \langle J_F(x), g \rangle_{F'', F'} &= \langle g, x \rangle_{F', F} = \langle f, x \rangle_{E', E} = \langle J_E(x), f \rangle_{E'', E'} = \langle v, f \rangle_{E'', E'} \\ &= \langle u, f|_F \rangle_{F'', F'} = \langle u, g \rangle_{F'', F'}. \end{aligned}$$

On a bien montré que $J_F(x) = u$.

5) Dédurre des questions précédentes que F est réflexif.

Corrigé – Les questions précédentes montrent que $\text{Im} J_F = F''$ et donc que F est réflexif.

Exercice 7.3 (Convergence faible- \star dans $(C_b)'$ et $(C_0)'$, barème 11 points).

On note E l'espace de Banach $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de sa norme naturelle que l'on note $\| \cdot \|$.

On note F l'espace $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (qui est un s.e.v. fermé de E).

Si $f \in E$, $f \geq 0$ signifie $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) Soit $\mu \in E'$ telle que pour tout $f \in E$, $f \geq 0$ implique $\langle \mu, f \rangle_{E', E} \geq 0$.

Montrer que pour tout $f, g \in E$,

$$g \geq 0 \Rightarrow |\langle \mu, fg \rangle_{E', E}| \leq \|f\| \langle \mu, g \rangle_{E', E}.$$

Corrigé – Soient $f, g \in E$, $g \geq 0$.

Comme $fg \leq \|f\|g$, $\|f\|g - fg \geq 0$ et donc $\langle \mu, fg \rangle_{E', E} \leq \|f\| \langle \mu, g \rangle_{E', E}$. Cette inégalité étant aussi vraie avec $-f$, on en déduit $|\langle \mu, fg \rangle_{E', E}| \leq \|f\| \langle \mu, g \rangle_{E', E}$.

On considère maintenant une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E' . On suppose que

- $\langle \mu_n, f \rangle_{E', E} \geq 0$ pour tout $f \in E$, $f \geq 0$, et tout $n \in \mathbb{N}$.
- $\langle \mu_n, \mathbf{1}_{\mathbb{R}} \rangle_{E', E} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ($\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ est la fonction qui vaut 1 en tout point de \mathbb{R} .)

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\mu_n\|_{E'} = 1$. Puis, déduire du fait que F est séparable (propriété vue en cours) qu'il existe une sous suite de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$, encore notée $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que, pour tout $f \in F$, la suite $(\langle \mu_n, f \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}}$ converge (dans \mathbb{R}) quand $n \rightarrow +\infty$.

(Ceci signifie que la suite des restrictions de μ_n à F converge \star -faiblement dans F' .)

Corrigé – Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $f \in E$, $\langle \mu_n, f \rangle_{E', E} \leq \|f\| \langle \mu_n, \mathbf{1}_{\mathbb{R}} \rangle_{E', E} = \|f\|$. On en déduit que $\|\mu_n\|_{E'} \leq 1$. Comme $\langle \mu_n, \mathbf{1}_{\mathbb{R}} \rangle_{E', E} = 1$, on a finalement $\|\mu_n\|_{E'} = 1$.

La suite des restrictions de μ_n à F est une suite bornée de F' . Comme F est séparable, on en déduit que cette suite admet une sous suite qui converge \star -faiblement dans F' .

On considère dans la suite de l'exercice cette suite extraite trouvée à la question 2 (et toujours notée $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note φ_p la fonction définie par

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) &= 1 \text{ si } -p \leq x \leq p, \\ \varphi_p(x) &= 1 - (x - p) \text{ si } p < x < p + 1, \\ \varphi_p(x) &= 1 + (x + p) \text{ si } -p - 1 < x < -p, \\ \varphi_p(x) &= 0 \text{ si } |x| \geq p + 1. \end{aligned}$$

On définit ψ_p par $\psi_p(x) = 1 - \varphi_p(x)$. Noter que $\psi_p \in E$ et $\varphi_p \in F$.

3) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, représenter graphiquement les fonctions φ_p et ψ_p .

On suppose maintenant de plus que la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue, c'est-à-dire que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \langle \mu_n, \psi_p \rangle_{E', E} \rightarrow 0 \text{ quand } p \rightarrow +\infty. \quad (7.2)$$

4) Montrer que pour tout $f \in E$, la suite $(\langle \mu_n, f \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy (dans \mathbb{R}).

[Utiliser $f = f\varphi_p + f\psi_p$ et la convergence faible- \star des restrictions des μ_n à F .]

Corrigé – Soient $n, m \in \mathbb{N}$, $f \in E$ et $p \in \mathbb{N}$. En utilisant $f = f\varphi_p + f\psi_p$,

$$\begin{aligned} |\langle \mu_n, f \rangle_{E', E} - \langle \mu_m, f \rangle_{E', E}| &\leq |\langle \mu_n, f\psi_p \rangle_{E', E}| + |\langle \mu_m, f\psi_p \rangle_{E', E}| + |\langle \mu_n, f\varphi_p \rangle_{E', E} - \langle \mu_m, f\varphi_p \rangle_{E', E}| \\ &\leq 2\|f\| \sup_{n \in \mathbb{N}} \langle \mu_n, \psi_p \rangle_{E', E} + |\langle \mu_n, f\varphi_p \rangle_{E', E} - \langle \mu_m, f\varphi_p \rangle_{E', E}|. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, grâce à (7.2) il existe $p \in \mathbb{N}$ t.q. $2\|f\| \sup_{n \in \mathbb{N}} \langle \mu_n, \psi_p \rangle_{E', E} \leq \varepsilon$. Puis, comme $f\varphi_p \in F$, il existe n_0 tel que $n, m \geq n_0$ implique $|\langle \mu_n, f\varphi_p \rangle_{E', E} - \langle \mu_m, f\varphi_p \rangle_{E', E}| \leq \varepsilon$. Finalement,

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |\langle \mu_n, f \rangle_{E', E} - \langle \mu_m, f \rangle_{E', E}| \leq 2\varepsilon.$$

5) Montrer qu'il existe $\mu \in E'$ telle que $\mu_n \rightarrow \mu$ \star -faiblement dans E' quand $n \rightarrow +\infty$. Montrer que $\langle \mu, f \rangle_{E', E} \geq 0$ pour tout $f \in E$, $f \geq 0$, et que $\langle \mu, \mathbf{1}_{\mathbb{R}} \rangle_{E', E} = 1$.

Corrigé – La question 4 montre que la suite $(\langle \mu_n, f \rangle_{E', E})_{n \in \mathbb{N}}$ converge (dans \mathbb{R}) pour tout $f \in E$. On note $L(f)$ cette limite. L'application L est linéaire comme limite d'applications linéaires. En passant à la limite dans l'inégalité $|\langle \mu_n, f \rangle_{E', E}| \leq \|f\|$, on obtient qu'il existe $\mu \in E'$ t.q. $L(f) = \langle \mu, f \rangle_{E', E}$ et $\|\mu\|_{E'} \leq 1$.

On a obtenu que $\mu_n \rightarrow \mu$ \star -faiblement dans E' .

De plus, soit $f \in E$, $f \geq 0$. En passant à la limite dans $\langle \mu_n, f \rangle_{E', E} \geq 0$ on en déduit $\langle \mu, f \rangle_{E', E} \geq 0$.

Enfin, $\langle \mu, \mathbf{1}_{\mathbb{R}} \rangle_{E', E} = 1$ s'obtient en passant à la limite dans l'égalité $\langle \mu_n, \mathbf{1}_{\mathbb{R}} \rangle_{E', E} = 1$.

6) Si la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne vérifie pas la condition (7.2), donner (sans démonstration) un exemple pour lequel la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge \star -faiblement dans F' mais ne converge pas \star -faiblement dans E' .

Corrigé – la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E' définie par $\langle \mu_n, f \rangle_{E', E} = f(n)$ (pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$) convient.

NB : Cet exercice montre que d'une suite de variables aléatoires réelles tendue (ceci correspond à l'hypothèse (7.2) pour la suite des lois de X_n) on peut extraire une suite convergente en loi.

Evaluation du 17 novembre 2022

L'examen contient 4 exercices. Les documents (polycopié du cours, notes de TD, notes personnelles) sont autorisés. Chaque réponse devra être justifiée. Vous pouvez utiliser les résultats qui ont été démontré en TD.

Exercice 7.4 (HB géométrique sans HB, barème 6 points).

Soient H un espace de Hilbert réel, $C \subset H$ un convexe fermé non vide et $K \subset H$ un convexe compact non vide. On suppose que $K \cap C = \emptyset$ et on pose $d = \inf\{\|u - v\|_H, u \in K, v \in C\}$.

On note P_C et P_K les opérateurs de projection orthogonale sur C et K .

1) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|a_n - b_n\|_H = d.$$

Montrer que l'on peut supposer (quitte à extraire une sous suite) que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On pose $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ et $b = P_C(a)$.

Montrer que $\|a - b\|_H = d$.

Corrigé – Comme K est compact, on peut effectivement extraire de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite convergente. On peut donc supposer que la suite converge et $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \in K$

Comme $b = P_C(a)$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (comme $b_n \in C$),

$$\|a - b\|_H \leq \|a - b_n\|_H \leq \|a - a_n\|_H + \|a_n - b_n\|_H.$$

Quand $n \rightarrow +\infty$ on obtient $\|a - b\|_H \leq d$ et donc $\|a - b\|_H = d$

On considère pour les deux questions suivantes un couple $(a, b) \in K \times C$ tel que $\|a - b\|_H = d$ (l'existence d'un tel couple a été prouvée à la question 1).

2) Montrer que $a = P_K(b)$.

Corrigé – Pour tout $v \in K$, $\|b - a\|_H = d \leq \|b - v\|_H$, ce qui prouve que $a = P_K(b)$.

3) Donner explicitement en fonction de a et b un élément f de H' et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} \langle f, u \rangle_{H', H} &\leq \gamma \text{ pour tout } u \in C, \\ \langle f, u \rangle_{H', H} &> \gamma \text{ pour tout } u \in K. \end{aligned}$$

Corrigé – On définit $f \in E'$ par

$$\langle f, u \rangle_{H', H} = (u | a - b)_H,$$

et on prend $\gamma = \|a - b\|_H^2$. La caractérisation de la projection sur un convexe fermé non vide donne

$$(a - b | b - u)_H \geq 0 \text{ pour tout } u \in C,$$

$$(b - a | a - u)_H \geq 0 \text{ pour tout } u \in K.$$

On en déduit

$$(a - b | u)_H \leq (a - b | b)_H \text{ pour tout } u \in C,$$

$$(a - b | u)_H \geq (a - b | a)_H = (a - b | b)_H + (a - b | a - b)_H \text{ pour tout } u \in K.$$

Comme $(a - b | a - b)_H > 0$, on peut prendre $\gamma = (a - b | b)_H$.

4) (Exemples) on prend dans cette question $H = \mathbb{R}^2$ (muni de sa norme euclidienne habituelle).

(a) Donner un exemple (sans détailler la preuve) pour lequel il existe plusieurs couples $(a, b) \in K \times C$ tels que $d = \|a - b\|_H$.

Corrigé – $C = \{0\} \times [0, 1]$, $K = \{1\} \times [0, 1]$. Tous les couples $\{(1, t), (0, t)\}$, avec $t \in [0, 1]$, conviennent.

(b) On suppose que K est fermé mais on ne suppose plus que K est compact. Donner un exemple (sans détailler la preuve) pour lequel il n'existe pas de couple $(a, b) \in K \times C$ tels que $d = \|a - b\|_H$.

Corrigé – $K = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq e^x\}$. Les ensembles K et C sont bien convexes fermés non vide mais la distance de K à C est nulle.

Exercice 7.5 (Base algébrique, barème 3 points).

Soient E un espace de Banach réel de dimension infinie. Soit $\{e_i, i \in I\}$ une base algébrique² de E , c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, il existe une unique famille $\{x_i, i \in I\}$ de nombres réels telle que $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ et $x_i = 0$ sauf pour un nombre fini de i .

Comme la dimension de E est infinie, on peut supposer que I contient \mathbb{N} . On pose alors

$$x^{(n)} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2 \|e_p\|_E} e_p.$$

1) Montrer que la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans E .

Corrigé – Il suffit de remarquer qu'elle est de Cauchy car, pour $m > n$, $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_E \leq \sum_{p=n+1}^m \frac{1}{p^2}$ et que la série $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2}$ est convergente.

2) Montrer qu'il est impossible que toutes les applications $x \mapsto x_i$ (de E dans \mathbb{R}) soient continues (on rappelle que $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ et $x_i = 0$ sauf pour un nombre fini de i).

Corrigé – On note x la limite dans E de la suite $x^{(n)}$. On note $x_i^{(n)}$ (resp. x_i), $i \in I$, les composantes de $x^{(n)}$ (resp. x) dans la base $\{e_i, i \in I\}$.

Si toutes les applications $x \mapsto x_i$ (de E dans \mathbb{R}) sont continues, on doit avoir, pour tout $i \in I$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_i^{(n)} = x_i.$$

Soit $i \in \mathbb{N}$, comme $x_i^{(n)} = \frac{1}{i^2 \|e_i\|_E}$ pour $n \geq i$, on en déduit que $x_i = \frac{1}{i^2 \|e_i\|_E} \neq 0$, ce qui est impossible car $x_i = 0$ sauf pour un nombre fini de i .

Exercice 7.6 (Séparabilité, barème 3 points).

Soit E un e.v.n. séparable et A une partie de E dénombrable dense dans E . Soit F une partie E .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Pour tout $x \in A$, si il existe au moins un point y de F tel que $\|x - y\|_E \leq 1/n$, on choisit un tel point et on le note $a_{x,n}$ (on a donc $a_{x,n} \in F$ et $\|x - a_{x,n}\|_E \leq 1/n$).

On note B_n l'ensemble des points obtenus ainsi (noter que $B_n \subset F$).

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Construire une injection de B_n dans A (ce qui prouve que B_n est dénombrable).

Corrigé – Pour tout $y \in B_n$, on choisit un point $x_y \in A$ tel que $y = a_{x_y,n}$ (un tel x_y existe mais n'est pas nécessairement unique). On a ainsi construit une application $y \mapsto x_y$ de B_n dans A . Cette application est injective. En effet, si $x_y = x_z$ (avec $y, z \in B_n$) on a $y = a_{x_y,n} = a_{x_z,n} = z$.

2) Construire avec les ensembles B_n ($n \in \mathbb{N}^*$) une partie de F dénombrable dense dans F (ce qui prouve que F est séparable).

Corrigé – Il suffit de prendre $B = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$. On a bien $B \subset F$ et B dénombrable (comme union dénombrable d'ensembles dénombrables). On montre maintenant que B est dense dans F .

soit $y \in F$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme A est dense dans E , il existe $x \in A$ tel que $\|x - y\|_E \leq 1/n$. On remarque alors que

$$\|y - a_{x,n}\|_E \leq \|y - x\|_E + \|x - a_{x,n}\|_E \leq \frac{2}{n}.$$

Comme $a_{x,n} \in B$, ceci prouve la densité de B dans F .

2. Une telle base existe toujours, c'est une conséquence du lemme de Zorn

Exercice 7.7 (Convergence, convergence faible, convergence \star -faible, barème 8 points). Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = 1_{[n, n+1]}$ (c'est-à-dire $f_n(x) = 1$ si $x \in [n, n+1]$ et 0 sinon). La fonction $f_n \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et on la confond avec l'élément de L^p auquel elle appartient.

1) Dans cette question $1 < p < \infty$.

Montrer que $f_n \rightarrow 0$ faiblement dans L^p quand $n \rightarrow +\infty$ (ce qui est équivalent à montrer que, pour tout $g \in L^q$, $1/p + 1/q = 1$, $\int f_n(x)g(x)dx \rightarrow 0$).

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a-t-elle une limite dans L^p ?

Corrigé – Soit $g \in L^q$, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$|\int f_n(x)g(x)dx| \leq \int |g(x)|1_{[n, n+1]}(x)dx \leq (\int_{[n, n+1]} |g(x)|^q dx)^{1/q}.$$

On pose $g_n = |g|^p 1_{[n, n+1]}$. Le théorème de convergence dominée donne $\int g_n dx \rightarrow 0$ (car $g_n \rightarrow 0$ p.p. et $|g_n| \leq |g|^p \in L^1$) et donc $\int f_n(x)g(x)dx \rightarrow 0$. On a bien montré que $f_n \rightarrow 0$ faiblement dans L^p .

Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avait une limite dans L^p , cette limite serait aussi la limite faible. On aurait donc $f_n \rightarrow 0$ dans L^p , ce qui est faux car $\|f_n\|_p = 1$.

2) Dans cette question $p = 1$.

Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas faiblement convergente dans L^1 quand $n \rightarrow +\infty$. (On rappelle que $f_n \rightarrow f$ faiblement dans L^1 est équivalent à dire que, pour tout $g \in L^\infty$, $\int f_n(x)g(x)dx \rightarrow \int f(x)g(x)dx$).

[On pourra raisonner en supposant que $f_n \rightarrow f$ faiblement dans L^1 et montrer une contradiction en choisissant convenablement des fonctions $g \in L^\infty$.]

Corrigé – On suppose que $f_n \rightarrow f$ faiblement dans L^1 . Donc, pour tout $g \in L^\infty$, $\int f_n(x)g(x)dx \rightarrow \int f(x)g(x)dx$.

En prenant, pour $p \in \mathbb{N}$, $g = \text{sgn}(f)1_{[-p, p]}$, on montre que

$$\int_{[-p, p]} |f(x)|dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n(x)g(x)dx = 0.$$

On en déduit $f = 0$ p.p. sur $[-p, p]$. Comme $\mathbb{R} = \cup_{p \in \mathbb{N}} [-p, p]$ ceci donne $f = 0$ p.p..

Puis en prenant $g = 1_{\mathbb{R}}$, on montre que $\int f(x)g(x)dx = 1$, ce qui est impossible car $f = 0$ p.p..

3) Dans cette question $p = \infty$.

On prend maintenant $f_n = 1_{[n, +\infty[}$ (c'est-à-dire $f_n(x) = 1$ si $x \in [n, +\infty[$ et 0 sinon).

(a) On identifie L^∞ avec $(L^1)'$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a-t-elle une limite \star -faible dans L^∞ ?

Si oui, quelle est cette limite ?

Corrigé – Soit $g \in L^1$,

$$|\int f_n(x)g(x)dx| \leq \int |g(x)|1_{[n, +\infty[}(x)dx.$$

On pose $g_n = |g|1_{[n, +\infty[}$. Le théorème de convergence dominée donne $\int g_n dx \rightarrow 0$ (car $g_n \rightarrow 0$ p.p. et $|g_n| \leq |g| \in L^1$) et donc $\int f_n(x)g(x)dx \rightarrow 0$. On a donc montré que $f_n \rightarrow 0$ \star -faiblement dans L^∞ .

(b) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a-t-elle une limite faible dans L^∞ ? Si oui, quelle est cette limite ?

[On pourra introduire le s.e.v de L^∞ , $F = \{f \in L^\infty \text{ tel que } \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{[p, p+1]} f(x)dx \text{ existe dans } \mathbb{R}\}$ et utiliser $T \in F'$ défini par $\langle T, f \rangle_{F', F} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{[p, p+1]} f(x)dx$. On vérifiera que T appartient bien à F' lorsque F est muni de la norme de L^∞ .]

Corrigé – L'application T est bien linéaire continue de F (muni de la norme de L^∞) dans \mathbb{R} (et $\|T\|_{F'} \leq 1$). Par le théorème de Hahn-Banach, T se prolonge en $\tilde{T} \in (L^\infty)'$.

Si $f_n \rightarrow f$ faiblement dans L^∞ , on a alors aussi $f_n \rightarrow f$ \star -faiblement dans L^∞ et donc $f = 0$ p.p.. On a donc $\langle \tilde{T}, f_n \rangle_{(L^\infty)', L^\infty} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, ce qui est impossible car $f_n \in F$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle \tilde{T}, f_n \rangle_{(L^\infty)', L^\infty} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{[p, p+1]} f_n(x) dx = 1.$$

C8. Dérivée faible. Problème aux limites

Pour motiver ce cours, on commence par un exemple.

Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, On cherche $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ solution de

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in [0, 1], \quad (8.1)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (8.2)$$

Puis, si il existe $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ solution de (8.1)-(8.2), a-t-on unicité de cette solution ?

Remarque 8.1 (Définition de $C^k(\bar{\Omega})$). Une fonction u de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} appartient à $C^2([0, 1], \mathbb{R})$ si elle est deux fois dérivable en tout point de $[0, 1]$ en considérant en 0 les dérivées à droite et en 1 les dérivées à gauche et que les dérivées première et seconde sont continues sur $[0, 1]$. Cette définition se généralise facilement pour définir $C^k(I, \mathbb{R})$ si $k \in \mathbb{N}$ et I est un intervalle de \mathbb{R} .

Il est intéressant de remarquer que la situation est beaucoup plus compliquée si la variable x appartient à une partie de \mathbb{R}^d , $d > 1$, au lieu de \mathbb{R} . Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d , on définit $C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ comme étant l'ensemble des restrictions à $\bar{\Omega}$ des fonctions appartenant à $C^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Dans le cas où $d = 1$ et $\bar{\Omega}$ est un intervalle de \mathbb{R} , cette définition est équivalente à la précédente (ceci est laissé à titre d'exercice).

On peut envisager plusieurs méthodes pour résoudre le problème (8.1)-(8.2). Une première consisterait à considérer l'équation différentielle du deuxième ordre (8.1) avec condition initiale $u(0) = 0$ et $u'(0) = a$ et à chercher la valeur de a pour avoir $u(1) = 0$. Cette méthode a l'inconvénient majeur de ne pas se généraliser à des problèmes semblables (en un sens à définir !) au problème (8.1)-(8.2) mais avec x dans un compact de \mathbb{R}^d , $d > 1$ (essentiellement $d = 2$ ou $d = 3$) au lieu de x dans un intervalle compact de \mathbb{R} .

La méthode que nous allons utiliser est très différente et peut décomposer en plusieurs étapes.

- 1) Définition de la notion de dérivée faible et d'un problème dit "faible" suggéré par le problème initial (pour ce cours C8, le problème initial est (8.1)-(8.2) avec u de classe C^2).
- 2) Résolution du problème faible (existence et si possible unicité).
- 3) Régularité des solutions du problème faible.
- 4) Résolution du problème initial (pour ce cours C8, (8.1)-(8.2) avec u de classe C^2).

L'introduction de la notion de dérivée faible est due à Jean Leray dans un article de 1934. Elle lui a permis de montrer l'existence de solutions faibles aux équations de Navier-Stokes modélisant l'écoulement d'un fluide incompressible. Elle nous donnera dans ce cours l'existence d'une solution faible au problème (8.1)-(8.2) et nous aurons d'ailleurs aussi l'unicité de cette solution faible.

Nous montrerons ensuite la régularité de la solution faible et donc l'existence d'une solution au problème (8.1)-(8.2) avec u de classe C^2 . Cela sera "assez" facile, grâce au fait que $x \in \mathbb{R}$. Prouver la régularité des solutions faibles est souvent beaucoup plus difficile dans les problèmes avec $x \in \mathbb{R}^d$, $d > 1$. Par exemple, dans le problème étudié par Jean Leray, pour $d = 3$, l'existence d'une solution au sens classique des dérivées est toujours un problème ouvert.

Remarque 8.2 (Premier pas vers le problème faible). Soit $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ solution de (8.1)-(8.2). Soit $v \in C_c^\infty(]0, 1[, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire v de classe C^∞ et à support compact dans $]0, 1[$). L'équation (8.1) donne alors

$$-\int_0^1 u''(x)v(x) dx + \int_0^1 u(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

En intégrant par parties, ceci donne que u est solution de (8.3).

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx + \int_0^1 u(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx \text{ pour tout } v \in C_c^\infty(]0, 1[, \mathbb{R}). \quad (8.3)$$

La fonction u appartient donc à $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ et elle vérifie (8.3)-(8.2). C'est presque le problème faible de (8.1)-(8.2) sauf que nous allons maintenant affaiblir la notion de dérivée (et ne pas demander que u soit de classe C^1 mais u dans un espace plus gros).

Notation : Si $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on notera $L^2(I)$ l'espace $L^2(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$.

Définition 8.1 (Dérivée faible). Soit I un ouvert de \mathbb{R} et $u \in L^2(I)$. On suppose qu'il existe $g \in L^2(I)$ tel que

$$\int_I u(x)\varphi'(x) dx = - \int_I g(x)\varphi(x) dx \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}).$$

Alors g est la dérivée faible de u , on note $Du = g$.
(Noter que g est unique, voir la remarque 8.3.)

Remarque 8.3 (Unicité de la dérivée faible, comparaison avec la dérivée classique).

1) (Unicité de la dérivée faible) Soient I un ouvert de \mathbb{R} et $g, h \in L^2(I)$ tels que

$$\int_I (g(x) - h(x))\varphi(x) dx = 0 \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}).$$

On a donc $(g - h | \varphi)_{L^2(I)} = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R})$.

On utilise maintenant que $C_c^\infty(I, \mathbb{R})$ est dense dans $L^2(I)$ ¹. En prenant une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $C_c^\infty(I, \mathbb{R})$ telle que $\varphi_n \rightarrow (g - h)$ dans $L^2(I)$ quand $n \rightarrow +\infty$, on déduit donc de l'égalité précédente (avec φ_n au lieu de φ) que $(g - h | g - h)_{L^2(I)} = 0$ et donc $g = h$ p.p. (ce qui est l'écriture usuelle de $g = h$ dans $L^2(I)$).

2) (Lien dérivée faible et dérivée classique) Soient I un ouvert de \mathbb{R} et $u \in C^1(I, \mathbb{R})$. On a alors, en prolongeant u et φ par 0 hors de I , avec une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_I u(x)\varphi'(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi'(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} u'(x)\varphi(x) dx = - \int_I u'(x)\varphi(x) dx \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

1. Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, et $1 \leq p < +\infty$, l'ensemble $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_d)$, voir le cours d'intégration.

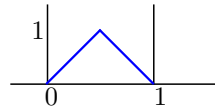
ce qui prouve que u a une dérivée faible et cette dérivée faible (qui est un élément de $L^2(I)$) est représentée par la fonction u' . En toute rigueur, on devrait dire $u' \in Du$. En pratique on confond Du (qui est une classe de fonctions) avec la fonction u' (qui est l'une des fonctions de la classe Du , ici u' est même la seule fonction continue appartenant à la classe Du , ce qui justifie quelque peu la confusion entre Du et u').

Avec cette confusion entre Du et u' , on a donc montré que si $u \in C^1(I, \mathbb{R})$, $Du = u'$ (dérivée faible et dérivée classique coïncident).

3) (Exemple de dérivée faible non continue) On prend ici $I =]0, 1[$ et la fonction u définie par

$$u(x) = 2x \text{ pour } 0 < x \leq \frac{1}{2},$$

$$u(x) = -2(x - 1) \text{ pour } \frac{1}{2} < x < 1.$$



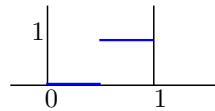
La fonction u est continue (et on la confond, comme d'habitude, avec l'élément de $L^2(I)$ auquel elle appartient). Elle n'est pas de classe C^1 (elle n'est pas dérivable au point $1/2$, mais elle admet une dérivée faible $Du = -2$ p.p. sur $]0, 1/2[$ et $Du = 2$ p.p. sur $]1/2, 1[$).

Remarque 8.4 (Exemple de non existence de dérivée faible, dérivée par transposition).

1) (Exemple de non existence de dérivée faible) On prend ici $I =]0, 1[$ et la fonction u définie par

$$u(x) = 0 \text{ pour } 0 < x \leq \frac{1}{2},$$

$$u(x) = 1 \text{ pour } \frac{1}{2} < x < 1.$$



On a bien $u \in L^2(I)$ (on confond ici la fonction u avec sa classe) et

$$\int_I u(x)\varphi'(x) dx = \int_{1/2}^1 \varphi'(x) dx = -\varphi(1/2) \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(]0, 1[, \mathbb{R}).$$

La fonction u n'a pas de dérivée faible. Pour cette raison, différents auteurs ont été amenés à généraliser la notion de dérivée faible et à introduire la notion de dérivée au sens des distributions (due à Laurent Schwartz vers 1950). Dans l'exemple ci dessus, la dérivée au sens des distributions de u est la distribution $\delta_{1/2}$ (appelée aussi "masse de Dirac au point $1/2$ ", introduite initialement, avant les travaux de Laurent Schwartz, par le physicien Paul Dirac sous la forme d'une "fonction généralisée").

La distribution $\delta_{1/2}$ est donc l'application linéaire T de $C_c^\infty(]0, 1[, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R} définie par

$$T(\varphi) = \varphi(1/2).$$

2) (Dérivée par transposition ou dérivée au sens des distributions) Soient I un ouvert de \mathbb{R} et $u \in L^1_{loc}(I)$ (c'est-à-dire que $u1_K \in L^1(I)$ pour tout compact $K \subset I$). La dérivée par transposition ou dérivée au sens des distributions de u est l'application linéaire T de $C_c^\infty(I, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R} définie par

$$T(\varphi) = - \int_I u(x)\varphi'(x) dx.$$

Grâce à cette définition, toute fonction localement intégrable a une dérivée.

Définition 8.2 (Espace $H^1(I)$). Soit I un ouvert de \mathbb{R} .

$$H^1(I) = \{u \in L^2(I) \text{ tel que } u \text{ a une dérivée faible } Du \in L^2(I)\}.$$

Si $u, v \in H^1(I)$, on pose

$$(u | v)_{H^1(I)} = (u | v)_{L^2(I)} + (Du | Dv)_{L^2(I)}.$$

Théorème 8.1 (H^1 est un Hilbert séparable).

Soit I un ouvert de \mathbb{R} . L'espace $H^1(I)$ est un espace de Hilbert réel séparable.

Démonstration du théorème 8.1.

Le fait que $H^1(I)$ est e.v. réel est assez facile. Cela découle de la linéarité de l'intégrale. Si $u, v \in H^1(I)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $D(\alpha u + \beta v) = \alpha Du + \beta Dv$ et donc $(\alpha u + \beta v) \in H^1(I)$ (et $D(\alpha u + \beta v) = \alpha Du + \beta Dv$).

Le fait que l'application $(u, v) \mapsto (u | v)_{H^1(I)}$ est un produit scalaire sur $H^1(I)$ est aussi assez facile. En particulier $(u | u)_{H^1(I)} = 0$ implique $u = 0$ p.p. (i.e. $u = 0$ dans $L^2(I)$). L'espace $H^1(I)$ est donc un e.v.n. réel dont la norme est induite par un produit scalaire.

On montre maintenant que $H^1(I)$ est complet.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $H^1(I)$. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Du_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc de Cauchy dans $L^2(I)$. Il existe donc $u \in L^2(I)$ et $f \in L^2(I)$ tels que

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ dans } L^2(I) \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \\ Du_n &\rightarrow f \text{ dans } L^2(I) \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R})$,

$$\int_I u_n(x)\varphi'(x) dx = - \int_I Du_n(x)\varphi(x) dx.$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans cette égalité, la continuité du produit scalaire dans $L^2(I)$ donne

$$\int_I u(x)\varphi'(x) dx = - \int_I f(x)\varphi(x) dx.$$

Ceci prouve que $u \in H^1(I)$ et $Du = f$. Finalement on a donc $u_n \rightarrow u$ et $Du_n \rightarrow Du$ dans $L^2(I)$ quand $n \rightarrow +\infty$, ce qui signifie $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(I)$.

Ceci termine la preuve que $H^1(I)$ est un espace de Hilbert.

On montre maintenant que $H^1(I)$ est séparable.

On note T l'application de $H^1(I)$ dans $L^2(I) \times L^2(I)$ définie par $T(u) = (u, Du)$.

On munit l'espace $L^2(I) \times L^2(I)$ du produit scalaire $((u_1, v_1) | (u_2, v_2))_{L^2(I) \times L^2(I)} = (u_1 | u_2)_{L^2(I)} + (v_1 | v_2)_{L^2(I)}$. L'espace $L^2(I) \times L^2(I)$ est un espace de Hilbert séparable car $L^2(I)$ est un espace de Hilbert séparable (Si A est dénombrable dense dans $L^2(I)$, $A \times A$ est alors dénombrable dense dans $L^2(I) \times L^2(I)$).

L'application T est une isométrie de $H^1(I)$ sur son image $\text{Im}(T)$ qui est une partie de $L^2(I) \times L^2(I)$. Comme $L^2(I) \times L^2(I)$ est séparable, $\text{Im}(T)$ est aussi séparable et donc $H^1(I)$ est séparable (plus précisément si B est dénombrable dense dans $\text{Im}(T)$, l'ensemble $\{u \in H^1(I); T(u) \in B\}$ est dénombrable dense dans $H^1(I)$ car T est une isométrie). \square

Dans les théorèmes 8.2 et 8.3 on va s'intéresser au cas $I = [0, 1]$ (pour résoudre le problème (8.1)-(8.2)) mais la généralisation de ces théorèmes est facile si I est un intervalle compact de \mathbb{R} .

Théorème 8.2 (Injection de $H^1(I)$ dans $C(\bar{I}, \mathbb{R})$).

L'espace $H^1(]0, 1[)$ est inclus dans l'espace $C([0, 1], \mathbb{R})$ au sens que si $u \in H^1(]0, 1[)$, il existe $\tilde{u} \in C([0, 1], \mathbb{R})$ tel que $u = \tilde{u}$ p.p. (plus précisément, on devrait dire que la restriction de \tilde{u} à $]0, 1[$ appartient à u). On confond l'élément u de $H^1(]0, 1[)$ avec la fonction \tilde{u} . On a alors

$$u(x) = u(0) + \int_0^x Du(t) dt \text{ pour tout } x \in [0, 1].$$

Démonstration du théorème 8.2.

Soit $u \in H^1(]0, 1[)$, on va construire \tilde{u} tel que $u = \tilde{u}$ p.p.. Pour cela, on définit \bar{u} de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} par

$$\bar{u}(x) = \int_0^x Du(t) dt, \text{ pour tout } x \in [0, 1].$$

La fonction \bar{u} appartient à $C([0, 1], \mathbb{R})$. On va montrer que $\bar{u} \in H^1(]0, 1[)$ (comme d'habitude on confond la fonction \bar{u} avec l'élément de $L^2(]0, 1[)$ auquel elle appartient) et que $D\bar{u} = Du$ p.p..

Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0, 1[, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \bar{u}(x) \varphi'(x) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^x Du(t) dt \right) \varphi'(x) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 1_{[0,x]}(t) Du(t) dt \right) \varphi'(x) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 1_{[t,1]}(x) Du(t) dt \right) \varphi'(x) dx && \text{(car } 1_{[0,x]}(t) = 1_{[t,1]}(x)) \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 1_{[t,1]}(x) \varphi'(x) dx \right) Du(t) dt && \text{(par le théorème de Fubini)} \\ &= \int_0^1 \left(\int_t^1 \varphi'(x) dx \right) Du(t) dt = - \int_0^1 \varphi(t) Du(t) dt && \text{(car } \varphi(1) = 0). \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\bar{u} \in H^1(]0, 1[)$ et $D\bar{u} = Du$ p.p..

Le lemme 8.1 (appliqué à $u - \bar{u}$) donne alors l'existence de $a \in \mathbb{R}$ tel que $u - \bar{u} = a$ p.p., c'est-à-dire $u = \tilde{u}$ p.p. en prenant $\tilde{u} = \bar{u} + a$. On a bien $\tilde{u} \in C([0, 1], \mathbb{R})$.

En confondant u (élément de $H^1(]0, 1[)$) et \tilde{u} (élément de $C([0, 1], \mathbb{R})$), on a donc

$$u(x) = u(0) + \int_0^x Du(t) dt \text{ pour tout } x \in [0, 1].$$

\square

Lemme 8.1 (Une fonction à dérivée faible nulle est constante). Soit $u \in H^1(]0, 1[)$ tel que $Du = 0$ p.p.. Alors, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u = a$ p.p.

Démonstration du lemme 8.1. Ce lemme est démontré dans l'exercice 8.1. □

Proposition 8.1 (Caractère holderien des éléments de $H^1(I)$). Soit $u \in H^1(]0, 1[)$. On identifie u avec son représentant continu (donné par le théorème 8.2) Alors, pour tout $x, y \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq \|Du\|_{L^2(]0,1[)} |x - y|^{1/2}, \\ |u(x)| &\leq 2\|u\|_{H^1(]0,1[)}. \end{aligned}$$

L'application $u \mapsto u$ est donc continue de $H^1(]0, 1[)$ dans $C([0, 1], \mathbb{R})$. On rappelle que $C([0, 1], \mathbb{R})$ est un espace de Banach avec

$$\|u\|_{C([0,1],\mathbb{R})} = \|u\|_{\infty} = \sup_{x \in [0,1]} |u(x)|.$$

Démonstration de la proposition 8.1.

Selon le théorème 8.2, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u(z) = a + \int_0^z Du(t) dt$ pour tout $z \in [0, 1]$. Soit $0 \leq x \leq y \leq 1$, on a donc, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|u(y) - u(x)| = \left| \int_x^y Du(t) dt \right| \leq \left(\int_x^y Du(t)^2 dt \right)^{1/2} |y - x|^{1/2} \leq \|Du\|_{L^2(I)} |y - x|^{1/2}.$$

Puis, on remarque que

$$|u(x)| \leq |u(y)| + |u(x) - u(y)| \leq |u(y)| + \|Du\|_{L^2(I)}.$$

On fixe x et on intègre cette inégalité par rapport à y ($y \in]0, 1[$), on obtient, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|u(x)| \leq \|u\|_{L^2(]0,1[)} + \|Du\|_{L^2(I)} \leq 2\|u\|_{H^1(]0,1[)}.$$

□

Théorème 8.3 (Compacité de $H^1(I)$ dans $C(\bar{I}, \mathbb{R})$).

L'application $u \mapsto u$ de $H^1(]0, 1[)$ dans $C([0, 1], \mathbb{R})$ est compacte.

(Elle est donc aussi compacte de $H^1(]0, 1[)$ dans $L^2(]0, 1[)$.)

Démonstration du théorème 8.3.

La compacité de $H^1(]0, 1[)$ dans $C([0, 1], \mathbb{R})$ découle du théorème d'Ascoli (théorème 0.2) que l'on rappelle brièvement :

Soient X un espace métrique compact et E un espace métrique complet. On munit $C(X, E)$ de la distance de la convergence uniforme (c'est-à-dire $d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$) en notant indifféremment d la distance dans $C(X, E)$ et dans E .

Soit $A \subset C(X, E)$. La partie A est relativement compacte dans $C(X, E)$ si et seulement si :

- Pour tout $x \in X$, $\{f(x), f \in A\}$ est relativement compact dans E ,

- pour tout $x \in X$, L'ensemble A est "equicontinu" au point x , c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$(d(x, y) \leq \delta, f \in A) \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

(On a noté indifféremment d la distance dans X et dans E .)

Nous allons appliquer le théorème d'Ascoli avec $X = [0, 1]$ et $E = \mathbb{R}$.

Soit A une partie bornée de $H^1(]0, 1[)$, c'est donc par le théorème 8.2 une partie de $C([0, 1], \mathbb{R})$. Il s'agit de démontrer qu'elle vérifie les deux conditions du théorème d'Ascoli, c'est-à-dire

- 1) Pour tout $x \in [0, 1]$, $\{u(x), u \in A\}$ est borné (dans \mathbb{R}),
- 2) pour tout $x \in [0, 1]$, L'ensemble A est equicontinu au point x , c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$(|x - y| \leq \delta, u \in A) \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \varepsilon.$$

Preuve de 2). Soient $x, y \in [0, 1]$ et $u \in A$. La proposition 8.1 donne, avec $C = \sup_{v \in A} \|v\|_{H^1(]0, 1[)}$ (et donc $C < +\infty$),

$$|u(x) - u(y)| \leq \|Du\|_{L^2(]0, 1[)} |x - y|^{1/2} \leq \|u\|_{H^1(]0, 1[)} |x - y|^{1/2} \leq C|x - y|^{1/2},$$

ce qui donne 2 avec $\delta = \varepsilon^2/C^2$. (L'ensemble A est même uniformément equicontinu.)

Preuve de 1). Soient $x \in [0, 1]$ et $u \in A$. La proposition 8.1 donne $|u(x)| \leq 2\|u\|_{H^1(]0, 1[)} \leq 2C$.

L'ensemble $\{u(x), u \in A\}$ est donc borné (et d'ailleurs la borne est même indépendante de x). \square

Remarque 8.5. Une manière équivalente de formuler le théorème 8.3 est de dire que de toute suite bornée de $H^1(]0, 1[)$ on peut extraire une sous suite uniformément convergente, c'est-à-dire convergente pour la norme de $C([0, 1], \mathbb{R})$ (qui est $\|\cdot\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |u(x)|$).

On rappelle aussi qu'une suite convergente pour la norme de $C([0, 1], \mathbb{R})$ est convergente pour la norme de $L^2(]0, 1[)$ car $\|\cdot\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|\cdot\|_\infty$.

Remarque 8.6.

Nous nous sommes limités à définir l'espace $H^1(I)$ en considérant toujours des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} . Il est facile de construire un espace semblable et d'obtenir des résultats semblables en considérant des fonctions à valeurs dans \mathbb{C} .

Définition 8.3 (Espace $H_0^1(I)$).

Soit I un ouvert de \mathbb{R} , on note $H_0^1(I)$ l'adhérence de $C_c^\infty(I, \mathbb{R})$ dans $H^1(I)$. L'espace $H_0^1(I)$ est donc un s.e.v. fermé de $H^1(I)$. Avec la norme $\|\cdot\|_{H^1(I)}$ c'est donc un espace de Hilbert.

Remarque 8.7.

- 1) On peut montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R})$ (la preuve est semblable à celle de la densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p < +\infty$, voir le cours d'intégration).

Donc, pour $I = \mathbb{R}$, $H_0^1(I) = H^1(I)$.

- 2) Pour $I =]0, 1[$,

$$H_0^1(I) = \{u \in H^1(]0, 1[) \text{ tel que } u(0) = u(1) = 0\}$$

(l'élément u de $H^1(]0, 1[)$ étant ici identifié avec son représentant continu). Le sens intéressant pour la suite de ce cours C8 est que $u \in H_0^1(]0, 1[)$ implique $u(0) = u(1) = 0$. Ceci est une conséquence facile de la continuité de l'application $u \mapsto u$ de $H^1(]0, 1[)$ dans $C([0, 1], \mathbb{R})$ (cette continuité donne que $\varphi_n \rightarrow u$ dans $H^1(]0, 1[)$ (quand $n \rightarrow +\infty$) implique $\varphi_n(0) \rightarrow u(0)$ et $\varphi_n(1) \rightarrow u(1)$).

On peut maintenant donner la “formulation faible” du problème (8.1)-(8.2).

Définition 8.4 (Formulation faible du problème (8.1)-(8.2)).

Soit $f \in L^2(]0, 1[)$ (ce qui est vrai en particulier si $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$). On dit que u est solution faible du problème (8.1)-(8.2) si

$$u \in H_0^1(]0, 1[), \quad (8.4)$$

$$\int_0^1 Du(x)Dv(x) dx + \int_0^1 u(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(]0, 1[). \quad (8.5)$$

On peut noter que, par rapport à la formulation donnée dans la remarque 8.2, on a, dans la définition 8.4, simplement affaibli la notion de dérivée. En effet, $u \in H_0^1(]0, 1[)$ donne $u(0) = u(1) = 0$ et la condition (8.5) est équivalente (grâce à la densité de $C_c^\infty(]0, 1[, \mathbb{R})$ dans $H_0^1(]0, 1[)$) à la condition (8.5) avec $C_c^\infty(]0, 1[, \mathbb{R})$ au lieu de $H_0^1(]0, 1[)$.

Théorème 8.4 (Existence et unicité de la solution faible). *soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$. Alors, il existe un et un seul u solution de (8.4)-(8.5). Le même résultat est vrai sous l’hypothèse plus faible $f \in L^2(]0, 1[)$.*

Démonstration du théorème 8.4.

Le problème faible (c’est-à-dire (8.4)-(8.5)) consiste à chercher $u \in H_0^1(]0, 1[)$ tel que

$$(u | v)_{H_0^1(]0, 1[)} = (f | v)_{L^2(]0, 1[)} \text{ pour tout } v \in H_0^1(]0, 1[).$$

Si $f \in L^2(]0, 1[)$, on remarque que l’application $v \mapsto (f | v)_{L^2(]0, 1[)}$ est linéaire continue de $H_0^1(]0, 1[)$ dans \mathbb{R} . En effet, la linéarité est immédiate et la continuité vient de Cauchy-Schwarz :

$$|(f | v)_{L^2(]0, 1[)}| \leq \|f\|_{L^2(]0, 1[)} \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0, 1[)} \|v\|_{H^1(]0, 1[)}.$$

L’existence (et l’unicité) de u est alors une conséquence du théorème de représentation de Riesz (théorème 0.14) dans l’espace de Hilbert $H_0^1(]0, 1[)$. \square

Lemme 8.2 (Régularité de la solution faible).

Soit $u \in H^1(]0, 1[)$ et $g \in C([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose que

$$\int_0^1 Du(x)v'(x) dx = \int_0^1 g(x)v(x) dx \text{ pour tout } v \in C_c^\infty(]0, 1[, \mathbb{R}).$$

Alors $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ et $-u''(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Démonstration du lemme 8.2.

On donne brièvement la méthode pour montrer ce résultat, elle sera reprise dans l’exercice 8.2. On note G une primitive de g (par exemple $G(x) = \int_0^x g(t) dt$) de sorte que $G \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ et

$$\int_0^1 (Du(x) + G(x))v'(x) dx = 0 \text{ pour tout } v \in C_c^\infty(]0, 1[, \mathbb{R}). \quad (8.6)$$

On choisit une fonction $\varphi_0 \in C_c^\infty(]0, 1[, \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 \varphi_0(x) dx = 1$.

Pour $\psi \in C_c^\infty(]0, 1[, \mathbb{R})$, on définit v par

$$v(x) = \int_0^x \psi(t) dt - \left(\int_0^1 \psi(t) dt \right) \int_0^x \varphi_0(t) dt.$$

On prend dans (8.6) cette fonction v (qui est bien dans $C_c^\infty(]0, 1[, \mathbb{R})$), on obtient par un petit calcul, en posant $c = \int_0^1 (Du(x) + G(x))\varphi_0(x) dx$,

$$\int_0^1 (Du(x) + G(x) - c)\psi(x) dx = 0.$$

Comme $C_c^\infty(]0, 1[, \mathbb{R})$ est dense dans $L^2(]0, 1[)$, on en déduit que $Du + G - c = 0$ p.p.. Ceci permet de montrer que $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})^2$. En effet, on a vu dans le théorème 8.2 qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [0, 1]$, $u(x) = a + \int_0^x Du(t) dt$. On a donc, pour tout $x \in [0, 1]$, $u(x) = a + \int_0^x (c - G(t)) dt$. Comme $G \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$, ceci donne bien $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ et, finalement, $-u''(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. \square

Théorème 8.5 (Existence et unicité de la solution de (8.1)-(8.2)). *soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$. Alors, il existe un et un seul u solution de (8.1)-(8.2).*

Démonstration du théorème 8.5. L'unicité est due au fait qu'une solution de (8.1)-(8.2) est solution de (8.4)-(8.5) et que la solution de (8.4)-(8.5) est unique.

L'existence est due à l'existence d'une solution au problème (8.4)-(8.5) (théorème 8.4) et à la régularité de cette solution faible (lemme 8.2 appliqué à $g = f - u$). \square

td8. Exemple de décomposition spectrale

NB : Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Exercice 8.1 (Une fonction à dérivée nulle est constante p.p.).

Soit $u \in L^2(]0, 1[)$ telle que $Du = 0$, c'est-à-dire telle que $\int_0^1 u(x)\varphi'(x) dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0, 1[)$.

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u = a$ p.p..

[Suggestion : Soit $\varphi_0 \in C_c^\infty(]0, 1[)$ telle que $\int_0^1 \varphi_0(y) dy = 1$.

Pour $\varphi \in C_c^\infty(]0, 1[)$ on pose $\psi(x) = \int_0^x \varphi(y) dy - \left(\int_0^1 \psi(t) dt \right) \int_0^x \varphi_0(y) dy$. Montrer que $\psi \in C_c^\infty(]0, 1[)$ et utiliser $\int_0^1 u(x)\psi'(x) dx = 0$.]

Exercice 8.2 (Régularité en dimension 1). Soit $f \in L^2(]0, 1[)$.

1) Montrer qu'il existe un et un seul u solution de

$$\begin{aligned} u &\in H_0^1(]0, 1[), \\ \int_0^1 Du(t)Dv(t) dt &= \int_0^1 f(t)v(t) dt, \quad \forall v \in H_0^1(]0, 1[). \end{aligned} \tag{8.7}$$

2. Comme d'habitude on confond un élément de H^1 avec son représentant continu quand celui ci existe

Corrigé –

On note I l'intervalle $]0, 1[$. On définit un produit scalaire sur $H_0^1(I)$ en posant $(u | v)_{H_0^1(I)} = (Du | Dv)_{L^2(I)}$. Grâce à l'exercice 8.1, c'est bien un produit scalaire sur $H_0^1(I)$. Mais, on va même montrer que la norme induite par ce produit scalaire (que l'on notera $\|\cdot\|_{H_0^1(I)}$) est équivalente (sur $H_0^1(I)$) à la norme induite par le produit scalaire de $H^1(I)$.

On remarque tout d'abord que $\|u\|_{H_0^1(I)} \leq \|u\|_{H^1(I)}$.

Puis, pour tout $u \in H_0^1(I)$, on a (voir le théorème 8.2),

$$u(x) = u(0) + \int_0^x Du(t)dt = \int_0^x Du(t)dt \text{ pour tout } x \in [0, 1].$$

(On a, bien sûr, identifié l'élément u de $H_0^1(I)$ avec son représentant continu.)

On en déduit que, pour tout $x \in I$, $|u(x)| \leq \int_0^1 |Du(t)|dt \leq \|Du\|_{L^2(I)}$ et donc

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq \|Du\|_{L^2(I)} = \|u\|_{H_0^1(I)}.$$

Ceci donne $\|u\|_{H^1(I)} \leq \sqrt{2}\|u\|_{H_0^1(I)}$.

Les normes $\|\cdot\|_{H_0^1(I)}$ et $\|\cdot\|_{H^1(I)}$ sont donc équivalentes sur $H_0^1(I)$.

Le problème (8.7) consiste à chercher $u \in H_0^1(I)$ tel que

$$(u | v)_{H_0^1(I)} = (f | v)_{L^2(I)} \text{ pour tout } v \in H_0^1(I).$$

L'application $v \mapsto (f | v)_{L^2(I)}$ est un élément de $H_0^1(I)'$. En effet,

$$(f | v)_{L^2(I)} \leq \|f\|_{L^2(I)}\|v\|_{L^2(I)} \leq \|f\|_{L^2(I)}\|v\|_{H_0^1(I)} \text{ pour tout } v \in H_0^1(I).$$

L'existence et l'unicité de u solution de (8.7) est alors une conséquence théorème de représentation de Riesz (théorème 0.14).

On suppose maintenant que $f \in C([0, 1]) \subset L^2([0, 1])$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, pour tout $x \in [0, 1]$. On note u la solution de (8.7).

2) Montrer que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0, 1[)$,

$$\int_0^1 (Du(t) + F(t))\varphi(t) dt = \int_0^1 c\varphi(t) dt$$

avec un certain $c \in \mathbb{R}$ convenablement choisi (et indépendant de φ).

[S'inspirer de la méthode de l'exercice 8.1.]

Corrigé –

Soit $\varphi_0 \in C_c^\infty(]0, 1[)$ telle que $\int_0^1 \varphi_0(y)dy = 1$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0, 1[)$. Pour $x \in [0, 1]$ on pose

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt - \int_0^1 \varphi(t)dt \int_0^x \varphi_0(t)dt$$

On a donc $\psi \in C_c^\infty(]0, 1[)$ et la dérivée faible de ψ est égale p.p. à sa dérivée classique

$$D\psi(x) = \psi'(x) = \varphi(x) - \left(\int_0^1 \varphi(s)ds\right)\varphi_0(x) \text{ pour presque tout } x \in]0, 1[.$$

Comme $\psi \in C_c^\infty(]0, 1[) \subset H_0^1(\Omega)$, on peut prendre $v = \psi$ dans (8.7), on obtient

$$\int_0^1 Du(t)\varphi(t) dt - \int_0^1 \varphi(t)dt \int_0^1 Du(t)\varphi_0(t) dt = \int_0^1 f(x)\psi(x)dx.$$

Comme F est de classe C^1 et $F' = f$, on a (en utilisant aussi $\psi(0) = \psi(1) = 0$)

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\psi(x)dx &= \int_0^1 F'(x)\psi(x)dx = - \int_0^1 F(x)\psi'(x)dx \\ &= - \int_0^1 F(x)\varphi(x)dx + \int_0^1 F(x)\varphi_0(x)dx \int_0^1 \varphi(t)dt. \end{aligned}$$

En posant $c = \int_0^1 Du(t)\varphi_0(t)dt + \int_0^1 F(t)\varphi_0(t)dt$, on a donc

$$\int_0^1 (Du(t) + F(t))\varphi(t)dt = c \int_0^1 \varphi(t)dt. \quad (8.8)$$

3) Dédurre de la question 2 que $Du = -F + c$ p.p., puis que u est deux fois continûment dérivable sur $[0, 1]$ et $-u''(x) = f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$ (et que $u(0) = u(1) = 0$).

Corrigé – L'égalité (8.8) est vraie pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0, 1[)$. Comme $Du + F - c \in L^2(]0, 1[)$ et que $C_c^\infty(]0, 1[)$ est dense dans $L^2(]0, 1[)$, on en déduit

$$Du = -F + c \text{ p.p. dans }]0, 1[.$$

On pose maintenant

$$w(x) = \int_0^x (-F(t) + c)dt \text{ pour } x \in [0, 1].$$

Comme w est de classe C^1 (la fonction w est même de classe C^2) la dérivée faible de w est donc égale p.p. à sa dérivée classique. On a donc $Dw = w' = -F + c$ p.p.. On a donc $Dw = Du$ p.p. et on en déduit que $w - u$ est une fonction presque partout égale à une constante (voir l'exercice 8.1). Comme on a déjà identifié la (classe de) fonction(s) u a son représentant continu, la fonction $u - w$ est donc constante et la fonction u est de classe C^2 , $u' = -F + c$ et $u'' = -F' = f$. On a aussi $u(0) = u(1)$ (car $u \in H_0^1(]0, 1[)$).

(Noter que la fonction u est de classe C^2 sur $[0, 1]$ en considérant des dérivées à gauche en 1 et des dérivées à droite en 0.)

Exercice 8.3 (Décomposition spectrale en dimension 1).

On reprend l'exercice précédent. On pose $E = L^2(]0, 1[)$ (muni de la norme $\|\cdot\|_2$). Pour $f \in E$, on rappelle qu'il existe un et un seul u solution de (8.7).

On note T l'application de E dans E qui à f associe u (solution de (8.7), noter que $H_0^1(]0, 1[) \subset E$).

1) Montrer que T est un opérateur linéaire compact autoadjoint de E dans E .

Corrigé – On note toujours I l'intervalle $]0, 1[$.

Soit $f \in L^2(I)$. La solution u du problème (8.7) vérifie

$$(u | u)_{H_0^1(I)} = (f | u)_{L^2(I)} \leq \|f\|_{L^2(I)} \|u\|_{H_0^1(I)},$$

L'application $f \mapsto u$, où u est la solution du problème (8.7), est donc linéaire (ce qui est facile à voir) continue de $L^2(I)$ dans $H_0^1(I)$.

D'après le théorème 8.3, l'application $u \mapsto u$ est compacte de $H^1(I)$ dans $L^2(I)$, elle est donc aussi compacte de $H_0^1(I)$ dans $L^2(I)$. Par composition, on en déduit que l'application $f \mapsto u$, où u est la solution du problème (8.7), est compacte de $L^2(I)$ dans $L^2(I)$. On note T cette application (une application s'appelle aussi "opérateur"). L'opérateur T est donc linéaire compact.

On montre maintenant que T est autoadjoint.

Soit $f, g \in L^2(I)$. On note $u = T(f)$ et $v = T(g)$. Comme u est solution de (8.7),

$$(u | v)_{H_0^1(I)} = (f | v)_{L^2(I)}.$$

Comme v est solution de (8.7) avec g au lieu de f et v au lieu de u ,

$$(v | u)_{H_0^1(I)} = (g | u)_{L^2(I)}.$$

On a donc $(f|v)_{L^2(I)} = (g|u)_{L^2(I)}$ c'est-à-dire $(f|T(g))_{L^2(I)} = (g|T(f))_{L^2(I)}$.
Ceci montre que $T = T^*$.

- 2) Soit $\lambda \in \text{vp}(T)$. Montrer qu'il existe $u \in C([0, 1], \mathbb{R}) \cap C^2(]0, 1[, \mathbb{R})$, $u \neq 0$, tel que $-\lambda u'' = u$, sur $]0, 1[$ et $u(0) = u(1) = 0$.
- 3) Montrer que $\text{vp}(T) = \{\frac{1}{k^2\pi^2}, k \in \mathbb{N}^*\}$ et $\sigma(T) = \text{vp}(T) \cup \{0\}$.
- 4) Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = 2 \int_0^1 f(t) \sin(n\pi t) dt$. Montrer que :

$$\|f - \sum_{p=1}^n c_p \sin(p\pi \cdot)\|_2 \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

(Comparer avec les séries de Fourier.)

- 5) Soit $\mu \in \mathbb{R}^*$. En utilisant le fait que T est compact, donner une C.N.S. sur $f \in E$ pour que le problème suivant ait une solution :

$$u \in H_0^1(]0, 1[),$$

$$\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt + \mu \int_0^1 u(t)v(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt, \forall v \in H_0^1(]0, 1[).$$

C9. Série de Fourier

Dans ce cours C9 nous allons montrer que la série de Fourier de $f \in L^2(]0, 1[)$ ¹ est la décomposition de f sur une base hilbertienne de $L^2(]0, 1[)$ obtenue avec un opérateur compact autoadjoint de $L^2(]0, 1[)$ dans $L^2(]0, 1[)$.

On rappelle que si H est un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H , on a, pour tout $f \in H$, $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} (f | e_n)_H e_n$ au sens $\sum_{p=0}^n (f | e_p)_H e_p \rightarrow f$ dans H quand $n \rightarrow +\infty$.

On rappelle aussi que $C^2([0, 1], \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , deux fois dérivables sur $[0, 1]$ et à dérivée première et seconde continues sur $[0, 1]$, en considérant en 0 les dérivées à droite et en 1 les dérivées à gauche.

Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, On cherche $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ solution de

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in [0, 1], \quad (9.1)$$

$$u(0) = u(1), \quad (9.2)$$

$$u'(0) = u'(1). \quad (9.3)$$

Une telle fonction u est dite "solution classique" de (9.1)-(9.2)-(9.3).

Noter qu'une fonction $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant (9.2)-(9.3), prolongée par périodicité (c'est-à-dire que $u(x) = u(x-n)$ si $x \in [n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$), appartient à $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (mais pas nécessairement à $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

Comme dans le cours C8, nous allons d'abord introduire une formulation faible de (9.1)-(9.2)-(9.3).

Pour cela on remarque que si $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ est solution de (9.1)-(9.2)-(9.3), on a, pour toute fonction $v \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $v(0) = v(1)$ (noter que l'on ne demande pas $v'(0) = v'(1)$), en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)v(x) dx &= - \int_0^1 u''(x)v(x) + \int_0^1 u(x)v(x) dx \\ &= \int_0^1 u'(x)v'(x) - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u(x)v(x) dx \\ &= \int_0^1 u'(x)v'(x) + \int_0^1 u(x)v(x) dx. \end{aligned}$$

1. On note toujours $L^2(]0, 1[)$ l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$.

Réciproquement, on suppose que $u \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$, $u(0) = u(1)$ et

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) + \int_0^1 u(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx \text{ pour tout } v \in C^1([0, 1], \mathbb{R}) \text{ t.q. } v(0) = v(1). \quad (9.4)$$

Le lemme 8.2 donne alors $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ et u vérifie (9.1). Puis, en prenant par exemple $v(x) = (x - 1/2)^2$ dans (9.4) on montre que $u'(0) = u'(1)$ et donc que u est solution classique de (9.1)-(9.2)-(9.3).

Ceci nous suggère, comme au cours C8 une formulation faible du problème (9.1)-(9.2)-(9.3) consistant à affaiblir la notion de dérivée.

Définition 9.1 (Formulation faible du problème (9.1)-(9.2)-(9.3)).

Soit $f \in L^2(]0, 1[)$ (ce qui est vrai en particulier si $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$).

On dit que u est solution faible du problème (8.1)-(8.2) si

$$u \in H = \{w \in H^1(]0, 1[) \text{ tel que } w(0) = w(1)\}, \quad (9.5)$$

$$\int_0^1 Du(x)Dv(x) dx + \int_0^1 u(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in H. \quad (9.6)$$

Proposition 9.1 (Espace H^1 périodique).

L'espace H défini par $H = \{w \in H^1(]0, 1[) \text{ tel que } w(0) = w(1)\}$ est un s.e.v. fermé de $H^1(]0, 1[)$. C'est donc, muni du produit scalaire de $H^1(]0, 1[)$, un espace de Hilbert.

Démonstration de la proposition 9.1.

Il suffit d'utiliser le théorème 8.2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de H telle que $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(]0, 1[)$ (quand $n \rightarrow +\infty$), le théorème 8.2. donne $u_n(0) \rightarrow u(0)$ et $u_n(1) \rightarrow u(1)$ quand $n \rightarrow +\infty$ et donc $u \in H$. \square

Théorème 9.1 (Compacité de $f \mapsto u$, u solution de (9.5)-(9.6)).

1) Pour tout $f \in L^2(]0, 1[)$ il existe un unique u solution de (9.5)-(9.6).

2) L'opérateur $f \mapsto u$, u solution de (9.5)-(9.6), est compact autoadjoint de $L^2(]0, 1[)$ dans $L^2(]0, 1[)$. On note T cet opérateur.

Démonstration du théorème 9.1.

Preuve de 1). Soit $f \in L^2(]0, 1[)$, le problème (9.5)-(9.6) consiste à chercher $u \in H$ solution de

$$(u | v)_H = (f | v)_{L^2(]0, 1[)} \text{ pour tout } v \in H.$$

L'application $v \mapsto (f | v)_{L^2(]0, 1[)}$ est un élément de H' car

$$(f | v)_{L^2(]0, 1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0, 1[)} \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0, 1[)} \|v\|_H.$$

Le théorème de Riesz (théorème 0.14) donne donc qu'il existe un unique u solution de (9.5)-(9.6). De plus de l'inégalité

$$\|u\|_H^2 = (u | u)_H = (f | u)_{L^2(]0, 1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0, 1[)} \|u\|_H$$

on déduit $\|u\|_H \leq \|f\|_H$.

L'opérateur T_1 de $L^2(]0, 1[)$ dans $H^1(]0, 1[)$ défini par $T_1(f) = u$, où u est solution de (9.5)-(9.6), est donc linéaire continu.

Preuve de 2). On note I l'opérateur $u \mapsto u$ de $H^1(]0, 1[)$ dans $L^2(]0, 1[)$ et $T = I \circ T_1$. L'opérateur T est donc un opérateur linéaire de $L^2(]0, 1[)$ dans $L^2(]0, 1[)$.

Comme T_1 est continue et I est compact, l'opérateur T est compact. En effet, si A est une partie bornée de $L^2(]0, 1[)$, l'ensemble $\{T_1(u), u \in A\}$ est une partie bornée de $H^1(]0, 1[)$ et donc et donc l'ensemble $\{I \circ T_1(u), u \in A\}$ est une partie relativement compacte de $L^2(]0, 1[)$.

Il reste à montrer que T est autoadjoint, c'est-à-dire que, pour tout $f, g \in L^2(]0, 1[)$,

$$(T(f) | g)_{L^2(]0,1[)} = (f | T(g))_{L^2(]0,1[)}.$$

On pose $u = T(f)$ et $v = T(g)$, c'est-à-dire que u est solution de (9.5)-(9.6) et v est solution de (9.5)-(9.6) avec g au lieu de f . On a donc

$$(u | w)_H = (f | w)_{L^2(]0,1[)} \text{ pour tout } w \in H.$$

$$(v | w)_H = (g | w)_{L^2(]0,1[)} \text{ pour tout } w \in H.$$

On en déduit, en prenant $w = v$ dans la première équation et $w = u$ dans la seconde,

$$\begin{aligned} (f | T(g))_{L^2(]0,1[)} &= (f | v)_{L^2(]0,1[)} = (u | v)_H, \\ (T(f) | g)_{L^2(]0,1[)} &= (g | u)_{L^2(]0,1[)} = (v | u)_H = (u | v)_H. \end{aligned}$$

Ceci prouve bien que $T = T^*$. □

Une conséquence des théorèmes 9.1 et 7.1 est qu'il existe une base hilbertienne de $L^2(]0, 1[)$ formée de vecteurs propres de T (l'opérateur T étant défini dans le théorème 9.1).

On va chercher maintenant les valeurs propres et vecteurs propres de T .

Proposition 9.2 (Condition nécessaire sur les valeurs propres et vecteurs propres de T).

Soit T l'opérateur défini dans le théorème 9.1.

Soient $\lambda \in \text{vp}(T)$ et $f \in \text{Ker}(T - \lambda I)$, $f \neq 0$. Alors

1) $0 < \lambda \leq 1$,

2) $f = \mu u$, $\mu = 1/\lambda$, et $u \in C^2([0, 1])$,

$$u''(x) + (\mu - 1)u(x) = 0 \text{ pour tout } x \in [0, 1], \tag{9.7}$$

$$u(0) = u(1), \tag{9.8}$$

$$u'(0) = u'(1). \tag{9.9}$$

Démonstration de la proposition 9.2.

Preuve de 1). On pose $u = T(f)$, c'est-à-dire

$$u \in H. \tag{9.10}$$

$$(u | v)_H = (f | v)_{L^2(]0,1[)} \text{ pour tout } v \in H. \tag{9.11}$$

Si $\lambda = 0$, $u = T(f) = \lambda f = 0$, et donc $(f | v)_{L^2(]0,1[)} = 0$ pour tout $v \in H$ et donc aussi pour tout $v \in C_c^\infty(]0, 1[) \subset H$. Ceci implique $f = 0$ (car $C_c^\infty(]0, 1[)$ est dense dans $L^2(]0, 1[)$) en contradiction avec l'hypothèse $f \neq 0$.

On a donc $\lambda \neq 0$ et donc $f = \mu u$ avec $\mu = 1/\lambda$. L'équation (9.11) devient

$$\int_0^1 Du(x)Dv(x) dx = \int_0^1 (\mu - 1)u(x)v(x) dx \text{ pour tout } v \in H. \quad (9.12)$$

En prenant $v = u$ dans 9.12, on en déduit $\mu \geq 1$ (et donc $0 < \lambda \leq 1$).

Preuve de 2).

Comme $u \in C([0, 1], \mathbb{R})$ (car $H \subset C([0, 1], \mathbb{R})$) et que $C_c^\infty(]0, 1[) \subset H$, il suffit d'appliquer le lemme 8.2² pour obtenir que $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ et $-u''(x) = (\mu - 1)u(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$, c'est-à-dire que u vérifie (9.7).

On remarque ensuite que u vérifie (9.8) car $u \in H$.

Il reste à montrer que u vérifie (9.9). Pour cela on prend dans (9.12) une fonction $v \in C^1(]0, 1[) \cap H$ telle que $v(0) = v(1) \neq 0$ (par exemple $v(x) = (x - 1/2)^2$) et on intègre par parties,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \int_0^1 (\mu - 1)u(x)v(x) dx \\ &= - \int_0^1 (u''(x) + (\mu - 1)u(x))v(x) dx + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = v(0)(u'(1) - u'(0)). \end{aligned}$$

On en déduit bien $u'(1) = u'(0)$, c'est-à-dire (9.9). □

Théorème 9.2 (Série de Fourier de $f \in L^2$).

On définit les fonctions $\varphi_0, \varphi_k, \psi_k, k \in \mathbb{N}^*$ de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} par

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1 \text{ pour tout } x \in [0, 1], \\ \varphi_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2k\pi x) \text{ pour tout } x \in [0, 1], \\ \psi_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2k\pi x) \text{ pour tout } x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

La famille $B = \varphi_0 \cup \{\varphi_k, k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\psi_k, k \in \mathbb{N}^*\}$ est une base hilbertienne de $L^2(]0, 1[)$.

Pour tout $f \in L^2(]0, 1[)$,

$$f = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \varphi_k + b_k \psi_k), \quad (9.13)$$

avec

$$a_k = \int_0^1 f(x)\varphi_k(x) dx, \quad b_k = \int_0^1 f(x)\psi_k(x) dx.$$

Dans (9.13) la série est à prendre au sens de la convergence dans $L^2(]0, 1[)$ des sommes partielles.

Démonstration du théorème 9.2.

Comme l'opérateur T défini dans le théorème 9.1 est compact, il suffit, pour avoir une base hilbertienne de $L^2(]0, 1[)$, de trouver les valeurs propres de T et les sous espaces propres correspondants.

2. On rappelle de $Dv = v'$ pp si v est de classe C^1

Soit $\lambda \in \text{vp}(T)$, grâce à la proposition 9.2, on sait que $0 < \lambda \leq 1$ et le sous espace propre associé λ est l'ensemble des fonctions $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant, avec $\mu = 1/\lambda$,

$$u''(x) + (\mu - 1)u(x) = 0 \text{ pour tout } x \in [0, 1], \quad (9.14)$$

$$u(0) = u(1), \quad (9.15)$$

$$u'(0) = u'(1). \quad (9.16)$$

On distingue maintenant les cas $\mu = 1$ et $\mu > 1$.

Cas $\mu = 1$. Dans ce cas, (9.14) donne $u'' = 0$, donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $u(x) = ax + b$ et (9.15) donne alors $a = 0$. On obtient finalement $1 \in \text{vp}(T)$ et $\text{Ker}(T - I) = \text{vect}\{\varphi_0\}$.

Cas $\mu > 1$. On utilise la théorie des équations différentielles, la solution générale de (9.14) est, avec $\omega = \sqrt{\mu - 1}$,

$$u(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x) \text{ pour tout } x \in [0, 1].$$

Les constantes α et β sont arbitraires dans \mathbb{R} . Mais, comme u doit aussi vérifier (9.15) et (9.16), elles doivent vérifier (noter que $u'(x) = -\alpha\omega \sin(\omega x) + \beta\omega \cos(\omega x)$)

$$\alpha = \alpha \cos(\omega) + \beta \sin(\omega),$$

$$\beta\omega = -\alpha\omega \sin(\omega) + \beta\omega \cos(\omega).$$

Ce système sur (α, β) est équivalent à

$$\alpha(\cos(\omega) - 1) + \beta \sin(\omega) = 0,$$

$$-\alpha\omega \sin(\omega) + \beta\omega(\cos(\omega) - 1) = 0.$$

Pour que ce système ait une solution non nulle il faut et il suffit que $(\cos(\omega) - 1)^2 + \sin(\omega)^2 = 0$, c'est-à-dire

$$\sin(\omega) = 0, \cos(\omega) = 1.$$

La condition sur μ est donc $\sqrt{\mu - 1} = \omega = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

(Noter alors que α et β sont arbitraires dans \mathbb{R} .)

L'ensemble des valeurs propres de T , autre que 1, est donc $\{\lambda_k, k \in \mathbb{N}^*\}$ avec $\lambda_k = 1/\mu_k, \mu_k = 1 + (2k\pi)^2$. Enfin, pour $k \in \mathbb{N}^*$, le sous espace propre associé à λ_k est donc engendré par les fonctions obtenues en prenant $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ et $(\alpha, \beta) = (0, 1)$. En les multipliant par $(1/\sqrt{2})$ pour que leur normes dans $L^2(]0, 1[)$ soient égales à 1, ce sont les fonctions φ_k et ψ_k données dans le théorème. La vérification du fait qu'elles ont orthogonales (c'est-à-dire $(\varphi_k | \psi_k)_{L^2(]0, 1[)} = 0$) découle de la formule classique de trigonométrie $\sin(a) \cos(b) = (1/2)(\sin(a + b) + \sin(a - b))$.

On a ainsi obtenues toutes les valeurs propres de T et les sous espaces propres correspondant, ce qui donne, selon le théorème 7.1 une base hilbertienne de $L^2(]0, 1[)$. \square

td 9. Un opérateur linéaire compact autoadjoint dans $L^2(\mathbb{R})$

L'objectif est cet exercice est de construire une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ (cette base est liée à la mécanique quantique...)

Rappel du cours :

- L'espace $H^1(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $L^2(\mathbb{R})$ ayant une dérivée faible dans $L^2(\mathbb{R})$.
- Si $u \in H^1(\mathbb{R})$, la classe de fonctions u possède un représentant continu, on identifie (comme d'habitude) u avec ce représentant continu et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u(x) = u(0) + \int_0^x Du(t) dt.$$

Partie I (résultats liminaires)

On pose $H = \{u \in H^1(\mathbb{R}) \text{ tel que } (x \mapsto xu(x)) \in L^2(\mathbb{R})\}$. Si $u, v \in H$, on pose $(u|v)_H = \int_{\mathbb{R}} Du(x)Dv(x)dx + \int_{\mathbb{R}} x^2u(x)v(x)dx$.

1) Montrer que $(\cdot|\cdot)_H$ est un produit scalaire sur H .

Corrigé – L'application $(u, v) \mapsto \int_{\mathbb{R}} Du(x)Dv(x)dx + \int_{\mathbb{R}} x^2u(x)v(x)dx$ de H^2 dans \mathbb{R}_+ est bilinéaire symétrique. De plus, pour $u \in H$, $\int_{\mathbb{R}} Du(x)Du(x)dx + \int_{\mathbb{R}} x^2u(x)u(x)dx = 0$ implique $u = 0$ p.p. (et même partout en confondant u avec son représentant continu). Cette application est donc un produit scalaire.

Dans la suite on munit H de ce produit scalaire.

2) Soit A une partie bornée de H .

(a) Montrer que $\{u(0), u \in A\}$ est une partie bornée de \mathbb{R} [On pourra commencer par remarquer que $|u(0)| \leq |u(x)| + \|Du\|_{L^2(\mathbb{R})}$, pour tout $x \in [-1, 1]$].

Corrigé – Pour $x \in \mathbb{R}$, $u(0) = u(x) - \int_0^x Du(t)dt$ et donc, pour $x \in [-1, 1]$, en utilisant Cauchy-Schwarz pour les fonctions Du et 1

$$|u(0)| \leq |u(x)| + |x|^{1/2} \left(\int_1^{|x|} |Du(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq |u(x)| + \|Du\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

En multipliant cette inégalité par $|x|$, on en déduit (avec l'inégalité dans \mathbb{R} , $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$)

$$x^2 u(0)^2 \leq 2x^2 u(x)^2 + 2\|Du\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Puis en intégrant pour $x \in [-1, 1]$, $u(0)^2 \leq 9\|u\|_H^2$. ce qui donne le résultat annoncé.

(b) Soit K un compact de \mathbb{R} , montrer que $\{u|_K, u \in A\}$ est une partie relativement compacte de $C(K, \mathbb{R})$.

Corrigé – La question (2a) donne l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que $|u(0)| \leq C$ pour tout $u \in A$.

Comme K est compact, il existe $a > 0$ tel que $K \subset [-a, a]$.

On vérifie ci dessous les deux conditions qui permettent d'appliquer le théorème d'Ascoli pour avoir la relative compacité de $\{u|_K, u \in A\}$ dans $C(K, \mathbb{R})$.

i. Pour $x \in K$ et $u \in H$

$$|u(x)| \leq |u(0)| + \int_{-a}^a |Du(t)| dt \leq C + (2a)^{1/2} \|Du\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \leq C + (2a)^{1/2} \|u\|_H^{1/2}.$$

Ceci montre bien que $\{u(x), u \in A\}$ est borné. (et même uniformément par rapport à $x \in K$).

ii. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $u \in H$

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^{1/2} \|Du\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \leq |x - y|^{1/2} \|u\|_H^{1/2}$$

Ceci montre l'équicontinuité au point x des éléments de A (et même l'équicontinuité uniforme par rapport à $x \in \mathbb{R}$).

Le théorème d'Ascoli donne alors la relative compacité de $\{u|_K, u \in A\}$ dans $C(K, \mathbb{R})$.

- (c) Montrer que A est une partie relativement compacte de $L^2(\mathbb{R})$ [Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, On pourra montrer qu'il existe une sous suite, encore notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $u \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $u_n \rightarrow u$ uniformément sur tout compact de \mathbb{R} , quand $n \rightarrow \infty$, puis montrer que $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\mathbb{R})$].

Noter que l'on a ainsi montré que l'application $u \mapsto u$ est (linéaire) compacte de H dans $L^2(\mathbb{R})$.

Corrigé – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A .

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La question (2b) montre qu'il existe une sous suite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $[-p, p]$. Cette sous suite peut dépendre de p . Mais, le procédé diagonal permet d'extraire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite qui, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément sur $[-p, p]$. On note encore $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cette sous suite. Il reste à montrer que $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Soit $a > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u_n(x) - u(x)|^2 dx &= \int_{[-a, a]^c} |u_n(x) - u(x)|^2 dx + \int_{[-a, a]} |u_n(x) - u(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{a^2} \int_{\mathbb{R}} x^2 |u_n(x) - u(x)|^2 dx + \int_{[-a, a]} |u_n(x) - u(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{2}{a^2} \int_{\mathbb{R}} x^2 |u_n(x)|^2 dx + \frac{2}{a^2} \int_{\mathbb{R}} x^2 |u(x)|^2 dx + \int_{[-a, a]} |u_n(x) - u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans H , il existe $a > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2}{a^2} \int_{\mathbb{R}} x^2 |u_n(x)|^2 dx \leq \varepsilon.$$

On a alors aussi, grâce au lemme de Fatou, $\frac{2}{a^2} \int_{\mathbb{R}} x^2 |u(x)|^2 dx \leq \varepsilon$.

Puis, maintenant que a est fixé, la convergence uniforme de u_n vers u sur $[-a, a]$ donne l'existence n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $\int_{[-a, a]} |u_n(x) - u(x)|^2 dx \leq \varepsilon$.

Finalement, on a donc $\|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq 3\varepsilon$ pour $n \geq n_0$, ce qui prouve que $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\mathbb{R})$ quand $n \rightarrow +\infty$.

- 3) Montrer que H , muni du produit scalaire $(\cdot | \cdot)_H$, est un espace de Hilbert.

Corrigé – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de H . On pose $v_n(x) = xu_n(x)$. Les suites $(Du_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$. Il existe donc $g, v \in L^2(\mathbb{R})$ tels que $Du_n \rightarrow g$ et $v_n \rightarrow v$ dans $L^2(\mathbb{R})$ (quand $n \rightarrow +\infty$).

La question 2a donne $|u_n(0) - u_m(0)| \leq 3\|u_n - u_m\|_H$ (pour tout $n, m \in \mathbb{N}$). La suite $(u_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans \mathbb{R} et il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(0) = a$.

En passant à la limite (quand $n \rightarrow +\infty$) dans l'équation $u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x Du_n(t) dt$, on obtient alors la convergence (dans \mathbb{R}) pour tout x de $u_n(x)$. On note $u(x)$ cette limite et on a avec $u(0) = a$;

$$u(x) = u(0) + \int_0^x g(t) dt.$$

Ceci prouve que d'après le cours que $u \in H^1(\mathbb{R})$ et $Du = g$.

Comme $u_n \rightarrow u$ p.p. (et même partout) et que $v_n \rightarrow v$ dans $L^2(\mathbb{R})$ (et donc p.p. pour une sous suite), on obtient $xu_n = v_n$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Finalement on obtient ainsi $u_n \rightarrow u$ dans H , ce qui montre que H est complet et donc que H est un espace de Hilbert.

- 4) Soit $u \in H$. Montrer que $u(x) \rightarrow 0$, quand $x \rightarrow \pm\infty$.

Corrigé – Comme $|u(x) - u(y)|^2 \leq |x - y| \|Du\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq |x - y| \|u\|_H$, la fonction u est uniformément continue.

Si $u(x) \not\rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $|u(a_n)| \geq \varepsilon$ pour tout n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$. On peut aussi supposer que $a_{n+1} > a_n + 1$ pour tout n .

Par continuité uniforme de u , il existe alors $\delta > 0$ tel que

$$n \in \mathbb{N}, x \in [a_n - \delta, a_n + \delta] \Rightarrow |u(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quitte à restreindre δ , on peut supposer $\delta < 1/2$. On obtient alors

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)^2 dx \geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n - \delta}^{a_n + \delta} u(x)^2 dx \geq \sum_{n=0}^{\infty} 2\delta \frac{\varepsilon^2}{4} = +\infty,$$

en contradiction avec le fait que $u \in L^2(\mathbb{R})$.

Partie II (construction d'un opérateur linéaire autoadjoint compact dans $L^2(\mathbb{R})$)

Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on cherche $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, solution du problème suivant :

$$-u''(x) + x^2 u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (9.17)$$

$$u(x) \rightarrow 0, \quad \text{quand } x \rightarrow \pm\infty. \quad (9.18)$$

On dit que u est solution faible de (9.17)-(9.18) si u est solution de

$$u \in H, \quad (9.19)$$

$$\int_{\mathbb{R}} Du(x)Dv(x)dx + \int_{\mathbb{R}} x^2 u(x)v(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H. \quad (9.20)$$

L'espace H est défini dans la partie I.

1) Montrer que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, il existe un et un seul u solution de (9.19)-(9.20)

Corrigé – Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.

On définit l'opérateur F de H dans \mathbb{R} par $F(v) = \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx = (f|v)_{L^2(\mathbb{R})}$. Comme l'application $v \mapsto v$ est continue de H dans $L^2(\mathbb{R})$ (cette application linéaire est même compacte d'après la partie I), l'application F appartient à H' .

Le problème (9.19)-(9.20) consiste à chercher $u \in H$ tel que $(u|v)_H = F(v)$ pour tout $v \in H$. L'existence et l'unicité de u est donc donné par le théorème de représentation de Riesz dans les espaces de Hilbert.

2) Montrer que l'opérateur $T : f \mapsto u$ (où u est, pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, la solution de (9.19)-(9.20)) est linéaire autoadjoint compact de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Corrigé – L'application $f \mapsto u$ de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ est la composée de l'application $f \mapsto u$ de $L^2(\mathbb{R})$ dans H , qui est linéaire continue, et de l'application $u \mapsto u$ de H dans $L^2(\mathbb{R})$, qui est linéaire compacte, elle est donc linéaire compacte.

On montre maintenant que $T = T^*$. Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ et $u, v \in H$ les solutions correspondantes de (9.19)-(9.20)). Avec le choix de u dans la formulation faible pour g et le choix de v dans la formulation faible pour f , on obtient

$$(g|Tf)_{L^2(\mathbb{R})} = (v|u)_H = (u|v)_H = (f|v)_{L^2(\mathbb{R})} = (f|Tg)_{L^2(\mathbb{R})} = (Tg|f)_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Ceci prouve le caractère autoadjoint de T .

- 3) Si $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que la solution de (9.19)-(9.20) appartient à $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et est solution de (9.17)-(9.18) au sens classique.

Corrigé – Soit $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et u la solution de (9.19)-(9.20). On définit la fonction h par $h(x) = f(x) - x^2u(x)$, de sorte que $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que, pour tout $v \in C_c^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} Du(x)v'(x)dx = \int_{\mathbb{R}} h(x)v(x)dx.$$

Un lemme vu en cours et en td donne alors que $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $-u''(x) = h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme on sait aussi que (d'après la partie I) u vérifie (9.18), la fonction u est donc solution de (9.17)-(9.18) au sens classique.

partie III (recherche des v.p. et fonctions propres de T)

On cherche, dans cette partie, les valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur T défini dans la partie II.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ t.q. $Tf = \lambda f$. On pose $u = Tf$.

- 1) Montrer que $\lambda > 0$. On pose, dans la suite, $\mu = \frac{1}{\lambda}$.

Corrigé – Pour tout $v \in H$, $\int_{\mathbb{R}} Du(x)Dv(x)dx + \int_{\mathbb{R}} x^2u(x)v(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx$.

Si $u = 0$, on a donc, en particulier, $\int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx = 0$ pour tout $v \in C_c^1(\mathbb{R})$ et donc $f = 0$ p.p. en contradiction avec $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

Puis, comme $u \neq 0$, en prenant $v = u$, on obtient

$$\lambda \int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)u(x)dx = (u | u)_H > 0,$$

et donc $\lambda > 0$.

- 2) Montrer que $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (on rappelle que $u = Tf$), que u vérifie $-u''(x) + x^2u(x) = \mu u(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que $u(x) \rightarrow 0$, quand $x \rightarrow \pm\infty$.

Corrigé – Comme $f = \mu u$, on a, pour tout $v \in H$,

$$\int_{\mathbb{R}} Du(x)Dv(x)dx = \int_{\mathbb{R}} (\mu u(x) - x^2u(x))v(x)dx.$$

On pose $h(x) = \mu u(x) - x^2u(x)$, de sorte que $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et on obtient pour tout $v \in C_c^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} Du(x)v'(x)dx = \int_{\mathbb{R}} h(x)v(x)dx.$$

Un lemme vu en cours donne alors $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $-u''(x) = h(x) = \mu u(x) - x^2u(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Enfin, $u \in H$ donne $u(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.

- 3) Soit $v \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $-v''(x) + x^2v(x) = \mu v(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une série entière, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$, de rayon de convergence égal à $+\infty$, entièrement déterminée (de manière explicite) par a_0 , a_1 et μ , t.q. $v(x) = e^{-x^2/2}(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que, si v est non identiquement nulle, on a alors :

$(v(x) \rightarrow 0, \text{ quand } x \rightarrow \pm\infty) \Rightarrow \mu \in \{2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$.

Corrigé – On cherche $v \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $-v''(x) + x^2v(x) = \mu v(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, sous la forme

$$v(x) = e^{-x^2/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n \right).$$

Si le rayon de convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ est infini, on peut dériver la série terme à terme, ceci donne

$$v'(x) = e^{-x^2/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n \right),$$

avec $b_n = -a_{n-1} + (n+1)a_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$ et en posant $a_{-1} = 0$. Puis,

$$v''(x) = e^{-x^2/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n x^n \right),$$

avec $c_n = -b_{n-1} + (n+1)b_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$ et en posant $b_{-1} = 0$ et donc

$c_n = a_{n-2} - (2n+1)a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2}$ pour tout $n \geq 0$ et en posant $a_{-2} = 0$.

On en déduit

$$-v''(x) + x^2 v(x) - \mu v(x) = e^{-x^2/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} d_n x^n \right),$$

avec $d_n = (2n+1-\mu)a_n - (n+1)(n+2)a_{n+2}$.

Pour que v soit solution de $-v''(x) + x^2 v(x) - \mu v(x) = 0$ (pour tout x) il suffit que $d_n = 0$ pour tout n et que le rayon de convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ soit infini. il suffit donc que, pour tout $n \geq 0$,

$$a_{n+2} = \frac{2n+1-\mu}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

Le rayon de convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ est bien infini car il existe C tel que $a_{n+2} \leq \frac{C}{n} a_n$ pour tout $n > 1$.

La fonction v est entièrement déterminée (pour μ donné) par a_0 et a_1 . Comme l'ensemble des solutions (de classe C^2) de $-v''(x) + x^2 v(x) = \mu v(x)$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$) est un espace vectoriel de dimension de 2, on obtient donc toutes les solutions lorsque a_0 et a_1 décrivent \mathbb{R} .

En séparant les n pairs et impairs, la fonction v se décompose en deux parties :

$$v(x) = e^{-x^2/2} w(x) + e^{-x^2/2} z(x),$$

$$w(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_p (x^2)^p, \text{ avec } \alpha_p = a_{2p},$$

$$z(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = x \sum_{p=0}^{+\infty} \beta_p (x^2)^p, \text{ avec } \beta_p = a_{2p+1},$$

On va montrer les deux assertions suivantes :

a1 On suppose $(2n+1-\mu) \neq 0$ pour tout n pair et $a_0 \neq 0$. Alors, selon le signe de a_0 ,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2/2} w(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2/2} w(x) = -\infty$$

a2 On suppose $(2n+1-\mu) \neq 0$ pour tout n impair et $a_1 \neq 0$. Alors, selon le signe de a_1 ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2/2} w(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2/2} w(x) = -\infty \text{ ou}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2/2} w(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2/2} w(x) = +\infty$$

Une conséquence des assertions a1 et a2 est bien que si v est non identiquement nulle et $v(x) \rightarrow 0$, quand $x \rightarrow \pm\infty$, alors $\mu \in \{2k+1, k \in \mathbb{N}\}$.

On montre maintenant l'assertion a1.

On remarque tout d'abord que $b_p \neq 0$ pour tout p et que $\lim_{p \rightarrow +\infty} p b_{p+1} / b_p = 1$. Soit $1/2 < \varepsilon^2 < 1$. il existe alors $q \in \mathbb{N}$ tel que $b_{p+1} / b_p \geq \varepsilon^2 / p$ pour tout $p \geq q$. On suppose par exemple $b_q > 0$. Par récurrence on a donc $b_p \geq b_q \varepsilon^{2p} / p!$. Il existe donc un polynôme P tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$w(x) \geq P(x) + b_q \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^{2p}}{p!} x^{2p} = P(x) + b_q e^{\varepsilon^2 x^2}.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2/2} w(x) = +\infty$.

Si $b_q < 0$, on obtient une majoration sur w et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2/2} w(x) = -\infty$.

Un raisonnement analogue donne l'assertion a2, ce qui termine cette question.

- 4) Dédurre de la question précédente qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ t.q. $\mu = 2k + 1$ et montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = ae^{-x^2/2} h_k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ où h_k est un polynôme de degré k , "unitaire", c'est-à-dire s'écrivant sous la forme $x^k + q(x)$ où $q(x)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à k , que l'on peut calculer explicitement.

Montrer que, pour une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ bien choisie, la suite de fonctions $(a_n e^{-(\cdot)^2/2} h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Les polynômes h_n , $n \in \mathbb{N}$, s'appellent "polynômes" de Hermitte.

Corrigé – Comme $u \in H$, la question précédente montre qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ t.q. $\mu = 2k + 1$. Puis si k est pair, l'assertion a2 montre qu'il faut $a_1 = 0$ (et donc $a_0 \neq 0$ car $u \neq 0$) et on obtient avec les notations de la question précédente $u(x) = e^{-x^2/2} w(x)$ et la série définissant w a tous ses termes nuls à partir du rang k , c'est-à-dire que u peut se mettre sous la forme demandée.

Si k est impair, on obtient de manière semblable $a_0 = 0$ et $u(x) = e^{-x^2/2} z(x)$ et u peut se mettre sous la forme demandée.

Enfin, on choisit a_n pour que $a_n e^{-(\cdot)^2/2} h_n$ soit de norme 1 dans $L^2(\mathbb{R})$ et on obtient ainsi une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

C10. Transformation de Fourier dans L1

Pour les cours C10-C12, on travaillera avec les espaces $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $L_{\mathbb{C}}^p(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ ($N \geq 1$) que l'on notera toujours $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p(\mathbb{R}^N)$ et $L_{\mathbb{C}}^p(\mathbb{R}^N)$ ou, en abrégé, $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p$ et $L_{\mathbb{C}}^p$. L'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N sera en général notée dx (au lieu de $d\lambda_N(x)$).

On rappelle quelques définitions et propriétés des espaces $L_{\mathbb{C}}^p$, $N \geq 1$, $1 \leq p \leq +\infty$.

1) Soit $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable.

(a) (Définition) Si $p < +\infty$, $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p$ si $\int |f(x)|^p dx < +\infty$,

(b) (Définition) Si $p = +\infty$, $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p$ si il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $|f| \leq C$ p.p..

2) (Définition) $L_{\mathbb{C}}^p$ est l'espace $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p$ quotienté par la relation d'équivalence " = p.p. ".

3) (Propriété) $f \in L_{\mathbb{C}}^p$ si et seulement $\text{Re}(f), \text{Im}(f) \in L_{\mathbb{R}}^p$.

4) (Définition) Pour $f \in L_{\mathbb{C}}^p$,

(a) Si $p < +\infty$, $\|f\|_{L_{\mathbb{C}}^p} = (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}$. On notera $\|\cdot\|_p$ la norme dans $L_{\mathbb{C}}^p$.

(b) Si $p = +\infty$, $\|f\|_{L_{\mathbb{C}}^p} = \inf\{C \in \mathbb{R} \text{ tel que } |f| \leq C \text{ p.p.}\}$.

5) (Propriété) $L_{\mathbb{C}}^p$ est un espace de Banach complexe.

En général, on notera $\|\cdot\|_p$ la norme dans $L_{\mathbb{C}}^p$.

6) (Propriété) Si $p = 2$, $L_{\mathbb{C}}^2$ est un espace de Hilbert complexe. La norme de l'espace $L_{\mathbb{C}}^2$ est induite par le produit scalaire

$$(f | g)_{L_{\mathbb{C}}^2} = \int f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Soit $N \geq 1$. Pour $x = (x_1, \dots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$ et $t = (t_1, \dots, t_N)^t \in \mathbb{R}^N$, on note $x \cdot t$ le produit scalaire euclidien de x et t , c'est-à-dire $x \cdot t = \sum_{i=1}^N x_i t_i$ et on désigne par $|t|$ la norme euclidienne de t , c'est-à-dire $|t| = (\sum_{i=1}^N t_i^2)^{1/2}$.

Définition 10.1 (Transformée de Fourier dans $L_{\mathbb{C}}^1$). Soit $N \geq 1$ et $f \in L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}^N)$.

Pour $t \in \mathbb{R}^N$, l'application $x \mapsto e^{-ix \cdot t} f(x)$ (définie de \mathbb{R}^N dans \mathbb{C}) appartient à $L_{\mathbb{C}}^1$ (car $|e^{-ix \cdot t} f(x)| = |f(x)|$).

On définit $\widehat{f}(t)$ par :

$$\widehat{f}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int f(x) e^{-ix \cdot t} dx.$$

La fonction \widehat{f} (définie de \mathbb{R}^N dans \mathbb{C}) s'appelle transformée de Fourier de f .

Remarque 10.1. Certains ouvrages donnent d'autres définitions de $\widehat{f}(t)$:

$$1) \widehat{f}(t) = \int f(x)e^{-ix \cdot t} dx.$$

$$2) \widehat{f}(t) = \int f(x)e^{-2i\pi x \cdot t} dx.$$

$$3) \widehat{f}(t) = \int f(x)e^{ix \cdot t} dx.$$

La correspondance entre ces différentes définitions est facile.

On note

$$C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) = \{g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \text{ tel que } \sup_{t \in \mathbb{R}^N} |g(t)| < +\infty\},$$

$$C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) = \{g \in C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \text{ tel que } g(t) \rightarrow 0 \text{ quand } |t| \rightarrow +\infty\}.$$

On rappelle que les espaces $C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ et $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ sont des espaces de Banach complexe quand ils sont munis de la norme de la convergence uniforme (aussi notée $\|\cdot\|_\infty$), c'est-à-dire :

$$\|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})} = \|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\varphi(x)|.$$

Proposition 10.1 (La transformée de Fourier envoie L^1 dans C_0).

Soit $N \geq 1$. L'application $f \mapsto \widehat{f}$ est linéaire continue de $L^1_{\mathbb{C}}$ dans $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.

Démonstration de la proposition 10.1.

Le théorème de continuité sous le signe \int (vu en cours d'intégration et rappelé ci après, théorème 10.1) appliqué à la fonction $(x, t) \mapsto e^{-ix \cdot t} f(x)$ entraîne que \widehat{f} est continue. En effet,

- 1) pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, l'application $t \mapsto e^{-ix \cdot t} f(x)$ est continue de \mathbb{R}^N dans \mathbb{C} ,
 - 2) pour tout $t \in \mathbb{R}^N$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $|e^{-ix \cdot t} f(x)| \leq |f(x)|$ et $|f| \in L^1_{\mathbb{R}}$,
- ce qui permet d'appliquer le théorème de continuité sous le signe \int .

La linéarité de l'application $f \mapsto \widehat{f}$ découle de la linéarité de l'opérateur d'intégration.

On remarque ensuite que l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est continue de $L^1_{\mathbb{C}}$ dans $C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. Ceci est dû au fait que $|e^{-ix \cdot t}| = 1$ pour $x, t \in \mathbb{R}^N$ et donc, pour $f \in L^1_{\mathbb{C}}$ et $t \in \mathbb{R}^N$,

$$|\widehat{f}(t)| \leq (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int |f(x)| dx = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \|f\|_1,$$

et donc $\|\widehat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \|f\|_1$.

Il reste à montrer que $\widehat{f}(t) \rightarrow 0$ quand $|t| \rightarrow +\infty$.

Cas $N = 1$.

On remarque que pour $t \neq 0$, on a, comme $e^{i\pi} = -1$,

$$\widehat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-i(x-\frac{\pi}{t})t} f(x) dx,$$

et donc, avec le changement de variable $x - \frac{\pi}{t} = y$,

$$\widehat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-iyt} f(y + \frac{\pi}{t}) dy.$$

On en déduit que

$$2\widehat{f}(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-ixt} (f(x) - f(x + \frac{\pi}{t})) dx$$

et donc que $|\widehat{f}(t)| \leq \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|f(\cdot) - f(\cdot + \frac{\pi}{t})\|_1$. Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (théorème 3.1) donne alors le fait que $\widehat{f}(t) \rightarrow 0$ quand $|t| \rightarrow \infty$.

Cas $N > 1$.

On reprend la même méthode. Pour $t \neq 0$, $t = (t_1, \dots, t_N)^t$, il existe $j \in \{1, \dots, N\}$ t.q. $|t_j| = \max_{k=1, \dots, N} |t_k| = \|t\|_\infty$.

En notant e_j le j -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^N , on a alors, comme $e^{i\pi} = -1$ et $e_j \cdot t = t_j$,

$$\widehat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-i(x - \frac{\pi}{t_j} e_j) \cdot t} f(x) dx,$$

et donc, avec le changement de variable $x - \frac{\pi}{t_j} e_j = y$,

$$\widehat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-iy \cdot t} f(y + \frac{\pi}{t_j} e_j) dy = -(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-iy \cdot t} f(y + \frac{\varepsilon \pi}{\|t\|_\infty} e_j) dy,$$

où $\varepsilon = \text{sign}(t_j)$ (donc $\varepsilon = \pm 1$). Ceci donne

$$2|\widehat{f}(t)| \leq (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \|f(\cdot) - f(\cdot + \frac{\varepsilon \pi}{\|t\|_\infty} e_j)\|_1.$$

On en déduit que pour tout $t \neq 0$,

$$|\widehat{f}(t)| \leq \frac{1}{2} \max_{j=1, \dots, N} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} (\|f(\cdot) - f(\cdot + \frac{\pi}{\|t\|_\infty} e_j)\|_1 + \|f(\cdot) - f(\cdot - \frac{\pi}{\|t\|_\infty} e_j)\|_1).$$

Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (théorème 3.1) donne alors le fait que $\widehat{f}(t) \rightarrow 0$ quand $|t| \rightarrow \infty$. \square

On rappelle le théorème de continuité sous le signe \int utilisé dans la preuve de la proposition 10.1.

Théorème 10.1 (Continuité sous le signe \int). Soient (E, \mathcal{T}, m) un espace mesuré et f une application de $E \times \mathbb{R}^N$ dans K , $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , telle que $f(\cdot, t) \in L^1_K(E, \mathcal{T}, m)$. On définit F de \mathbb{R}^N dans K par $F(t) = \int f(x, t) dm(x)$. On suppose que

- 1) pour presque tout $x \in E$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue de \mathbb{R}^N dans \mathbb{C} ,
- 2) il existe $G \in L^1_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{T}, m)$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^N$, $f(\cdot, t) \leq G$ p.p..

Alors F est continue.

Démonstration du théorème 10.1. Pour démontrer la continuité au point t , il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée à toute suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers t quand $n \rightarrow +\infty$. \square

Il est naturel de se poser les deux questions suivantes :

- 1) La transformée de Fourier d'une fonction f caractérise-t-elle la fonction f (c'est-à-dire si $\widehat{f} = \widehat{g}$, a-t-on $f = g$ p.p.)?
- 2) Peut-on retrouver la fonction à partir de sa transformée de Fourier?

Les réponses à ces questions sont fournies (partiellement pour la deuxième question) par le théorème d'inversion de Fourier, théorème 10.2.

Théorème 10.2 (Inversion partielle de la transformée de Fourier).

Soit $N \geq 1$ et $f \in L^1_{\mathbb{C}}$ tel que $\widehat{f} \in L^1_{\mathbb{C}}$. On a alors $f = \widehat{\widehat{f}(\cdot)}$ p.p., c'est-à-dire :

$$f(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \widehat{f}(x) e^{ixt} dx, \text{ pour presque tout } t \in \mathbb{R}^N.$$

Démonstration du théorème 10.2. La démonstration fait l'objet de l'exercice 10.1. □

Une conséquence du théorème 10.2 est l'injectivité de l'application $f \mapsto \widehat{f}$ (de $L^1_{\mathbb{C}}$ dans $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, qui fournit donc une réponse positive à la question 1). En effet, soient f et $g \in L^1_{\mathbb{C}}$ tels que $\widehat{f} = \widehat{g}$; alors par linéarité, $\widehat{f-g} = 0$ et donc $\widehat{f-g} \in L^1_{\mathbb{C}}$. En appliquant le théorème d'inversion (théorème 10.2), on a donc $f = g$ p.p..

Le théorème 10.2 apporte aussi une réponse partielle à la question 2) : on peut calculer f à partir de \widehat{f} dès que $\widehat{f} \in L^1_{\mathbb{C}}$. Il faut remarquer à ce propos que $L^1_{\mathbb{C}}$ n'est pas stable par transformation de Fourier, on peut avoir $f \in L^1_{\mathbb{C}}$ et $\widehat{f} \notin L^1_{\mathbb{C}}$ (voir l'exercice 10.4).

La transformée de Fourier a la propriété intéressante de transformer la convolution en produit. Ceci est montré dans la proposition 10.3. Mais on commence par rappeler la définition de la convolution d'éléments de $L^1_{\mathbb{C}}$ (cours d'intégration).

Proposition 10.2 (Convolution).

Soient $f, g \in L^1_{\mathbb{C}}$ (que l'on confond avec l'un de leurs représentants). Alors :

- Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $g(x-\cdot)f(\cdot)$ appartient à $L^1_{\mathbb{C}}$ (en la confondant avec sa classe). On pose donc :

$$f * g(x) = \int f(t)g(x-t)dt.$$

La fonction $f * g$ est donc définie p.p. sur \mathbb{R}^N .

- $f * g \in L^1_{\mathbb{C}}$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ t.q. $f * g = h$ p.p.").
- $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Démonstration de la proposition 10.2.

On choisit des représentants de f et g , de sorte que $f, g \in L^1_{\mathbb{C}}$. On souhaite appliquer le théorème de Fubini (voir le cours d'intégration) à $H : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{C}$, définie par $H(x, y) = f(y)g(x-y)$. (On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2N}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, et $\lambda_{2N} = \lambda_N \otimes \lambda_N$.)

Comme λ_N est σ -finie, pour appliquer le théorème de Fubini, il suffit de vérifier que H est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2N})$ -mesurable et que $\int (\int |H(x, y)| dx) dy < \infty$.

On indique brièvement pourquoi H est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2N})$ -mesurable. On a $H = H_1 \circ \psi$ avec :

$$H_1 : (x, y) \mapsto f(x)g(y), \quad \psi : (x, y) \mapsto (y, x-y).$$

La fonction H_1 est mesurable de \mathbb{R}^{2N} dans \mathbb{C} (car f et g sont mesurables de \mathbb{R}^N dans \mathbb{C}) et ψ est mesurable de \mathbb{R}^{2N} dans \mathbb{R}^{2N} car continue (\mathbb{R}^N et \mathbb{R}^{2N} sont toujours munis de leur tribu borélienne). La fonction H est donc mesurable de \mathbb{R}^{2N} dans \mathbb{C} comme composée de fonctions mesurables.

On peut maintenant calculer l'intégrale de $|H|$:

$$\int \left(\int |H(x, y)| dx \right) dy = \int \left(\int |f(y)g(x-y)| dx \right) dy = \int |f(y)| \left(\int |g(x-y)| dx \right) dy.$$

Un changement de variable simple donne $\int |g(x-y)| dx = \int |g(x)| dx = \|g\|_1$, Donc :

$$\int \left(\int |H(x, y)| dx \right) dy = \|g\|_1 \int |f(y)| dy = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.$$

Le théorème de Fubini peut donc s'appliquer. Il donne que $H(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$. Donc, $g(x-\cdot)f(\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$. Ceci montre bien que $f * g$ est définie p.p.. Le théorème de Fubini donne alors aussi que $f * g \in L^1_{\mathbb{C}}$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}$ t.q. $f * g = h$ p.p.").

Enfin pour montrer que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, il suffit de remarquer que (avec le théorème de Fubini-Tonelli)

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int \left| \int f(y)g(x-y) dy \right| dx \\ &\leq \int \left(\int |f(y)g(x-y)| dy \right) dx = \int \left(\int |H(x, y)| dy \right) dx = \int \left(\int |H(x, y)| dx \right) dy = \|g\|_1 \|f\|_1. \end{aligned}$$

□

On peut maintenant s'intéresser à l'action de la transformation de Fourier sur la convolution.

Proposition 10.3 (Transformée de Fourier et convolution).

Soient $f, g \in L^1_{\mathbb{C}}$, alors $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \widehat{f} \widehat{g}$.

Démonstration de la proposition 10.3. Par la proposition 10.2, on a $f * g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et pour p.p. $x \in \mathbb{R}^N$, $f * g(x) = \int f(x-y)g(y) dy$. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(t) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int f(x-y)g(y) dy \right) e^{-ix \cdot t} dx = \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int f(x-y)g(y) e^{-i(x-y) \cdot t} e^{-iy \cdot t} dy \right) dx. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini (vu en cours d'intégration) à la fonction

$$(x, y) \mapsto f(x-y)g(y) e^{-i(x-y) \cdot t} e^{-iy \cdot t}$$

(qui est bien intégrable sur \mathbb{R}^{2N} car son module est la fonction $(x, y) \mapsto |f(x-y)g(y)|$ dont l'intégrale sur \mathbb{R}^{2N} est égale à $\|f\|_1 \|g\|_1$), on obtient :

$$\widehat{f * g}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int f(x-y) e^{-i(x-y) \cdot t} dx \right) g(y) e^{-iy \cdot t} dy.$$

Comme, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, $\int f(x-y) e^{-i(x-y) \cdot t} dx = \int f(z) e^{-iz \cdot t} dz = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \widehat{f}(t)$, on en déduit :

$$\widehat{f * g}(t) = \widehat{f}(t) \int g(y) e^{-iy \cdot t} dy = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \widehat{f}(t) \widehat{g}(t),$$

ce qui est le résultat annoncé. □

On peut aussi définir la transformée de Fourier d'une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Définition 10.2 (Transformée de Fourier d'une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$).

Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^N$ la fonction $x \mapsto e^{-ix \cdot t}$ appartient à $C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ elle est donc intégrable pour la mesure m . On définit \widehat{m} de \mathbb{R}^N dans \mathbb{C} par

$$\widehat{m}(t) = (2\pi)^{-N/2} \int e^{-ix \cdot t} dm(x) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^N.$$

Remarque 10.2. Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

1) En reprenant la preuve de la proposition 10.1 et en utilisant le fait que $1_{\mathbb{R}^N}$ est intégrable pour la mesure m , on peut montrer que $\widehat{m} \in C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ et

$$\|\widehat{m}\|_{\infty} \leq (2\pi)^{-N/2} m(\mathbb{R}^N).$$

2) Si m a une densité par rapport à λ_N (mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$), c'est-à-dire $m = f \lambda_N$ avec $f \geq 0$ p.p. et $\int f(x) dx < +\infty$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}^n$,

$$\widehat{m}(t) = (2\pi)^{-N/2} \int e^{-ix \cdot t} dm(x) = (2\pi)^{-N/2} \int e^{-ix \cdot t} f(x) dx = \widehat{f}(t).$$

Donc, $\widehat{m} = \widehat{f}$.

3) On suppose maintenant que m est la loi d'un vecteur aléatoire X de dimension N (m est alors une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ telle que $m(\mathbb{R}^N) = 1$).

Le vecteur aléatoire X est une application mesurable de Ω dans \mathbb{R}^N . L'ensemble Ω étant muni d'une tribu \mathcal{T} et d'une probabilité P sur la tribu \mathcal{T} .

La fonction caractéristique de X est alors définie, pour tout $t \in \mathbb{R}^N$, par

$$\varphi_X(t) = E(e^{iX \cdot t}) = \int_{\Omega} e^{iX(\omega) \cdot t} dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix \cdot t} dm(x).$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^N$, $\varphi_X(t) = (2\pi)^{N/2} \widehat{m}(-t)$.

td10. Transformée de Fourier dans L^1

Exercice 10.1 (Résultat partiel d'inversion de Fourier dans $L^1_{\mathbb{C}}$).

Soit $H(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$. On pose, pour $\lambda > 0$:

$$h_{\lambda}(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{itx} dt, x \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que $h_{\lambda}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$, et $\int_{\mathbb{R}} h_{\lambda}(x) dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$.

Corrigé – Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme H est paire, on a $(2\pi)^{\frac{1}{2}} h_{\lambda}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|\lambda t|} \cos(tx) dt$ et donc

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}} h_{\lambda}(x) = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n e^{-\lambda t} \cos(tx) dt.$$

En intégrant deux fois par parties, on remarque que

$$\int_0^n e^{-|\lambda t|} \cos(tx) dt = \frac{1}{\lambda} - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 \int_0^n e^{-|\lambda t|} \cos(tx) dt + a_n,$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Ceci donne

$$\int_0^n e^{-|\lambda t|} \cos(tx) dt = \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} (1 + \lambda a_n),$$

et donc $h_\lambda(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$.

Pour calculer $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x) dx$, on utilise le changement de variable $x = \lambda y$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x) dx = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + y^2} dy = (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

2) Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f * h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \widehat{f}(t) e^{ixt} dt.$$

Corrigé – Comme $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h_\lambda \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $f * h_\lambda(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$f * h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) h_\lambda(x - t) dt = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}} H(\lambda y) e^{i(x-t)y} dy \right) dt.$$

Comme $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $H(\lambda \cdot) \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on peut utiliser le théorème de Fubini (vu dans le cours d'intégration) pour inverser l'ordre d'intégration et obtenir :

$$\begin{aligned} f * h_\lambda(x) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} H(\lambda y) e^{ixy} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ity} dt \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} H(\lambda y) e^{ixy} \widehat{f}(y) dy. \end{aligned}$$

3) Soit g une fonction mesurable bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , continue en 0. Montrer que $g * h_\lambda(0) \rightarrow \sqrt{2\pi}g(0)$ quand $\lambda \rightarrow 0$. [Utiliser la question 1 et le théorème de convergence dominée.]

Corrigé – On utilise maintenant le fait que $h_\lambda \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $g \in L^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour remarquer que $g * h_\lambda(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour $x = 0$, on a :

$$g * h_\lambda(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x) h_\lambda(x) dx = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} g(x) dx.$$

Avec le changement de variable $y = \frac{x}{\lambda}$, on obtient :

$$g * h_\lambda(0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} g(\lambda y) \frac{1}{1 + y^2} dy.$$

Comme $|g(\lambda y) \frac{1}{1+y^2}| \leq \|g\|_u \frac{1}{1+y^2}$ (avec $\|g\|_u = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$) et que la fonction $y \mapsto \frac{1}{1+y^2}$ est intégrable sur \mathbb{R} , on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour en déduire (grâce à la continuité de g en 0) :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} g * h_\lambda(0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} g(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + y^2} dy = (2\pi)^{\frac{1}{2}} g(0).$$

4) Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, montrer que :

$$\|f * h_\lambda - \sqrt{2\pi}f\|_1 \rightarrow 0 \text{ lorsque } \lambda \rightarrow 0.$$

[On pourra utiliser la continuité en moyenne et la question précédente avec $g(y) = \int |f(x+y) - f(x)| dx$.]

Corrigé – Comme $\int_{\mathbb{R}} h_{\lambda}(y)dy = \sqrt{2\pi}$, on a :

$$\begin{aligned} \|f * h_{\lambda} - \sqrt{2\pi}f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x))h_{\lambda}(y)dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|h_{\lambda}(y)dy \right) dx. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli (vu dans le cours d'intégration), on en déduit :

$$\|f * h_{\lambda} - \sqrt{2\pi}f\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|dx \right) h_{\lambda}(y)dy = g * h_{\lambda}(0),$$

avec $g(y) = \int |f(x+y) - f(x)|dx$.

Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (voir le théorème 3.1, écrit pour de fonctions à valeurs réelles, mais la généralisation est immédiate pour des fonctions à valeurs complexes) donne que g est continue en 0 et donc aussi continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (en remarquant que $|g(y) - g(z)| \leq |g(y-z)|$) et donc aussi mesurable de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . Elle est également bornée (car $|g(y)| \leq 2\|f\|_1$, pour tout $y \in \mathbb{R}$). On peut donc utiliser la question précédente, elle donne que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} g * h_{\lambda}(0) = 0$ et donc que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|f * h_{\lambda} - \sqrt{2\pi}f\|_1 = 0$.

5) Dédire de ce qui précède le théorème d'inversion de Fourier

Corrigé – On note $L^1 = L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $f \in L^1$ (on a donc $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$). On suppose que $\widehat{f} \in L^1$. Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ une suite t.q. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$. Comme $f \in L^1$, la question précédente nous donne que $f * h_{\lambda_n} \rightarrow \sqrt{2\pi}f$ dans L^1 et la question 2 nous donne pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f * h_{\lambda_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda_n t) \widehat{f}(t) e^{ixt} dt.$$

On utilise maintenant le théorème de convergence dominée qui s'applique parce que $\widehat{f} \in L^1$ et que l'on a, pour tout x et tout n , $|H(\lambda_n t) \widehat{f}(t) e^{ixt}| \leq |\widehat{f}(t)|$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\lambda_n x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f * h_{\lambda_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) e^{ixt} dt = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(-x).$$

Enfin, comme $f * h_{\lambda_n} \rightarrow \sqrt{2\pi}f$ dans L^1 , on peut supposer, après extraction d'une sous-suite, que $f * h_{\lambda_n} \rightarrow \sqrt{2\pi}f$ p.p.. On a donc, finalement (par unicité de la limite dans \mathbb{C}), $\sqrt{2\pi}f = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(-\cdot)$ p.p., c'est-à-dire $f = \widehat{\widehat{f}(-\cdot)}$ p.p..

Exercice 10.2 (Une condition donnant $\widehat{f} \in L^1$).

On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

- 1) Soient $f, g \in L^1$, montrer que $f\widehat{g} \in L^1$, $g\widehat{f} \in L^1$ et $\int f\widehat{g}d\lambda = \int g\widehat{f}d\lambda$.
- 2) Soit $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Montrer que $1_B * 1_B(t) = (1 - |t|)^+$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- 3) On pose $\theta_n(t) = (1 - \frac{|t|}{n})^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$.
 - (a) Calculer $\widehat{\theta}_1(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
[On pourra remarquer que $\theta_1 = 1_B * 1_B$ avec $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.]
 - (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$, montrer que

$$\widehat{\theta}_n(y) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2(\frac{ny}{2})}{ny^2}.$$

- 4) Soit $f \in L^1 \cap L^\infty$ t.q. $\widehat{f}(t) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On se propose de montrer que $\widehat{f} \in L^1$ (et donc que le théorème d'inversion s'applique). On utilise la fonction θ_n de la question précédente.

- (a) On note $\varphi_n = \theta_n \widehat{f}$; montrer que $\varphi_n \uparrow \widehat{f}$ et $\int \varphi_n d\lambda \uparrow \int \widehat{f} d\lambda$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- (b) Montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$ indépendant de n tel que $\int \widehat{\theta}_n(y) dy = \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\widehat{f} \in L^1$.

Exercice 10.3 (Transformée de Fourier inverse). Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On suppose que la transformée de Fourier de f , notée \widehat{f} , est aussi intégrable (pour la mesure de Lebesgue).

1) En utilisant le fait que f prend ses valeurs dans \mathbb{R} , montrer que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\widehat{f}(-t)) &= \operatorname{Re}(\widehat{f}(t)) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{Im}(\widehat{f}(-t)) &= -\operatorname{Im}(\widehat{f}(t)) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

où $\operatorname{Re}(\xi)$ et $\operatorname{Im}(\xi)$ désignent les parties réelle et imaginaire du nombre complexe ξ .

Corrigé – Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} dx$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\widehat{f}(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ixt} dx.$$

En utilisant le fait que f prend ses valeurs dans \mathbb{R} , on obtient alors la formule suivante pour le conjugué de $\widehat{f}(-t)$ (noté $\overline{\widehat{f}(-t)}$):

$$\overline{\widehat{f}(-t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x) e^{ixt}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} dx = \widehat{f}(t).$$

En reprenant encore le conjugué, ceci donne bien $\widehat{f}(-t) = \overline{\widehat{f}(t)}$.

2) Montrer que

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}(\widehat{f}(t) e^{itx}) dt \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

Corrigé – Comme \widehat{f} est intégrable, on sait que $f = \widehat{\widehat{f}(\cdot)}$ p.p. (théorème 10.1). On a donc, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) e^{ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \widehat{f}(t) e^{ixt} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \widehat{f}(t) e^{ixt} dt.$$

Dans l'intégrale de $-\infty$ à 0, on utilise le changement de variable $s = -t$, on obtient

$$\sqrt{2\pi} f(x) = \int_0^{+\infty} \widehat{f}(-s) e^{-ixs} ds + \int_0^{+\infty} \widehat{f}(t) e^{ixt} dt.$$

En regroupant les deux intégrales, on en déduit

$$\sqrt{2\pi} f(x) = \int_0^{+\infty} (\widehat{f}(-t) e^{-ixt} + \widehat{f}(t) e^{ixt}) dt.$$

La première question montre que le nombre complexe $\widehat{f}(-t)$ est le conjugué de $\widehat{f}(t)$. Comme le nombre complexe e^{-ixt} est le conjugué de e^{ixt} on en déduit que $\widehat{f}(-t) e^{-ixt}$ est le conjugué de $\widehat{f}(t) e^{ixt}$. Ceci donne alors

$$\sqrt{2\pi} f(x) = \int_0^{+\infty} 2 \operatorname{Re}(\widehat{f}(t) e^{ixt}) dt.$$

On obtient bien, finalement, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}(\widehat{f}(t) e^{itx}) dt.$$

Exercice 10.4 (La transformation de Fourier n'est ni stable ni surjective). Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On note $L_{\mathbb{C}}^1$ l'espace $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On pose $f = 1_{[-a, a]}$.

1) Calculer la transformée de Fourier de f . En déduire que $L_{\mathbb{C}}^1$ n'est pas stable par transformation de Fourier.

Corrigé – On a bien $f \in L_{\mathbb{C}}^1$. Soit $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-ixt} dx = \frac{1}{-it\sqrt{2\pi}} (e^{-iat} - e^{iat}) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} 2 \sin(at) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(at)}{t}.$$

Pour $t = 0$, on a $\widehat{f}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a$. (On peut remarquer que \widehat{f} est bien continue sur \mathbb{R} .)

La fonction \widehat{f} n'est pas intégrable sur \mathbb{R} (pour la mesure de Lebesgue), ce qui montre que $L_{\mathbb{C}}^1$ n'est pas stable par Fourier.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n = 1_{[-n, n]}$. Calculer $f * g_n$, et montrer qu'il existe $h_n \in L_{\mathbb{C}}^1$ t.q. $\widehat{h}_n = f * g_n$. Montrer que la suite $f * g_n$ est bornée dans $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors que la suite h_n n'est pas bornée dans $L_{\mathbb{C}}^1$. En déduire que la transformée de Fourier n'est pas surjective de $L_{\mathbb{C}}^1$ dans $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Corrigé – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f * g_n$ est définie sur tout \mathbb{R} et pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g_n(x-y)dy = \lambda([-a, a] \cap [x-n, x+n]), \quad (10.1)$$

car $f(y)g_n(x-y) = 1$ si $y \in [-a, a] \cap [x-n, x+n]$ et 0 sinon.

On peut éventuellement expliciter $f * g_n$ (mais ce n'est pas nécessaire pour la suite). Pour $n > a$, on obtient :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq a+n, \\ a-x+n & \text{si } -a+n \leq x < a+n \\ 2a & \text{si } a-n \leq x < -a+n \\ x+n+a & \text{si } -n-a \leq x < a-n \\ 0 & \text{si } x < -n-a. \end{cases}$$

Comme f et g_n appartiennent à $L_{\mathbb{C}}^1$, on sait (par le cours) que $f * g_n \in L_{\mathbb{C}}^1$ et $\widehat{f * g_n} = \sqrt{2\pi} \widehat{f} \widehat{g_n}$. On obtient donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ (en posant $\sin(t)/t = 1$ pour $t = 0$),

$$\widehat{f * g_n}(t) = h_n(t), \text{ avec } h_n(t) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(at) \sin(nt)}{t^2}.$$

La fonction h_n est continue sur \mathbb{R} et $|h_n(t)| \leq \sqrt{8/\pi}(1/t^2)$ pour tout t , on en déduit que $h_n \in L_{\mathbb{C}}^1$, on peut donc appliquer le théorème d'inversion de Fourier. Il donne

$$f * g_n(-\cdot) = \widehat{\widehat{f * g_n}} = \widehat{h_n}.$$

Comme $f * g_n(-\cdot) = f * g_n$ (par (10.1)), on a bien finalement $f * g_n = \widehat{h_n}$ avec $h_n \in L_{\mathbb{C}}^1$.

Comme f et g_n sont de carré intégrable, on peut montrer que $f * g_n \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mais ceci se voit directement sur la formule pour $f * g_n$. La formule (10.1) donne aussi $|f * g_n(x)| \leq 2a$ pour tout x et tout n . La suite $(f * g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée dans $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (et aussi dans $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$). On montre maintenant que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans $L_{\mathbb{C}}^1$.

Soit $\alpha > 0$ t.q. $\sin(at)/(at) \geq 1/2$ pour tout $t \in [0, \alpha]$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sqrt{\frac{\pi}{8}} \int_{\mathbb{R}} |h_n(t)| dt \geq \frac{a}{2} \int_0^\alpha \left| \frac{\sin(nt)}{t} \right| dt = \frac{a}{2} \int_0^{n\alpha} \left| \frac{\sin(z)}{z} \right| dz,$$

ce qui prouve que $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans $L_{\mathbb{C}}^1$ car la fonction $z \mapsto \sin(z)/z$ n'est pas intégrable sur \mathbb{R} .

Si l'application $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ était surjective de $L^1_{\mathbb{C}}$ dans $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, elle serait alors bijective et continue (car on sait déjà qu'elle est injective et continue). Le théorème de Banach (théorème 0.9) donnerait alors que son inverse est aussi continue, ce qui est faux car la suite $(\widehat{h_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ alors que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée dans $L^1_{\mathbb{C}}$.

C11. Transformation de Fourier, lien entre régularité et décroissance à l'infini

Dans ce cours C11 nous montrons que la régularité de f se transforme par transformation de Fourier en décroissance à l'infini de \widehat{f} et la décroissance à l'infini de f se transforme par transformation de Fourier en régularité de \widehat{f} . Cela donnera la définition de l'espace \mathcal{S} pour lequel l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est bijective.

Proposition 11.1 (Régularité et décroissance à l'infini, $N = 1, k = 1$).

1) Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tel que $f' \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (on rappelle que f' est, comme d'habitude, la dérivée classique de f).

Alors, $\widehat{f'} = (i \cdot) \widehat{f}$ (c'est-à-dire $\widehat{f'}(t) = (it) \widehat{f}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$) et donc $(i \cdot) \widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (en particulier $|t| \widehat{f}(t) \rightarrow 0$ quand $|t| \rightarrow \infty$).

2) Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ t.q. $(\cdot)f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (où $(\cdot)f$ est l'application $x \mapsto xf(x)$).

Alors, $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\widehat{f'} = -(\widehat{i \cdot})f$ (c'est-à-dire $\widehat{f'}(t) = (-it) \widehat{f}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$).

Démonstration de la proposition 11.1.

Preuve de 1).

Comme $f' \in L^1_{\mathbb{C}}$, on a par convergence dominée, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f'}(t) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{-ixt} f'(x) dx = (2\pi)^{-1/2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n e^{-ixt} f'(x) dx.$$

Comme $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, une intégration par parties donne alors

$$\int_{-n}^n e^{-ixt} f'(x) dx = it \int_{-n}^n e^{-ixt} f(x) dx + e^{-int} f(n) - e^{int} f(-n). \quad (11.1)$$

On montre maintenant que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(-n) = 0. \quad (11.2)$$

Comme $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$ et donc, en posant $a = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t) dt$ (qui existe car $f' \in L^1_{\mathbb{C}}$),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a.$$

Si $a \neq 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $x > A$ implique $|f(x)| \geq a/2$ et donc

$$\int |f(x)| dx \geq \int_A^{+\infty} |f(x)| dx \geq \int_A^{+\infty} \frac{a}{2} dx = +\infty,$$

en contradiction avec $f \in L^1_{\mathbb{C}}$. On a donc $a = 0$, ce qui donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$.

Un raisonnement analogue donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(-n) = 0$.

Un autre moyen de montrer (11.2) est de remarquer que $f' \in L^1_{\mathbb{C}}$ donne que f est uniformément continue¹ et que f uniformément continue et intégrable implique $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ (exercice 11.4).

On peut maintenant faire $n \rightarrow +\infty$ dans (11.1), cela donne (avec le théorème de convergence dominée pour le terme intégral)

$$\widehat{f'}(t) = it\widehat{f}(t).$$

Preuve de 2).

C'est une conséquence du théorème de dérivation sous le signe \int rappelé ci après, théorème 11.1. On remarque que $t \mapsto e^{-ixt}f(x)$ est dérivable pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ et que

$$|(-ix)e^{-ixt}f(x)| \leq |x||f(x)| \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } t \in \mathbb{R}.$$

Le théorème 11.1 s'applique avec $G(x) = |x||f(x)|$ (et $A = \emptyset$). Il donne, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f'}(t) = (2\pi)^{-1/2} \int (-ix)e^{-ixt}f(x) dx = \widehat{(-i \cdot)}f(t).$$

On en déduit en particulier que $\widehat{f'} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (et donc $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$). □

On rappelle le théorème de dérivabilité sous le signe \int utilisé dans la preuve de la proposition 11.1.

Théorème 11.1 (Dérivabilité sous le signe \int). Soient (E, \mathcal{T}, m) un espace mesuré et f une application de $E \times \mathbb{R}$ dans K , $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , telle que $f(\cdot, t) \in L^1_K(E, \mathcal{T}, m)$. On définit F de \mathbb{R} dans K par $F(t) = \int f(x, t) dm(x)$.

On suppose qu'il existe $A \in \mathcal{T}$ et $G \in L^1_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{T}, m)$ t.q. $m(A) = 0$ et :

- 1) L'application $t \mapsto f(x, t)$ est dérivable pour tout t et pour tout $x \in A^c$;
- 2) $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq G(x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in A^c$.

Alors F est dérivable et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dm(x).$$

Démonstration du théorème 11.1.

Soient $t \in \mathbb{R}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $t_n \rightarrow t$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ et $t_n \neq t$ pour tout n .

Soit f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}.$$

1. On utilise ici que si $g \in L^1_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{T}, m)$, $\lim_{A \in \mathcal{T}, m(A) \rightarrow 0} \int_A |g| dm = 0$, voir le cours d'intégration.

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans L^1 et on peut lui appliquer le théorème de convergence dominée car $f_n \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)$ p.p., quand $n \rightarrow +\infty$, et, si $x \in A^c$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $\theta_{x,n} \in]0, 1[$ t.q. $f_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, \theta_{x,n}t + (1 - \theta_{x,n})t_n)$ (grâce au théorème des accroissements finis) et donc $|f_n| \leq G$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème de convergence dominée donne alors $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) \in L^1$ et $\int f_n dm \rightarrow \int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) dm$. On en déduit bien que F est dérivable en t et :

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dm(x).$$

□

La transformation de Fourier transforme donc la dérivation en multiplication par la fonction $(i \cdot)$, et la multiplication par $(-i \cdot)$ en dérivation. Cette propriété peut être utilisée, par exemple, pour la résolution d'équations différentielles (qui sont ainsi transformées en équations algébriques).

On généralise la proposition 11.1, toujours avec $N = 1$.

Proposition 11.2 (Régularité et décroissance à l'infini, $N = 1, k \geq 1$).

1) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap C^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tel que $f', \dots, f^{(k)} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

$$\text{Alors, } \widehat{f^{(k)}} = (i \cdot)^k \widehat{f}.$$

2) Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ t.q. $(\cdot)^k f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

$$\text{Alors, } \widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ et } \widehat{f^{(k)}} = -(\cdot)^k \widehat{f}.$$

Démonstration de la proposition 11.2.

Il suffit de faire une récurrence sur k . Par souci de lisibilité on fait seulement le passage $k = 1$ (proposition 11.1) à $k = 2$.

Preuve de 1).

On suppose que $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tel que $f', f'' \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. La proposition 11.1 appliquée à f donne $\widehat{f'} = (i \cdot) \widehat{f}$ et la proposition 11.1 appliquée à f' donne $\widehat{f''} = (i \cdot) \widehat{f'}$.

On a donc bien $\widehat{f''} = (i \cdot)^2 \widehat{f} = -(\cdot)^2 \widehat{f}$.

Preuve de 2).

On suppose que $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ et $(\cdot)^2 f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

On en déduit $(\cdot) f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (car $|x| \leq 1 + x^2$) et donc la proposition 11.1 donne $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\widehat{f'} = (-i \cdot) \widehat{f}$.

On applique maintenant la proposition 11.1 (deuxième item) à la fonction $(\cdot) f$.

Elle donne $\widehat{(\cdot) f} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\widehat{(\cdot) f'} = (-i \cdot) \widehat{(\cdot) f}$. En multipliant cette égalité, on obtient (la transformation de Fourier est un opérateur linéaire)

$$\widehat{(\cdot) f'} = (-i \cdot) \widehat{(\cdot) f} = (-i \cdot)^2 \widehat{f},$$

et donc $\widehat{f''} = (-i \cdot)^2 \widehat{f}$ et $\widehat{f} \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. □

La proposition 11.2 se généralise au cas de la dimension N quelconque. On introduit pour ce faire les notations suivantes : soient $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^t \in \mathbb{N}^N$ un multi-indice et f une fonction de \mathbb{R}^N dans \mathbb{C} . On

définit $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$ et

$$D^\alpha f = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} \right) f$$

lorsque cette dérivée existe.

Proposition 11.3 (Régularité et décroissance à l'infini, $N \geq 1$).

- 1) Soit $N \geq 1$ et $k \geq 1$. Soit $f \in C^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ t.q. $D^\alpha f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ t.q. $|\alpha| \leq k$. Alors, $\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \widehat{f}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ t.q. $|\alpha| \leq k$, avec $(it)^\alpha = (it_1)^{\alpha_1} (it_2)^{\alpha_2} \dots (it_N)^{\alpha_N}$.
- 2) Soit f t.q. $(\cdot)^\alpha f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$. Alors, $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ et $D^\alpha \widehat{f} = \widehat{(-i \cdot)^\alpha f}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$.

La proposition 11.3 (non démontrée dans ce cours pour $N > 1$) montre que la dérivabilité de f entraîne la décroissance de \widehat{f} à l'infini (plus f est dérivable, plus \widehat{f} décroît vite à l'infini), et la décroissance de f à l'infini entraîne la dérivabilité de \widehat{f} . Cette remarque incite à définir l'espace des fonctions à décroissance rapide (souvent appelé espace de Schwartz),

Définition 11.1 (Espace de Schwartz). Soit $N \geq 1$, on appelle espace de Schwartz, noté \mathcal{S}_N , l'espace des fonctions dites à décroissance rapide, défini par :

$$\mathcal{S}_N = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \text{ t.q. pour tout } \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{N}^N, \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |(x)^\alpha D^\beta f(x)| < +\infty\}.$$

On va montrer l'invariance par transformation de Fourier de cet espace.

Proposition 11.4 (Transformée de Fourier dans \mathcal{S}).

Soient $N \geq 1$ et \mathcal{S}_N l'espace défini par la définition 11.1.

Alors,

- 1) $\mathcal{S}_N \subset L^1_{\mathbb{C}}$ et, si $f \in \mathcal{S}_N$, pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^N$, la fonction $x \mapsto (x)^\alpha D^\beta ((x)^\gamma f(x))$ appartient à \mathcal{S}_N et donc à $L^1_{\mathbb{C}}$.
- 2) Soit $f \in \mathcal{S}_N$. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$ on a

$$\widehat{D^\alpha ((-i \cdot)^\beta f)} = (i \cdot)^\alpha \widehat{(-i \cdot)^\beta f} = (i \cdot)^\alpha D^\beta \widehat{f}, \quad (11.3)$$

$$\widehat{(-i \cdot)^\alpha D^\beta f} = D^\alpha \widehat{D^\beta f} = D^\alpha ((i \cdot)^\beta \widehat{f}). \quad (11.4)$$

- 3) L'application $f \mapsto \widehat{f}$ est bijective de \mathcal{S}_N dans \mathcal{S}_N , c'est-à-dire injective et surjective. Plus précisément, pour tout $f \in \mathcal{S}_N$, $f = \widehat{\widehat{f}(-\cdot)}$.

Démonstration de la proposition 11.4.

Par souci de lisibilité, on donne cette preuve seulement pour $N = 1$.

Preuve de 1). On commence par remarquer que $\mathcal{S}_1 \subset L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. En effet, soit $f \in \mathcal{S}_N$. En prenant $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ et $(\alpha, \beta) = (2, 0)$ dans la définition de \mathcal{S}_1 , il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leq C_1 \text{ et } x^2 |f(x)| \leq C_2,$$

et donc $|f(x)| \leq \frac{C_1 + C_2}{1+x^2}$.

Comme $\int \frac{1}{1+x^2} dx < +\infty$, on en déduit que $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

Le fait que la fonction $x \mapsto (x)^\alpha D^\beta((x)^\gamma f(x))$ appartienne à S_1 (e donc à $L^1_{\mathbb{C}}$), découle du fait que la dérivée d'une telle fonction est une somme finie de puissance de x multipliée par une dérivée de f et que chaque terme de cette somme est dans S_1 .

Preuve de 2).

Pour montrer 2), Il suffit d'appliquer la proposition 11.2 aux fonctions $((-i \cdot)^\beta f)$ et $D^\beta f$.

Preuve de 3).

Soit $f \in S_1$. L'égalité (11.3) montre que, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $x^\alpha D^\beta(f) \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ car la transformation de Fourier envoie $L^1_{\mathbb{C}}$ dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (et même dans $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$). Ceci prouve que $\widehat{f} \in S_1$.

Donc, $f \mapsto \widehat{f}$ envoie S_1 dans S_1 .

Le théorème d'inversion (théorème 10.2) donne alors que $f \mapsto \widehat{f}$ est injective de S_1 dans S_1 . En effet, si $f, g \in S_1$ sont telles que $\widehat{f} = \widehat{g}$, le théorème 10.2 donne $f = g$ p.p. et donc $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car f et g sont continues).

Le théorème d'inversion (théorème 10.2) donne aussi que $f \mapsto \widehat{f}$ est surjective de S_1 dans S_1 car il donne que, pour tout $f \in S_1$, comme $\widehat{f} \in S_1 \subset L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$,

$$f = \widehat{\widehat{f}(-\cdot)} \text{ pour tout } f \in S_1.$$

Si $f \in S_1$, on a donc $f = \widehat{g}$ avec $g = \widehat{f}(-\cdot) \in S_1$, ce qui prouve que $f \mapsto \widehat{f}$ est surjective (et donc bijective) de S_1 dans S_1 . \square

td11. Transformée de Fourier dans \mathcal{S} , régularité et comportement à l'infini

Exercice 11.1 (Fourier, série et transformée).

On rappelle que l'espace \mathcal{S} est défini par

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ telle que pour tout } \alpha \in \mathbb{N} \text{ et tout } n \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^\alpha |\varphi^{(n)}(x)| < +\infty\}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ (On rappelle que $\widehat{\varphi}$ est alors aussi dans l'espace \mathcal{S} et que $\widehat{\widehat{\varphi}} = \varphi(-\cdot)$).

1) Soit $t \in \mathbb{R}$.

Montrer que la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(t + 2k\pi)$ est absolument convergente (dans \mathbb{C}).

Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit $f(t)$ par $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(t + 2k\pi)$.

2) Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que f est 2π -périodique.

On rappelle que ceci donne que f est somme de sa série de Fourier, c'est-à-dire que pour tout t dans \mathbb{R} on a

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int},$$

avec $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$.

3) Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\varphi}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi(-n).$$

En déduire que pour tout t dans \mathbb{R}

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(t + 2k\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(-n) e^{int}.$$

Exercice 11.2 (Comportement à l'infini de f et régularité en 0 de \widehat{f}).

On note \mathcal{L}^1 l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , intégrables pour la mesure de Lebesgue sur les boréliens de \mathbb{R} .

Pour $f \in \mathcal{L}^1$, on note \widehat{f} la transformée de Fourier de f .

Pour $a > 0$, on note $A_a = \{x \in \mathbb{R}; |x| \geq a\}$.

1) Soit $f \in \mathcal{L}^1$, $f \geq 0$ p.p.. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $\psi(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (\widehat{f}(t) + \widehat{f}(-t))$.

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\psi(t) \in \mathbb{R}$ et $0 \leq \psi(0) - \psi(t) = \int f(x)(1 - \cos(xt)) dx$.

(b) Soit $a > 0$. Montrer que

$$\int_0^{2/a} \left(\int f(x)(1 - \cos(xt)) dx \right) dt = \int f(x) \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{x} \sin\left(2\frac{x}{a}\right) \right) dx.$$

(c) Soit $a > 0$. Montrer que $\int_{A_a} f(x) dx \leq \int f(x) \left(2 - \frac{a}{x} \sin\left(2\frac{x}{a}\right)\right) dx$. [On pourra dans l'intégrale de droite utiliser $\mathbb{R} = A_a \cup A_a^c$.]

En déduire (avec les deux questions précédentes) que

$$\int_{A_a} f(x) dx \leq a \int_0^{2/a} (\psi(0) - \psi(t)) dt.$$

(d) On suppose que \widehat{f} est de classe C^2 . Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de f , tel que $\int_{A_a} f(x) dx \leq \frac{C}{a^2}$, pour tout $a > 0$.

2) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , intégrables et positives p.p..

On suppose que \widehat{f}_n converge simplement vers une fonction φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continue en 0.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $\psi_n(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (\widehat{f}_n(t) + \widehat{f}_n(-t))$.

On note $\tilde{\psi}$ la limite simple des fonctions ψ_n .

(a) Montrer que $\tilde{\psi}$ est continue en 0.

(b) Montrer que la suite $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur \mathbb{R} .

(c) Montrer que, pour tout $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2/a} (\psi_n(0) - \psi_n(t)) dt = \int_0^{2/a} (\tilde{\psi}(0) - \tilde{\psi}(t)) dt$.

(d) Montrer que $\int_{A_a} f_n(x) dx \rightarrow 0$, quand $a \rightarrow +\infty$, uniformément par rapport à n .

Exercice 11.3.

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On définit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par : $F(x) = \int f 1_{[0,x]} d\lambda (= \int_0^x f(t) dt)$, pour $x \geq 0$, et $F(x) = - \int f 1_{[x,0]} d\lambda (= - \int_x^0 f(t) dt)$ pour $x < 0$. Montrer que F est uniformément continue.

Corrigé – On remarque que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$,

$$F(y) - F(x) = \int f 1_{]x,y[} d\lambda = \int_{]x,y[} f d\lambda.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, un résultat classique d'intégration donne qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| d\lambda \leq \varepsilon.$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. On a donc, comme $\lambda(]x, y[) = y - x$,

$$|y - x| \leq \delta \Rightarrow |F(y) - F(x)| \leq \int_{]x,y[} |f| d\lambda \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien la continuité uniforme de F .

Exercice 11.4 (Intégrabilité et limite à l'infini). Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) = \mathcal{L}^1$.

1) On suppose que $f(x)$ admet une limite quand $x \rightarrow +\infty$. Montrer que cette limite est nulle.

Corrigé – On pose $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et on suppose $l \neq 0$. Il existe alors $a \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \geq \frac{|l|}{2}$ pour tout $x > a$. On en déduit, par monotonie de l'intégrale,

$$\int |f| d\lambda \geq \int_{]a, +\infty[} \frac{|l|}{2} d\lambda = +\infty,$$

en contradiction avec l'hypothèse $f \in \mathcal{L}^1$.

2) On suppose que $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; a-t-on : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

Corrigé –

La réponse est non, comme le montre l'exemple suivant. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, f_n par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq n - \frac{1}{n^2}, \\ n^2(x - n + \frac{1}{n^2}) & \text{si } n - \frac{1}{n^2} < x \leq n, \\ -n^2(x - n - \frac{1}{n^2}) & \text{si } n < x \leq n + \frac{1}{n^2}, \\ 0 & \text{si } x > n + \frac{1}{n^2}. \end{cases}$$

Puis, on pose $f(x) = \sum_{n \geq 2} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série définissant $f(x)$ a au plus un terme non nul. Plus précisément, il existe n (dépendant de x) tel que $f = f_n$ dans un voisinage de x . On en déduit que f prend ses valeurs dans \mathbb{R} et que f est continue (car les f_n sont continues). Comme f_n est borélienne positive pour tout n , le théorème de convergence monotone donne que f est borélienne positive et

$$\int f dm = \sum_{n \geq 2} \int f_n dm = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

On a donc $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f(x) \not\rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ car $f_n(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

3) On suppose que f est uniformément continue. A-t-on $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

[On pourra commencer par montrer que, pour tout $\eta > 0$ et toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_n - \eta}^{x_n + \eta} |f(x)| d\lambda(x) = 0.]$$

Corrigé – On commence par montrer le résultat préliminaire suggéré.

Soient $\eta > 0$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

On pose $f_n = |f|1_{]x_n - \eta, x_n + \eta[}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ (on a même $f_n(x) = 0$ pour n tel que $x_n - \eta > x$). On a aussi $|f_n| \leq |f| \in \mathcal{L}^1$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée. Il donne que $\int f_n dm \rightarrow 0$, c'est-à-dire :

$$\int |f|1_{]x_n - \eta, x_n + \eta[} d\lambda \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (11.5)$$

On montre maintenant que $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

On raisonne par l'absurde. On suppose que $f(x) \not\rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que $x_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ et $|f(x_n)| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La continuité uniforme de f donne l'existence de $\eta > 0$ tel que

$$x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc $|f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \in]x_n - \eta, x_n + \eta[$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\int |f|1_{]x_n - \eta, x_n + \eta[} d\lambda \geq \varepsilon \eta > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est en contradiction avec (11.5).

On a donc bien finalement montré que $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

4) On suppose que $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f' \in L^1$; a-t-on : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

Corrigé – Comme $f \in C^1$, on a, pour $y > x$, $f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt = \int_{]x, y[} f' d\lambda$. Comme $f' \in \mathcal{L}^1$, l'exercice 11.3 donne que f est uniformément continue. La question précédente donne alors que $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ (c'est seulement pour ce dernier point qu'on utilise $f \in \mathcal{L}^1$).

Une autre démonstration possible est : Comme $f \in C^1$, on a $f(x) = f(0) + \int_{]0, x[} f' d\lambda$. Comme $f' \in \mathcal{L}^1$, on en déduit que $f(x)$ a une limite (dans \mathbb{R}) quand $x \rightarrow +\infty$. En effet, le théorème de convergence dominée donne que $\int_{]0, x[} f' d\lambda \rightarrow \int_{]0, +\infty[} f' d\lambda$ (dans \mathbb{R}) quand $x \rightarrow +\infty$. Enfin, la première question donne que la limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$ est nécessairement 0 (et ici aussi, c'est seulement pour ce dernier point qu'on utilise $f \in \mathcal{L}^1$).

C12. Transformation de Fourier dans L^2

On aimerait ici définir la transformée de Fourier d'un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N) = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. On rappelle que l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert complexe et que le produit scalaire sur $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ est défini par (en notant $dt = d\lambda_N(t)$) :

$$(f | g)_2 = (f | g)_{L^2_{\mathbb{C}}} = \int f(t)\overline{g(t)}dt.$$

On notera en particulier que $(f | g)_2 = \overline{(g | f)_2}$.

La norme induite par ce produit scalaire est donnée par

$$\|f\|_2^2 = (f | f)_2 = \int f(t)\overline{f(t)}dt = \int |f(t)|^2 dt.$$

Il est clair que la définition de \widehat{f} donnée pour $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ ne s'applique pas pour un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Pour définir la transformée de Fourier d'un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on va utiliser la densité de \mathcal{S}_N dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (Noter que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \subset \mathcal{S}_N \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, proposition 12.2). On va d'abord remarquer que la transformée de Fourier envoie \mathcal{S}_N dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et que c'est une isométrie pour la norme de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On utilisera ensuite la densité de \mathcal{S}_N dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ pour définir la transformée de Fourier des éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

Proposition 12.1. Soit $N \geq 1$ et $f, g \in \mathcal{S}_N$ (définition 11.1).

Alors f, \widehat{f}, g et \widehat{g} sont des éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et

$$(f | g)_2 = (\widehat{f} | \widehat{g})_2.$$

En particulier, $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.

Démonstration de la proposition 12.1.

On montre tout d'abord que $\mathcal{S}_N \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

Soit $f \in \mathcal{S}_N$. En prenant des choix convenables de α et β dans la définition 11.1, on peut montrer qu'il existe $A, B > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq A, \\ |x|^N |f(x)| &\leq B, \end{aligned}$$

et donc $(1 + |x|^{2N})|f(x)|^2 \leq A^2 + B^2$.

(On rappelle que $|x|$ désigne la norme euclidienne de x .)

On obtient alors, avec un nombre C_N ne dépendant que de N et un passage en coordonnées polaires,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 dx \leq (A^2 + B^2) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{1 + |x|^{2N}} dx = (A^2 + B^2) C_N \int_0^\infty \frac{r^{N-1}}{1 + r^{2N}} dr,$$

et donc $\int |f(x)|^2 dx < +\infty$ car $2N - N + 1 = N + 1 > 1$. Ceci montre que $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

Soit $f, g \in \mathcal{S}_N$. On a alors aussi $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathcal{S}_N$. Comme $\mathcal{S}_N \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on a donc $f, g, \widehat{f}, \widehat{g} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

On va montrer maintenant que $(f | g)_2 = (\widehat{f} | \widehat{g})_2$.

Comme $f, \widehat{f} \in \mathcal{S}_N \subset L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on peut appliquer le théorème d'inversion (théorème 10.2) pour transformer le produit scalaire de f avec g .

Le théorème d'inversion donne $f = \widehat{\widehat{f}}(-\cdot)$ et donc :

$$(f | g)_2 = \int \widehat{\widehat{f}}(-t) \overline{g(t)} dt = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int e^{ix \cdot t} \widehat{f}(x) dx \right) \overline{g(t)} dt.$$

On utilise maintenant le théorème de Fubini. Il s'applique car $\widehat{f}, \overline{g} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On obtient :

$$\begin{aligned} (f | g)_2 &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int e^{ix \cdot t} \overline{g(t)} dt \right) \widehat{f}(x) dx = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int e^{-ix \cdot t} g(t) dt \right) \widehat{f}(x) dx \\ &= \int \overline{\widehat{g}}(x) \widehat{f}(x) dx = (\widehat{f} | \widehat{g})_2, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

La proposition 12.1 permet de définir, par un argument de densité, la transformée de Fourier dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Pour montrer la densité de \mathcal{S}_N dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on utilise la proposition 12.2 (voir le cours d'intégration).

Proposition 12.2 (Densité de C_c^∞ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, $p < +\infty$).

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, et $1 \leq p < +\infty$.

Pour tout $1 \leq r$, on note $L^r_{\mathbb{C}}(\Omega)$ l'espace $L^r_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N)$.

1) L'espace $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ est dense dans $L^p_{\mathbb{C}}(\Omega)$.

2) Soient $1 \leq q < +\infty$ et $f \in L^p_{\mathbb{C}}(\Omega) \cap L^q_{\mathbb{C}}(\Omega)$.

Il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ telle que

(a) $f_n \rightarrow f$ dans $L^p_{\mathbb{C}}(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$,

(b) $f_n \rightarrow f$ dans $L^q_{\mathbb{C}}(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

(Autrement dit, la même suite converge vers f dans $L^p_{\mathbb{C}}(\Omega)$ et dans $L^q_{\mathbb{C}}(\Omega)$).

Démonstration de la proposition 12.2.

La démonstration de cette proposition se fait avec une technique de "troncature" et "régularisation". Elle n'est pas détaillée dans ce cours (voir le cours d'intégration).

Pour le deuxième item (qui sera important dans la preuve du théorème 12.1), il suffit de remarquer que la construction de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ t.q. $f_n \rightarrow f$ dans $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ est complètement indépendante de p . □

Théorème 12.1 (Transformée de Fourier dans L^2 , Plancherel). Soit $N \geq 1$.
Il existe une application linéaire continue \mathcal{F} de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ t.q. :

- 1) Si $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on a alors $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ p.p..
- 2) Pour tout $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on a $(f | g)_2 = (\mathcal{F}(f) | \mathcal{F}(g))_2$.
- 3) Pour tout $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on a $f = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(-\cdot)$.
- 4) \mathcal{F} est une bijection entre $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (c'est-à-dire \mathcal{F} injective et $\text{Im}(\mathcal{F}) = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) et une isométrie entre $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

Pour $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}(f)$ s'appelle la transformée de Fourier de f . Compte tenu du premier item, on notera, en général (en l'absence de confusion possible), \widehat{f} la transformée de Fourier de f si $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (et alors $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$) ou si $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (et alors $\widehat{f} = \mathcal{F}(f) \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$).

Démonstration du théorème 12.1.

L'application $f \mapsto \widehat{f}$ est définie sur \mathcal{S}_N , qui est un sous espace de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, et prend ses valeurs dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (car $\mathcal{S}_N \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, en confondant, comme d'habitude, un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ avec l'un de ses représentants). Comme cette application est linéaire, continue pour la norme de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, et que \mathcal{S}_N est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (car $\mathcal{S}_N \supset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ et $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, proposition 12.2), on en déduit que cette application se prolonge (de manière unique) en une application, notée \mathcal{F} , linéaire continue de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

Plus précisément, soit $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \rightarrow f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ quand $n \rightarrow +\infty$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. La proposition 12.1 donne alors que la suite $(\widehat{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc aussi de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Elle converge donc dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On aimerait définir $\mathcal{F}(f)$ comme étant la limite (dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) de la suite $(\widehat{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Ceci est possible à condition que cette limite ne dépende que de f et pas du choix de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ vers f . Or, ce dernier point est facile car si $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre suite convergeant dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ vers f , on a

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{g_n}\|_2 = \|\widehat{f_n - g_n}\|_2 = \|f_n - g_n\|_2 \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

On peut donc définir \mathcal{F} de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans lui même. Pour $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}(f)$ est la limite dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ de la suite $(\widehat{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$ pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{S}_N convergeant dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ vers f .

La linéarité de \mathcal{F} découle immédiatement du fait que l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est linéaire de \mathcal{S}_N dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Enfin, soit $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \rightarrow f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. La proposition 12.1 donne que $\|\widehat{f_n}\|_2 = \|f_n\|_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on en déduit $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$. On a bien ainsi montré la continuité de \mathcal{F} de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On montre maintenant les 4 items du théorème.

- 1) Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On veut montrer que $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ p.p..

Dans la démonstration du théorème de densité de $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N)$ avec Ω ouvert de \mathbb{R}^N (donc, par exemple, $\Omega = \mathbb{R}^N$) et $1 \leq p < +\infty$ on construit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ t.q. $f_n \rightarrow f$ dans $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, mais cette suite est indépendante de p (ceci est le deuxième item de la proposition 12.2).

On choisit donc ici une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ t.q. $f_n \rightarrow f$ dans $L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$ et $L_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On en déduit que $\widehat{f}_n \rightarrow \widehat{f}$ uniformément sur \mathbb{R}^N lorsque $n \rightarrow +\infty$ (car $f_n \rightarrow f$ dans $L_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R}^N)$) et que $\widehat{f}_n \rightarrow \mathcal{F}(f)$ dans $L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ (car $f_n \rightarrow f$ dans $L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$) et donc que, après extraction éventuelle d'une sous-suite, on peut supposer que $\widehat{f}_n \rightarrow \mathcal{F}(f)$ p.p. quand $n \rightarrow +\infty$ ¹. On en déduit bien que $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$ p.p..

2) Soit $f, g \in L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$. Il existe deux suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \rightarrow f, g_n \rightarrow g$ dans $L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$ quand $n \rightarrow +\infty$. La proposition 12.1 donne $(\widehat{f}_n | \widehat{g}_n)_2 = (f_n | g_n)_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ on obtient bien $(\mathcal{F}(f) | \mathcal{F}(g))_2 = (f | g)_2$.

L'application \mathcal{F} est donc une isométrie.

3) Soit $f \in L^2$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \rightarrow f$ dans $L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$ quand $n \rightarrow +\infty$. On a donc $\widehat{f}_n \rightarrow \mathcal{F}(f)$ dans $L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$, ce qui donne aussi $\widehat{f}_n(-\cdot) \rightarrow \mathcal{F}(f)(-\cdot)$ dans $L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$ et donc $\widehat{\widehat{f}_n(-\cdot)} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(-\cdot)$ dans $L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$ quand $n \rightarrow +\infty$. La proposition 11.4 donne $f_n = \widehat{\widehat{f}_n(-\cdot)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit donc (par unicité de la limite dans L^2) que $f = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(-\cdot)$ p.p..

4) L'injectivité de \mathcal{F} (de $L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$) découle du fait que $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$ et que \mathcal{F} est linéaire. La surjectivité est une conséquence du troisième item. En effet, soit $g \in L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$. Le troisième item donne $g = \mathcal{F}(\mathcal{F}(g))(-\cdot)$ p.p. et donc $g = \mathcal{F}(f)$ p.p. avec $f = \mathcal{F}(g(-\cdot))$. Comme $f \in L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$, on a bien montré que \mathcal{F} est surjective (de $L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$).

□

Remarque 12.1.

Voici trois remarques à propos de la transformée de Fourier dans $L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$.

1) Pour définir la transformée de Fourier dans $L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$, on aurait pu utiliser la densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ dans $L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$ et ne pas introduire l'espace \mathcal{S}_N (voir l'exercice 12.1 pour le cas $N = 1$).

2) Si $f \in L_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\widehat{f}(t) = (2\pi)^{-N/2} \int e^{-ix \cdot t} f(x) dx \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^N. \quad (12.1)$$

Mais, si $f \in L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$ et $f \notin L_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R}^N)$, il est faux d'écrire

“ $\mathcal{F}(f)(t) = (2\pi)^{-N/2} \int e^{-ix \cdot t} f(x) dx$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}^N$ ”,

Car, pour $t \in \mathbb{R}^N$, la fonction $x \mapsto e^{-ix \cdot t} f(x)$ n'a aucune raison d'être intégrable sur \mathbb{R}^N .

Par contre, on peut utiliser la formule (12.1) avec une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $L_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R}^N)$ et convergeant vers f dans $L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$. Par exemple, on peut prendre $f_n = f 1_{B_n}$, où B_n est la boule de \mathbb{R}^N de centre 0 et de rayon n . On a alors $\widehat{f}_n \rightarrow \mathcal{F}(f)$ dans $L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}^N)$, quand $n \rightarrow +\infty$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{f}_n(t) = (2\pi)^{-N/2} \int_{|x| < n} e^{-ix \cdot t} f(x) dx \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^N.$$

3) L'espace $H^1(\mathbb{R})$ vu au cours C8 peut être caractérisé avec la transformation de Fourier. L'exercice 13.1 montre que

$$H^1(\mathbb{R}) = \{u \in L_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{R}), \sqrt{1 + (\cdot)^2} \mathcal{F}(u) \in L_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R})\}$$

1. Soient (X, T, m) est un espace mesuré, $1 \leq p < +\infty$, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L_{\mathbb{Q}}^p(X, T, m)$ et $g \in L_{\mathbb{Q}}^p(X, T, m)$. On suppose que $g_n \rightarrow g$ dans $L_{\mathbb{Q}}^p(X, T, m)$. Alors, il existe une sous suite $(g_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $g_{\varphi(n)} \rightarrow g$ p.p.. (voir cours d'intégration).

et que

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|\sqrt{1 + (\cdot)^2} \mathcal{F}(u)\|_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})}.$$

td12. Transformée de Fourier dans L^2 et exercices de révision

Exercice 12.1 (Transformée de Fourier pour f de classe C^2 , à support compact).

On note $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p$ l'espace $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $f \in C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (c'est-à-dire que f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , de classe C^2 , et qu'il existe K compact de \mathbb{R} t.q. $f = 0$ sur K^c).

1) Montrer que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1 \cap \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2$.

2) Montrer que $\widehat{f} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1 \cap \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2$. [On pourra utiliser le fait que $\widehat{f''} = -(\cdot)^2 \widehat{f}$.]

3) Montrer que $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$.

N.B. Comme $C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, cet exercice permet de définir la transformée de Fourier dans $L^2_{\mathbb{C}}$ sans utiliser l'espace \mathcal{S}_1 .

Exercice 12.2 (Transformée de Fourier du produit de fonctions).

Pour $p \in [1, +\infty]$, On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et on désigne par $\|\cdot\|_p$ la norme dans L^p .

On note $C_c^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe C^{∞} et à support compact de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . Enfin, on note $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

Si $f \in L^1$, on désigne par \widehat{f} la transformée de f (on a donc $\widehat{f} \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$).

Si $f \in L^2$, on désigne par $\mathcal{F}(f)$ la transformée de Fourier de f (on a donc $\mathcal{F}(f) \in L^2$).

On rappelle que si $f \in L^1 \cap L^2$, on a $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$ p.p.. Dans ce cas, on confond, en général, \widehat{f} et $\mathcal{F}(f)$.

1) (Convolution $L^2 - L^2$). Soit $u, v \in L^2$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $s \mapsto u(t-s)v(s)$ est intégrable et donc que la fonction $u * v$ est définie sur tout \mathbb{R} par la formule

$$u * v(t) = \int_{\mathbb{R}} u(t-s)v(s)ds, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $u * v \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que $\|u * v\|_{\infty} \leq \|u\|_2 \|v\|_2$.

2) Soit $f, g \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(a) Montrer que $f, g, fg \in L^1 \cap L^2$, puis que $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1 \cap L^2$.

(b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{fg}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f} * \widehat{g}(t).$$

[On pourra, par exemple, utiliser le fait que $f, \widehat{g} \in L^1$ et calculer $\widehat{f} * \widehat{g}(t)$ en utilisant la définition de \widehat{f} et la transformée de Fourier inverse pour \widehat{g} .]

3) Soit $f, g \in L^2$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{fg}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)(t).$$

Exercice 12.3 (Caractérisation des fonctions à valeurs réelles). Soit $d \geq 1$. Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

1) Soit $f \in L^1$. Montrer que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si $\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

2) Soit $f \in L^2$. On désigne par $\mathcal{F}(f)$ la transformée de Fourier de f (on a donc $\mathcal{F}(f) \in L^2$). Montrer que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si $\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Exercice 12.4 (Théorème d'injection de Sobolev).

Soit $d \geq 1$. Pour $p \in [1, \infty]$, on note L^p l'espace l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Si $f \in L^2$, on note $\mathcal{F}(f)$ la transformée de Fourier de f .

Pour $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$, on note $H^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2 \text{ t.q. } (1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}(f) \in L^2\}$ et $\|f\|_{H^s} = \|(1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}(f)\|_{L^2}$.

On rappelle que $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ est un sous espace vectoriel fermé de $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ muni de la norme $\|f\|_u = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$. Avec cette norme, $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ sont des espaces de Banach.

Soit $s > \frac{d}{2}$.

1) Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\mathcal{F}(f) \in L^1$. En déduire que $f \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ (au sens "il existe $g \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ telle que $f = g$ p.p."; on confond alors f et g).

2) Montrer que $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et qu'il existe C_s , ne dépendant que de s et d , t.q. :

$$\|f\|_u \leq C_s \|f\|_{H^s} \text{ pour tout } f \in H^s(\mathbb{R}^d).$$

3) On s'intéresse maintenant au cas $d = 2$.

(a) Soit $s > 1$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^2)$. Montrer que

$$\|f\|_u \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi(s-1)}} \|f\|_{H^s}.$$

(b) Soit $1 < s < 2$ et $f \in H^2(\mathbb{R}^2)$. Montrer que

$$\|f\|_{H^s} \leq \|f\|_{H^1}^{2-s} \|f\|_{H^2}^{s-1}.$$

[Utiliser l'inégalité de Hölder.]

(c) On pose $C = \sqrt{\frac{e}{2\pi}}$. Montrer que

$$f \in H^2(\mathbb{R}^2), \|f\|_{H^1} = 1 \Rightarrow \|f\|_u \leq C \sqrt{\ln(1 + \|f\|_{H^2})}.$$

[Pour $a > 1$, on pourra chercher le minimum pour $s \in]1, 2[$ de la fonction $s \mapsto \frac{a^{s-1}}{\sqrt{s-1}}$, et distinguer selon les valeurs de a .]

Soit $\beta > 0$, montrer qu'il existe C_β , ne dépendant que de β , t.q. :

$$f \in H^2(\mathbb{R}^2), \|f\|_{H^1} \leq \beta \Rightarrow \|f\|_u \leq C_\beta \sqrt{\ln(1 + \|f\|_{H^2})}.$$

Exercice 12.5 ($f \in C_c^\infty$ et $\widehat{f} = 0$ sur un ouvert non vide implique $f = 0$).

Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et U un ouvert non vide de \mathbb{R} . On suppose que $\widehat{f} = 0$ sur U . Montrer que $f = 0$ sur tout \mathbb{R} . [On pourra commencer par montrer que l'application $z = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \mapsto \int f(x) e^{-ix(\xi+i\eta)dx}$ est bien définie et dérivable sur \mathbb{C} .]

Exercice 12.6 (Caractérisation de m par \widehat{m}). Soit $d \geq 1$.

- 1) Soit m et μ deux mesures signées sur les boréliens de \mathbb{R}^d . On suppose que $\widehat{m} = \widehat{\mu}$.
- (a) Soit $\varphi \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Montrer que $\int \widehat{\varphi} dm = \int \widehat{\varphi} d\mu$.
 - (b) Montrer que $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ (et donc pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$).
 - (c) Montrer que $m = \mu$ (On rappelle qu'une fonction de $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions de $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$).
- 2) Soit m une mesure signée sur les boréliens de \mathbb{R}^d . On suppose que $\widehat{m} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Montrer que m est la mesure de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue avec $f = \widehat{\widehat{m}}(-\cdot)$.

C13. Quelques notions vues dans ce cours

Les espaces de base pour l'analyse fonctionnelle sont les espaces de Banach, c'est-à-dire les espaces vectoriels normés (réels ou complexes) complets. Les exemples fondamentaux sont donnés par les espaces $L_K^p(X, \mathcal{T}, m)$ où (X, \mathcal{T}, m) est un espace mesuré, $1 \leq p \leq +\infty$ et $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . L'intérêt principal de l'intégrale de Lebesgue est d'avoir permis la construction de ces espaces complets (La preuve de la complétude de ces espaces est d'ailleurs postérieure aux travaux de Lebesgue).

Les théorèmes généraux les plus importants vus dans la première partie de ce cours (cours C0) me semblent être :

- 1) Les théorèmes de Hahn-Banach, version analytique (théorème 0.5) et géométrique (théorème 0.6).
- 2) Le théorème de Banach (théorème 0.9).
- 3) Le théorème d'Ascoli ((théorème 0.2). Ce dernier théorème étant à la base de nombreux théorèmes de compacité (comme le théorème de Kolmogorov qui caractérise les parties relativement compactes de $L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, voir le cours d'intégration).

On est souvent intéressé par le dual (topologique) de l'espace de Banach considéré. Si E est l'espace de Banach, son dual (topologique) est noté E' (notation française). L'espace E' est muni d'une norme naturelle (définition 0.6) avec laquelle E' est un espace de Banach (théorème 0.3).

Le cas particulier des espaces de Hilbert est très important. L'espace de Banach E est un espace de Hilbert (et on le note en général H dans ce cours) si la norme est induite par un produit scalaire, définition 0.8.

Si H est un espace de Hilbert, il y a une identification naturelle entre H et H' . Pour tout $f \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$\langle f, v \rangle_{H', H} = (v | u)_H \text{ pour tout } v \in H.$$

Ceci est le théorème 0.14. L'application $f \mapsto u$ est alors une isométrie entre H' et H .

Un intérêt majeur de la structure hilbertienne est qu'elle donne la notion d'orthogonalité. Si F est un s.e.v. fermé de l'espace de Hilbert H , on a alors

$$H = F \oplus F^\perp.$$

(C'est d'ailleurs cette propriété qui permet de montrer le théorème 0.14).

Un autre conséquence importante de cette notion d'orthogonalité est que tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne (définition 0.11). En dimension infinie, les bases hilbertiennes sont beaucoup plus intéressantes que les bases algébriques.

Dans le cas des espaces de Banach, il n'a pas cette notion d'orthogonalité et il n'y a pas en particulier cet isomorphisme naturel entre H et H' donné par le théorème 0.14. Par contre, il y a toujours une injection de l'espace de Banach E dans E'' , que nous avons appelé "injection canonique" (définition 1.2). Lorsque cette injection canonique est surjective, l'espace de Banach E est dit réflexif (définition 1.2). Certaines propriétés des espaces de Hilbert sont encore vraies dans les espaces de Banach réflexifs (comme par exemple le corollaire 4.2).

Soient (X, \mathcal{T}, m) un espace mesuré et $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . L'espace $L_K^2(X, \mathcal{T}, m)$ est un espace de Hilbert. Pour $1 < p < +\infty$, l'espace $L_K^p(X, \mathcal{T}, m)$ est un espace de Banach réflexif et il y a une isométrie naturelle entre son dual (topologique) $(L_K^p(X, \mathcal{T}, m))'$ et $L_K^q(X, \mathcal{T}, m)$, $q = p/(p-1)$. Les espaces $L_K^1(X, \mathcal{T}, m)$ et $L_K^\infty(X, \mathcal{T}, m)$ sont des espaces de Banach en général non réflexifs. Enfin, si (X, \mathcal{T}, m) un espace mesuré σ -fini, il y a une isométrie naturelle entre $(L_K^1(X, \mathcal{T}, m))'$ et $L_K^\infty(X, \mathcal{T}, m)$.

On rappelle que dans un e.v.n. de dimension finie E (qui est donc un espace de Banach de dimension finie), on a la propriété suivante (théorème 0.1) :

$$\text{De toute suite bornée de } E \text{ on peut extraire une sous suite convergente.} \quad (13.1)$$

Cette propriété est fautive si E est de dimension infinie. Pour avoir cette propriété en dimension infinie, on affaiblit la notion de convergence. On introduit les notions de convergence faible (définition 1.1) et faible- \star (définition 1.3).

Le théorème fondamental est alors le théorème 4.1. Il donne la propriété (13.1), à condition que l'espace de Banach E soit séparable, en remplaçant E par E' et "convergente" par " \star -faiblement convergente"

Le corollaire principal du théorème 4.1 (corollaire 4.2) est que dans un espace de Banach réflexif, noté E , la propriété (13.1) est vraie en remplaçant "convergente" par "faiblement convergente".

En particulier, le corollaire 4.2 s'applique dans l'espace $L_K^p(X, \mathcal{T}, m)$ si $1 < p < +\infty$. Il ne s'applique pas (en général) pour $p = 1$ et $p = \infty$.

Par contre, si $(X, \mathcal{T}, m) = (\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N)$, avec Ω ouvert de \mathbb{R}^N , l'espace $L_{\mathcal{K}}^1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N)$ est séparable (proposition 3.1) et il y a l'isométrie naturelle entre $(L_{\mathcal{K}}^1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N))'$ et $L_{\mathcal{K}}^\infty(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N)$. On peut donc appliquer le théorème 4.1 à $L_{\mathcal{K}}^\infty(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N)$ (que l'on confond avec $(L_{\mathcal{K}}^1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N))'$). La propriété (13.1) est alors vraie avec $E = L_{\mathcal{K}}^\infty(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N)$ en remplaçant "convergente" par " \star -faiblement convergente".

On s'intéresse ensuite aux opérateurs linéaires compacts (et donc, en particulier, continus) de E dans E lorsque E est un espace de Banach réel (définition 5.4). (Un tel opérateur transforme par exemple les suites faiblement convergentes et suites convergentes, proposition 5.2.) On se limite au cas où E est un espace de Hilbert et aux opérateurs autoadjoints (définition 5.3). Un intérêt majeur d'un tel opérateur (compact autoadjoint) est que si $\lambda \neq 0$, λ est valeur propre de l'opérateur si et seulement si λ est valeur spectrale, théorème 6.1.

On en déduit dans un espace de Hilbert séparable, si T est un opérateur compact autoadjoint, il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T , théorème 7.1.

Après avoir affaibli la notion de convergence (dans un espace de Banach), on affaiblit la notion de dérivée. On introduit la définition de dérivée faible, définition 8.1 (et plus généralement de dérivée par transposition ou dérivée au sens des distributions, remarque 8.4). Ceci permet la définition de nouveaux espaces fonctionnels comme l'espace $H^1(I)$, définition 8.2. Dans ces espaces, on montre l'existence de solutions dites "faibles" à

de nombreux problèmes issus, par exemple, de la mécanique (la difficulté suivante est de montrer la régularité de ces solutions faibles).

Une conséquence de cette méthode est de construire des opérateurs compacts autoadjoints dans des espaces comme $L^2_{\mathbb{R}}(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$ (où I est un intervalle de \mathbb{R}). On retrouve ainsi, par exemple, la décomposition d'un élément de $L^2_{\mathbb{R}}(]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$ en série de Fourier, théorème 9.2.

Les séries de Fourier sont adaptées à l'étude de fonctions définies sur un intervalle compact de \mathbb{R} (que l'on peut donc étendre éventuellement en des fonctions périodiques sur \mathbb{R}). La transformation de Fourier s'intéresse à des fonctions définies sur \mathbb{R} tout entier (et non périodiques) ou plus généralement sur \mathbb{R}^N , $N \geq 1$.

On définit tout d'abord, avec une formule intégrale, la transformée de Fourier d'une fonction appartenant à $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (définition 10.1) ou, plus généralement d'une mesure signée sur les boréliens de \mathbb{R}^N (définition 10.2 pour une mesure finie, pour le cas d'une mesure signée il suffit d'utiliser le fait qu'une mesure signée est la différence de deux mesures finies). La transformation de Fourier transforme une fonction de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (noté $L^1_{\mathbb{C}}$) ou une mesure signée sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ en une fonction continue bornée (proposition 10.1 pour le cas $L^1_{\mathbb{C}}$). La transformation de Fourier est un outil intéressant pour de nombreuses applications.

Dans la théorie des probabilités, la fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire X est, à un coefficient près et avec un changement de signe, la transformée de Fourier de la loi de X (avec les notations de ce cours), remarque 10.2.

Deux propriétés intéressantes de la transformation de Fourier :

- 1) La transformation de Fourier transforme la convolution de fonctions $L^1_{\mathbb{C}}$ en produit, proposition 10.2.
- 2) La transformation de Fourier transforme une dérivation en produit par un monôme et le produit par un monôme en une dérivation, proposition 11.3.

Enfin l'espace principal pour la transformation de Fourier est l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, noté $L^2_{\mathbb{C}}$. Mais, dans cet espace, la transformée d'une fonction f n'est pas donnée par une formule intégrale. La définition de la transformée de f se fait par un argument de densité.

La transformation de Fourier est une isométrie entre $L^2_{\mathbb{C}}$ et $L^2_{\mathbb{C}}$ (c'est-à-dire une bijection linéaire qui conserve la norme). L'inverse de la transformation de Fourier est, au signe près, la transformation de Fourier elle-même, théorème 12.1.

Evaluation du 15 décembre 2021

L'examen contient 2 exercices. Le premier exercice est sur la transformation de Fourier. Le second est sur les opérateurs compacts. Le barème est sur 24 points. Les documents (polycopié du cours, notes personnelles, photocopies de documents) sont autorisés. Chaque réponse devra être justifiée.

Exercice 13.1 (Caractérisation de $H^1(\mathbb{R})$, espace $H^s(\mathbb{R})$, barème 15 points).

Pour $1 \leq p \leq +\infty$ et pour $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, on note L^p_K l'espace $L^p_K(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

On note \hat{f} la transformée de Fourier de f si $f \in L^1_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{F}(f)$ la transformée de Fourier de f si $f \in L^2_{\mathbb{C}}$.

Si $f \in L^1_{\mathbb{C}} \cap L^2_{\mathbb{C}}$ les deux définitions coïncident au sens $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ p.p..

Rappels :

- $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R})$.
- Si $f_n \rightarrow f$ dans L_K^p ($p = 1$ ou 2), la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite qui converge p.p. vers f .
- (Inégalité de Hölder) Si $f \in L_K^p$, $g \in L_K^q$, $1 \leq p, q \leq +\infty$, $(1/p) + (1/q) = 1$, alors $fg \in L_K^1$ et $\|fg\|_{L_K^1} \leq \|f\|_{L_K^p} \|g\|_{L_K^q}$. (Cas particulier important : $p = q = 2$.)

1) Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$.

Il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(\mathbb{R})$ quand $n \rightarrow +\infty$.

(a) Montrer que $\widehat{u}_n \rightarrow \mathcal{F}(u)$ et $\widehat{u}'_n \rightarrow \mathcal{F}(Du)$ dans $L_{\mathbb{C}}^2$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé – $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(\mathbb{R})$ implique $u_n \rightarrow u$ dans $L_{\mathbb{R}}^2$ et $Du_n \rightarrow Du$ dans $L_{\mathbb{R}}^2$. Comme la transformée est une isométrie entre $L_{\mathbb{C}}^2$ et $L_{\mathbb{C}}^2$, que $Du_n = u'_n$ p.p. (car $u_n \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) et que $u_n, u'_n \in L^1 \cap L^2$, on obtient bien que $\widehat{u}_n \rightarrow \mathcal{F}(u)$ et $\widehat{u}'_n \rightarrow \mathcal{F}(Du)$ dans $L_{\mathbb{C}}^2$ quand $n \rightarrow +\infty$.

(b) Montrer que $(i \cdot) \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(Du)$ p.p..

[Utiliser le deuxième item des rappels]

Corrigé – Comme $u_n \in C_c^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\widehat{u}_n = (i \cdot) \widehat{u}_n$. On a donc $\widehat{u}_n \rightarrow \mathcal{F}(u)$ et $(i \cdot) \widehat{u}_n \rightarrow \mathcal{F}(Du)$ dans $L_{\mathbb{C}}^2$ quand $n \rightarrow +\infty$. On peut donc, après extraction d'une sous suite, supposer que $\widehat{u}_n \rightarrow \mathcal{F}(u)$ et $(i \cdot) \widehat{u}_n \rightarrow \mathcal{F}(Du)$ p.p..

Ceci montre que $(i \cdot) \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(Du)$ p.p..

(c) Montrer que $\sqrt{1 + (\cdot)^2} \mathcal{F}(u) \in L_{\mathbb{C}}^2$ et que $\sqrt{1 + (\cdot)^2} \widehat{u}_n \rightarrow \sqrt{1 + (\cdot)^2} \mathcal{F}(u)$ dans $L_{\mathbb{C}}^2$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé –

Comme $\int_{\mathbb{R}} (1 + t^2) |\mathcal{F}(u)(t)|^2 dt = \|\mathcal{F}(u)\|_{L_{\mathbb{C}}^2}^2 + \|(i \cdot) \mathcal{F}(u)\|_{L_{\mathbb{C}}^2}^2 < +\infty$, on a bien $\sqrt{1 + (\cdot)^2} \mathcal{F}(u) \in L_{\mathbb{C}}^2$.

Puis, on remarque que $|\sqrt{1 + t^2} \widehat{u}_n - \sqrt{1 + t^2} \mathcal{F}(u)|^2 = |\widehat{u}_n - \mathcal{F}(u)|^2 + t^2 |\widehat{u}_n - \mathcal{F}(u)|^2$ et donc

$\|\sqrt{1 + t^2} \widehat{u}_n - \sqrt{1 + t^2} \mathcal{F}(u)\|_{L_{\mathbb{C}}^2}^2 = \|\widehat{u}_n - \mathcal{F}(u)\|_{L_{\mathbb{C}}^2}^2 + \|(i \cdot) \widehat{u}_n - (i \cdot) \mathcal{F}(u)\|_{L_{\mathbb{C}}^2}^2 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

2) Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\sqrt{1 + (\cdot)^2} \mathcal{F}(u) \in L_{\mathbb{C}}^2$.

(a) Montrer que $\mathcal{F}(u) \in L_{\mathbb{C}}^1$.

Corrigé –

$\mathcal{F}(u) = \sqrt{1 + (\cdot)^2} \mathcal{F}(u) \frac{1}{\sqrt{1 + (\cdot)^2}}$. Comme $\frac{1}{\sqrt{1 + (\cdot)^2}} \in L_{\mathbb{R}}^2$ et $\sqrt{1 + (\cdot)^2} \mathcal{F}(u) \in L_{\mathbb{C}}^2$, on a bien $\mathcal{F}(u) \in L_{\mathbb{C}}^1$.

(b) Montrer que $(\cdot) \mathcal{F}(u) \in L_{\mathbb{C}}^2$, $u \in H^1(\mathbb{R})$ et $Du(-\cdot) = \mathcal{F}((i \cdot) \mathcal{F}(u))$.

[Pour $v \in C_c^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, calculer $\int_{\mathbb{R}} u(x) v'(x) dx$ en utilisant $u(-\cdot) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(u)) = \widehat{\mathcal{F}(u)}$ p.p.]

Corrigé – Comme $|(\cdot) \mathcal{F}(u)| \leq |\sqrt{1 + (\cdot)^2} \mathcal{F}(u)|$, on a bien $(\cdot) \mathcal{F}(u) \in L_{\mathbb{C}}^2$.

Soit $v \in C_c^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} u(x) v'(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(u)(t) e^{ixt} dt) v'(x) dx$.

On utilise maintenant Fubini (possible car $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(u)(t)| |v'(x)| dt dx \leq \|\mathcal{F}(u)\|_{L_{\mathbb{C}}^1} \|v'\|_{L_{\mathbb{R}}^\infty} < +\infty$), cela donne, avec une intégration par parties et le fait que \mathcal{F} est une isométrie entre $L_{\mathbb{C}}^2$ et $L_{\mathbb{C}}^2$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u(x) v'(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} v'(x) e^{ixt} dx) \mathcal{F}(u)(t) dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} (it) v(x) e^{ixt} dx) \mathcal{F}(u)(t) dt = -((i \cdot) \mathcal{F}(u) | \widehat{v})_{L_{\mathbb{C}}^2} \\ &= -(\mathcal{F}((i \cdot) \mathcal{F}(u)) | v(-\cdot))_{L_{\mathbb{C}}^2} = -\int \mathcal{F}((i \cdot) \mathcal{F}(u))(x) v(-x) dx. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $Du = \mathcal{F}((i \cdot) \mathcal{F}(u))(-\cdot)$.
On a donc $Du \in L^2_{\mathbb{C}}$ et ceci donne bien $u \in H^1(\mathbb{R})$.

3) Montrer que $H^1(\mathbb{R}) = \{u \in L^2_{\mathbb{R}}, \sqrt{1 + (\cdot)^2} \mathcal{F}(u) \in L^2_{\mathbb{C}}\}$ et que $\|u\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|\sqrt{1 + (\cdot)^2} \mathcal{F}(u)\|_{L^2_{\mathbb{C}}}$.

Corrigé – Les deux questions précédentes donne $H^1(\mathbb{R}) = \{u \in L^2_{\mathbb{R}}, \sqrt{1 + (\cdot)^2} \mathcal{F}(u) \in L^2_{\mathbb{C}}\}$ et

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 &= \|u\|_{L^2_{\mathbb{R}}}^2 + \|Du\|_{L^2_{\mathbb{R}}}^2 = \|\mathcal{F}(u)\|_{L^2_{\mathbb{C}}}^2 + \|\mathcal{F}(Du)\|_{L^2_{\mathbb{C}}}^2 \\ &= \|\mathcal{F}(u)\|_{L^2_{\mathbb{C}}}^2 + \|(i \cdot) \mathcal{F}(u)\|_{L^2_{\mathbb{C}}}^2 = \|\sqrt{1 + (\cdot)^2} \mathcal{F}(u)\|_{L^2_{\mathbb{C}}}^2. \end{aligned}$$

Pour $0 \leq s \leq 1$ on pose $H^s(\mathbb{R}) = \{u \in L^2_{\mathbb{R}}, (1 + (\cdot)^2)^{s/2} \mathcal{F}(u) \in L^2_{\mathbb{C}}\}$ et, pour $u \in H^s(\mathbb{R})$, $\|u\|_{H^s(\mathbb{R})} = \|(1 + (\cdot)^2)^{s/2} \mathcal{F}(u)\|_{L^2_{\mathbb{C}}}$.

4) Soit $0 < s < 1$. Montrer que $H^s(\mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R})}$, est un espace de Hilbert.

Corrigé – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite Cauchy de $H^s(\mathbb{R})$. Il existe $g \in L^2_{\mathbb{C}}$ tel que $(1 + (\cdot)^2)^{s/2} \mathcal{F}(u_n) \rightarrow g$ dans $L^2_{\mathbb{C}}$.

Comme $|\mathcal{F}(u_n - u_m)| \leq (1 + (\cdot)^2)^{s/2} |\mathcal{F}(u_n - u_m)|$, la suite $(\mathcal{F}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}$. Comme Fourier est une isométrie, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{R}}$ et donc dans $L^2_{\mathbb{C}}$. Elle converge donc vers $u \in L^2_{\mathbb{R}}$. la suite $(\mathcal{F}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{F}(u)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}$. En considérant des suites extraites pour avoir la convergence p.p., on a $g = (1 + (\cdot)^2)^{s/2} \mathcal{F}(u)$. Ceci prouve que $u \in H^s(\mathbb{R})$ et $u_n \rightarrow u$ dans $H^s(\mathbb{R})$.

5) Soit $1/2 < s \leq 1$.

(a) Soit $u \in H^s(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{F}(u) \in L^1_{\mathbb{C}}$.

[utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz]

Corrigé –

$$\mathcal{F}(u) = (1 + (\cdot)^2)^{s/2} \mathcal{F}(u) \frac{1}{(1 + (\cdot)^2)^{s/2}} \in L^1_{\mathbb{C}} \text{ car } (1 + (\cdot)^2)^{s/2} \mathcal{F}(u) \in L^2_{\mathbb{C}} \text{ et } \frac{1}{(1 + (\cdot)^2)^{s/2}} \in L^2_{\mathbb{R}} \text{ (car } s > 1/2).$$

(b) Montrer qu'il existe C_s , ne dépendant que de s , tel que, pour tout $u \in H^s(\mathbb{R})$, $\|u\|_{\infty} \leq C_s \|u\|_{H^s}$.
Donner une valeur possible de C_s sous la forme $(\int_{\mathbb{R}} g_s(t) dt)^{1/2}$ ou $g_s \in L^1(\mathbb{R})$.

Corrigé – Comme $u(-\cdot) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(u))$ et $\mathcal{F}(u) \in L^1_{\mathbb{C}}$, on a $u(-\cdot) = \widehat{\widehat{\mathcal{F}(u)}}$ et

$$\|u\|_{L^{\infty}_{\mathbb{R}}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathcal{F}(u)\|_{L^1_{\mathbb{C}}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|(1 + (\cdot)^2)^{s/2} \mathcal{F}(u)\|_{L^2_{\mathbb{C}}} \left\| \frac{1}{1 + (\cdot)^2)^{s/2}} \right\|_{L^2_{\mathbb{C}}} \leq C_s \|u\|_{H^s(\mathbb{R})},$$

$$\text{avec } C_s = (\int_{\mathbb{R}} g_s(t) dt)^{1/2}, g_s(t) = \frac{1}{2\pi(1+t^2)^s}.$$

Exercice 13.2 (Opérateur compact, barème 9 points).

On rappelle que $H^1(]0, 1[) \subset C([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $k \neq 1$, on pose $H = \{u \in H^1(]0, 1[), ku(1) = u(0)\}$.

1) Montrer que H est un s.e.v. fermé de $H^1(]0, 1[)$.

Corrigé – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ t.q. $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(]0, 1[)$. Comme la convergence dans $H^1(]0, 1[)$ implique la convergence uniforme sur $[0, 1]$ (et donc ponctuelle), on obtient $u(0) = ku(1)$ en passant à la limite sur $u_n(0) = ku_n(1)$.

Dans la suite on munit H de la norme de $H^1(]0, 1[)$ de sorte que H est un espace de Hilbert.

2) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $u \in H$, $\|u\|_{L^\infty(]0,1[)} \leq C\|Du\|_{L^2(]0,1[)}$.

[On pourra commencer par montrer qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $u \in H$,

$$|u(0)| \leq C_1\|Du\|_{L^2(]0,1[)}$$

Corrigé – Si $k = 0$, $u(0) = 0$, $C = 0$ convient. Si $k \neq 0$, $|\frac{k-1}{k}| |u(0)| = |u(1) - u(0)| = |\int_0^1 Du(t) dt| \leq \|Du\|_{L^2(]0,1[)}$. On peut donc prendre $C_1 = \frac{k}{|k-1|}$. (valable aussi pour $k = 0$.)

Puis, pour $x \in [0, 1]$, $u(x) = u(0) + \int_0^x Du(t) dt$ et donc

$$|u(x)| \leq |u(0)| + \int_0^1 |Du(t)| dt \leq (\frac{k}{|k-1|} + 1)\|Du\|_{L^2(]0,1[)}$$

On peut prendre $C = \frac{k}{|k-1|} + 1$.

Pour $u, v \in H$ on pose $a(u, v) = \int_0^1 Du(t)Dv(t) dt + \int_0^1 u(t)v(t) dt - (\int_0^1 u(t) dt)(\int_0^1 v(t) dt)$.

3) Montrer que l'application $(u, v) \mapsto a(u, v)$ est un produit scalaire sur H , équivalent au produit scalaire usuel (c'est-à-dire que a est bilinéaire, symétrique et qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha\|u\|_{H^1(]0,1[)}^2 \leq a(u, u) \leq \beta\|u\|_{H^1(]0,1[)}^2$).

Corrigé – La symétrie de a est immédiate. La linéarité de a par rapport à son premier argument vient de la linéarité de l'intégrale et de la linéarité de la dérivation faible.

L'existence de β tel que $a(u, u) \leq \beta\|u\|_{H^1(]0,1[)}^2$ est immédiate, il suffit de prendre $\beta = 1$. Il reste à montrer l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $u \in H$, $a(u, u) \geq \alpha\|u\|_{H^1(]0,1[)}^2$ (ceci donne que a est un produit scalaire et que ce produit scalaire est équivalent au produit scalaire usuel).

Pour cela, on remarque que (par Cauchy-Schwarz) $(\int_0^1 u(t) dt)^2 \leq \int_0^1 u^2(t) dt$ et donc

$$a(u, u) \geq \|Du\|_{L^2(]0,1[)}^2.$$

Puis, la question 2 donne $\|u\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|u\|_{L^\infty(]0,1[)} \leq C\|Du\|_{L^2(]0,1[)}$ et donc

$$\|u\|_{H^1(]0,1[)}^2 = \|Du\|_{L^2(]0,1[)}^2 + \|u\|_{L^2(]0,1[)}^2 \leq (1 + C^2)\|Du\|_{L^2(]0,1[)}^2.$$

Ceci montre que $\alpha = 1/(1+C^2)$ convient.

4) Soit $f \in L^2(]0, 1[)$. Montrer qu'il existe un et un seul u solution de

$$u \in H, \quad a(u, v) = \int_{\mathbb{R}} f(t)v(t) dt \text{ pour tout } v \in H. \quad (13.2)$$

Corrigé – Pour $v \in H$, on pose $S(v) = \int_{\mathbb{R}} f(t)v(t) dt$. $S \in H'$ car

$$|S(v)| \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)} \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq C\|f\|_{L^2(]0,1[)} \|Dv\|_{L^2(]0,1[)} \leq C\|f\|_{L^2(]0,1[)} \sqrt{a(v, v)}.$$

L'existence de l'unicité de u est alors une conséquence du théorème de représentation de Riesz (utilisé ici avec le produit scalaire a).

On note T l'application (de $L^2(]0, 1[)$ dans $L^2(]0, 1[)$) $f \mapsto u$ où u est la solution de (13.2).

5) Montrer que T est un opérateur linéaire autoadjoint compact (de $L^2(]0, 1[)$ dans $L^2(]0, 1[)$).

Corrigé – Pour $f \in L^2(]0, 1[)$, on pose $T_1(f) = u$, où u est la solution de (13.2). L'opérateur T_1 est linéaire continu de $L^2(]0, 1[)$ dans H (plus précisément $\sqrt{a}(u, u) \leq C\|f\|_{L^2(]0, 1[)}$ et donc $\|T_1\|_{\mathcal{L}(L^2, H)} \leq C$ lorsque H est muni de la norme induite par a).

On note I l'application $u \mapsto u$ de H dans $L^2(]0, 1[)$, l'opérateur I est compact (car H est s.e.v. fermé de $H^1(]0, 1[)$).

L'opérateur $T = I \circ T_1$ est donc compact de $L^2(]0, 1[)$ dans $L^2(]0, 1[)$.

Pour montrer que $T = T^*$, soient $f, g \in L^2(]0, 1[)$, $u = T(f)$ et $v = T(g)$.

$$(T(f) | g)_{L^2(]0, 1[)} = (g | u)_{L^2(]0, 1[)} = a(v, u) = a(u, v) = (f | v)_{L^2(]0, 1[)} = (f | T(g))_{L^2(]0, 1[)}.$$

Ceci donne bien $T = T^*$.

6) On suppose que $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ et que $u = T(f)$. Montrer que $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ et donner l'équation différentielle satisfaite par u .

Corrigé – On pose $\gamma = \int_0^1 u(x) dx$ et $h = -u + \gamma + f$. Comme $u \in C([0, 1], \mathbb{R})$, $h \in C([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $v \in C_c^1(]0, 1[, \mathbb{R})$,

$$\int_0^1 Du(t)v'(t) dt = \int_0^1 h(t)v(t) dt.$$

Un lemme vu en cours et en td donne alors que $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ et $-u''(x) = h(x) = -u(x) + \int_0^1 u(x) dx + f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Evaluation du 8 décembre 2022

L'examen contient 3 exercices. Le barème est sur 24 points. Les documents (polycopié du cours, notes de TD, notes personnelles) sont autorisés. Chaque réponse devra être justifiée. Vous pouvez utiliser les résultats qui ont été démontrés en TD.

Rappels :

- Si $f \in \mathcal{L}^p$, on confond f avec l'élément de L^p auquel f appartient.
- Si $f \in L^p(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$ (ou I est un intervalle de \mathbb{R}) et que f contient une fonction continue, on identifie f avec cette fonction continue.

Exercice 13.3 (Convergence faible et convergence au sens des distributions, barème 5 points).

On note \mathcal{L}^p et L^p les espaces $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$ et $L_{\mathbb{R}}^p(]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$

1) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{L}^1 . On suppose que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n(x)\varphi(x) dx = \int f(x)\varphi(x) dx. \quad (13.3)$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans L^1 .

Corrigé – Comme il y a une isométrie entre $(L^1)'$ et L^∞ , l'hypothèse donne que $f_n \rightarrow f$ faiblement dans L^1 . Le théorème de Banach-Steinhaus donne alors que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans L^1 .

2) Soit $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n = n^\alpha \mathbf{1}_{]0, 1/n[} - n^\alpha \mathbf{1}_{]-1/n, 0[}$.

Montrer que l'on peut choisir $\alpha > 0$ pour que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit non bornée dans L^1 et que la convergence donnée dans (13.3) soit vraie pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(]0, 1[, \mathbb{R})$.

Corrigé – On choisit α tel que $1 < \alpha < 2$.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Un changement de variable simple donne

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x) dx = \int_0^{1/n} n^\alpha(\varphi(x) - \varphi(-x)) dx. \quad (13.4)$$

On pose $M = \max_{x \in]-1/n, 1/n[} |\varphi'(x)|$ (et donc $M < +\infty$).

Pour tout $x \in]0, 1/n[$, le théorème des accroissements finis donne $|\varphi(x) - \varphi(-x)| \leq \frac{2M}{n}$. On en déduit avec (13.4)

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x) dx \right| \leq 2Mn^{\alpha-2},$$

et donc, comme $\alpha < 2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x) dx = 0$, c'est-à-dire, en posant $f = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) dx.$$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée dans L^1 . En effet pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_K |f_n(x)| dx = 2n^{\alpha-1},$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_K |f_n(x)| dx = +\infty$ car $\alpha > 1$.

Exercice 13.4 (Un opérateur linéaire compact autoadjoint dans $L^2(\mathbb{R})$, barème 16 points).

On note $L^2(\mathbb{R})$ l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Soit V une fonction mesurable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On suppose que $V(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = +\infty$.

On définit l'espace H par $H = \{u \in H^1(\mathbb{R}) \text{ tel que } Vu \in L^2(\mathbb{R})\}$.

Si $u, v \in H$, on pose $(u|v)_H = \int_{\mathbb{R}} Du(x)Dv(x)dx + \int_{\mathbb{R}} V^2(x)u(x)v(x)dx$.

1) Montrer que $(\cdot|\cdot)_H$ est un produit scalaire sur H .

Corrigé – L'application $(u, v) \mapsto \int_{\mathbb{R}} Du(x)Dv(x)dx + \int_{\mathbb{R}} V^2(x)u(x)v(x)dx$ de H^2 dans \mathbb{R} est bilinéaire symétrique. De plus, pour $u \in H$, $\int_{\mathbb{R}} Du(x)Du(x)dx + \int_{\mathbb{R}} V^2(x)u(x)u(x)dx = 0$ implique $u = 0$ p.p. (et même partout en confondant u avec son représentant continu). Cette application est donc un produit scalaire.

Dans la suite on munit H de ce produit scalaire.

2) Montrer que H est un espace de Hilbert. [Utiliser $V \geq 1$ p.p.]

Corrigé –

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de H . Comme $L^2(\mathbb{R})$ est complet, il existe v et w telles que, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$Vu_n \rightarrow v \text{ dans } L^2(\mathbb{R}),$$

$$Du_n \rightarrow w \text{ dans } L^2(\mathbb{R}),$$

On pose $u = v/V$, on a donc $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\mathbb{R})$ (car $|u_n - u| \leq |V(u_n - u)| = |Vu_n - v|$).

Puis, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, en utilisant les convergences dans $L^2(\mathbb{R})$ de u_n et Du_n ,

$$\int u(x)\varphi'(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int u_n(x)\varphi'(x)dx = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int Du_n(x)\varphi(x)dx = - \int w(x)\varphi(x)dx.$$

Ceci donne que $u \in H^1(\mathbb{R})$ et $Du = w$ p.p.. Cela donne aussi $u \in H$ car $Vu = v$ p.p. et $v \in L^2(\mathbb{R})$.

Finalement, comme $\|u_n - u\|_H^2 = \|Du_n - Du\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|Vu_n - Vu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|Du_n - w\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|Vu_n - v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$, on a bien $u_n \rightarrow u$ dans H quand $n \rightarrow +\infty$.

3) Soit $u \in H$. Montrer que u est uniformément continu. En déduire que $u(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm + \infty$.

Corrigé – Le fait que u est uniformément continu découle de l'inégalité, vue en cours, pour $y > x$,

$$|u(y) - u(x)| = \left| \int_x^y Du(t) dt \right| \leq \|Du\|_2 \sqrt{|y-x|}.$$

On en déduit que $u(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm + \infty$. Cela a été essentiellement montré en TD. On redonne la preuve ici.

On raisonne par l'absurde. On suppose que $u(x) \not\rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ et $|u(x_n)| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La continuité uniforme de u donne l'existence de $\eta > 0$ tel que

$$x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc $|u(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \in]x_n - \eta, x_n + \eta[$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\int u^2 1_{]x_n - \eta, x_n + \eta[} d\lambda \geq \varepsilon^2 \eta / 2 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible car le théorème de convergence dominée permet de montrer, comme u^2 est intégrable, que $\int u^2 1_{]x_n - \eta, x_n + \eta[} d\lambda \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

On a donc bien finalement montré que $u(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. (Un raisonnement analogue donne que $u(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow -\infty$.)

4) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de H .

(a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soient $x, y \in [-p, p]$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |u_n(x) - u_n(y)| &\leq \|u_n\|_H \sqrt{|x - y|}. \\ |u_n(x)| &\leq (1 + 2p) \|u_n\|_H. \end{aligned}$$

En déduire que la suite des restrictions des u_n à $[-p, p]$ est relativement compacte dans $C([-p, p], \mathbb{R})$.

Corrigé – pour $x > y$, $u_n(x) - u_n(y) = \int_y^x Du_n(t) dt$ et donc avec l'inégalité Cauchy-Schwarz,

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq \|Du_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \sqrt{|x - y|} \leq \|u_n\|_H \sqrt{|x - y|}.$$

Pour x fixé dans $] - p, p[$, on intègre sur $] - p, p[$ l'inégalité

$$|u_n(x)| \leq |u_n(y)| + \|Du_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \sqrt{|x - y|} \leq |u_n(y)| + 2p \|Du_n\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

On obtient, avec l'inégalité Cauchy-Schwarz (et $V \geq 1$)

$$2p |u_n(x)| \leq \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} 2p + 4p^2 \|Du_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq (2p + 4p^2) \|u_n\|_H,$$

c'est-à-dire $|u_n(x)| \leq (1 + 2p) \|u_n\|_H$.

Le théorème d'Ascoli donne la déduction demandée.

En utilisant le procédé diagonal (vu en cours), une conséquence de la question 4a est qu'il existe une sous suite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire une fonction φ strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , et une fonction u telles que $u_{\varphi(n)} \rightarrow u$ (quand $n \rightarrow +\infty$) uniformément sur tout compact de \mathbb{R} .

Pour la suite de cette question, on note encore $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sous suite ainsi trouvée, de sorte que $u_n \rightarrow u$ (quand $n \rightarrow +\infty$) uniformément sur tout compact de \mathbb{R} .

(b) Montrer que $Vu \in L^2(\mathbb{R})$. [On pourra utiliser le lemme de Fatou, vu en intégration.]

Corrigé –

Comme $u_n(x) \rightarrow u(x)$ (quand $n \rightarrow +\infty$) pour tout $x \in \mathbb{R}$,

le lemme de Fatou donne $\int V^2(x)u^2(x)dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int V^2(x)u_n^2(x)dx$ et donc

$$\int V^2(x)u^2(x)dx \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_H < +\infty.$$

(c) Montrer que $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\mathbb{R})$ quand $n \rightarrow +\infty$. [Utiliser $V(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.]

Corrigé – pour tout $a > 0$, on pose $V_a = \inf_{|x| > a} V^2(x)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u_n(x) - u(x)|^2 dx &= \int_{[-a, a]^c} |u_n(x) - u(x)|^2 dx + \int_{[-a, a]} |u_n(x) - u(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{V_a} \int_{[-a, a]^c} V^2(x) |u_n(x) - u(x)|^2 dx + \int_{[-a, a]} |u_n(x) - u(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{2}{V_a} \int_{[-a, a]^c} V^2(x) u_n^2(x) dx + \frac{2}{V_a} \int_{[-a, a]^c} V^2(x) u^2(x) dx + \int_{[-a, a]} |u_n(x) - u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

On pose $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_H$, de sorte que $\int V^2(x)u_n^2(x)dx \leq M$.

La question 4b donne alors $\int V^2(x)u^2(x)dx \leq M$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |u_n(x) - u(x)|^2 dx \leq \frac{4M}{V_a} + \int_{[-a, a]} |u_n(x) - u(x)|^2 dx.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $V(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow \pm\infty$, il existe $a > 0$ tel que $\frac{4M}{V_a} \leq \varepsilon$. Comme $u_n \rightarrow u$ uniformément sur $[-a, a]$, il existe n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int_{[-a, a]} |u_n(x) - u(x)|^2 dx \leq \varepsilon,$$

et donc

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int |u_n(x) - u(x)|^2 dx \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve que $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\mathbb{R})$ quand $n \rightarrow +\infty$.

La conséquence de la question 4 est que l'application $u \mapsto u$ est compacte de H dans $L^2(\mathbb{R})$.

Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on cherche $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, solution du problème suivant :

$$-u''(x) + V^2(x)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (13.5)$$

$$u(x) \rightarrow 0, \quad \text{quand } x \rightarrow \pm\infty. \quad (13.6)$$

On dit que u est solution faible de (13.5)-(13.6) si u est solution de

$$u \in H, \quad (13.7)$$

$$\int_{\mathbb{R}} Du(x)Dv(x)dx + \int_{\mathbb{R}} V^2(x)u(x)v(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H. \quad (13.8)$$

5) Montrer que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, il existe un et un seul u solution de (13.7)-(13.8)

Corrigé – Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.

On définit l'opérateur F de H dans \mathbb{R} par $F(v) = \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx = (f|v)_{L^2(\mathbb{R})}$. l'application F appartient à H' (car $\|v\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|v\|_H$).

Le problème (13.7)-(13.8) consiste à chercher $u \in H$ tel que $(u|v)_H = F(v)$ pour tout $v \in H$. L'existence et l'unicité de u est donc donné par le théorème de représentation de Riesz dans les espaces de Hilbert.

6) Montrer que l'opérateur $T : f \mapsto u$ (où u est, pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, la solution de (13.7)-(13.8)) est linéaire autoadjoint compact de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Corrigé – L'application $f \mapsto u$ de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ est la composée de l'application $f \mapsto u$ de $L^2(\mathbb{R})$ dans H , qui est linéaire continue (car $\|u\|_H \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$), et de l'application $u \mapsto u$ de H dans $L^2(\mathbb{R})$, qui est linéaire compacte, elle est donc linéaire compacte.

On montre maintenant que $T = T^$. Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ et $u, v \in H$ les solutions correspondantes de (13.7)-(13.8). Avec le choix de u dans la formulation faible pour g et le choix de v dans la formulation faible pour f , on obtient*

$$(g|Tf)_{L^2(\mathbb{R})} = (v|u)_H = (u|v)_H = (f|v)_{L^2(\mathbb{R})} = (f|Tg)_{L^2(\mathbb{R})} = (Tg|f)_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Ceci prouve le caractère autoadjoint de T .

7) On suppose que V^4 est intégrable sur tout compact de \mathbb{R} . Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et u la solution de (13.7)-(13.8). Soit $a > 0$. On note encore u la restriction de u à l'intervalle $[-a, a]$.

Montrer que $u \in C^1([-a, a])$, $u' \in H^1([-a, a])$ et $D(u') = V^2u - f$ p.p. sur I .

[Utiliser (13.8) avec $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convenablement choisie.]

Corrigé – On pose $I =]-a, a[$ et on définit H sur $[-a, a]$ par $H(x) = \int_{-a}^x (f(x) - V^2(x)u(y))dy$.

Comme $f - V^2u \in L^2_{\mathbb{R}}(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$, en reprenant la preuve du théorème 8.2, $H \in H^1(I)$ et $DH = f - V^2u$ p.p..

On a donc, pour $\varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R})$,

$$\int_I Du(x)\varphi'(x)dx = \int_I (f(x) - V^2(x)u(x))\varphi(x)dx = - \int_I H(x)\varphi'(x)dx.. \quad (13.9)$$

On choisit une fonction $\varphi_0 \in C_c^\infty(I, \mathbb{R})$ telle que $\int_I \varphi_0(x)dx = 1$.

Pour $\psi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R})$ on choisit dans (13.9) $\varphi(x) = \int_{-a}^x \psi(y)dy - \int_I \psi(t)dt \int_{-a}^x \varphi_0(y)dy$ (de sorte que $\varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R})$). On obtient, avec $c = \int_I (Du(y) + H(y))\varphi_0(y)dy$,

$$\int (Du(x) + H(x) - c)\psi(x)dx = 0.$$

Ceci prouve que $Du = -H + c$ p.p. sur I et donc $u \in C^1([-a, a], \mathbb{R})$ et $u'(x) = -H(x) + c$ pour tout $x \in [-a, a]$. Enfin, comme $H \in H^1(I)$ on a bien $u' \in H^1(I)$ et $D(u') = -DH = -f + V^2u$ p.p. sur I .

Exercice 13.5 (Un peu de Fourier pour finir, barème 3 points).

Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On suppose que $f \geq 0$ p.p..

1) Montrer que $\hat{f}(0) = (1/\sqrt{2\pi})\|f\|_1$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{Re}(\hat{f}(t))| \leq |\hat{f}(t)| \leq (1/\sqrt{2\pi})\|f\|_1$.

Corrigé – On utilise le fait que f est à valeurs réelles positives,

$$\hat{f}(0) = (1/\sqrt{2\pi}) \int f(x)dx = (1/\sqrt{2\pi})\|f\|_1 \text{ et, pour tout } t \in \mathbb{R},$$

$$|\operatorname{Re}(\hat{f}(t))| \leq |\hat{f}(t)| = (1/\sqrt{2\pi}) \left| \int f(x)e^{ixt}dx \right| \leq (1/\sqrt{2\pi}) \int |f(x)|dx = (1/\sqrt{2\pi})\|f\|_1.$$

2) On suppose qu'il existe $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, tel que $|\operatorname{Re}(\hat{f}(t))| = (1/\sqrt{2\pi})\|f\|_1$. Montrer que $f = 0$ p.p..

Corrigé – On suppose $\operatorname{Re}(\hat{f}(t)) \geq 0$. On a alors

$$0 = (1/\sqrt{2\pi})\|f\|_1 - \operatorname{Re}(\hat{f}(t)) = (1/\sqrt{2\pi}) \int f(x)(1 - \cos(xt))dt.$$

Comme $1 - \cos(xt) > 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et $f \geq 0$ p.p., ceci donne $f = 0$ p.p..

De même, si $\operatorname{Re}(\hat{f}(t)) < 0$, on a alors

$$0 = (1/\sqrt{2\pi})\|f\|_1 + \operatorname{Re}(\hat{f}(t)) = (1/\sqrt{2\pi}) \int f(x)(1 + \cos(xt))dt.$$

Comme $1 + \cos(xt) > 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et $f \geq 0$ p.p., ceci donne aussi $f = 0$ p.p..