

TD7. Indépendance. Espérance conditionnelle. Vecteurs Gaussiens

Exercice 1: Convergence en loi et convergence des fonctions de répartition.

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ et X des v.a.r définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit F_n la fonction de répartition de X_n et F celle de X .

1. Montrez qu'il y a équivalence entre
 - (a) Pour tout x point de continuité de F , $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$.
 - (b) X_n converge en loi vers X quand $n \rightarrow \infty$.
2. Montrez sur un exemple qu'on peut avoir X_n converge en loi vers X quand $n \rightarrow \infty$, et $F_n(x)$ ne tend pas vers $F(x)$ si x n'est pas un point de continuité de F .

Exercice 2: Espérance conditionnelle et projection dans L^2 .

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $(A_i, i \in \mathbb{N})$ un système exhaustif d'événements tel que $\forall i \in \mathbb{N}, P(A_i) > 0$. Soit $\mathcal{G}$ la tribu engendrée par les $(A_i, i \in \mathbb{N})$. Expliciter $E(X|\mathcal{G})$. Même question si $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Exercice 3: Un cas particulier du précédent.

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que X prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$, avec $\forall i \in \mathbb{N}, P(X = x_i) > 0$. Expliciter $E(Y|X)$.

Exercice 4: Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, et que Y suit une loi exponentielle de paramètre 1. On suppose de plus que la loi de X conditionnelle à Y est une loi de Poisson de paramètre Y , i.e

$$\forall k \in \mathbb{N}, P[X = k|Y] = \exp(-Y) \frac{Y^k}{k!} \quad \text{P.p.s..}$$

Déterminer la loi de (X, Y) , la loi de X , la loi de Y conditionnelle à $X = k$.

Exercice 5: Soit X une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ un échantillon de X . Soit d'autre part N une variable aléatoire indépendante de la suite (X_n) et suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[: \forall n \in \mathbb{N}^*, P(N = n) = p(1 - p)^{n-1}$. On pose $S = X_1 + \dots + X_N$. Calculer $E(S|N)$ et $E(N|S)$.

Exercice 6: Soit (X, Y) de loi uniforme sur le triangle $\Delta \triangleq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < y < 1\}$. Calculer $E(Y|X)$, $E(X|Y)$, et $E(X^2|Y)$.

Exercice 7: Soit X une variable aléatoire de densité $\frac{2}{(\text{Log} 2)^2} \frac{\text{Log}(1+x)}{1+x} \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit Y une variable aléatoire telle que la loi conditionnelle de Y sachant X est de densité $\frac{1}{\text{Log}(1+X)} \frac{1}{1+y} \mathbb{I}_{[0,X]}(y)$, i.e. $\forall f$ mesurable bornée,

$$E[f(Y)|X] = \int_0^X \frac{1}{\text{Log}(1+X)} \frac{f(y)}{1+y} dy.$$

X et Y sont-elles indépendantes? Calculer la loi de Y , la loi conditionnelle de X sachant Y , et $E(Y|X)$.

Exercice 8: Soient $\mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathcal{H}$ des tribus sur Ω , telles $\mathcal{G} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Montrer l'égalité $E[(X - E(X|\mathcal{H}))^2] + E[(E(X|\mathcal{H}) - E(X|\mathcal{G}))^2] = E[(X - E(X|\mathcal{G}))^2]$.

Exercice 9: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et X, Y deux éléments de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, tels que $E(X|Y) = Y$, et $E(Y|X) = X$. Montrer que $X = Y$ p.s.

Exercice 10: Soit X une variable aléatoire de densité f sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est paire.

1. Calculez $E(X| |X|)$. Le résultat signifie-t-il que X et $|X|$ sont indépendantes?
2. On définit pour tout x in $\mathbb{R}$, $\text{sgn}(x) = \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x) - \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(x)$. Montrez que $\text{sgn}(X)$ et $|X|$ sont indépendantes.

Exercice 11: Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur gaussien de moyenne $(0, 0)$ et de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?
2. Soit $\xi = E(X_1|X_2)$. Trouvez la fonction caractéristique de ξ .

Exercice 12: Soient Y_1, Y_2 des variables aléatoires qui suivent la loi normale centrée réduite. Soit η une variable aléatoire telle que $P(\eta = 0) = P(\eta = 1) = 1/2$. On suppose que η, Y_1, Y_2 sont indépendantes. Trouvez $E(\eta Y_1 + \eta Y_2 | (Y_1 + Y_2))$.

Exercice 13: Soit $(\epsilon_i, i \geq 1)$ une suite de v.a.i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$X_0 = 0, \quad X_n = \theta X_{n-1} + \epsilon_n,$$

où $\theta \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que $|\theta| < 1$. Montrez que X_n converge en loi vers une variable X dont on précisera la loi.
2. On suppose que $|\theta| > 1$. Montrez que $\theta^{-n} X_n$ converge p.s. vers une variable X . Donnez une expression explicite pour X et précisez sa loi.
3. On suppose $\theta = 1$. Calculez $Z_n = E(X_n | (X_{n-1}, X_{n+1}))$. Montrez que $Z_n/\sqrt{n}$ converge en loi et trouvez la loi limite.