Universités de Marseille, Master 1 de mathématiques
Mesures et Probabilités, TD 4, Novembre 2009

Programme du partiel du 5 Novembre : chapitres 1, 2 et 4 du polycopié et les deux premiers paragraphes du chapitre 5 (fonctions caractéristiques).

Exercice 1 (Moments de la Cauchy)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une v.a.r. dont la loi est une loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ (la loi de X a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, avec $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{c}{x^2+c^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$). La v.a.r. X admet-elle des moments ? (si oui, les calculer...).

Exercice 2 (Loi du χ^2)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une v.a.r. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (on rappelle que le signe "$\sim$" signifie "a pour loi"). Calculer l'espérance et la variance de la v.a.r. X^2 et montrer que la loi de X^2 est la loi $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (cette loi s'appelle "Loi du χ^2 à 1 degré de liberté").

Exercice 3 (Exemples des v.a.r. suivant une loi beta)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $n \geq 2$ et $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r.i.i.d. dont la loi commune est $U([0, 1])$. Montrer que les v.a.r. $\min(X_1, \ldots, X_n)$ et $\max(X_1, \ldots, X_n)$ suivent des lois beta et déterminer les paramètres de ces lois.

Exercice 4 (Lien entre indépendance et $P(A) \in \{0, 1\}$)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et $A \in \mathcal{A}$.

1. On suppose que $A \in \mathcal{A}_1$ et $A \in \mathcal{A}_2$ et que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus indépendantes (et contenues dans $\mathcal{A}$). Montrer que $P(A) \in \{0, 1\}$.
2. Montrer que $P(A) \in \{0, 1\}$ si et seulement si A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$.

Exercice 5 (Composition de v.a.r.)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables alélatoires réelles. (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu des boréliens). On définit Z par

$$\forall \omega \in \Omega\,, \quad Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega).$$

Montrer que Z est une variable aléatoire.

Exercice 6 (Caractérisation de l'indépendance)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $n \geq 2$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles. Montrer que l'indépendance de $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ est équivalente à chacune la propriété suivante :

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n,\ P[X_1 \leq a_1, \ldots, X_n \leq a_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \leq a_i].$$

Exercice 7 (Loi d'une fonction linéaire de X)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une v.a.r.. On suppose que la loi de X a une densité par rapport à Lebesgue et on note g cette densité. Soit a, $b \in \mathbb{R}$, montrer que la v.a.r. $aX + b$ a une densité par rapport à Lebesgue et donner cette densité en fonction de g, a et b.

Exercice 8 (Transformation d'une v.a.r. de loi uniforme en une v.a.r. de loi donnée)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, X une v.a.r. et U une v.a.r. de loi $\mathcal{U}([0,1])$, Soit F la fonction de répartition de X (i.e. $F(x) = P(X \leq x)$ pour $x \in \mathbb{R}$). On définit G de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$G(u) = \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq u\},\ \text{ si } u \in]0,1[,$$
$$G(u) = 0,\ \text{ si } u \notin]0,1[.$$

Montrer que la v.a.r. $Y = G(U)$ a la même loi que X. [On pourra montrer que $P(G(U) \leq x) = P(U \leq F(x))$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.]

Exercice 9 (Loi du "produit de la loi exponentielle par ± 1")

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. indépendantes. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$), c'est-à-dire que $P(X > t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$. On suppose que Y est t. q. $P(Y = 1) = P(Y = -1) = 1/2$. Donner la loi de XY.

Exercice 10 (Identités de Wald)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ une suite v.a.r.i.i.d. et N une v. a. à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$. On pose $S_N = X_1 + \ldots + X_N$ (c'est-à-dire que, pour $\omega \in \Omega$, $S_N(\omega) = \sum_{n=1}^{N(\omega)} X_n(\omega)$).

1. On suppose, dans cette question, que la suite $N, X_1, \ldots, X_N, \ldots$ est indépendante.
   (a) On suppose que N et X_1 sont intégrables . Montrer que S_N est intégrable et calculer $E(S_N)$ en fonction de $E(N)$ et $E(X_1)$.
   (b) On suppose que N et X_1 sont de carré intégrable, montrer que S_N est de carré intégrable et calculer sa variance en utilisant les variances de N et X_1.
2. On suppose maintenant que $\{N = n\} \in \sigma(X_1, .., X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et que $E(X_1) = 0$.
   (a) Montrer que $1_{\{n \leq N\}}$ et X_n sont des v.a. indépendantes.
   (b) Reprendre les questions $1(a)$ et $1(b)$. [On pourra écrire $S_N = \sum_{n \in \mathbb{N}^\star} 1_{\{n \leq N\}} X_n$.]

   N.B. : Le cas $E(X_1) \neq 0$ peut aussi être traité. Il se ramène au cas $E(X_1) = 0$ en considérant $Y_n = X_n - E(X_n)$.

Exercice 11 (Calcul de fonctions caractéristiques)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X une v.a. réelle. Calculer la fonction caractéristique φ_X de X dans les cas suivants :

1. $X = a$ p.s. ($a \in \mathbb{R}$).
2. $X \sim \mathcal{B}(p)$ (loi de Bernoulli de paramètre p : $\mathcal{P}[X = 1] = p = 1 - \mathcal{P}[X = 0]$).
3. X suit une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

Exercice 12 (Indépendance 3 par 3 et dépendance globale)

Trouver un espace de probabilités et 4 v.a. prenant leurs valeurs dans $\{-1, 1\}$ t.q. les 4 v.a. soient 3 par 3 indépendantes mais ne soient pas indépendantes. [On pourra considérer des produits de v.a. indépendantes.]

Exercice 13 (Sur la loi d'un vecteur aléatoire)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X un v.a. de dimension d. Montrer que la loi de X est uniquement déterminée par la donnée des lois de toutes les v.a.r. $a \cdot X$, $a \in \mathbb{R}^d$, $|a| = 1$. [On pourra utiliser la fonction caractéristique de X.]

Exercice 14 (Coordonnées polaires)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et Θ, R deux v.a.r. indépendantes telles que $\Theta = 2\pi V$ et $R = \sqrt{-2\log(U)}$ p.s., où V et U sont des v.a.r. de loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$. On note $X = R\cos\Theta$ et $Y = R\sin\Theta$. Trouver les lois de X et Y et étudier l'indépendance de X, Y.