Centre de Télé-Enseignement Sciences
Université de Provence

MASTER SCIENCES
Mention Mathématiques et Applications

Expédition dans la semaine n°	Etape	Code UE	N° d'envoi de l'UE
	M2-EDP	M2-EDP	2

Nom de l'UE : Equations aux Dérivées Partielles

– **Contenu de l'envoi : Polycopié, chapitre 2.**

- Guide du travail à effectuer

Semaine 1 :
Etudier le chapitre 2, section 1 (formulation faible)
Exercice proposé : 2.1

Semaine 2 :
Etudier le chapitre 2, section 2 (analyse spectrale)
Exercices proposés : 2.2, 2.4

Semaine 3 :
Etudier le chapitre 2, section 3 (régularité)
Exercices proposés : 2.9, 2.12

Semaine 4 :
Etudier le chapitre 2, section 4 (principe du maximum)
Exercices à faire pour le 1er devoir, à rendre en février : 2.13, 2.14, 2.15

- Coordonnées des enseignants responsables de l'envoi

T. Gallouet, R. Herbin, LATP-CMI, 39 rue Joliot Curie, 13453 marseille cedex 13.
email : gallouet@cmi.univ-mrs.fr , herbin@cmi.univ-mrs.fr

Vous pouvez aussi consulter la page web: http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/tele.d
et nous poser des questions par email.

Chapitre 2

Problèmes elliptiques linéaires

2.1 Formulation faible

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$. Soient $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que les fonctions $a_{i,j}$ vérifient l'hypothèse d'ellipticité uniforme, c'est-à-dire :

$$\exists \alpha > 0;\ \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N,\ \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \ \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{2.1}$$

On se donne $f \in L^2(\Omega)$ et $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, et on cherche une solution au problème :

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j u)(x) = f(x),\ x \in \Omega, \tag{2.2a}$$

$$u(x) = g(x),\ x \in \partial\Omega, \tag{2.2b}$$

où $\partial_i u$ désigne la dérivée partielle de u par rapport à sa i-ème variable.

Exemple 2.1 (Le Laplacien) *Si on prend $a_{i,j} = \delta_{i,j}$ (c'est-à-dire 1 si $i = j$, 0 si $i \neq j$), alors le problème* (2.2) *devient*

$$-\Delta u = f \textit{ sur } \Omega,$$
$$u = g \textit{ sur } \partial\Omega.$$

Définition 2.2 (Solution classique) *On suppose que $a_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega})$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que $f \in C(\bar{\Omega})$ et $g \in C(\partial\Omega)$. On appelle alors solution classique de* (2.2) *une fonction $u \in C^2(\bar{\Omega})$ vérifiant* (2.2).

On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $C^k(\bar{\Omega})$ désigne l'ensemble des restrictions à Ω des fonctions appartenant à $C^k(\mathbb{R}^N)$.

Il n'existe pas forcément de solution classique à (2.2). Mais il existe des solutions en un sens plus faible que l'on va définir ci-après. Pour comprendre leur nature, considérons d'abord le cas $g = 0$, avec $a_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega})$ et $f \in C(\bar{\Omega})$, et supposons qu'il existe une solution classique $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Par définition, celle ci vérifie :

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j u)(x) = f(x),\ \forall x \in \Omega.$$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$; multiplions l'équation précédente par $\varphi(x)$ et intégrons sur Ω :

$$-\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j u)(x) \right) \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Une intégration par parties donne alors :

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\partial_i\varphi(x) \right) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.3}$$

Comme $u \in C^2(\bar\Omega)$, on a $\partial_j u \in C^1(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$, et $D_j u = \partial_j u$ p.p (come cela a été vu au Chapitre 1). De plus $u \in C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ et donc $u \in H^1(\Omega)$. Enfin, comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a finalement $u \in H_0^1(\Omega)$ (voir l'exercice 1.14).
Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to v$ dans $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire $\varphi_n \to v$ dans $L^2(\Omega)$ et $\partial_i\varphi_n \to D_i v$ dans $L^2(\Omega)$ pour $i = 1, \ldots, N$. En écrivant (2.3) avec $\varphi = \varphi_n$, on obtient :

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\partial_i\varphi_n(x) \right) dx = \int_\Omega f(x)\varphi_n(x) \, \mathrm{d}x,$$

et en passant à la limite, on obtient que u satisfait le problème suivant, qu'on appelle <u>formulation faible</u> du problème (2.2) (lorsque $g = 0$)

$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(\Omega), \\ &\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x)D_j u(x)D_i v(x) \right) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x) \, \mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.4}$$

On vient ainsi de montrer que **toute solution classique du problème** (2.2) **(lorsque** $g = 0$**) est solution faible, c'est-à-dire vérifie** (2.4).

Remarque 2.3 (Cas symétrique, formulation variationnelle) Dans le cas où $a_{i,j} = a_{j,i}$ p.p. pour $i \neq j$, u est solution de (2.4) si et seulement si u est solution du problème suivant, qu'on appelle <u>formulation variationnelle</u> :

$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(\Omega), \\ &J(u) \le J(v), \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \tag{2.5}$$

où la fonctionnelle J est définie par : $J(v) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j} D_i v D_j v \right) \, \mathrm{d}x$.

La démonstration de l'existence et de l'unicité des solutions des problèmes (2.4) et (2.5) utilise le lemme de Lax-Milgram, que nous rappelons ici :

Lemme 2.4 (Lax-Milgram) *Soient H un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire noté $(\cdot/\cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$, et $a(\cdot,\cdot)$ une application bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ qui est*
– continue, ce qui équivalent à dire qu'il existe $c > 0$ t.q., pour tout $(u, v) \in H^2$, on a $|a(u, v)| \le c\|u\|\|v\|$,

– *coercive sur H (certains auteurs disent plutôt H-elliptique), c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$, t.q., pour tout $u \in H$, $a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$,*

et soit T une forme linéaire continue sur H.
Alors il existe un unique u de H tel que l'équation $a(u,v) = T(v)$ soit vérifiée pour tout v de H :

$$\exists!\ u \in H,\ \forall v \in H, \quad a(u,v) = T(v).$$

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de H qui minimise la fonctionnelle $J : H \to \mathbb{R}$ définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - T(v)$ pour tout v de H, c'est-à-dire :

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v) \ \textit{ et } \ J(u) < J(v) \textit{ si } u \neq v.$$

Notons que dans le cas où la forme bilinéaire a est symétrique, elle définit un produit scalaire sur H équivalent au produit scalaire initial. Dans ce cas, le lemme de Lax-Milgram est une conséquence directe du théorème de représentation de Riesz dans un espace de Hilbert.
Pour appliquer le théorème de Lax-Milgram au problème (2.4), nous aurons besoin de l'inégalité de Poincaré :

Lemme 2.5 (Inégalité de Poincaré) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ (ou qui est au moins borné dans une direction), alors il existe C_Ω ne dépendant que de Ω tel que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \| \, |\nabla u| \, \|_{L^2(\Omega)}, \ \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.6}$$

N.B. On désigne toujours par $|\cdot|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$. On a donc

$$\| \, |\nabla u| \, \|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega D_i u(x)^2 dx.$$

Démonstration Par hypothèse sur Ω, il existe $a > 0$ tel que $\Omega \subset]-a,a[\times \mathbb{R}^{N-1}$. Soit $u \in C_c^\infty(\Omega)$, on prolonge u par 0 en dehors de Ω, on a donc :

$$u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), u = 0 \text{ sur } \Omega^c.$$

Soit $x = (x_1, \ldots, x_N)^t = (x_1, y)^t \in \Omega$, avec $x_1 \in]-a,a[$ et $y = (x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$. On a :

$$u(x_1, y) = \int_{-a}^{x_1} \partial_1 u(t,y) \, \mathrm{d}t,$$

et donc, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$|u(x_1,y)|^2 \leq \left(\int_{-a}^{a} |\partial_1 u(t,y)| \, \mathrm{d}t \right)^2 \leq 2a \int_{-a}^{a} (\partial_1 u(t,y))^2 \, \mathrm{d}t.$$

En intégrant entre $-a$ et a, on obtient :

$$\int_{-a}^{a} |u(x_1,y)|^2 \, \mathrm{d}x_1 \leq 4a^2 \int_{-a}^{a} (\partial_1 u(t,y))^2 \, \mathrm{d}t,$$

et donc, en intérrant par rapport à y,

$$\int_\Omega |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq 4a^2 \int_\Omega (\partial_1 u(x))^2 \, \mathrm{d}x, \ \forall u \in C_c^\infty(\Omega) \tag{2.7}$$

On procéde ensuite par densité ; pour $u \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$. On a donc $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ et $\partial_i u \to D_i u$ dans $L^2(\Omega)$. On écrit alors (2.7) pour u_n et en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \le 4a^2\|D_1 u\|_{L^2(\Omega)}^2 \le 4a^2 \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 4a^2\| \, |\nabla u| \, \|_{L^2(\Omega)}^2.$$

■

Théorème 2.6 (Existence et unicité de la solution de (2.4)**)** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^2(\Omega)$, et soient $(a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que* (2.1) *soit vérifiée. Alors il existe une unique solution de* (2.4).

Démonstration Pour appliquer le lemme de Lax-Milgram on écrit le problème (2.4) sous la forme : $u \in H$; $a(u,v) = T(v)$ pour tout $v \in H$, avec $H = H_0^1(\Omega)$ (qui est bien un espace de Hilbert, muni de la norme définie par $\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \, |\nabla u| \, \|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}$), et avec a et T définies par

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) \right) \mathrm{d}x \ \text{ et } \ T(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

On remarque tout d'abord que la forme linéaire T est bien continue. En effet,

$$|T(v)| \le \|v\|_{L^2(\Omega)}\|f\|_{L^2(\Omega)} \le \|v\|_{H^1(\Omega)}\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quant à la forme a, elle est évidemment bilinéaire, et elle vérifie :

$$|a(u,v)| \le \sum_{i,j=1}^N \|a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)}\|D_i u\|_{L^2(\Omega)}\|D_j v\|_{L^2(\Omega)} \le C\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)},$$

avec $C = \sum_{i,j=1}^N \|a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)}$. Elle est donc continue.
Voyons si a est coercive : il faut montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que $a(u,u) \ge \beta\|u\|_{H^1(\Omega)}^2$, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$.
Par hypothèse sur a, on a :

$$a(u,u) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i u(x) \right) \mathrm{d}x \ge \alpha \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N |D_i u(x)|^2 \right) \mathrm{d}x = \alpha \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

On applique alors l'inégalité de Poincaré (2.6) :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \le (C_\Omega^2 + 1) \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

d'où on obtient que :

$$\sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \ge \frac{1}{C_\Omega^2 + 1}\|u\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

et donc

$$a(u,u) \ge \alpha \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \ge \frac{\alpha}{C_\Omega^2 + 1}\|u\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

ce qui démontre la coercivité de a. Par le lemme de Lax-Milgram, on a donc bien existence et unicité de la solution du problème (2.4). ■

Pour $u \in H_0^1(\Omega)$ on pose $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \| \, |\nabla u| \, \|_{L^2(\Omega)}$. L'inégalité de Poincaré permet de montrer que sur $H_0^1(\Omega)$ cette norme est équivente à la norme de $H^1(\Omega)$ (sous les hypothèses du lemme 2.5). Ceci est en fait démontré dans la démonstration du théorème 2.6.

Par le lemme de Lax-Milgram, on démontre de manière similaire l'existence et l'unicité dans le cas où le second membre de (2.4) est donné par un élément de $H^{-1}(\Omega)$ (dual de $H_0^1(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $H_0^1(\Omega)$).

Théorème 2.7 (Existence et unicité, $T \in H^{-1}$) *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $(a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que (2.1) soit vérifiée. Soit $T \in H^{-1}(\Omega)$, il existe alors une unique solution u de :*

$$
\begin{aligned}
& u \in H_0^1(\Omega), \\
& \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) \right) \mathrm{d}x = T(v), \forall v \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^1(\Omega)$. Il est intéressant de savoir si l'application $\varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ (définie, par exemple, pour $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$) se prolonge en un élément de $H^{-1}(\Omega)$ (et dans ce cas, le prolongement sera unique par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$). En dimension $N = 1$, l'hypothèse $f \in L^1(\Omega)$ est suffisante. En dimension $N \geq 3$, l'hypothèse $f \in L^q(\Omega)$, avec $q = 2N/(N+2)$ est suffisante. En dimension $N = 2$, l'hypothèse $f \in L^q(\Omega)$, avec $q > 1$ est suffisante. Un résultat plus précis (pour $N = 2$) est donné dans l'exercice 2.8.

L'existence et l'unicité de solutions faibles est possible avec d'autres conditions aux limites. L'exercice 2.4 traite le cas des conditions de Neuman et l'exercice 2.6 les conditions dites de Fourier (ou de Robin, selon les auteurs). La résolution du probème de Neuman permet d'ailleurs de montrer une décomposition utile d'un élément de $L^2(\Omega)^N$, appelée décomposition de Hodge, exercice 2.9. L'exercice 2.5 s'intéresse à des conditions aux limites apparaissant en mécanique du solide. Il est possible aussi de coupler un problème elliptique sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ avec un problème elliptique unidimensionel sur le frontière de Ω, ceci est l'objet de l'exercice 2.11.

Les exercices 2.10, 2.12 et 2.7 montrent l'existence (et l'unicité ou une "unicité partielle") pour des systèmes elliptiques (problème des Stokes et équation de Schrödinger).

Enfin, il est possible de traiter des problèmes elliptiques avec des coefficients $a_{i,j}$ non bornés. On introduit alors des espaces de Sobolve dit "à poids", exercice 2.3.

2.2 Analyse spectrale

2.2.1 Quelques rappels

Soit E un espace de Banach réel, et T une application linéaire continue de E dans E. On note :
- $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; T - \lambda I \text{ est non bijective}\}$ l'ensemble des valeurs singulières de T,
- $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; T - \lambda I \text{ est bijective}\} = \mathbb{R} \setminus \sigma(T)$ l'ensemble des valeurs régulières de T,
- $\mathcal{VP}(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; T - \lambda I \text{ est non injective}\}$ l'ensemble des valeurs propres de T,

Lorsque dim $E < +\infty$, on a $\mathcal{VP}(T) = \sigma(T)$. On a un résultat similaire en dimension infinie, à condition que l'opérateur T soit linéaire continu et compact. Plus précisément, dans ce cas on a : $\mathcal{VP}(T) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$. Le théorème suivant donne ce résultat dans les espaces de Hilbert séparables et pour un opérateur autoadjoint.

Proposition 2.8 (Opérateur linéaire continu compact autoajoint) *Soit E un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_E$, et soit T un opérateur linéaire continu compact autoadjoint dont le noyau $N(T) = \{u \in E\ ;\ T(u) = 0\}$ est réduit à $\{0\}$. Alors il existe une base hilbertienne de E formée de vecteurs propres de T, c'est-à-dire d'éléments de E, notés e_n, $n \in \mathbb{N}$, vérifiant $(e_n, e_m)_E = \delta_{n,m}$ et tels que si $u \in E$, alors u peut s'écrire $u = \sum_{n\in N}(u, e_n)_E e_n$ (cette série étant convergente dans E), et les valeurs propres $\lambda_n \in \mathbb{R}$ associées, i.e. telles que $Te_n = \lambda_n e_n$, sont telles que $\lambda_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.*

2.2.2 Le Laplacien

On va considérer dans cette section, pour simplifier, le cas du Laplacien. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On rappelle que $\Delta u = \sum_{i=1}^N \partial_i^2 u$ si u est une fonction régulière. Pour étendre cette définition aux fonctions seulement localement intégrables, on pose, si $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\Delta u = \sum_{i=1}^N D_i^2 u$. On définit maintenant un opérateur A d'une partie de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ en définissant d'abord son **domaine** $D(A)$:

$$D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega)\ ; \Delta u \in L^2(\Omega)\},$$

Puis on pose $Au = -\Delta u$ si $u \in D(A)$. On a ainsi définit un opérateur linéaire $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$.

On a vu dans les paragraphes précédents que si $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution au problème (2.4) qui s'écrit, pour le Laplacien, c'est-à-dire avec les valeurs $a_{i,j} = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, N$:

$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(\Omega), \\ &\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Grâce à la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, la fonction u est solution de (2.9) si et seulement si $u \in D(A)$ et $-\Delta u = f$ p.p. (c'est-à-dire $-\Delta u = f$ dans $L^2(\Omega)$). L'opérateur A est donc inversible. Son inverse, l'opérateur A^{-1}, est défini de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ par $A^{-1}f = u$ où u est solution de (2.9). Cet opérateur est injectif mais non surjectif. Les deux opérateurs sont linéaires.
Pour montrer qu'il existe une base hilbertienne formée des vecteurs propres de A^{-1}, on va démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.9 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Pour $f \in L^2(\Omega)$, on note Tf l'unique solution de* (2.9). *L'opérateur T est linéaire continu compact et autoadjoint de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. De plus $N(T) = \{f \in L^2(\Omega), Tf = 0$ p.p.$\} = \{0\}$.*

Démonstration Il est immédiat de voir que T est linéaire. On remarque tout d'abord que $N(T) = \{f \in E,\ Tf = 0 \text{ p.p.}\} = \{0\}$. En effet, soit $f \in L^2(\Omega)$ t.q. $Tf = 0$ p.p.. On a donc, d'après (2.9),

$$\int_\Omega fv dx = 0 \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Comme $H_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ (on a même $C_c^\infty(\Omega)$ dense dans $L^2(\Omega)$), on en déduit $f = 0$ p.p..
On montre maintenant la continuité de T. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $u = Tf$. En prenant $v = u$ dans (2.9), on obtient

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u\,\mathrm{d}x = \int_\Omega fu\,\mathrm{d}x \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par l'inégalité de Poincaré, il existe $C_\Omega \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de Ω tel que $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$, et donc :

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On en déduit que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}$ et donc :

$$\|Tf\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_\Omega^2 \|f\|^2_{L^2(\Omega)},$$

ce qui démontre la continuité de T.

Montrons maintenant que l'opérateur T est compact, c'est-à-dire que l'image $T(B)$ d'un ensemble B borné de $L^2(\Omega)$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$. On peut écrire T sous la forme $T = I \circ T_0$ où I est l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et T_0 est l'application qui à $f \in L^2(\Omega)$ associe $u = Tf \in H_0^1(\Omega)$. L'application T_0 est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ (car $\|Tf\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}$) et l'injection I est compacte par le théorème de Rellich (théorème 1.22 page 9), et donc l'opérateur T est compact.

Montrons maintenant que l'opérateur T est auto-adjoint, c'est-à-dire que

$$(Tf, g)_{L^2(\Omega)} = (f, Tg)_{L^2(\Omega)}, \ \forall f, g \in L^2(\Omega). \tag{2.10}$$

Soient donc f et $g \in L^2(\Omega)$, u l'unique solution de (2.9), et v l'unique solution de (2.9) où on a remplacé f par g dans le second membre. On a, comme v est solution de (2.9) où on a remplacé f par g :

$$(Tf, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega Tf\ g \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u\ g \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x.$$

On montre de même que $(f, Tg)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x$, ce qui démontre (2.10). ■

D'après le théorème 2.9 et la proposition 2.8, il existe donc une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$de $L^2(\Omega)$ formées de fonctions propres de T. Les valeurs propres associées sont toutes strictement positives. En effet, si $f \in L^2(\Omega)$ et $f \neq 0$, alors $u = Tf \neq 0$ et

$$(Tf, f)_{L^2(\Omega)} = (u, f)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \,\mathrm{d}x = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} > 0,$$

et donc si $\lambda_n \in \mathcal{VP}(T)$, est associée au vecteur propre $e_n \neq 0$, on a $Te_n = \lambda_n e_n$, et donc, comme $e_n \neq 0$,

$$\lambda_n (e_n, e_n)_{L^2(\Omega)} = (\lambda_n e_n, e_n)_{L^2(\Omega)} = (Te_n, e_n)_{L^2(\Omega)} > 0.$$

La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc formée de nombres strictement positifs. Quitte à changer l'ordre des λ_n, on peut supposer que cette suite est décroissance. Enfin, la proposition 2.8 donne que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$.

Remarquons que les valeurs propres de A sont donc les valeurs $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n},\ n \in \mathbb{N}^\star$, avec $\mu_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ et $\mu_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
On peut alors caractériser le domaine de l'opérateur Laplacien $D(A)$ de la façon suivante :

$$\text{Soit } u \in L^2(\Omega), [u \in D(A)] \Longleftrightarrow \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n^2 (u, e_n)^2_{L^2(\Omega)} < +\infty.\right]$$

De plus si $u \in D(A)$, alors $Au = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n (u, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n$. On peut ainsi définir les puissances de l'opérateur A :

Définition 2.10 (Puissance de l'opérateur) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $Au = -\Delta u$ avec $D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$. On note $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de vecteurs propres de A, associés aux valeurs propres $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Soit $s \geq 0$. On définit*

$$D(A^s) = \{u \in L^2(\Omega) : \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^{2s} (u, e_n)^2_{L^2(\Omega)} < +\infty\}.$$

Et pour $u \in D(A^s)$, on peut alors définir $A^s u$ par :

$$A^s u = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^s (u, e_n)_{L^2(\Omega)}.$$

Cette série étant convergente dans $L^2(\Omega)$.

Pour $s = 0$, on a $D(A^0) = L^2(\Omega)$ et $A^0 u = u$: A^0 est l'opérateur identité.
Pour $s = 1$, on retrouve l'opérateur A.
Pour $s = \frac{1}{2}$, on a $D(A^{\frac{1}{2}}) = \{u \in L^2(\Omega); \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n (u, e_n)^2_{L^2(\Omega)} < +\infty\}$. On peut montrer que $D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(\Omega)$, et on a $A^{\frac{1}{2}} u = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\mu_n} (u, e_n)_{L^2(\Omega)}$.

Pour le cas $N = 1$, $\Omega =]0, 1[$, Le théorème de décomposition spectrale est détaillé dans l'exercice 2.2.

2.3 Régularité des solutions faibles

Sous les hypothèses (2.1), on sait par les résultats précédents qu'il existe une unique solution au problème (2.4), et on se demande quelle est la régularité de cette solution en fonction des données du problème. Le problème est assez simple en dimension $N = 1$, voir l'exercice 2.1, mais beaucoup plus difficile en dimension $N > 1$.

Théorème 2.11 (Régularité de la solution du problème de Dirichlet)
Sous les hypothèses (2.1)*, soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution de* (2.4).

1. *Si $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$ pour $i, j = 1, \ldots, N$ et Ω est à frontière C^2, alors, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, on a $u \in H^2(\Omega)$.*
2. *Si $a_{i,j} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ pour $i, j = 1, \ldots, N$, si Ω est à frontière C^∞, et si $f \in H^m(\Omega)$ avec $m \geq 0$, alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$.*

En conséquence, si $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, alors $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et donc u est solution classique. De même, si $f \in H^m(\Omega)$ avec $m > \frac{N}{2}$, alors $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et donc u est encore solution classique.

Remarque 2.12 (Optimalité des hypothèses) Notons que la partie 1. du théorème précédent est fausse sans les hypothèses $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$ et Ω est à frontière C^2.
Par contre dans le cas du Laplacien, c'est-à-dire $a_{i,j} = \delta_{i,j}$, si Ω est convexe, alors $u \in H^2(\Omega)$ dés que $f \in L^2(\Omega)$.

Idée de démonstration du théorème 2.11, première partie
On se ramène par la technique dite des "cartes locales" au cas $\Omega = \mathbb{R}_+^N = \{(x_1, y), y \in \mathbb{R}^{N-1}, x_1 > 0\}$, et au problème suivant :

$$\begin{aligned} & u \in H_0^1(\Omega), \\ & \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

et on applique ensuite le théorème 2.15. Ce théorème montre que la solution de ce problème appartient à $H^2(\mathbb{R}_+^N)$. ■

La démonstration du théorème 2.15, due à L. Nirenberg [1] que nous énonçons un peu plus loin nécessite les lemmes techniques suivants, que nous enonçons pour $N = 2$, pour simplifier :

1. Louis Nirenberg (né en 1925) est un mathématicien Canadien qui a beaucoup contribué à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires.

Lemme 2.13 *Soit* $\Omega = \mathbb{R}^2_+ = \{(x_1, y), x_1 > 0, y \in \mathbb{R}\}$. *Soit* $g \in L^2(\Omega)$ *et, pour* $h > 0$, $\Psi_h g$ *défini par :*$\Psi_h g = \frac{1}{h}(g_h - g)$, *où* $g_h \in H^1_0(\Omega)$ *est définie par* $g_h(x) = g(x_1, x_2 + h)$. *Alors* $\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \|g\|_{L^2(\Omega)}$.

Démonstration Soit $g \in L^2(\Omega)$, par définition,

$$\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\int_\Omega \Psi_h g \; v \,\mathrm{d}x, \; v \in H^1_0(\Omega), \; \|v\|_{H^1(\Omega)} \le 1\},$$

et donc, par densité de $C^\infty_c(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$,

$$\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\int_\Omega \Psi_h g \; v \,\mathrm{d}x, \; v \in C^\infty_c(\Omega), \; \|v\|_{H^1(\Omega)} \le 1\}.$$

Soit $v \in C^\infty_c(\Omega)$ tel que $\|v\|_{H^1(\Omega)} \le 1$.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Psi_h g \; v \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} (g(x_1, x_2 + h) - g(x_1, x_2))\, v(x_1, x_2) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} g(x_1, \tilde{x}_2) v(x_1, \tilde{x}_2 - h) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}\tilde{x}_2 - \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} g(x_1, x_2) v(x_1, x_2) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \\
&= -\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} g(x_1, x_2) \frac{v(x_1, x_2 - h) - v(x_1, x_2)}{-h} \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2.
\end{aligned}$$

Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\int_\Omega \Psi_h g \; v \,\mathrm{d}x| \le \|g\|_{L^2(\Omega)} \; \|\frac{v(\cdot, \cdot - h) - v(\cdot, \cdot)}{-h}\|_{L^2(\Omega)} \le \|g\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \le \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

On en déduit que $\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \|g\|_{L^2(\Omega)}$. ■

Lemme 2.14 *Sous les hypothèses du lemme 2.13, soit* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, *alors* $\Psi_h u \to D_2 u$ *dans* $\mathcal{D}^*$ *lorsque* $h \to 0$.

Démonstration On pose $\mathcal{D} = C^\infty_c(\Omega)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$; on veut montrer que

$$\int_\Omega \Psi_h u \; \varphi \,\mathrm{d}x \to -\int_\Omega u \partial_2 \varphi \,\mathrm{d}x = \langle D_2 u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*, \mathcal{D}} \text{ lorsque } h \to 0.$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Psi_h u \varphi \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} \frac{u(x_1, x_2 + h) - u(x_1, x_2)}{h} \varphi(x_1, x_2) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \\
&= -\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} u(x_1, x_2) \frac{\varphi(x_1, x_2 - h) - \varphi(x_1, x_2)}{-h} \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2.
\end{aligned}$$

Mais $\frac{\varphi(x_1, x_2 - h) - \varphi(x_1, x_2)}{-h} \to \partial_2 \varphi$ uniformément lorsque $h \to 0$, et le support de cette fonction est inclus dans un compact K de Ω, indépendant de h si $|h| < 1$. Donc $\lim_{h \to 0} \int_\Omega \Psi_h u \; \varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u \partial_2 \varphi \,\mathrm{d}x$. ■

Théorème 2.15 (Nirenberg) *Soit* $\Omega = \mathbb{R}^N_+ = \{(x_1, y), y \in \mathbb{R}^{N-1}, x_1 > 0\}$ *et* $f \in L^2(\Omega)$*, et soit* $u \in H^1_0(\Omega)(\mathbb{R}^N_+)$ *solution du problème suivant :*

$$\begin{aligned} &u \in H^1_0(\Omega), \\ &\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x, \forall v \in H^1_0(\Omega). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Alors $u \in H^2(\mathbb{R}^N_+)$.

Démonstration On va effectuer la démonstration dans le cas $N = 2$. Soit $u \in H^1_0(\Omega)$ solution de (2.11), u vérifie donc :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega u\, v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega g v \,\mathrm{d}x, \forall v \in H^1_0(\Omega), \text{ où } g = u + f \in L^2(\Omega).$$

On a donc

$$(u, v)_{H^1_0(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^2_+} g\, v \,\mathrm{d}x \leq \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \tag{2.12}$$

puisque, par définition, $\|g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\int_{\mathbb{R}^2_+} g\, v \,\mathrm{d}x,\ v \in H^1_0(\Omega), \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1\}$, où, comme d'habitude, on confond l'application T_g qui à $v \in H^1_0(\Omega)$ associe $\int gv \,\mathrm{d}x$, qui est donc un élement de $H^{-1}(\Omega)$, avec la (classe de) fonction(s) $g \in L^2(\Omega)$. On prend $v = u$ dans (2.12). On obtient $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}$.
Pour montrer la régularité sur $D_2 u$, on introduit la fonction $\Psi_h u = \frac{1}{h}(u_h - u)$ où $u_h \in H^1_0(\Omega)$ est définie par $u_h(x) = u(x_1, x_2 + h)$. Comme u vérifie (2.11), u_h vérifie $\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f_h v \,\mathrm{d}x$ où $f_h(x) = f(x + h)$, et donc $\Psi_h u = \frac{1}{h}(u_h - u)$ appartient à $H^1_0(\Omega)$ et vérifie

$$\int_\Omega \nabla \Psi_h u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \Psi_h f v \,\mathrm{d}x \text{ pour tout } v \in H^1_0(\Omega).$$

On en déduit que $(\Psi_h u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \Psi_h g v \,\mathrm{d}x$, et donc que $\|\Psi_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)}$. Par le lemme 2.13, comme $g \in L^2(\Omega)$, on a donc

$$\|\Psi_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Prenons maintenant $h = \frac{1}{n}$ et faisons $n \to +\infty$. Par ce qui précéde, la suite $(\Psi_{\frac{1}{n}} u)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1_0(\Omega)$, il existe donc une sous-suite encore notée $(\Psi_{\frac{1}{n}} u)_{n \in \mathbb{N}}$, et $w \in H^1_0(\Omega)$ telle que $\Psi_{\frac{1}{n}} u \to w$ dans $H^1_0(\Omega)$ faible (c'est-à-dire $S(\Psi_{\frac{1}{n}} u) \to S(w)$ pour tout $S \in H^{-1}(\Omega)$). ■

Donc $\Psi_{\frac{1}{n}} u \to w$ dans $\mathcal{D}^*$. Mais par le lemme 2.14, $\Psi_{\frac{1}{n}} u \to D_2 u$ dans $\mathcal{D}^*$. Donc $D_2 u = w \in H^1_0(\Omega)$, et par conséquent, $D_1 D_2 u \in L^2(\Omega)$ et $D_2 D_2 u \in L^2(\Omega)$. Pour conclure, il ne reste plus qu'à montrer que $D_1 D_1 u \in L^2(\Omega)$. Pour cela, on utilise l'équation satisfaite par u. En effet, comme u est solution faible de (2.4), on a $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}^*$, et donc $D_1 D_1 u = f - D_2 D_2 u$ ce qui prouve que $D_1 D_1 u \in L^2(\Omega)$. Ceci termine la preuve. ■

Remarque 2.16 (Plus de régularité. . .)

1. Supposons que $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$ et que Ω est à frontière C^2. On a déjé vu que si $f \in L^2(\Omega)$ alors $u \in H^2(\Omega)$. On peut montrer que si $f \in L^p(\Omega)$ alors $u \in W^{2,p}(\Omega)$ $(2 \leq p < +\infty)$.
2. Supposons maintenant qu'on ait seulement $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$. On peut montrer (c'est un résultat de Meyers) qu'il existe $p^* > 2$ tel que si $f \in L^p(\Omega)$ avec $2 \leq p \leq p^\star$, alors $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

3. Toujours dans le cas $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, on peut montrer (ce résultat est dû à Stampacchia [2]) que si $f \in L^p(\Omega)$, avec $p > \frac{N}{2}$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$.
4. Il est possible aussi de démontrer des résultat de régularité pour d'autres conditions aux limites. L'exercice 2.4 donne un exemple avec les conditions de Neuman, l'exercice 2.6 un exemple avec conditions de Fourier et l'exercice 2.7 traite l'exemple du système elliptique induit par l'équation de Schrödinger (qui est généralement présenté comme une équation dont l'inconnue prend ses valeurs dans $\mathbb{C}$).

2.4 Principe du maximum

Question. (Positivité de la solution faible.) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que les fonctions $a_{i,j}$ vérifient (2.1). Soit $f \in L^2(\Omega)$ et u la solution de (2.4). On suppose que $f \geq 0$ p.p.. A-t-on $u \geq 0$ p.p. ?

Remarque 2.17 On suppose que $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $-\Delta u = f$ dans Ω et $u = 0$ sur le bord de Ω (la fonction u est donc une solution classique avec $a_{i,j} = 0$ si $i \neq 1$ et $a_{i,j} = 1$ si $i = j$). On suppose aussi que $f > 0$ dans Ω. On va montrer que $u \geq 0$ dans Ω. Pour cela, on raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $a \in \Omega$ t.q. $u(a) < 0$. On choisit alors $x \in \Omega$ t.q. $u(x) = \min\{u(y), y \in \overline{\Omega}\}$ (un tel x existe car $\overline{\Omega}$ est compact, u continue et $u = 0$ sur le bord de Ω). On a alors

$$\partial_i u(x) = 0 \text{ et } \partial_i^2 u(x) \geq 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Ceci donne $\Delta u(x) \geq 0$ en contradiction avec $\Delta u(x) = -f(x) < 0$. On obtient donc finalement que $u(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$. Un argument supplémentaire (consistant à considérer, par exemple, la fonction $u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon x_1^2$ pour $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon \to 0$) permet de remplacer l'hypothèse $f > 0$ par $f \geq 0$. La question posée au début de ce paragraphe consiste donc à étendre cette propriété de positivité aux solutions faibles.

Nous donnons maintenant deux petits lemmes, dûs à G. Stampacchia.

Lemme 2.18 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) et $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que φ' est bornée et $\varphi(0) = 0$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_i u$ p.p. (pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$). (La notation $\varphi(u)$ désigne la fonction $\varphi \circ u$.)*

Démonstration Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c^\infty(\Omega)$ t.q. $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$ (quand $n \to +\infty$), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &u_n \to u \text{ dans } L^2(\Omega), \\ &D_i u_n \to D_i u \text{ dans } L^2(\Omega), \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, N\}. \end{aligned}$$

Après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut même supposer qu'il existe $F \in L^2(\Omega)$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, $F_i \in L^2(\Omega)$ t.q.

$$\begin{aligned} &u_n \to u \text{ p.p. et } |u_n| \leq F \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ &D_i u_n \to D_i u \text{ p.p. et } |D_i u_n| \leq F_i \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N},\ i \in \{1, \ldots, N\}. \end{aligned}$$

On a alors $\varphi(u_n) \in C_c^1(\Omega)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \{1, \ldots, N\}$,

$$D_i\varphi(u_n) = \partial_i\varphi(u_n) = \varphi'(u_n)\partial_i u_n.$$

2. Mathématicien italien né à Naples en 1922, mort en 1978, spécialiste de calcul des variations et des équations aux dérivées partielles, entre autres.

On pose $M = \sup\{|\varphi'(s)|, s \in \mathbb{R}\}$, de sorte que $|\varphi(s)| \leq M|s|$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\varphi(u_n) \to \varphi(u) \text{ p.p. et } |\varphi(u_n)| \leq MF \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $MF \in L^2(\Omega)$, le théorème de convergence dominée (dans $L^2(\Omega)$) donne $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ dans $L^2(\Omega)$. On a donc aussi $D_i\varphi(u_n) \to D_i\varphi(u)$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$. On rappelle maintenant que $D_i\varphi(u_n) = \varphi'(u_n)\partial_i u_n$. Comme

$$\begin{aligned}
&\varphi'(u_n) \to \varphi'(u) \text{ p.p.,}\\
&\partial_i u_n \to D_i u \text{ p.p.,}\\
&|\varphi'(u_n)\partial_i u_n| \leq MF_i \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée donne $\varphi'(u_n)\partial_i u_n \to \varphi'(u)D_i u$ dans $L^2(\Omega)$ et donc aussi dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$. Par unicité de la limite dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ on a donc $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_i u$ p.p. (et pour tout i). Finalement, on obtient donc que $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ (comme limite, pour la norme de $H^1(\Omega)$, de fonctions de $H_0^1(\Omega)$) et $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_i u$ p.p., pour tout i. ■

Lemme 2.19 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On définit u^+ par $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ Pour $x \in \Omega$. Alors, $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i u^+ = 1_{u\geq 0}D_i u = 1_{u>0}D_i u$ p.p. (pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$). En particulier on a $D_i u = 0$ p.p. (pour tout i) sur l'ensemble $\{u = 0\}$.*

Démonstration Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $\varphi_n \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(s) = 0 \text{ si } s \leq 0,\\
&\varphi_n(s) = \tfrac{n}{2}s^2 \text{ si } 0 < s < \tfrac{1}{n},\\
&\varphi_n(s) = s - \tfrac{1}{2n} \text{ si } \tfrac{1}{n} \leq s.
\end{aligned}$$

On a donc $\varphi_n(s) \to s^+$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ (quand $n \to +\infty$) et $|\varphi_n'(s)| \leq 1$ pour tout s et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Le lemme 2.18 donne $\varphi_n(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i(\varphi_n(u)) = \varphi_n'(u)D_i u$ p.p. (et pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$). D'autre part, on a

$$\varphi_n(u) \to u^+ \text{ p.p., } |\varphi_n(u)| \leq |u| \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le théorème de convergence dominée donne donc $\varphi_n(u) \to u^+$ dans $L^2(\Omega)$ (et donc que $D_i\varphi_n(u) \to D_i u^+$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$). Puis, on remarque que $\varphi_n'(u) \to 1_{\{u>0\}}$ p.p. et donc

$$\varphi_n'(u)D_i u \to 1_{\{u>0\}}D_i u \text{ p.p., } |\varphi_n'(u)D_i u| \leq |D_i u| \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N},$$

ce qui (toujours par le théorème de convergence dominée) donne $\varphi_n'(u)D_i u \to 1_{\{u>0\}}D_i u$ dans $L^2(\Omega)$ (et donc dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$). Comme $D_i(\varphi_n(u)) = \varphi_n'(u)D_i u$ on en déduit (par unicité de la limite dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$) que $D_i u^+ = 1_{\{u>0\}}D_i u$ p.p.. La suite $(\varphi_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de $H_0^1(\Omega)$, elle converge dans $H^1(\Omega)$ vers u^+. On a bien montré, finalement, que $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i u^+ = 1_{\{u>0\}}D_i u$ p.p. (et pour tout i).

En considérant la suite $(\psi_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ avec ψ_n définie par $\psi_n(s) = \varphi(s+1/n) - 1/(2n)$, un raisonnement analogue montre que $D_i u^+ = 1_{\{u\geq 0\}}D_i u$ (la différence essentielle entre φ_n et ψ_n est que $\varphi_n'(0) = 0$ alors que $\psi_n'(0) = 1$). ■

Remarque 2.20 Le lemme 2.19 peut se généraliser à toute fonction lipschitzienne s'annulant en 0, on obtient ainsi le résultat suivant. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) et φ une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, s'annulant en 0. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On a alors $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_i u$ p.p. (pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$). Un exemple important consiste à prendre $\varphi(s) = (s-k)^+$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, avec k donné dans $\mathbb{R}_+$. On obtient ainsi, pour $u \in H_0^1(\Omega)$, $(u-k)^+ \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i\varphi(u) = 1_{\{u>k\}}D_i u = 1_{\{u\geq k\}}D_i u$ p.p..

On peut maintenant répondre à la question posée au début de ce paragraphe.

Théorème 2.21 (Positivité de la solution faible) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que les $a_{i,j}$ vérifient (2.1). Soit $f \in L^2(\Omega)$ et u la solution de* (2.4)*. On suppose que $f \geq 0$ p.p.. On a alors $u \geq 0$ p.p..*

Démonstration On suppose que $f \leq 0$ p.p. et on va montrer que $u \leq 0$ p.p. (en changeant f en $-f$ et u et $-u$ on obtient le résultat désiré). Comme u est solution de (2.4), on a

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

On choisit, dans cette égalité, $v = u^+$ et on obtient

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 1_{\{u \geq 0\}}(x) dx \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i u^+(x) dx = \int_\Omega f(x) u^+(x) dx \leq 0.$$

On en déduit que $\alpha \|u^+\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \alpha \int_\Omega |\nabla u^+(x)|^2 dx \leq \int_\Omega f(x) u^+(x) dx \leq 0$, et donc $u^+ = 0$ p.p., c'est-à-dire $u \leq 0$ p.p.. ■

Remarque 2.22 Nous n'avons considéré ici que les problèmes elliptiques avec condition nulle au bord du domaine. Il est assez facile de remplacer la condition "$u = 0$" sur le bord de Ω par "$u = g$" à condition que Ω soit assez régulier pour que l'opérateur "trace", noté γ et introduit au chapitre précédent, soit bien défini et que $g = \gamma(G)$ avec $G \in H^1(\Omega)$. On cherche alors alors la fonction $u - G$ comme solution faible d'un problème elliptique posé dans $H_0^1(\Omega)$ avec un second membre dans $H^{-1}(\Omega)$. La solution faible existe bien et est unique. On peut alors montré, par une méthode voisine de celle donnée dans le théorème 2.21 que, si $f = 0$ et $A \leq g \leq B$ p.p. (avec $A, B \in \mathbb{R}$), on a alors $A \leq u \leq B$ p.p. (où u est la solution faible du problème elliptique avec 0 comme second membre et g comme condition au bord). C'est ce résultat que l'on appelle "principe du maximum".

2.5 Exercices

Exercice 2.1 (Régularité en dimension 1**)** *Corrigé 2.1*

$f \in L^2(]0,1[)$. On rappelle (cf. cours) qu'il existe un et un seul u solution de

$$\begin{aligned} & u \in H_0^1(]0,1[), \\ & \int_0^1 Du(t) Dv(t) dt = \int_0^1 f(t) v(t) dt, \ \forall v \in H_0^1(]0,1[). \end{aligned} \tag{2.13}$$

On suppose maintenant que $f \in C([0,1], \mathbb{R}) (\subset L^2(]0,1[)$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, pour tout $x \in [0,1]$. Soit u la solution de (2.13). Montrer que, pour tout $\varphi \in C([0,1], \mathbb{R})$, on a

$$\int_0^1 (Du(t) + F(t)) \varphi(t) dt = \int_0^1 c \varphi(t) dt$$

avec un certain $c \in \mathbb{R}$ convenablement choisi (et indépendant de φ).
En déduire que $Du = -F + c$ p.p., puis que u est deux fois continûment dérivable sur $]0,1[$ et $-u''(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0,1[$ (et que $u(0) = u(1) = 0$).

Exercice 2.2 (Décomposition spectrale en dimension 1**)** *Corrigé 2.2*

On reprend l'exercice précédent. On pose $E = L^2(]0,1[)$ (muni de la norme $\|\cdot\|_2$). Pour $f \in E$, on rappelle qu'il existe un et un seul u solution de (2.13).

On note T l'application de E dans E qui à f associe u (solution de (2.13), noter que $H_0^1(]0,1[) \subset E$). On rappelle que T est un opérateur linéaire compact autoadjoint de E dans E.

1. Soit $\lambda \in \mathcal{VP}(T)$. Montrer qu'il existe $u \in C([0,1],\mathbb{R}) \cap C^2(]0,1[,\mathbb{R})$, $u \neq 0$, tel que $-\lambda u'' = u$, sur $]0,1[$ et $u(0) = u(1) = 0$.
2. Montrer que $\mathcal{VP}(T) = \{\frac{1}{k^2\pi^2},\ k \in \mathbb{N}^\star\}$ et $\sigma(T) = \mathcal{VP}(T) \cup \{0\}$.
3. Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $c_n = 2\int_0^1 f(t)\sin(n\pi t)dt$. Montrer que :
$$\|f - \sum_{p=1}^{n} c_p \sin(p\pi\cdot)\|_2 \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$
(Comparer avec les séries de Fourier. . . ,)
4. Soit $\mu \in \mathbb{R}^\star$. En utilisant l'alternative de Fredholm, donner une C.N.S. sur $f \in E$ pour que le problème suivant ait une solution :
$$\begin{aligned}&u \in H_0^1(]0,1[),\\ &\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt + \mu\int_0^1 u(t)v(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt,\ \forall v \in H_0^1(]0,1[).\end{aligned}$$

Exercice 2.3 (Problème elliptique à coefficients non bornés)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et $p : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable t.q. $\inf\{p(x),\, x \in \Omega\} = a > 0$. On pose $H^1(p,\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)$ t.q. $D_i u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ et $p\, D_i u \in L^2(\Omega)$ pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}\}$.

On rappelle que $D_i u$ désigne la dérivée, au sens des distributions, de u dans la direction x_i, la variable de $\mathbb{R}^N$ étant notée $x = (x_1,\ldots,x_N)^t$.

Pour $u \in H^1(p,\Omega)$, on définit $\|u\|$ par $\|u\|^2 = \|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^{N}\|p\, D_i u\|_2^2$, avec $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$.

1. (Etude de l'espace fonctionnel.)

(a) Montrer que $H^1(p,\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

(b) Montrer que $H^1(p,\Omega)$, muni de la norme $\|\cdot\|$, est un espace de Hilbert. [On pourra remarquer qu'une suite de Cauchy dans $H^1(p,\Omega)$ est aussi de Cauchy dans $H^1(\Omega)$.]

On pose $H_0^1(p,\Omega) = H^1(p,\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

2. (Espace fonctionnel, suite.) Montrer que $H_0^1(p,\Omega)$ est un s.e.v. fermé de $H^1(p,\Omega)$.

3. (solution faible.) Soit $h \in L^2(\Omega)$, montrer qu'il existe un et un seul u t.q.

$$u \in H_0^1(p,\Omega), \tag{2.14}$$

$$\int_\Omega p^2(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega h(x)v(x)dx,\ \forall v \in H_0^1(p,\Omega). \tag{2.15}$$

4. (Précisions. . .)

(a) On suppose ici que $p^2 \in L^1_{loc}(\Omega)$. Montrer que $C_c^\infty(\Omega) \subset H_0^1(p,\Omega)$.

(b) On prend maintenant $N = 1$ et $\Omega =]0,1[$. Donner un exemple de fonction p (avec $p : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable et t.q. $\inf\{p(x),\, x \in \Omega\} > 0$) pour lequel $C_c^\infty(\Omega) \cap H_0^1(p,\Omega) = \{0\}$ (cette question est plus difficile).

Exercice 2.4 (Problème de Neumann) *Corrigé 2.3*

Soient Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), à frontière lipschitzienne. On pose $H = \{u \in H^1(\Omega),\, \int_\Omega u(x)dx = 0\}$. On rappelle que sur un tel ouvert, une fonction L^1_{loc} dont les dérivées (au sens des dérivées par transposition) sont nulles est nécessairement constante (c'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. cette fonction soit égale à C p.p.).

1. (Inégalité de “Poincaré moyenne".) Montrer que H est un s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$ et que, sur H, la norme H^1 est équivalente à la norme $\|\cdot\|_m$ définie par $\|u\|_m = \|(|\nabla u|)\|_{L^2(\Omega)}$.
   [On pourra montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'il existe C, ne dépendant que Ω, t.q. $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_m$, pour tout $u \in H$.]

2. (Caractérisation de $(H^1(\Omega))'$.) Soit $T \in (H^1(\Omega))'$, Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$ t.q.

$$\langle T, u\rangle_{(H^1(\Omega))',H^1(\Omega)} = a\int_\Omega u(x)dx + \int_\Omega F(x)\cdot\nabla u(x)dx,\ \forall u \in H^1(\Omega). \tag{2.16}$$

   [On pourra considérer $T_{|_H}$ et utiliser une injection convenable de H dans $L^2(\Omega)^N$.]

   Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i,j = 1,\ldots,N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i,j = 1,\ldots,N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$. On cherche u solution de

$$\begin{aligned} &u \in H^1(\Omega),\\ &\int_\Omega A(x)\nabla u(x)\nabla v(x)dx = a\int_\Omega v(x)dx + \int_\Omega F(x)\cdot\nabla v(x)dx,\ \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.17}$$

3. (Existence et unicité.)
   (a) Si $a \neq 0$, montrer que (2.17) n'a pas de solution.
   (b) Si $a = 0$, montrer que (2.17) a une solution et que cette solution est unique si l'on demande qu'elle appartienne à H.
   (c) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, $a_{i,j} \in C^\infty(\bar\Omega,\mathbb{R})$ pour tout $i,j = 1,\ldots,N$, $F \in C^\infty(\bar\Omega,\mathbb{R}^N)$, Ω est de classe C^∞ et que la solution (appartenant à H) de (2.17) est aussi dans $C^\infty(\bar\Omega,\mathbb{R})$, montrer que $-\mathrm{div}(A\nabla u) = -\mathrm{div}F$, dans Ω, et que $A\nabla u\cdot\mathbf{n} = F\cdot\mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$, où $\mathbf{n}$ est la normale à $\partial\Omega$, extérieure à Ω.

4. (Dépendance par rapport aux paramètres.) On suppose $a = 0$ et on note u la solution (appartenant à H) de (2.17). On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in H$ est la solution de (2.17) avec A_n au lieu de A et F_n au lieu de F (et $a = 0$). On suppose que
   – $A_n = (a_{i,j}^{(n)})_{i,j=1,\ldots,N}$ vérifie, pour tout n, les mêmes hypothèses que A avec un α indépendant de n,
   – $(a_{i,j}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$, pour tout $i,j = 1,\ldots,N$,
   – $a_{i,j}^{(n)} \to a_{i,j}$ *p.p.*, quand $n \to \infty$, pour tout $i,j = 1,\ldots,N$,
   – $F_n \to F$ dans $L^2(\Omega)^N$, quand $n \to \infty$.
   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H, puis que $u_n \to u$ faiblement dans $H^1(\Omega)$ (quand $n \to \infty$) et enfin que $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$.

5. (Régularité H^2 par la technique des réflexions, cette question est indépendante de la précédente.). On suppose que $a = 0$ et qu'il existe $f \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_\Omega F(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x)dx$, pour tout $v \in H^1(\Omega)$. On note u la solution (appartenant à H) de (2.17). On suppose que $N = 2$ et que $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. On pose $\Omega_s =]-1,1[\times]0,1[$. On définit A, f et u sur Ω_s en posant $a_{i,j}(x_1,x_2) = a_{i,j}(-x_1,x_2)$ si $(x_1,x_2) \in]-1,0[\times]0,1[$ et $i = j$, $a_{i,j}(x_1,x_2) = -a_{i,j}(-x_1,x_2)$ si $(x_1,x_2) \in]-1,0[\times]0,1[$ et $i \neq j$, $f(x_1,x_2) = f(-x_1,x_2)$ si $(x_1,x_2) \in]-1,0[\times]0,1[$ et $u(x_1,x_2) = u(-x_1,x_2)$ si $(x_1,x_2) \in]-1,0[\times]0,1[$. Montrer que u est solution de (2.17), avec Ω_s au lieu de Ω.
En utilisant ainsi plusieurs réflexions, montrer (en se ramenant au théorème de régularité locale vu en cours) que $u \in H^2(\Omega)$ dans le cas $A(x) = Id$ pour tout $x \in \Omega$.

Exercice 2.5 (Modélisation d'un problème de contact)
On pose $B = \{x \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 2\}$, $I =]-1,1[$ ($\subset \mathbb{R}$), et $\Omega = B \setminus [-1,1] \times \{0\}$ (Ω est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$). On note $\partial B = \overline{B} - B$. On rappelle que $|x|$ désigne la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^2$ et $x \cdot y$ le produit scalaire correspondant de x et y ($\in \mathbb{R}^2$).
Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^\infty(I)$ t.q. $g \geq 0$ p.p. (sur I). On s'intéresse au problème suivant.

$$
\begin{aligned}
-\Delta u(x) &= f(x),\ x \in \Omega, && (2.18)\\
u(x) &= 0,\ x \in \partial B, && (2.19)\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,0^+) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x,0^-),\ x \in I, && (2.20)\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,0^+) &= g(x)(u(x,0^+) - u(x,0^-)),\ x \in I. && (2.21)
\end{aligned}
$$

1. (Recherche d'une formulation faible)
   On suppose, dans cette question, que f est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et g une fonction continue sur I. On note $\Omega_+ = \Omega \cap \{(x,y),\ y > 0\}$ et $\Omega_- = \Omega \cap \{(x,y),\ y < 0\}$. Soit $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ t.q. $u_{|\Omega_+} \in C^2(\overline{\Omega_+})$ et $u_{|\Omega_-} \in C^2(\overline{\Omega_-})$. Noter alors que toutes les expressions dans (2.18)-(2.21) ont bien un sens. On a, par exemple, $u(x,0^+) = \lim_{y\to 0,\, y>0} u(x,y)$.
   Montrer que u est solution "classique" de (2.18)-(2.21) (c'est-à-dire vérifie (2.18) pour tout $x \in \Omega$, (2.19) pour tout $x \in \partial B$ et (2.20),(2.21) pour tout $x \in I$) si et seulement si u vérifie :
   $$
   \left\{
   \begin{aligned}
   &u(x) = 0,\ \forall x \in \partial B,\\
   &\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx +\\
   &\int_I g(x)(u(x,0^+) - u(x,0^-))(v(x,0^+) - v(x,0^-))dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx,
   \end{aligned}
   \right. \qquad (2.22)
   $$
   pour tout $v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ t.q. $v_{|\Omega_+} \in C^2(\overline{\Omega_+})$, $v_{|\Omega_-} \in C^2(\overline{\Omega_-})$ et $v(x) = 0$ pour tout $x \in \partial B$. Noter que dx désigne l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue (1 ou 2 dimensionnelle).
2. (Construction de l'espace fonctionnel) On se donne une fonction $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+)$ t.q. $\rho(x) = 0$, si $|x| \geq 1$, et d'intégrale 1 (sur $\mathbb{R}^2$). Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit ρ_n par $\rho_n(x) = n^2\rho(nx)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.
   (a) (Trace sur ∂B, sans "cartes locales") Soit $u \in H^1(\Omega)$. Pour $n > 5$, on pose $u_n(x) = \int_\Omega u(y)\rho_n(x(1-\frac{1}{n}) - y)dy$, pour $x \in D$, avec $D = \{x \in B,\ \frac{3}{2} < |x| < 2\}$. Montrer que $u_n \in C^\infty(\overline{D})$, et que $u_n \to u_{|D}$, dans $H^1(D)$, quand $n \to \infty$.
   En déduire qu'il existe un opérateur linéaire continu γ de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(]0,2\pi[)$ t.q. $\gamma(u)(\theta) = u(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ p.p. en $\theta \in]0,2\pi[$ si $u \in H^1(\Omega)$ et u est continue sur $\overline{B} \setminus [-1,1] \times \{0\}$.

(b) Montrer qu'il existe γ_+ [resp. γ_-] linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(I)$ t.q. $\gamma_+(u)(x) = u(x, 0+)$ [resp. $\gamma_-(u)(x) = u(x, 0-)$] p.p. en $x \in I$ si $u \in H^1(\Omega)$ et $u_{|\Omega_+}$ est continue sur $\overline{\Omega_+}$ [resp. $u_{|\Omega_-}$ est continue sur $\overline{\Omega_-}$].

3. (Coerci(ti)vité)
   On pose $H = \text{Ker}\gamma$ (où γ est défini à la question précédente).
   Montrer qu'il existe C t.q. $\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C\||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}$ pour tout $u \in H$. [On pourra, par exemple, remarquer que $u_{|\Omega_+} \in H^1(\Omega_+)$ et $u_{|\Omega_-} \in H^1(\Omega_-)$]
4. (Existence et unicité de solutions faibles)
   On rappelle que $H = \text{Ker}\gamma$. Montrer qu'il existe un et un seul u solution de (2.23).

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_I g(x)(\gamma_+ u(x) - \gamma_- u(x))(\gamma_+ v(x) - \gamma_- v(x)) dx \\ = \displaystyle\int_\Omega f(x) v(x) dx, \ \forall v \in H. \end{array}\right. \tag{2.23}$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la solution de (2.23) avec g t.q. $g(y) = n$, pour tout $y \in I$. Montrer que $u_n \to u$ (en un sens à préciser), quand $n \to \infty$, où u est la (unique) solution (faible) de $-\Delta u = f$ dans B, $u = 0$ sur ∂B.

Exercice 2.6 (De Fourier à Dirichlet...)

Soient $\sigma \ge 0$, $f \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^{N-1})$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{array}{l} -\Delta u(x) + u(x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}^N_+, \\ -\partial_1 u(0, y) + \sigma u(0, y) = g(y), \ y \in \mathbb{R}^{N-1}. \end{array} \tag{2.24}$$

1. Donner une définition de solution “classique” de (2.24) et de solution “faible” de (2.24).
2. Montrer l'existence et l'unicité de la solution faible de (2.24).
3. Montrer que si $g = 0$ presque partout, la solution faible de (2.24) (trouvée à la question précédente) appartient à $H^2(R^N_+)$.
4. Toujours lorsque $g = 0$ presque partout, on note u_n la solution forte associée à $\sigma = n$. Montrer que u_n converge dans $H^1(\mathbb{R}^N_+)$ vers u solution faible de :

$$\begin{array}{l} -\Delta u(x) + u(x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}^N_+, \\ u(0, y) = 0, \ y \in \mathbb{R}^{N-1}. \end{array} \tag{2.25}$$

Exercice 2.7 (Equation de Schrödinger)

Soit $N \ge 1$. On note Ω la boule unité de $\mathbb{R}^N$ (en fait, les résultats de cet exercice restent vrais si Ω un ouvert borné “assez régulier" de $\mathbb{R}^N$).

Pour $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$, on s'intéresse au système :

$$\begin{array}{l} -\Delta u_1 + u_2 = f_1 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta u_2 - u_1 = f_2 \text{ dans } \Omega, \end{array} \tag{2.26}$$

avec diverses conditions aux limites.

1. On considère dans cette première question la condition aux limites :

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{2.27}$$

Soit $f_1,\, f_2 \in L^2(\Omega)$, on dit que $(u_1,\, u_2)$ est solution faible du problème (2.26)-(2.27) si

$$\begin{aligned}
&u_1 \in H_0^1(\Omega),\ u_2 \in H_0^1(\Omega),\\
&\int_\Omega \nabla u_1(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx + \int_\Omega u_2(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f_1(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi \in H_0^1(\Omega),\\
&\int_\Omega \nabla u_2(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx - \int_\Omega u_1(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f_2(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.28}$$

(a) Montrer que le problème (2.28) admet une et une seule solution. [Utiliser l'espace $V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.]

(b) Montrer que le problème (2.26)-(2.27) admet une et une seule solution au sens suivant : $u_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u_2 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et les équations (2.26) sont satisfaites $p.p.$ sur Ω. [Utiliser, en particulier, la question précédente et un théorème de régularité vu en cours. Ne pas oublier de montrer aussi l'unicité.]

   On suppose maintenant que $f_1, f_2 \in C^\infty(\bar\Omega)$. Montrer que $u_1,\, u_2 \in C^\infty(\bar\Omega)$. [Utiliser aussi des théorèmes de régularité vu en cours.]

(c) Pour $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, soit $u = (u_1, u_2)$ la solution de (2.28), on note $u = T(f)$. Montrer que l'opérateur $T : f \mapsto u$ est un opérateur linéaire continu et compact de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dans lui-même.

2. On considère dans cette deuxième question la condition aux limites :

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0,\ \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{2.29}$$

où n désigne le vecteur normal à $\partial\Omega$, extérieure à Ω.

Pour résoudre le problème (2.26)-(2.29), on va introduire un paramètre, $n \in \mathbb{N}^\star$, destiné à tendre vers l'infini.

Soit $f_1,\, f_2 \in L^2(\Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on s'intéresse au système :

$$\begin{aligned}
-\Delta u_1 + u_2 + \frac{1}{n}u_1 &= f_1 \text{ dans } \Omega,\\
-\Delta u_2 - u_1 + \frac{1}{n}u_2 &= f_2 \text{ dans } \Omega,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

avec la condition aux limites (2.29).

On dit que $(u_1,\, u_2)$ est solution faible du problème (2.30)-(2.29) si

$$\begin{aligned}
&u_1 \in H^1(\Omega),\ u_2 \in H^1(\Omega),\\
&\int_\Omega \nabla u_1(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx + \int_\Omega (u_2(x) + \frac{1}{n}u_1(x))\varphi(x)dx = \int_\Omega f_1(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi \in H^1(\Omega),\\
&\int_\Omega \nabla u_2(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx + \int_\Omega (\frac{1}{n}u_2(x) - u_1(x))\varphi(x)dx = \int_\Omega f_2(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi \in H^1(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Noter aussi que $(u_1,\, u_2)$ est solution faible du problème (2.26)-(2.29) si $(u_1,\, u_2)$ est solution de (2.31) en remplaçant $\frac{1}{n}$ par 0.

Soit $f_1,\, f_2 \in L^2(\Omega)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

Montrer que le problème (2.31) admet une et une seule solution, que l'on note $(u_1^{(n)}, u_2^{(n)})$ dans la suite.

(b) Montrer que :

$$\|u_1^{(n)}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_2^{(n)}\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|f_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f_2\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En déduire que les suites $(u_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$, et $(u_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont bornées dans $H^1(\Omega)$.

(c) Montrer qu'il existe une et une seule solution au problème (2.31) obtenu en remplaçant $1/n$ par 0, c'est à dire une et une solution faible au problème (2.26)-(2.29). [Pour l'existence, utiliser les suites $(u_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$, et $(u_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de la question précédente et faire tendre n vers $+\infty$. Montrer ensuite l'unicité.]

(d) Montrer que le problème (2.26)-(2.29) admet une et une seule solution au sens suivant : $u_1 \in H^2(\Omega)$, $u_2 \in H^2(\Omega)$, les équations (2.26) sont satisfaites $p.p.$ sur Ω et les équations (2.29) sont satisfaites $p.p.$ (pour la mesure de lebesgue $N-1$-dimensionnelle) sur $\partial\Omega$ en utilisant l'opérateur "trace" (vu en cours) de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ pour donner un sens à $\frac{\partial u_1}{\partial n}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial n}$.

On suppose maintenant que $f_1, f_2 \in C^\infty(\bar\Omega)$. Montrer que $u_1,\, u_2 \in C^\infty(\bar\Omega)$. [Utiliser aussi des théorèmes de régularité vu en cours.]

(e) Pour $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, soit $u = (u_1, u_2)$ la solution faible de (2.26)-(2.29), on note $u = T(f)$. Montrer que l'opérateur $T\,:\, f \mapsto u$ est un opérateur linéaire continu et compact de $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ dans lui-même.

3. De manière similaire, résoudre le problème (2.26) avec la condition aux limites :

$$u_1 = 0,\ \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Exercice 2.8 (A la limite de H^{-1})

Partie I, décomposition dans $H_0^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \ge 1$.

1. Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\varphi' \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi(0) = 0$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On note $\varphi(u)$ la fonction (de Ω dans $\mathbb{R}$) $x \mapsto \varphi(u(x))$. Montrer que $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et que $D_i\varphi(u) = \varphi'(u) D_i u$ $p.p.$ pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$ (où $\varphi'(u)$ désigne la fonction $x \mapsto \varphi'(u(x))$). [Reprendre la méthode vue en cours.]

On définit maintenant φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned}
&\varphi(s) = s,\ \text{pour } 0 \le s \le 1,\\
&\varphi(s) = -\tfrac{s^2}{2} + 2s - \tfrac{1}{2},\ \text{pour } 1 < s \le 2,\\
&\varphi(s) = \tfrac{3}{2},\ \text{pour } 2 < s,\\
&\varphi(s) = -\varphi(-s),\ \text{pour } s < 0.
\end{aligned}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, On définit φ_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\varphi_k(s) = k\varphi(\frac{s}{k})$ pour $s \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\varphi_k(s) \to s$ et $\varphi_k'(s) \to 1$ quand $k \to \infty$ et que $|\varphi_k(s)| \le |s|$, $\varphi_k'(s) \le 1$.

3. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $\varphi_k(u) \in H_0^1(\Omega)$, pour tout $k \in N^\star$, et que $\varphi_k(u) \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$, quand $k \to \infty$.

4. En déduire que, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_1 \in L^\infty(\Omega)$ et $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u = u_1 + u_2$ et $\|u_2\|_{H_0^1} \le \varepsilon$.

Partie II, Inégalité de Trudinger-Möser

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. On admet qu'il existe $C > 0$, ne dépendant que de Ω, t.q.

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C\sqrt{q}\|u\|_{H_0^1(\Omega)},\ \forall u \in H_0^1(\Omega),\ \forall q \in [1, \infty[.$$

(Noter que cette inégalité a été démontrée en T.D. avec q au lieu de $\sqrt{q}$.)

1. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le 1$. Montrer qu'il existe $\sigma > 0$ et $a > 0$, ne dépendant que de C (donné ci dessus) t.q. $e^{\sigma u^2} \in L^1(\Omega)$ et $\|e^{\sigma u^2}\|_{L^1(\Omega)} \le a$. [Développer e^s en puissances de $s \ldots$.]
2. En utilisant la partie I (et la question précédente), Montrer que $e^{\sigma u^2} \in L^1(\Omega)$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et tout $\sigma > 0$. En déduire que $e^{\sigma u^2} \in L^p(\Omega)$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, tout $\sigma > 0$ et tout $p \in [1, \infty[$.

Partie III, sur la résolution du problème de dirichlet

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in L^1(\Omega)$ t.q. $f\sqrt{|\ln(|f|)|} \in L^1(\Omega)$.

1. (Préliminaire.) Soit $\sigma > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^\star$, ne dépendant que de σ, t.q.
$$st \le \alpha e^{\sigma s^2} + \beta t\sqrt{|\ln t|} + \gamma t,\ \forall s, t \in \mathbb{R}_+^\star.$$
[On pourra, par exemple, remarquer que $st \le \max\{\beta t\sqrt{|\ln t|}, se^{(s^2/\beta^2)}\}$ puis choisir β et conclure.]
2. Montrer que $fu \in L^1(\Omega)$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et que l'application $T\ :\ u \mapsto \int_\Omega f(x)u(x)dx$ est un élément de $H^{-1}(\Omega)$.
3. Montrer qu'il existe un et un seul $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$.

Partie IV, contre-exemple

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$. On suppose que $0 \in \Omega$ et on se donne $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ t.q. $B_{2\delta} = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| < 2\delta\} \subset \Omega$.

1. Soit $\gamma \in]0, \frac{1}{2}[$. Montrer qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u(x) = (\ln|x|)^\gamma$ $p.p.$ sur B_δ. [On pose $v(x) = (\ln(|x|)^\gamma$. On rappelle qu'on a vu en T.D. que $v \in H^1(B_{2\delta})$. Il n'est pas demandé de redémontrer ce résultat.]
2. Montrer qu'il existe $f \in L^1(\Omega)$ t.q. $f(\ln|f|)^\theta \in L^1(\Omega)$ et $fu \notin L^1(\Omega)$ pour certains $u \in H_0^1(\Omega)$.
3. Montrer qu'il existe $f \in L^1(\Omega)$ t.q. $f(\ln|f|)^\theta \in L^1(\Omega)$ et t.q. il n'existe pas $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$.

Exercice 2.9 (Décomposition de Hodge) *Corrigé 2.4*

Soient Ω un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne de $\mathbb{R}^N$ ($N \ge 1$) et $f \in (L^2(\Omega))^N$.

Montrer qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ t.q.

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx,\ \ \forall\varphi \in H^1(\Omega).$$

En déduire qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ et $g \in (L^2(\Omega))^N$ t.q. $f = \nabla u + g$, p.p. dans Ω et $\int_\Omega g(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx = 0$ pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$.

On suppose maintenant que $g \in C^1(\bar{\Omega})$ et que $\Omega = (]0, 1[)^N$. Montrer que $\operatorname{div} g = 0$ sur Ω et que $g \cdot \mathbf{n} = 0$ p.p. (pour la mesure de Lebesgue $(N-1)-$dimensionnelle) sur $\partial\Omega$, où $\mathbf{n}$ est un vecteur normal à $\partial\Omega$.

Exercice 2.10 (Problème de Stokes, vitesse)

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) et $f = (f_1, \ldots, f_N)^t \in (L^2(\Omega))^N$. On pose $H = \{u \in (H_0^1(\Omega))^N;$ $\operatorname{div} u = 0$ p.p. dans $\Omega\}$. On rappelle que u est solution du problème de Stokes si :

$$u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in H, \ \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx, \ \forall v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in H. \quad (2.32)$$

On se propose ici de montrer qu'il existe une et une seule solution de (2.32) par une méthode de pénalisation. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère le problème suivant :

$$\begin{aligned} &u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in (H_0^1(\Omega))^N, \\ &\int_\Omega (\nabla u_i(x) \cdot \nabla v(x) + n(\operatorname{div} u(x)) D_i v(x)) dx = \int_\Omega f_i(x) v(x) dx, \ \forall v = H_0^1(\Omega), \ \forall i \in \{1, \ldots, N\}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

1. Montrer que (2.32) admet au plus une solution.
2. Montrer qu'il existe une et une seule solution à (2.33). [Utiliser le lemme de Lax-Milgram sur $(H_0^1(\Omega))^N$.] On note, dans la suite, $u^{(n)}$ cette solution.
3. Montrer que la suite $(u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $(H_0^1(\Omega))^N$ et que la suite $(\sqrt{n} \operatorname{div} u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$.
4. Montrer que, après extraction éventuelle d'une sous suite, $u^{(n)} \to u$ faiblement dans $(H_0^1(\Omega))^N$, quand $n \to \infty$, où u est solution de (2.32). En déduire (avec la question 1) que (2.32) admet une unique solution, notée u, et que $u^{(n)} \to u$ faiblement dans $(H_0^1(\Omega))^N$, quand $n \to \infty$ (sans extraction de sous suite).

Exercice 2.11 (Conditions aux limites de Vencel)

Notations et Rappels du cours
On note $H_p^1(0, 2\pi) = \{u \in H^1(]0, 2\pi[);\, u(0) = u(2\pi)\}$ (on rappelle que, si $u \in H^1(]0, 2\pi[)$, u admet toujours un représentant continu sur $[0, 2\pi]$ et on identifie u avec ce représentant continu).

Soit $B = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$. On rappelle qu'il existe une application $\gamma\,:\, H^1(\Omega) \to L^2(\partial B)$, linéaire, continue et t.q. $\gamma(u) = u$ p.p. sur ∂B si $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{B}, \mathbb{R})$.

Si $w \in L^2(\partial B)$, on définit $j(w) \in L^2(]0, 2\pi[)$ par $j(w)(\theta) = w(\cos\theta, \sin\theta)$, pour $\theta \in [0, 2\pi[$. L'application j est donc une isométrie de $L^2(\partial B)$ sur $L^2(]0, 2\pi[)$, de sorte que $\overline{g} = j o \gamma$ est linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(]0, 2\pi[)$.

On pose $H = \{u \in H^1(\Omega)\,;\, \overline{g}(u) \in H_p^1(0, 2\pi)\}$. On munit H du produit scalaire $(u/v)_H = (u/v)_{H^1(\Omega)} + (\overline{g}(u)/\overline{g}(v))_{H_p^1(0,2\pi)}$.

Partie I (Préliminaire d'analyse fontionnelle)

1. Montrer que $H_p^1(0, 2\pi)$ est une espace de Hilbert.
2. Montrer que H est une espace de Hilbert.

Partie II (Conditions aux limites de Vencel)
Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$, on définit r et θ par $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ t.q. $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.
Pour $u \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus (0, 0), \mathbb{R})$, on pose $u_r(x, y) = \frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ et $u_\theta(x, y) = -y\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + x\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$.
(Dans la suite, on pose $u_{\theta\theta} = (u_\theta)_\theta$, si $u \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R})$.)
Pour f et g données, on s'intéresse au problème :

$$-\Delta u(x,y) + u(x,y) = f(x,y),\ (x,y) \in B, \tag{2.34}$$
$$u_r(x,y) - u_{\theta\theta}(x,y) + u(x,y) = g(x,y),\ (x,y) \in \partial B. \tag{2.35}$$

Soient $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$, on appelle “solution faible" de (2.34)-(2.35) une solution du problème suivant :

$$u \in H, \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}\int_B (\sum_i D_i u(z) D_i v(z) + u(z)v(z))dz + \int_0^{2\pi} (D\overline{g}(u)(\theta) D\overline{g}(v)(\theta) + \overline{g}(u)(\theta)\overline{g}(v)(\theta))d\theta \\ = \int_B f(z)v(z)dz + \int_0^{2\pi} j(g)(\theta) j(\gamma(v))(\theta)d\theta,\ \forall v \in H.\end{aligned} \tag{2.37}$$

1. Soient $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$. Montrer qu'il existe une et une seule solution de (2.36)-(2.37).
2. (Question plus difficile) On retire, dans cette question, “uv" dans la 1ère intégrale de (2.37). Soient $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$. Montrer qu'il existe encore une et une seule solution de (2.36)-(2.37).
3. Soient $f \in C(\overline{B}, \mathbb{R})$ et $g \in C(\partial B, \mathbb{R})$. Soit $u \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R})$. Montrer que u est solution au sens “classique" de (2.34)-(2.35) (c.a.d. vérifie (2.34) pour tout $(x,y) \in \overline{B}$ et (2.35) pour tout $(x,y) \in \partial B$) si et seulement si u est solution faible de (2.34)-(2.35).
4. Pour $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$, on note $T(f,g) = (u, \gamma(u)) \in L^2(B) \times L^2(\partial B)$, où est l'unique solution faible de (2.34)-(2.35). Montrer que T est un opérateur linéaire compact autoadjoint de $L^2(B) \times L^2(\partial B)$ dans lui-même.

Exercice 2.12 (problème de Stokes, vitesse et pression) *Corrigé 2.5*

Soient Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne et $f = (f_1, \ldots, f_N)^t \in (L^2(\Omega))^N$. On s'intéresse ici au problème de Stokes, c'est-à-dire à trouver $u = (u_1, \ldots, u_N)^t$ et p solution de

$$\begin{aligned}&-\Delta u + \nabla p = f \text{ dans } \Omega,\\ &\operatorname{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega,\\ &u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Noter que la première équation de (2.38) est vectorielle.
On pose $H = \{u \in (H_0^1(\Omega))^N;\ \operatorname{div} u = 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$. On appelle solution faible de (2.38) un couple (u,p) solution de

$$\begin{aligned}&u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in H,\ p \in L^2(\Omega),\\ &\sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx - \int p(x) \operatorname{div} v(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx\\ &\qquad \text{pour tout } v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in (H_0^1(\Omega))^N.\end{aligned} \tag{2.39}$$

On pourra remarquer qu'une solution classique (u,p) de (2.38) est solution de (2.39).

Partie I, existence et unicité de u

Montrer que, si (u,p) est une solution classique de (2.38), u est alors solution de

$$u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in H,\ \sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx,\ \forall v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in H. \tag{2.40}$$

On montre dans cette pemière partie que (2.40) a une et une seule solution et que si (u, p) est solution de (2.39), u est alors l'unique solution de (2.40).

1. Montrer que H est un s.e.v. fermé de $(H_0^1(\Omega))^N$.
2. Montrer que (2.40) admet une et une seule solution. [Utiliser le lemme de Lax-Milgram.]
3. Soit (u, p) une solution de (2.39). Montrer que u est l'unique solution de (2.40).

Soit u la solution de (2.40). La suite de l'exercice consiste à trouver p pour que (u, p) soit solution de (2.39).

Partie II, préliminaire d'analyse fonctionnelle

Soit E et F deux espaces de Hilbert (réels). On note $(\cdot/\cdot)_E$ (resp. $(\cdot/\cdot)_F$) le produit scalaire dans E (resp. F). Soit A un opérateur linéaire continu de E dans F. On note $A^\star$ l'opérateur adjoint de A. L'opérateur $A^\star$ est un opérateur linéaire continu de F dans E. Pour tout $g \in F$, $A^\star g$ est l'unique élément de E défini par

$$(A^\star g/u)_E = (g/Au)_F \text{ pour tout } u \in E.$$

(Noter que l'existence et l'unicité de $A^\star g$ est donnée par le théorème de représentation de Riesz.)

1. Montrer que $\text{Ker}A = (\text{Im}A^\star)^\perp$.
   (On rappelle que si $G \subset E$, $G^\perp = \{u \in E, (u/v)_E = 0 \text{ pour tout } v \in G\}$.)
2. Montrer que $(\text{Ker}A)^\perp = \overline{\text{Im}A^\star}$.

Partie III, Existence et unicité partielle de p

Dans cette partie, on va utiliser le lemme suivant (souvent attribué à J. Nečas, 1965) que nous admettons.

Lemme 2.23 *Soient Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne et $q \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_\Omega q(x)dx = 0$. Il existe alors $v \in (H_0^1(\Omega))^N$ t.q. $\text{div}(v) = q$ p.p. dans Ω et*

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)^N} \leq C\|q\|_{L^2(\Omega)},$$

où C ne dépend que de Ω.

On prend ici $E = H_0^1(\Omega)^N$ et $F = L^2(\Omega)$. Pour $u \in E$ on pose $Au = \text{div}\, u$, de sorte que A est un opérateur linéaire continu de E dans F.

1. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de F et $v \in E$ t.q. $A^\star p_n \to v$ dans E quand $n \to +\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $q_n = p_n - a_n$, où a_n est la moyenne de p_n dans Ω.
   (a) Montrer que $A^\star p_n = A^\star q_n$.
   (b) Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans F. [Utiliser le lemme 2.23.]
   (c) Montrer que $v \in \text{Im}A^\star$.
2. Montrer que $(\text{Ker}A)^\perp = \text{Im}A^\star$ et que $\text{Ker}A = H$.
3. On rappelle que le produit scalaire dans E est défini par

$$(u/v)_E = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x)dx.$$

   On définit $T_f \in E$ par $(T_f/v)_E = \int_\Omega f(x) \cdot v(x)dx$ pour tout $v \in E$. Soit u la solution de (2.40).
   (a) Montrer que $u - T_f \in H^\perp$. En déduire que $u - T_f \in \text{Im}A^\star$.

(b) Montrer qu'il existe $p \in F$ t.q. (u, p) est solution de (2.39).

4. Soit (u_1, p_1) et (u_2, p_2) deux solutions de (2.39). Montrer que $u_1 = u_2 = u$ (où u est l'unique solution de (2.40)) et qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $p_1 - p_2 = a$ p.p..

Exercice 2.13 (Continuité séquentielle de L^2-faible dans H_0^1)

On prend ici les hypothèses de l'exercice 2.15. Pour $f \in L^2(\Omega)$, on sait qu'il existe une unique solution au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.41}$$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$. On note u la solution de (2.41) et, pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la solution de (2.41) avec f_n au lieu de f. On suppose que $f_n \to f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.
2. Montrer que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et que $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ (quand $n \to +\infty$).
3. Montrer que, quand $n \to +\infty$,
$$\int_\Omega A(x)\nabla u_n(x) \cdot \nabla u_n(x) dx \to \int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx.$$
[Utiliser le fait que $\int_\Omega A(x)\nabla u_n(x) \cdot \nabla u_n(x) dx = \int_\Omega f_n(x) u_n(x) dx$ et passer à la limite sur le terme de droite de cette égalité.]
4. Montrer que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$. [On pourra considérer $\int_\Omega A(x)\nabla(u_n - u)(x) \cdot \nabla(u_n - u)(x) dx$.]

Exercice 2.14 (Exercice liminaire à l'exercice 2.15)

Soit φ une fonction décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}+$. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $\beta > 1$ t.q.

$$0 \le x < y \Rightarrow \varphi(y) \le C \frac{\varphi(x)^\beta}{y - x}.$$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\varphi(a) = 0$. [On pourra montrer l'existence d'une suite strictement croissante $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^\star}$ t.q. $\varphi(a_k) \le \frac{1}{2^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ et $\lim_{k \to \infty} a_k < +\infty$. Pour cela, on pourra montrer qu'il existe a_0 t.q. $\varphi(a_0) \le 1$ puis, par récurrence, définir a_{k+1} par $\frac{C}{a_{k+1} - a_k} \frac{1}{2^{k\beta}} = \frac{1}{2^{k+1}}$.]

Exercice 2.15 (Solutions bornées d'un problème elliptique)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N > 1$). Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi \cdot \xi \ge \alpha |\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.

Si B est une partie borélienne de $\mathbb{R}^N$, on note mes(B) le mesure de Lebesgue N-dimensionnelle de A (c'est-à-dire la “surface" si $N = 2$ et le volume si $N = 3$).

1. Soit $F \in L^2(\Omega)^N$. Montrer qu'il existe un et un seul u solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega F(x) \cdot \nabla v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.42}$$

Soit $p > N$. On suppose pour la suite de l'exercice que $F \in L^p(\Omega)^N$ (On rappelle que $L^p(\Omega)^N \subset L^2(\Omega)^N$ car $p > 2$) et on note u l'unique solution de (2.42).
Pour $k \in \mathbb{R}_+$, on définit la fonction S_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} S_k(s) = 0 \text{ si } -k \leq s \leq k, \\ S_k(s) = s - k \text{ si } s > k, \\ S_k(s) = s + k \text{ si } s < -k. \end{cases}$$

On rappelle que si $v \in H_0^1(\Omega)$ on a $S_k(v) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla S_k(v) = 1_{A_k} \nabla v$ p.p., avec $A_k = \{|v| > k\}$.

2. Soit $k \in \mathbb{R}_+$, Montrer que

$$\alpha \| |\nabla S_k(u)| \|_{L^2(\Omega)} = \alpha \left(\int_{A_k} \nabla u(x).\nabla u(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \text{mes}(A_k)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \| |F| \|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.43}$$

[On pourra prendre $v = S_k(u)$ dans (2.42) et utiliser l'inégalité de Hölder.]

3. On pose $1^\star = \frac{N}{N-1}$. On rappelle qu'il existe C_1 ne dépendant que de N t.q.

$$\|w\|_{L^{1^\star}(\Omega)} \leq C_1 \|w\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} = C_1 \| |\nabla w| \|_{L^1(\Omega)} \text{ pour tout } w \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

Soit $k, h \in \mathbb{R}_+$ t.q. $k < h$. Montrer que

$$(h-k)\text{mes}(A_h)^{\frac{N-1}{N}} \leq (\int_{A_h} |S_k(u(x)|^{1^\star})^{\frac{1}{1^\star}} \leq C_1 \| |\nabla S_k(u)| \|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 \| |\nabla S_k(u)| \|_{L^2(\Omega)} \text{mes}(A_k)^{\frac{1}{2}}.$$

En déduire qu'il existe C_2 ne dépendant que de C_1, α, F et p t.q.

$$(h-k)\text{mes}(A_h)^{\frac{N-1}{N}} \leq C_2 \text{mes}(A_k)^{1-\frac{1}{p}}. \tag{2.44}$$

4. Montrer que $u \in L^\infty(\Omega)$ (c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\text{mes}(A_a) = 0$). [On pourra poser $\varphi(k) = \text{mes}(A_k)^{\frac{N-1}{N}}$ et utiliser l'exercice 2.14.]
5. Montrer qu'il existe C_3 ne dépendant que de Ω et p t.q.

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_3 \| |F| \|_{L^p(\Omega)}.$$

2.6 Corrigés d'exercices

Corrigé 2.1 (Régularité en dimension 1)

$f \in L^2(]0,1[)$. On rappelle (cf. cours) qu'il existe un et un seul u solution de

$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(]0,1[), \\ &\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt, \ \forall v \in H_0^1(]0,1[). \end{aligned} \tag{2.45}$$

On suppose maintenant que $f \in C([0,1], \mathbb{R}) (\subset L^2(]0,1[)$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, pour tout $x \in [0,1]$. Soit u la solution de (2.45). Montrer que, pour tout $\varphi \in C([0,1], \mathbb{R})$, on a

$$\int_0^1 (Du(t) + F(t))\varphi(t)dt = \int_0^1 c\varphi(t)dt$$

avec un certain $c \in \mathbb{R}$ convenablement choisi (et indépendant de φ).
En déduire que $Du = -F + c$ p.p., puis que u est deux fois continûment dérivable sur $]0,1[$ et $-u''(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0,1[$ (et que $u(0) = u(1) = 0$).

corrigé

Soit $\varphi \in C([0,1], \mathbb{R})$. Pour $x \in [0,1]$ on pose

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt - x\int_0^1 \varphi(t)dt.$$

On a donc $\psi \in C^1([0,1])$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$ et la dérivée faible de ψ est égale p.p. à sa dérivée classique (voir la Définition 1.2), c'est-à-dire

$$D\psi(x) = \psi'(x) = \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(s)ds \text{ pour presque tout } x \in]0,1[.$$

On a donc $\psi \in L^2(\Omega)$ et $D\psi \in L^2(\Omega)$, ce qui prouve que $\psi \in H^1(]0,1[)$. Comme $\psi(0) = \psi(1) = 0$, on a même $\psi \in H_0^1(\Omega)$ (voir la section 1.5). On peut donc prendre $v = \psi$ dans (2.45), on obtient

$$\int_0^1 Du(t)\varphi(t)dt - \int_0^1 \varphi(t)dt \int_0^1 Du(t)dt = \int_0^1 f(x)\psi(x)dx.$$

Comme F est de classe C^1 et $F' = f$, on a (en utilisant aussi $\psi(0) = \psi(1) = 0$)

$$\int_0^1 f(x)\psi(x)dx = \int_0^1 F'(x)\psi(x)dx = -\int_0^1 F(x)\psi'(x)dx = -\int_0^1 F(x)\varphi(x)dx + \int_0^1 F(x)dx \int_0^1 \varphi(t)dt.$$

En posant $c = \int_0^1 Du(t)dt + \int_0^1 F(t)dt$, on a donc

$$\int_0^1 (Du(t) + F(t))\varphi(t)dt = c\int_0^1 \varphi(t)dt \text{ pour tout } \varphi \in C([0,1]).$$

Comme $Du + F - c \in L^2(]0,1[)$ et que $C([0,1])$ est dense dans $L^2(]0,1[)$, on en déduit

$$Du = -F + c \text{ p.p. dans }]0,1[.$$

On pose maintenant

$$w(x) = \int_0^x (-F(t) + c)dt \text{ pour } x \in [0,1].$$

Comme w est de classe C^1(la fonction w est même de classe C^2) la dérivée par transposition de w est une dérivée faible et est égale p.p. à la dérivée classique de w. On a donc $Dw = w' = -F + c$ p.p.. On a donc $Dw = Du$ p.p. et on en déduit que $w - u$ est une fonction presque partout égale à une constante (voir l'exercice 1.2). En identifiant la (classe de) fonction(s) u a son représentant continu, on a donc u de classe C^2, $u' = -F + c$ et $u'' = -F' = f$. On a aussi $u(0) = u(1)$ (car $u \in H_0^1(]0,1[)$ et donc le représentant continu de u vérifie $u(0) = u(1) = 0$).

Corrigé 2.2 (Décomposition spectrale en dimension 1)

On reprend l'exercice précédent. On pose $E = L^2(]0,1[)$ (muni de la norme $\|\cdot\|_2$). Pour $f \in E$, on rappelle qu'il existe un et un seul u solution de (2.45).
On note T l'application de E dans E qui à f associe u (solution de (2.45), noter que $H_0^1(]0,1[) \subset E$). On rappelle que T est un opérateur linéaire compact autoadjoint de E dans E.

1. Soit $\lambda \in \mathcal{VP}(T)$. Montrer qu'il existe $u \in C([0,1],\mathbb{R}) \cap C^2(]0,1[,\mathbb{R})$, $u \neq 0$, tel que $-\lambda u'' = u$, sur $]0,1[$ et $u(0) = u(1) = 0$.

corrigé

On a vu à la section 2.2.2 que $N(T) = \{f \in E, Tf = 0 \text{ p.p.}\} = \{0\}$, que les valeurs propres de T sont toutes strictement positives et qu'il existe une base hilbertienne de $L^2(]0,1[)$ formée de fonctions propres de T. On cherche ici une telle base hilbertienne. Pour cela, on trouve tout d'abord les valeurs propres de T.

On rappelle que, pour $f \in E$, On a $Tf \in H_0^1(]0,1[$ et, en posant $u = Tf$,

$$\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt \text{ pour tout } v \in H_0^1(]0,1[).$$

Soit λ une valeur propre de T. On sait déjà que $\lambda > 0$. Il existe $f \in E$, $f \neq 0$ t.q. $Tf = \lambda f$. En posant $u = Tf$, on a donc $u \in H_0^1(]0,1[)$, $u \neq 0$ et $f = u/\lambda$, ce qui donne

$$\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 u(t)v(t)dt \text{ pour tout } v \in H_0^1(]0,1[).$$

Comme $u \in H_0^1(]0,1[)$, on a u continu sur $[0,1]$ (plus précisément, u admet un représentant continu et on identifie u à ce représentant) et $u(0) = u(1) = 0$. L'exercice 2.1 montre alors que u est de classe C^2 et que

$$-\lambda u''(x) = u(x) \text{ pour tout } x \in]0,1[. \tag{2.46}$$

2. Montrer que $\mathcal{VP}(T) = \{\frac{1}{k^2\pi^2},\, k \in \mathbb{N}^\star\}$ et $\sigma(T) = \mathcal{VP}(T) \cup \{0\}$.

corrigé

Pour chercher les valeurs propres, la question précédente nous a ramené à la résolution d'une équation différentielle linéaire classique. Il est bien connu (c'est, par exemple, une conséquence du théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz) que l'ensemble de solutions de (2.46) est un espace vectoriel de dimension 2, engendré par le fonctions $x \mapsto \sin(x/\sqrt{\lambda})$ et $x \mapsto \cos(x/\sqrt{\lambda})$.

Si λ est valeur propre de T, il existe donc (par la question précédente) $u \neq 0$ t.q. $Tu = \lambda u$, u de classe C^2, u continu sur $[0,1]$, $u(0) = u(1) = 0$ et u solution de (2.46). Il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ t.q.

$$u(x) = A\sin(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}) + B\cos(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Comme $u(0) = 0$, on a nécessairement $B = 0$. Puis, comme $u \neq 0$, on a nécessairement $A \neq 0$. Enfin, comme $u(1) = 0$, on a nécessairement $\sin(1/\sqrt{\lambda}) = 0$, ce qui donne l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ t.q. $1/\sqrt{\lambda} = k\pi$. Comme $\lambda > 0$, on a donc $k \in \mathbb{N}^\star$, $1/\lambda = k^2\pi^2$ et $u(x) = A(\sin k\pi x)$ pour tout $x \in [0,1]$ avec $A \neq 0$ (la fonction u vérifie bien $Tu = u$, ce qu'on peut vérifier facilement en remarquant qu'il suffit d'écrire la formulation faible en prenant des fonctions v dans $C_c^\infty(]0,1[)$, car $C_c^\infty(]0,1[)$ est dense dans $H_0^1(]0,1[)$).

On a ainsi trouvé toutes les valeurs propres de T, $\mathcal{VP}(T) = \{\frac{1}{k^2\pi^2},\, k \in \mathbb{N}^\star\}$. La section 2.2 donne alors que $\sigma(T) \setminus \{0\} = \mathcal{VP}(T) \setminus \{0\}$. Enfin comme T n'est pas surjectif (ce qui est toujours le cas pour un opérateur linéaire compact en dimension infinie), on a $0 \in \sigma(T)$ et donc $\sigma(T) = \mathcal{VP}(T) \cup \{0\}$.

3. Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $c_n = 2\int_0^1 f(t)\sin(n\pi t)dt$. Montrer que :

$$\|f - \sum_{p=1}^{n} c_p \sin(p\pi\cdot)\|_2 \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

(Comparer avec les séries de Fourier...,)

corrigé

La question précédente nous a donné les valeurs propres de T mais aussi les sous espaces propres correspondants. Cette question est alors une application immédiate de la section 2.2.2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $e_n(x) = \sqrt{2}\sin(p\pi x)$ pour tout $x \in [0,1]$. La famille $\{e_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ est une base hilbertienne de $L^2(]0,1[)$. On a donc, pour tout $f \in L^2(]0,1[)$,

$$\|f - \sum_{p=1}^{n} c_p \sin(p\pi\cdot)\|_2 \to 0, \text{ quand } n \to \infty,$$

c'est-à-dire $f = \sum_{p=1}^{\infty} c_p \sin(p\pi\cdot)$, la convergence de la série étant à prendre dans l'espace $L^2(]0,1[)$.

Cette série n'est pas la série de Fourier de f. En effet, la série de Fourier de f est obtenue avec les fonctions $\sin(2p\pi\cdot)$ et $\cos(2p\pi\cdot)$ ($p \in \mathbb{Z}$). La décomposition de f en série de Fourier correspond aussi à l'opérateur $u \mapsto u''$, mais avec des conditions périodiques ($u(0) = u(1)$ et $u'(0) = u'(1)$) au lieu des conditions de Dirichlet ($u(0) = u(1) = 0$).

---

4. Soit $\mu \in \mathbb{R}^\star$. En utilisant l'alternative de Fredholm, donner une C.N.S. sur $f \in E$ pour que le problème suivant ait une solution :

$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(]0,1[), \\ &\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt + \mu \int_0^1 u(t)v(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt, \ \forall v \in H_0^1(]0,1[). \end{aligned} \tag{2.47}$$

corrigé

Soit $f \in E$. La fonction u est solution du problème (2.47) si et seulement si $T(f - \mu u) = u$, c'est-à-dire

$$T(u) + \frac{1}{\mu}u = \frac{T(f)}{\mu}. \tag{2.48}$$

D'après l'alternative de Fredholm, ce problème à une solution si et seulement si f est orthogonal (dans E) au sous espace propre de T associé à $(-1/\mu)$.

Ceci peut se redémontrer à partir des questions précédentes. En effet, on pose $b_n = (f/e_n)_E$ (la famille $\{e_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ étant la base hilbertienne de E donnée ̀la question 3), de sorte que $f = \sum_{p=1}^{\infty} b_n e_n$ (cette série étant convergente dans E). On a alors aussi

$$T(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^2\pi^2} e_n,$$

Cette série étant aussi convergente dans E.

Soit $u \in E$. On pose $a_n = (u/e_n)_E$, on a ainsi

$$T(u) + \frac{1}{\mu}u = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{\mu + n^2\pi^2}{\mu n^2 \pi^2} e_n,$$

Cette série étant convergente dans E. La fonction u est donc solution de (2.48) si et seulement si

$$a_n(\mu + n^2\pi^2) = \mu b_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^\star.$$

Si $\mu \neq n^2\pi^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe une et une seule solution à (2.48).

Si il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\mu = n^2\pi^2$, l'équation (2.48) a une solution si et seulement si $b_p = 0$, c'est-à-dire si et seulement si f est orthogonal (dans E) à e_p. Ce qui est équivalent à dire que f est orthogonal au sous espace propre de T associé à la valeur propre $(-1/\mu)$.

Corrigé 2.3 (Problème de Neumann)

Soient Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$, à frontière lipschitzienne. On pose $H = \{u \in H^1(\Omega), \int_\Omega u(x)dx = 0\}$. On rappelle que sur un tel ouvert, une fonction L^1_{loc} dont les dérivées (au sens des dérivées par transposition) sont nulles est nécessairement constante (c'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. cette fonction soit égale à C p.p.).

1. (Inégalité de "Poincaré moyenne".) Montrer que H est un s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$ et que, sur H, la norme H^1 est équivalente à la norme $\|\cdot\|_m$ définie par $\|u\|_m = \|(|\nabla u|)\|_{L^2(\Omega)}$.

   [On pourra montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'il existe C, ne dépendant que Ω, t.q. $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_m$, pour tout $u \in H$.]

   corrigé

   Pour $u \in H^1(\Omega)$, on pose $S(u) = \int_\Omega u(x)dx$. L'application S est bien définie sur $H^1(\Omega)$ (car $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$). Elle est linéaire. Enfin, elle est continue car

$$S(u) \leq \|u\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}},$$

   où mes(Ω) est la mesure de Lebesgue (N-dimensionnelle) de Ω. Comme $H = \text{Ker}(S)$, on en déduit que H est s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$.

   Pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on a $\|\,|\nabla u|\,\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\,|\nabla u|\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$. On a donc $\|u\|_m \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$ pour tout $u \in H$. Pour montrer que $\|\cdot\|_m$ est équivalente dans H à $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, il suffit donc de montrer qu'il existe $C > 0$ (ne dépendant que de Ω) t.q.

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_m \text{ pour tout } u \in H. \tag{2.49}$$

   (On aura alors $\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (C^2+1)\|u\|^2_m$ pour tout $u \in H$.)

   Pour montrer (2.49), on raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe une suite déléments de H, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q.

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} > n\|u_n\|_m \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

   En remplaçant u_n par $\frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}$, on peut supposer $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$. On a alors aussi $\|u_n\|_m \leq 1/n$, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. Par les théorèmes de compacité vu au chapitre 1 (section 1.6), on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$. On peut supposer (après extraction d'une sous suite) qu'il existe $u \in L^2(\Omega)$ t.q. $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$, quand $n \to +\infty$. Comme $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$. On remarque aussi que les dérivées (par transposition) de u_n convergent vers les dérivées de u dans $\mathcal{D}^\star$. Or, de $\|u_n\|_m \leq 1/n$ on déduit $\nabla u_n \to 0$ dans $L^2(\Omega)^N$. Comme la convergence L^2 entraîne la convergence dans $\mathcal{D}^\star$, on a donc $\nabla u = 0$. Ceci montre que u est constante sur Ω. Comme $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$ et que $u_n \in H$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $u \in H$ et donc $\int_\Omega u(x)dx = 0$. On en déduit que $u = 0$ p.p., ce qui est impossible car $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

---

2. (Caractérisation de $(H^1(\Omega))'$.) Soit $T \in (H^1(\Omega))'$, Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$ t.q.

$$\langle T, u\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = a \int_\Omega u(x)dx + \int_\Omega F(x) \cdot \nabla u(x)dx, \ \forall u \in H^1(\Omega). \tag{2.50}$$

[On pourra considérer $T_{|_H}$ et utiliser une injection convenable de H dans $L^2(\Omega)^N$.]

corrigé

Pour $v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in L^2(\Omega)^N$, on pose $\|v\|_{L^2(\Omega)^N} = \int_\Omega |v(x)|^2 dx$, de sorte que $L^2(\Omega)^N$ muni de cette norme est un espace de Hilbert. Pour $u \in H$, on pose $J(u) = \nabla u = (D_1 u, \ldots, D_N u)^t$. L'application J est alors une isométrie de H (muni de la norme $\|\cdot\|_m$) dans une partie de $L^2(\Omega)^N$, notée $\mathrm{Im}(J)$.

Soit $v \in \mathrm{Im}(J)$, il existe un unique $u \in H$ t.q. $v = J(u)$. On pose $S(v) = \langle T, u\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)}$. Comme J est une isométrie et que la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est équivalente dans H à la norme $\|\cdot\|_m$, l'application S est linéaire continue de $\mathrm{Im}(J)$, s.e.v. de $L^2(\Omega)^N$, dans $\mathbb{R}$. Par le théorème de Hahn-Banach, on peut donc prolonger S en $\tilde{S}$, élément du dual topologique de $L^2(\Omega)^N$. Parle théorème de représentation de Riesz dans les espaces de Hilbert, il existe alors $F \in L^2(\Omega)^N$ t.q.

$$\tilde{S}(v) = \int_\Omega F(x) \cdot v(x)dx.$$

On a donc, pour tout $u \in H$,

$$\langle T, u\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = \int_\Omega F(x) \cdot \nabla u(x)dx.$$

On pose maintenant

$$a = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \langle T, 1_\Omega\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)},$$

(où 1_Ω désigne la fonction constante égale à 1 dans Ω).

Pour $u \in H^1(\Omega)$, on a $u = u - m + m$ avec

$$m = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_\Omega u(x)dx.$$

Comme $u - m \in H$, on a donc

$$\langle T, u\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = \int_\Omega F(x) \cdot \nabla u(x)dx + a \int_\Omega u(x)dx.$$

Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$. On cherche u solution de

$$\begin{aligned} &u \in H^1(\Omega), \\ &\int_\Omega A(x)\nabla u(x)\nabla v(x)dx = a \int_\Omega v(x)dx + \int_\Omega F(x) \cdot \nabla v(x)dx, \ \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.51}$$

3. (Existence et unicité.)

(a) Si $a \neq 0$, montrer que (2.51) n'a pas de solution.

corrigé

On suppose que u est solution de (2.51). En prenant $v = 1_\Omega$ dans (2.51), on a alors

$$0 = a\,\text{mes}(\Omega) + 0.$$

Ce qui prouve que $a = 0$.

(b) Si $a = 0$, montrer que (2.51) a une solution et que cette solution est unique si l'on demande qu'elle appartienne à H.

corrigé

On applique le lemme de Lax-Milgram (lemme 2.4) dans l'espace de Hilbert H (muni de la norme $\|\cdot\|_m$) avec

$$a(u,v) = \int_\Omega A(x)\nabla u(x)\nabla v(x)dx,$$

et

$$T(v) = \int_\Omega F(x)\cdot\nabla v(x)dx.$$

La continuité de a vient du fait que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout i,j. La coercivité de a vient de l'existence de $\alpha > 0$ donnée dans les hypothèses sur A. Enfin, la continuité de T vient du fait que $F \in L^2(\Omega)^N$.

On obtient ainsi un unique $u \in H$ t.q. (2.51) soit vrai pour tout $v \in H$. Comme (2.51) est aussi vrai si v est une fonction constante, on obtient aussi l'existence et l'unicité de $u \in H$ t.q. (2.51) soit vrai pour tout $v \in H^1(\Omega)$.

(c) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, $a_{i,j} \in C^\infty(\bar\Omega, \mathbb{R})$ pour tout $i,j = 1,\ldots,N$, $F \in C^\infty(\bar\Omega, \mathbb{R}^N)$, Ω est de classe C^∞ et que la solution (appartenant à H) de (2.51) est aussi dans $C^\infty(\bar\Omega, \mathbb{R})$, montrer que $-\text{div}(A\nabla u) = -\text{div}F$, dans Ω, et que $A\nabla u\cdot\mathbf{n} = F\cdot\mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$, où $\mathbf{n}$ est la normale à $\partial\Omega$, extérieure à Ω.

corrigé

On prend tout d'abord $v \in C_c^\infty(\Omega)$ dans (2.51) (avec $a = 0$). La régularité de A, F, u et v nous permet d'intégrer par parties (la régularité de Ω ne sert à rien pour cette étape). On obtient

$$\int_\Omega (-\text{div}(A(x)\nabla u(x)) + F(x))v(x)dx = 0 \text{ pour tout } v \in C_c^\infty(\Omega).$$

On en déduit que $\text{div}(A(x)\nabla u(x)) + F(x) = 0$ p.p. (par le lemme fondamental 1.1) puis, par continuité de la fonction $\text{div}(A\nabla u) + F$, que $\text{div}(A(x)\nabla u(x)) + F(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.

On prend maintenant des fonctions $v \in C^\infty(\bar\Omega)$ dans (2.51). On peut ici aussi intégrer par parties (on utilise ici la régularité de Ω). On obtient

$$\int_{\partial\Omega} (A(x)\nabla u(x) - F(x))\cdot n(x)v(x)d\gamma(x) = 0 \text{ pour tout } v \in C^\infty(\bar\Omega),$$

où $\partial\Omega$ est le bord de Ω et $d\gamma(x)$ désigne l'intégration par rapport à la mesure $(N-1)$-dimensionnelle sur $\partial\Omega$.

Par une technique de “cartes locales", on peut se ramener au cas du lemme fondamental (lemme 1.1) pour en déduire que $(A\nabla u - F)\cdot n = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$ puis partout sur $\partial\Omega$. Mais, il est plus rapide de voir qu'il possible de choisir v t.q. $v = (A\nabla u - F)\cdot n$ sur $\partial\Omega$. On obtient ainsi directement $(A\nabla u - F)\cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$.

Corrigé 2.4 (Décomposition de Hodge)
Soient Ω un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) et $f \in (L^2(\Omega))^N$.
Montrer qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ t.q.

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx, \ \ \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

En déduire qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ et $g \in (L^2(\Omega))^N$ t.q. $f = \nabla u + g$, p.p. dans Ω et $\int_\Omega g(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = 0$ pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$.
On suppose maintenant que $g \in C^1(\bar{\Omega})$ et que $\Omega = (]0,1[)^N$. Montrer que $\mathrm{div}\, g = 0$ sur Ω et que $g \cdot \mathbf{n} = 0$ p.p. (pour la mesure de Lebesgue $(N-1)-$dimensionnelle) sur $\partial\Omega$, où $\mathbf{n}$ est un vecteur normal à $\partial\Omega$.

———corrigé———

L'exercice 2.4 (corrigé 2.3) donne l'existence de $u \in H^1(\Omega)$ t.q.

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx, \ \ \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

On peut aussi ajouter la condition $\int_\Omega u(x) dx = 0$ et on a alors existence et unicité de u (corrigé 2.3).
On pose alors $g = f - \nabla u$. Les fonctions u et g vérifient les conditions demandées.

On suppose maintenant que $g \in C^1(\bar{\Omega})$ et que $\Omega = (]0,1[)^N$. On a

$$\int_\Omega g(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = 0 \text{ pour tout } \varphi \in H^1(\Omega).$$

On raisonne comme pour la fin du corrigé 2.3. En prenant $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, le lemme fondamental (lemme 1.1) nous permet de montrer que $\mathrm{div}(g) = 0$ partout dans Ω. Puis, en prenant $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, une intégration par parties (plutôt plus facile que dans le corrigé 2.3) donne

$$\int_{\partial\Omega} g(x) \cdot n(x) \varphi(x) d\gamma(x) = 0 \text{ pour tout } \varphi \in C^1(\bar{\Omega}).$$

Ici, $d\gamma(x) = dx_1$ ou dx_2, selon les parties de $\partial\Omega$ (avec $x = (x_1, x_2)^t$). Avec $g = (g_1, g_2)^t$, on en déduit que $g_1(x) = 0$ partout sur $\{0\} \times [0,1] \cup \{1\} \times [0,1]$ et $g_2(x) = 0$ partout sur $[0,1] \times \{0\} \cup [0,1] \times \{1\}$. (Ce qui donne $g \cdot n = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$.)

Corrigé 2.5 (problème de Stokes, vitesse et pression)
Soient Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne et $f = (f_1, \ldots, f_N)^t \in (L^2(\Omega))^N$.
On s'intéresse ici au problème de Stokes, c'est-à-dire à trouver $u = (u_1, \ldots, u_N)^t$ et p solution de

$$\begin{aligned} &-\Delta u + \nabla p = f \text{ dans } \Omega, \\ &\mathrm{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ &u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Noter que la première équation de (2.52) est vectorielle.
On pose $H = \{u \in (H_0^1(\Omega))^N ; \mathrm{div}\, u = 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$. On appelle solution faible de (2.52) un couple (u, p) solution de

$$\begin{aligned} &u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in H, \ p \in L^2(\Omega), \\ &\sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx - \int p(x) \mathrm{div}\, v(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx \\ &\qquad \text{pour tout } v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in (H_0^1(\Omega))^N. \end{aligned} \tag{2.53}$$

On pourra remarquer qu'une solution classique (u, p) de (2.52) est solution de (2.53).

Partie I, existence et unicité de u

Montrer que, si (u, p) est une solution classique de (2.52), u est alors solution de

$$u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in H, \ \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx, \ \forall v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in H. \quad (2.54)$$

corrigé

Soit (u, p) est une solution classique de (2.52). On remarque tout d'abord que $u \in H$. Puis, pour $v \in H$, on multiplie la première équation de (2.52) par v et on intègre sur Ω. Le fonctions u et v sont suffisamment régulières pour intégrer par parties et obtient ainsi l'équation (2.54). Ceci montre que u est alors solution de (2.54).

On montre dans cette pemière partie que (2.54) a une et une seule solution et que si (u, p) est solution de (2.53), u est alors l'unique solution de (2.54).

1. Montrer que H est un s.e.v. fermé de $(H_0^1(\Omega))^N$.

   corrigé

   Pour $u \in H_0^1(\Omega)^N$, on pose $d(u) = \operatorname{div}(u)$. L'application d est linéaire continue de $H_0^1(\Omega)^N$ dans $L^2(\Omega)$. Comme $H = \operatorname{Ker} d$, on en déduit que H est un s.e.v. fermé de $H_0^1(\Omega)^N$.

   ---

2. Montrer que (2.54) admet une et une seule solution. [Utiliser le lemme de Lax-Milgram.]

   corrigé

   Il suffit ici d'appliquer le lemme de Lax-Milgram, lemme 2.4 (ou le théorème de Riesz dans les espaces de Hilbert) en remarquant que H est un espace de Hilbert (H est muni de la norme naturelle de $H_0^1(\Omega)^N$), avec a et T définis ainsi :

   $$a(u, v) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx,$$

   et

   $$T(v) = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx.$$

   ---

3. Soit (u, p) une solution de (2.53). Montrer que u est l'unique solution de (2.54).

   corrigé

   Pour $v \in H$, on a $\operatorname{div}(v) = 0$ p.p. dans Ω et donc $\int_\Omega p \operatorname{div}(v) dx = 0$. On en déduit que u est solution de (2.54). Par la question précédente, la fonction (vectorielle) u est donc l'unique solution de (2.54).

Soit u la solution de (2.54). La suite de l'exercice consiste à trouver p pour que (u, p) soit solution de (2.53).

Partie II, préliminaire d'analyse fonctionnelle

Soit E et F deux espaces de Hilbert (réels). On note $(\cdot/\cdot)_E$ (resp. $(\cdot/\cdot)_F$) le produit scalaire dans E (resp. F). Soit A un opérateur linéaire continu de E dans F. On note $A^\star$ l'opérateur adjoint de A. L'opérateur $A^\star$ est un opérateur linéaire continu de F dans E. Pour tout $g \in F$, $A^\star g$ est l'unique élément de E défini par

$$(A^\star g/u)_E = (g/Au)_F \text{ pour tout } u \in E.$$

(Noter que l'existence et l'unicité de $A^\star g$ est donnée par le théorème de représentation de Riesz.)

1. Montrer que Ker$A = (\mathrm{Im}A^\star)^\perp$.
(On rappelle que si $G \subset E$, $G^\perp = \{u \in E, (u/v)_E = 0$ pour tout $v \in G\}$.)

corrigé

Soit $u \in \mathrm{Ker}A$ (on a donc $Au = 0$). Pour $v \in \mathrm{Im}A^\star$, il existe $g \in F$ t.q. $v = A^\star g$, on a donc

$$(v/u)_E = (A^\star g/u)_E = (g/Au)_F = 0.$$

Ce qui montre que $u \in (\mathrm{Im}A^\star)^\perp$. On a donc $\mathrm{Ker}A \subset (\mathrm{Im}A^\star)^\perp$.

Récirpoquement, soit $u \in (\mathrm{Im}A^\star)^\perp$. On a alors, en posant $f = Au$,

$$(Au/Au)_F = (f/Au)_F = (A^\star f/u)_E = 0,$$

car $A^\star f \in \mathrm{Im}A^\star$. Donc, $Au = 0$, c'est-à-dire $u \in \mathrm{Ker}A$. Ceci donne $(\mathrm{Im}A^\star)^\perp \subset \mathrm{Ker}A$.

Finalement, on a bien montré que $(\mathrm{Im}A^\star)^\perp = \mathrm{Ker}A$.

---

2. Montrer que $(\mathrm{Ker}A)^\perp = \overline{\mathrm{Im}A^\star}$.

corrigé

Si F est un s.e.v. fermé d'un espace de Hilbert H, on a toujours $H = F \oplus F^\perp$. D'autre part, si $G \subset H$, on a $G^\perp = \bar{G}^\perp$.

Si F est un s.e.v. fermé d'un espace de Hilbert H, on a donc

$$H = \bar{F} \oplus F^\perp \;\text{ et }\; H = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp.$$

Ceci permet de prouver que $(F^\perp)^\perp = \bar{F}$.

On applique ici ce résutat avec $F = \mathrm{Im}A^\star$, on obtient (avec la question précédente)

$$\overline{\mathrm{Im}A^\star} = ((\mathrm{Im}A^\star)^\perp)^\perp = (\mathrm{Ker}A)^\perp.$$

Partie III, Existence et unicité partielle de p

Dans cette partie, on va utiliser le lemme suivant (souvent attribué à J. Nečas, 1965) que nous admettons.

Lemme 2.24 *Soient Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne et $q \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_\Omega q(x)dx = 0$. Il existe alors $v \in (H_0^1(\Omega))^N$ t.q. $\mathrm{div}(v) = q$ p.p. dans Ω et*

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)^N} \leq C\|q\|_{L^2(\Omega)},$$

où C ne dépend que de Ω.

On prend ici $E = H_0^1(\Omega)^N$ et $F = L^2(\Omega)$. Pour $u \in E$ on pose $Au = \mathrm{div}\, u$, de sorte que A est un opérateur linéaire continu de E dans F.

1. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de F et $v \in E$ t.q. $A^\star p_n \to v$ dans E quand $n \to +\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $q_n = p_n - a_n$, où a_n est la moyenne de p_n dans Ω.
(a) Montrer que $A^\star p_n = A^\star q_n$.

corrigé

Soit $v \in E$. On a

$$(A^\star p_n/v)_E = (p_n/Av)_F = \int_\Omega p_n \mathrm{div}(v)dx,$$

et

$$(A^\star q_n/v)_E = (q_n/Av)_F = \int_\Omega q_n \mathrm{div}(v)dx = \int_\Omega p_n \mathrm{div}(v)dx - a_n \int_\Omega \mathrm{div}(v)dx.$$

Comme $v \in H_0^1(\Omega)^N$, on a (en intégrant par parties) $\int_\Omega \mathrm{div}(v)dx = 0$ et donc

$$(A^\star p_n/v)_E = (A^\star q_n/v)_E \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega)^N.$$

Ceci montre bien que $A^\star p_n = A^\star q_n$.

(b) Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans F. [Utiliser le lemme 2.24.]

corrigé

Par le lemme 2.24, il existe $v_n \in H_0^1(\Omega)^N$ t.q. $\mathrm{div}(v_n) = q_n$ p.p. dans Ω et $\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)^N} \le C\|q_n\|_{L^2(\Omega)}$. On obtient alors

$$(A^\star q_n/v_n)_E = \int_\Omega q_n \mathrm{div}(v_n)dx = \int_\Omega q_n^2 dx = \|q_n\|_F^2.$$

La question précédente donne $A^\star p_n = A^\star q_n$. On a donc

$$\|q_n\|_F^2 = (A^\star p_n/v_n)_E \le \|A^\star p_n\|_E \|v_n\|_E \le C\|A^\star p_n\|_E \|q_n\|_F,$$

et donc

$$\|q_n\|_F \le C\|A^\star p_n\|_E.$$

L'hypothèse de convergence de $A^\star p_n$ donne que la suite $(A^\star p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (dans E). On en déduit que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans F.

(c) Montrer que $v \in \mathrm{Im}A^\star$.

corrigé

Comme la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans (l'espace de Hilbert) F, on peut supposer, après extraction éventuelle d'une sous suite, que cette suite converge dans F. Il existe donc $q \in F$ t.q. $q_n \to q$ dans F, quand $n \to +\infty$. On va montrer que $v = A^\star q$.

Soit $w \in E$, On a $\lim_{n\to+\infty}(q_n/Aw)_F = (q/Aw)_F$. Mais,

$$(q_n/Aw)_F = (A^\star q_n/w)_E = (A^\star p_n/w)_E.$$

Comme $A^\star p_n \to v$ dans E, on a donc aussi $\lim_{n\to+\infty}(q_n/Aw)_F = (v/w)_E$. On obtient donc

$$(q/Aw)_F = (v/w)_E \text{ pour tout } w \in E.$$

Ceci donne $(A^\star q/w)_E = (v/w)_E$ pour tout $w \in E$, et donc $v = A^\star q$. On a bien montré que $v \in \mathrm{Im}A^\star$.

---

2. Montrer que $(\mathrm{Ker}A)^\perp = \mathrm{Im}A^\star$ et que $\mathrm{Ker}A = H$.

corrigé

La question précédente montre que $\mathrm{Im}A^\star$ est fermé (dans E). Avec la partie II, on a donc $(\mathrm{Ker}A)^\perp = \mathrm{Im}(A^\star)$. On a déjà vu que $\mathrm{Ker}A = H$. On a donc $H^\perp = \mathrm{Im}(A^\star)$.

---

3. On rappelle que le produit scalaire dans E est défini par

$$(u/v)_E = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx.$$

On définit $T_f \in E$ par $(T_f/v)_E = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx$ pour tout $v \in E$. Soit u la solution de (2.54).

(a) Montrer que $u - T_f \in H^\perp$. En déduire que $u - T_f \in \mathrm{Im} A^\star$.

corrigé

On a $(u/v)_E = \int_\Omega f v dx = (T_f/v)_E$ pour tout $v \in H$. Ceci signifie bien que $u - T_f \in H^\perp$ et donc que $u - T_f \in \mathrm{Im} A^\star$.

(b) Montrer qu'il existe $p \in F$ t.q. (u, p) est solution de (2.53).

corrigé

Comme $u - T_f \in \mathrm{Im} A^\star$, il existe $p \in F = L^2(\Omega)$ t.q. $u - T_f = A^\star p$. On a donc pour tout $v \in {H_0^1(\Omega)}^N$,

$$(u/v)_E - \int_\Omega f v dx = (u - T_f/v)_E = (A^\star p/v)_E = (p/Av)_F = \int_\Omega p \mathrm{div}(v) dx.$$

Ce qui signifie bien que (u, p) est solution de (2.53).

4. Soit (u_1, p_1) et (u_2, p_2) deux solutions de (2.53). Montrer que $u_1 = u_2 = u$ (où u est l'unique solution de (2.54)) et qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $p_1 - p_2 = a$ p.p..

corrigé

On a déja montré à la question 3 de la partie I que $u_1 = u_2 = u$ où u est l'unique solution de (2.54).

On obtient alors que $\int_\Omega p_1 \mathrm{div}(v) dx = \int_\Omega p_2 \mathrm{div}(v) dx$ pour tout $v \in {H_0^1(\Omega)}^N$. En prenant $v = (v_1, \ldots, v_N)^t$ avec $v_1 \in C_c^\infty(\Omega)$ et $v_i = 0$ pour $i \geq 2$, on en déduit que $D_1(p_1 - p_2) = 0$ (dans $\mathcal{D}^\star$). De manière analogue on a $D_i(p_1 - p_2) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Ceci permet d'affirmer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $p_1 - p_2 = a$ p.p. (voir l'exercice 1.4).

1.10 Corrigés d'exercices

Corrigé 1.1 (Exemple de dérivée)

Soient $N \geq 1$, $\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N, |x_i| < 1, i = 1, \ldots, N\}$ et $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = 1$ si $x \in \Omega$ et $u(x) = 0$ si $x \notin \Omega$.

1. Pour $i = \{1, \ldots, N\}$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, montrer que $\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx$ ne dépend que des valeurs prises par φ sur le bord de Ω.

corrigé

On prend, par exemple, $i = 1$ (les autres valeurs de i se traitent de manière similaire). Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)dx = \int_{]-1,1[^N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)dx = \int_{]-1,1[^{N-1}} \Big(\int_{-1}^{1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, y)dx_1 \Big) dy$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)dx = \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi(1, y)dy - \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi(-1, y)dy.$$

Ceci montre bien que $\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)dx$ ne dépend que des valeurs prises par φ sur le bord de Ω.

2. Montrer que $u \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$.

corrigé

On raisonne par l'absurde. On suppose que $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. Il existe alors (en particulier) $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ t.q.

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x)\varphi(x)dx \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $A_n =]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[\times] - 1, 1[^{N-1}$.

On choisit une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\varphi(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $\varphi(x) = 0$ si $x \neq A_1$ et $\varphi(x) = 1$ si $x = (1, y)$ avec $y \in] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^{N-1}$ (une telle fonction φ existe). Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit alors φ_n par $\varphi_n(1 + x_1, y)) = \varphi(1 + nx_1, y)$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^{N-1}$ (de sorte que $\varphi_n = 0$ hors de A_n).

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a bien $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et le choix de φ_n donne

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x)dx = \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi_n(1, y)dy - \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi_n(-1, y)dy \geq 1$$

et

$$| \int_{\mathbb{R}^N} g(x)\varphi_n(x)dx| \leq \int_{A_n} |g(x)|dx.$$

On a donc $\int_{A_n} |g(x)|dx \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, ce qui est impossible car la mesure de Lebesgue (N-dimensionnelle) de A_n tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Corrigé 1.2 (Une fonction de dérivée nulle est constante)

Soit $u \in L^1_{loc}(]0, 1[)$ t.q. $Du = 0$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p.. (u est donc la fonction constante égale à a.)

corrigé

On se donne $\varphi_0 \in C_c^\infty(]0, 1[)$ t.q. $\int_0^1 \varphi_0(x)dx = 1$.

Pour $\psi \in C_c^\infty(]0,1[)$, on définit la fonction φ par

$$\varphi(x) = \int_0^x \psi(t)dt - \Big(\int_0^1 \psi(t)dt\Big)\int_0^x \varphi_0(t)dt. \text{ pour } x \in]0,1[.$$

Avec ce choix de φ on a $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$ et donc, comme $Du = 0$,

$$0 = \langle Du, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star, C_c^\infty} = -\int_0^1 u(x)\varphi'(x)dx.$$

Comme $\varphi' = \psi - (\int_0^1 \psi(t)dt)\varphi_0$, on a donc

$$\int_0^1 u(x)\psi(x)dx - \Big(\int_0^1 \psi(t)dt\Big)\Big(\int_0^1 u(x)\varphi_0(x)dx\Big) = 0.$$

On pose $a = \int_0^1 u(x)\varphi_0(x)dx$, on a ainsi

$$\int_0^1 u(x)\psi(x)dx = \int_0^1 a\psi(x)dx \text{ pour tout } \psi \in C_c^\infty(]0,1[).$$

Le lemme 1.1 donne alors $u = a$ p.p..

Corrigé 1.3 (Espace de Sobolev en 1d)
Soit $1 \le p \le \infty$ et $u \in W^{1,p}(]0,1[)$.

1. Soit $u \in W^{1,p}(]0,1[)$.

(a) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $u(x) = C + \int_0^x Du(t)dt$, pour presque tout $x \in]0,1[$. En déduire que $u \in C([0,1],\mathbb{R})$ (au sens qu'il existe $v \in C([0,1],\mathbb{R})$ t.q. $u = v$ p.p. sur $]0,1[$, en identifiant u et v, on peut donc dire que $W^{1,p}(]0,1[) \subset C([0,1],\mathbb{R})$.

corrigé

Pour $x \in [0,1]$, on pose $F(x) = \int_0^x Du(t)dt$. Comme $Du \in L^1(]0,1[)$, on a $F \in C([0,1],\mathbb{R})$. On peut aussi montrer que F est dérivable p.p. et que $F' = Du$ p.p. mais cela est inutile ici. On s'intéresse plutôt à la dérivée par transposition de F, c'est-à-dire à DF et on va montrer que $DF = Du$.
Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$. On a

$$\langle DF, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star, C_c^\infty} = -\int_0^1 F(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^1 \Big(\int_0^1 1_{]0,x[}(t)Du(t)dt\Big)\varphi'(x)dx.$$

En remarquant que $1_{]0,x[}(t) = 1_{]t,1[}(x)$ pour tout $t, x \in]0,1[$ et en utilisant le théorème de Fubini, on a donc

$$\langle DF, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star, C_c^\infty} = -\int_0^1 \Big(\int_0^1 1_{]t,1[}(x)\varphi'(t)dx\Big)Du(t)dt = \int_0^1 \varphi(t)Du(t)dt,$$

ce qui prouve que $DF = Du$.

On a donc $D(u-F) = 0$ et l'exercice 1.2 donne alors l'existence de $C \in \mathbb{R}$ t.q. $u - F = C$ p.p. c'est-à-dire

$$u(x) = C + \int_0^x Du(t)dt \text{ pour presque tout } x \in]0,1[.$$

(b) Montrer que $\|u\|_\infty \leq \|u\|_{W^{1,p}(]0,1[)}$.

corrigé

On choisit maintenant pour u (qui est une classe de fonctions) son représentant continu. On a alors pour tout $x \in [0,1]$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x Du(t)dt.$$

On a alors aussi pour tout $x, y \in [0,1]$, $u(x) = u(y) + \int_y^x Du(t)dt$, on en déduit

$$|u(x)| \leq |u(y)| + \int_0^1 |Du(t)|dt.$$

En intégrant cette inégalité sur $[0,1]$ (par rapport à y), on obtient pour tout $x \in [0,1]$

$$|u(x)| \leq \|u\|_{L^1} + \|Du\|_{L^1} = \|u\|_{W^{1,1}},$$

et donc, en prenant le max sur x et en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^1} + \|Du\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} + \|Du\|_{L^p} = \|u\|_{W^{1,p}}.$$

(c) Si $p > 1$, Montrer que u est une fonction höldérienne d'exposant $1 - (1/p)$.

corrigé

On choisit toujours pour u son représentant continu. Soit $x, y \in [0,1]$, $y > x$, on a

$$u(y) - u(x) = \int_x^y Du(t)dt$$

et donc, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$|u(y) - u(x)| \leq \Big(\int_x^y |Du(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} |y - x|^{1-\frac{1}{p}} \leq \|u\|_{W^{1,p}} |y - x|^{1-\frac{1}{p}}.$$

---

2. Soit $u \in C([0,1], \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $w \in L^p(]0,1[)$ t.q. $u(x) = u(0) + \int_0^x w(t)dt$, pour tout $x \in]0,1[$. Montrer que $u \in W^{1,p}(]0,1[)$ et $Du = w$.

corrigé

Il est clair que $u \in L^p(]0,1[)$. Pour montrer que $u \in W^{1,p}(]0,1[)$ il suffit de montrer que $Du = w$ c'est-à-dire que $\langle Du, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star, C_c^\infty} = \int_0^1 w(t)\varphi(t)dt$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$. On a

$$\langle Du, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star, C_c^\infty} = -\int_0^1 u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^1 \Big(\int_0^t w(x)dx\Big)\varphi'(t)dt = -\int_0^1 \Big(\int_0^1 1_{]0,t[}(x)w(x)dx\Big)\varphi'(t)dt.$$

On utilise une nouvelle fois le thézorème de Fubini et le fait que $1_{]0,t[}(x) = 1_{]x,1[}(t)$ (pour tout $x, t \in]0,1[$). On obtient

$$\langle Du, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star, C_c^\infty} = -\int_0^1 \Big(\int_0^1 1_{]x,1[}(t)\varphi'(t)dt\Big)w(x)dx = -\int_0^1 \Big(\int_x^1 \varphi'(t)dt\Big)w(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)w(x)dx.$$

Ce qui donne bien $Du = w$.

Corrigé 1.4 (Généralisation de l'exercice 1.2)

Soient $N \geq 1$, $B = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| < 1\}$ et $u \in L^1_{loc}(B)$.

1. On suppose que $D_i u = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p.. (u est donc la fonction constante égale à a.) [On pourra, par exemple, raisonner ainsi :

   Soit $\varepsilon \in]0, 1/2[$ et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ une suite de noyaux régularisants, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} &\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}^N} \rho dx = 1, \ \rho \geq 0 \text{ in } \mathbb{R}^N, \ \rho(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 1, \\ &\text{et, pour } n \in \mathbb{N}^\star, \ x \in \mathbb{R}^N, \ \rho_n(x) = n^N \rho(nx). \end{aligned} \tag{1.8}$$

   On pose $u_\varepsilon(x) = u$ si $|x| \leq 1 - \varepsilon$ et $u_\varepsilon = 0$ sinon. Puis, on pose $u_{\varepsilon,n} = u_\varepsilon \star \rho_n$.

   Montrer que $u_{\varepsilon,n} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et que, si $1/n < \varepsilon$, $u_{\varepsilon,n}$ est constante sur la boule de centre 0 et de rayon $1 - 2\varepsilon$. Puis, conclure. . . .]

corrigé

On a $u_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction $u_{\varepsilon,n}$ est donc bien définie sur tout $\mathbb{R}^N$. Le fait que $u_{\varepsilon,n}$ soit de classe C^∞ est classique et les dérivées de $u_{\varepsilon,n}$ sont égales à la convolution de u_ε avec les dérivées de ρ_n. Il est facile aussi de voir que $u_{\varepsilon,n}$ est une fonction à support compact car u_ε et ρ_n sont des fonctions à support compact.

On note B_r la boule de centre 0 et de rayon r. On montre maintenant que pour tout i la fonction $\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}$ est nulle sur $B_{1-2\varepsilon}$ si $1/n < \varepsilon$..

Soit $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $x \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}(x) = \Big(u_\varepsilon \star \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}\Big)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(y) \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(x - y) dy.$$

Si $1/n < \varepsilon$ et $x \in B_{1-2\varepsilon}$, la fonction $\rho_n(x - \cdot)$ appartient à $C_c^\infty(B)$ et est nulle hors de $B_{1-\varepsilon}$. On remarque aussi que

$$\frac{\partial \rho_n(x - \cdot)}{\partial x_i} = -\frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(x - \cdot).$$

(La notation $\partial/\partial x_i$ désigne la dérivée par rapport à la i-ème variable, à ne pas confondre avec la i-ème composante de x dans la formule précédente. . . .) On obtient ainsi

$$\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}(x) = \int_B u(y) \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(x - y) dy = \langle D_i u, \rho_n(x - \cdot)\rangle_{\mathcal{D}^\star(B), C_c^\infty(B)} = 0.$$

On a ainsi montré que pour $1/n < \varepsilon$, la fonction $\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}$ est, pour tout i, nulle sur $B_{1-2\varepsilon}$. On en déduit que la fonction $u_{\varepsilon,n}$ est constante sur $B_{1-2\varepsilon}$. En effet, il suffit de remarquer que pour tout $x \in B_{1-2\varepsilon}$ on a

$$u_{\varepsilon,n}(x) - u_{\varepsilon,n}(0) = \int_0^1 \nabla u_{\varepsilon,n}(tx) \cdot x \, dt = 0.$$

Comme $u_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^N)$, la suite $(u_{\varepsilon,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ vers u_ε. En considérant les restrictions de ces fonctions à la boule $B_{1-2\varepsilon}$ (sur la laquelle $u_\varepsilon = u$), la suite $(u_{\varepsilon,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^1(B_{1-2\varepsilon})$ vers u. Comme $u_{\varepsilon,n}$ est une fonction constante sur $B_{1-2\varepsilon}$ (pour $1/n < \varepsilon$) sa limite (dans L^1) est donc aussi une fonction constante. Ceci montre que la fonction u est constante sur $B_{1-2\varepsilon}$, c'est-à-dire qu'il existe $a_\varepsilon \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a_\varepsilon$ p.p. sur $B_{1-2\varepsilon}$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que a_ε ne dépend pas de ε et que u est constante sur B.

2. On suppose que $D_i u$ est une fonction continue, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Montrer que $u \in C^1(B, \mathbb{R})$ (au sens "il existe $v \in C^1(B, \mathbb{R})$ t.q. $u = v$ p.p."). [On pourra, par exemple, reprendre l'indication de la 1ère question et raisonner ainsi : Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$ on a

$$u_{\varepsilon,n}(y) - u_{\varepsilon,n}(x) = \int_0^1 \nabla u_{\varepsilon,n}(ty + (1-t)x) \cdot (y - x) dt,$$

et que pour z dans la boule de centre 0 et rayon $1 - 2\varepsilon$ et $i \in \{1, \ldots, N\}$ on a

$$(\partial u_{\varepsilon,n}/\partial x_i)(z) = \int_B D_i u(\overline{z}) \rho_n(z - \overline{z}) d\overline{z}.$$

En déduire que pour presque tout $x, y \in B$, on a, avec $Du = \{D_1 u, \ldots, D_N u\}^t$,

$$u(y) - u(x) = \int_0^1 Du(ty + (1-t)x) \cdot (y - x) dt.$$

Montrer alors que u est continue et que la formule précédente est vraie pour tout $x, y \in B$. Conclure enfin que $u \in C^1(B, \mathbb{R})$.]

corrigé

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction $u_{\varepsilon,n}$ est de classe C^∞. On a donc bien, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$,

$$u_{\varepsilon,n}(y) - u_{\varepsilon,n}(x) = \int_0^1 \nabla u_{\varepsilon,n}(ty + (1-t)x) \cdot (x - y) dt. \tag{1.9}$$

Dans cette formule $\nabla u_{\varepsilon,n}$ désigne la fonction vectorielle définie par les dérivées classiques de $u_{\varepsilon,n}$.
Pour $z \in \mathbb{R}^N$ et $i \in \{1, \ldots, N\}$ on a

$$\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}(z) = \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(\overline{z}) \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(z - \overline{z}) d\overline{z}.$$

Si $z \in B_{1-2\varepsilon}$ et $1/n < \varepsilon$, la fonction $\rho_n(z - \cdot)$ appartient à $C_c^\infty(B)$ et est nulle fors de $B_{1-\varepsilon}$ (et sur $B_{1-\varepsilon}$ on a $u_\varepsilon = u$). On en déduit

$$\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}(z) = \langle D_i u, \rho_n(z - \cdot) \rangle_{\mathcal{D}^\star(B), C_c^\infty(B)} = \int_B D_i u(\bar{z}) \rho_n(z - \bar{z}) d\bar{z}.$$

Comme $D_i(u)$ est uniformément continue sur $B_{1-\varepsilon}$, on déduit de la formule précédente que $\partial u_{\varepsilon,n}/\partial x_i$ converge vers $D_i u$ uniformément sur $B_{1-2\varepsilon}$. On a donc, pour tout $x, y \in B_{1-2\varepsilon}$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \nabla u_{\varepsilon,n}(ty + (1-t)x) \cdot (x - y) dt. = \int_0^1 Du(ty + (1-t)x) \cdot (y - x) dt.$$

La suite $(u_{\varepsilon,n})_{n \in \mathbb{N}^\star}$ converge dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ vers u_ε. Après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut donc supposer que cette suite converge p.p. vers u_ε et donc p.p. vers u sur la boule $B_{1-\varepsilon}$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité (1.9), on obtient pour presque tout x, y dans $B_{1-2\varepsilon}$

$$u(y) - u(x) = \int_0^1 Du(ty + (1-t)x) \cdot (y - x) dt. \tag{1.10}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, la formule (1.10) est valable pour p.p. $x, y \in B$.

Pour conclure, on fixe un point $x \in B$ pour lequel (1.10) est vraie pour presque tout $y \in B$ et on pose

$$v(y) = u(x) + \int_0^1 Du(ty + (1-t)x) \cdot (y - x)dt \text{ pour tout } y \in B.$$

La fonction v est de classe C^1 et $\nabla v = Du$ sur tout B (car Du est une fonction continue). Comme $u = v$ p.p., ceci termine la question.

---

3. On reprend ici la 1ère question en remplaçant B par un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$. Montrer que u est constante sur chaque composante connexe de B. (Comme d'habitude, u constante signifie qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p..)

corrigé

On note Ω l'ouvert remplçant B. Le raisonnement précédent montre que sur toute boule incluse dans Ω u est p.p. égale à une constante. Pour que l'égalité soit vraie sur toute la boule (et non seulement p.p.), il suffit de définir v sur Ω par

$$v(x) = \lim_{h \to 0,\, h>0} \frac{1}{\lambda_d(B_{x,h})} \int_{B(x,h)} u(y)dy \quad \text{pour tout } x \in \Omega,$$

où $B(x,h)$ désigne la boule de centre x et de rayon h et $\lambda_d(B(x,h))$ la mesure de Lebesgue d-dimensionelle de cette boule. On a alors $u = v$ p.p. (v est donc un représentant de la classe u) et sur toute boule incluse dans Ω v est égale à une constante.

La fonction est donc localement constante. On en déduit que v est constante sur chaque composante connexe de Ω. En effet, soit $x \in \Omega$ et U la composante connexe de Ω contenant x. On pose $a = v(x)$. L'ensemble $\{y \in U;\ u(y) = a\}$ est un ouvert non vide de U et l'ensemble $\{y \in U;\ u(y) \neq a\}$ est aussi un ouvert de U disjoint du précédent. Par connexité de U ce dernier ensemble est donc vide, ce qui prouve que $u = a$ sur tout U.

Corrigé 1.5 (Non généralisation de l'exercice 1.3)

Soit $\Omega = \{x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2,\ |x_i| < \frac{1}{2},\ i = 1, 2\}$, $\gamma \in]0, 1/2[$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = (-\ln(|x|))^\gamma$. Montrer que $u \in H^1(\Omega)$. En déduire que $H^1(\Omega) \not\subset C(\overline{\Omega})$.

corrigé

La fonction u est de classe C^∞ sur $\bar{\Omega} \setminus \{0\}$ (en remarquant que $|x| \leq \sqrt{2}/2 < 1$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$). Les dérivées classiques de u sont pour $x = (x_1, x_2)^t \neq 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = -\gamma(-\ln(|x|)^{\gamma-1} \frac{x_i}{|x|^2},\ i = 1, 2.$$

Il est facile de voir que $u \in L^2(\Omega)$ (et même $u \in L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$). Comme $\gamma < 1/2$, on peut aussi montrer que les dérivées classiques de u sont dans $L^2(\Omega)$. Il suffit pour cela de remarquer que

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{r|\ln(r)|^{2(1-\gamma)}} dr < +\infty.$$

Pour montrer que $u \in H^1(\Omega)$, il suffit donc de montrer que les dérivées par transposition de u sont représentées par les dérivées classiques, c'est-à-dire que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et pour $i = 1, 2$, on a

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx. \tag{1.11}$$

On montre maintenant 1.11 pour $i = 1$ (bien sûr, $i = 2$ se traite de manière semblable). Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. On pose $L_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon] \times [0, 1]$. En intégrant par parties, on a

$$\int_{\Omega\setminus L_\varepsilon} u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_{\Omega\setminus L_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx - \int_{-1}^{1} u(\varepsilon, x_2)(\varphi(\varepsilon, x_2) - \varphi(-\varepsilon, x_2))dx_2. \tag{1.12}$$

(On a utilisé ici le fait que $u(\varepsilon, x_2) = u(-\varepsilon, x_2)$.)
Par convergence dominée, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega\setminus L_\varepsilon} u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)dx = \int_{\Omega} u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)dx \text{ et } \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega\setminus L_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx$$

Il reste à montrer que le deuxième terme du membre de droite de (1.12) tend vers 0. Ceci se fait en remarquant que la fonction φ est régulière, il existe donc C ne dépendant que de φ t.q.

$$|\int_{-1}^{1} u(\varepsilon, x_2)(\varphi(\varepsilon, x_2) - \varphi(-\varepsilon, x_2))dx_2| \le |\ln(\varepsilon)|^\gamma C\varepsilon.$$

On en déduit bien que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{1} u(\varepsilon, x_2)(\varphi(\varepsilon, x_2) - \varphi(-\varepsilon, x_2))dx_2 = 0,$$

ce qui termine la démonstration de (1.11) pour $i = 1$. Finalement, on a bien ainsi montré que les dérivées par transposition de u sont représentées par les dérivées classiques et que $u \in H^1(\Omega)$.

Corrigé 1.6 (Inégalités de Sobolev pour $p \le N$)

L'objet de cet exercice est de démontrer l'injection de Sobolev pour $1 \le p \le N$.

La démonstration proposée ici est due à L. Nirenberg. Elle consiste à faire d'abord le cas $p = 1$, puis à en déduire le cas $1 < p < N$. Historiquement, la cas $1 < p < N$ à été démontré avant le cas $p = 1$ (et le cas $p = 1$ est longtemps resté un problème ouvert).

1. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.

(a) On suppose ici $N = 1$. Montrer que $\|u\|_\infty \le \|u'\|_1$.

corrigé

Comme $u \in C_c^1(\mathbb{R})$ on a, pour $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \int_{-\infty}^x u'(t)dt$ et donc

$$|u(x)| \le \int_{-\infty}^{x} |u'(t)|dt \le \|u'\|_1.$$

On en déduit bien $\|u\|_\infty \le \|u'\|_1$.

(b) Par récurrence sur N, montrer que $\|u\|_{N/(N-1)} \le \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \dots \|\frac{\partial u}{\partial x_N}\|_1^{1/N}$.

corrigé

la question précédente permet d'initialiser la récurrence, on a pour tout toute fonction u appartenant à $C_c^1(\mathbb{R})$, $\|u\|_\infty \le \|u'\|_1$.

Soit maintenant $N \ge 1$. On suppose que pour toute fonction u appartenant à $C_c^1(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\|u\|_{N/(N-1)} \le \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \dots \|\frac{\partial u}{\partial x_N}\|_1^{1/N}.$$

Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^{N+1})$. Pour $x \in \mathbb{R}^{N+1}$ on note $x = (x_1, y)^t$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^N$. Pour $x_1 \in \mathbb{R}$, l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1,y)|^{\frac{N+1}{N}} dy = \int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1,y)||u(x_1,y)|^{\frac{1}{N}} dy \\ &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1,y)|^{\frac{N}{N-1}} dy\Big)^{\frac{N-1}{N}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1,y)| dy\Big)^{\frac{1}{N}}.\end{aligned} \tag{1.13}$$

On applique l'hypothèse de récurrence à la fonction $y \mapsto u(x_1, y)$ (qui est bien dans $C_c^1(\mathbb{R}^N)$), on obtient

$$\|u(x_1,\cdot)\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\cdot)\|^{1/N}_{L^1(\mathbb{R}^N)} \cdots \|\frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}(x_1,\cdot)\|^{1/N}_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

D'autre part, en appliquant le cas $N = 1$ (démontré à la question (a)) à la fonction $z \mapsto u_(z, y)$ (qui est bien dans $C_c^1(\mathbb{R})$), on a pour tout $y \in \mathbb{R}^N$

$$|u(x_1,y)| \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}(\cdot,y)\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

et donc, en intégrant par rapport à y,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1,y)| dy \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_{L^1(\mathbb{R}^{N+1})}.$$

En reportant ces majorations dans (1.13) on obtient pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1,y)|^{\frac{N+1}{N}} dy \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\cdot)\|^{1/N}_{L^1(\mathbb{R}^N)} \cdots \|\frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}(x_1,\cdot)\|^{1/N}_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,\cdot)\|^{\frac{1}{N}}_{L^1(\mathbb{R}^{N+1})}.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à x_1 et en utilisant une nouvelle fois l'inégalité de Hölder (avec le produit de$N$ fonctions dans L^N, on obtient bien l'inégalité désirée, c'est-à-dire

$$\|u\|^{\frac{N}{N+1}}_{\frac{N+1}{N}} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \cdots \|\frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}\|_1^{1/N},$$

ou encore

$$\|u\|_{\frac{N+1}{N}} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{\frac{1}{N+1}} \cdots \|\frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}\|_1^{\frac{1}{N+1}}.$$

Ce qui termine la récurrence.

(c) Montrer que $\|u\|_{N/(N-1)} \leq \| \, |\nabla u| \, \|_1$.

corrigé

La moyenne géométrique de N nombres positifs est plus petite que la moyenne arithmétique de ces mêmes nombres. (Ceci peut se démontrer en utilisant, par exemple, la convexité de la fonction exponentielle.)
On en déduit que

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \cdots \|\frac{\partial u}{\partial x_N}\|_1^{1/N} \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_1.$$

Comme $\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_1 \leq \| \, |\nabla u| \, \|_1$ pour tout i, on a bien

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leq \| \, |\nabla u| \, \|_1.$$

(d) Soit $1 \leq p < N$. Montrer qu'il existe $C_{N,p}$ ne dépendant que N et p t.q. $\|u\|_{p^\star} \leq C_{N,p}\| \, |\nabla u| \, \|_p$, avec $p^\star = (Np)/(N-p)$.

corrigé

Pour $p = 1$, on a vu que $C_{N,p} = 1$ convient. On suppose maintenant $1 < p < N$.

On pose $\alpha = \dfrac{p(N-1)}{N-p}$ (de sorte que $\alpha\frac{N}{N-1} = p^\star$) et $v = |u|^{\alpha-1}u$.

Comme $\alpha > 1$ et $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, on a aussi $v \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. On peut donc appliquer le résultat de la question (c) à la fonction v. On obtient

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^\star}\Big)^{\frac{N-1}{N}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\alpha\frac{N}{N-1}}\Big)^{\frac{N-1}{N}} \leq \| \, |\nabla v| \, \|_1.$$

Comme $|\nabla v| = \alpha |u|^{\alpha-1}|\nabla u|$, l'inégalité de Hölder (avec p et $q = p/(p-1)$) donne

$$\| \, |\nabla v| \, \|_1 = \alpha \| |u|^{\alpha-1} \, |\nabla u| \, \|_1 \leq \alpha \| |u|^{\alpha-1} \, \|_q \| \, |\nabla u| \, \|_p.$$

Comme $(\alpha-1)q = (\alpha-1)p/(p-1) = p^\star$, on a donc

$$\|u\|_{p^\star}^{\frac{p^\star(N-1)}{N}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^\star}\Big)^{\frac{N-1}{N}} \leq \alpha \|u\|_{p^\star}^{\frac{p^\star(p-1)}{p}} \| \, |\nabla u| \, \|_p.$$

Ce qui donne, avec $C_{N,p} = \alpha = \dfrac{p(N-1)}{N-p}$,

$$\|u\|_{p^\star} \leq C_{N,p} \| \, |\nabla u| \, \|_p.$$

---

2. Soit $1 \leq p < N$. Montrer que $\|u\|_{p^\star} \leq C_{N,p}\| \, |\nabla u| \, \|_p$, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ($C_{N,p}$ et $p^\star$ sont donnés à la question précédente). En déduire que l'injection de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est continue pour tout $q \in [p, p^\star]$.

corrigé

Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ t.q. $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. Par la question précédente, cette suite est de Cauchy dans $L^{p^\star}$. Par unicité de la limte (par exemple dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$) cette limite est nécessairement égale à u. On peut alors passer à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'inégalité $\|u_n\|_{p^\star} \leq C_{N,p}\| \, |\nabla u_n| \, \|_p$ et on obtient ainsi

$$\|u\|_{p^\star} \leq C_{N,p}\| \, |\nabla u| \, \|_p \text{ pour tout } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Ceci donne l'injection continue de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{p^\star}(\mathbb{R}^N)$.

L'injection continue de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ est immédiate car $\|u\|_p \leq \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Soit maintenant $q \in]p, p^\star[$. Pour montrer que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continûment dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ il suffit d'utiliser l'inégalité classique suivante (qui se démontre avec l'inégalité de Hölder) avec $p < q < r = p^\star$.

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^\theta \|u\|_r^{1-\theta}, \tag{1.14}$$

avec $\theta = \frac{p(r-q)}{q(r-p)} \in]0,1[$.

---

3. Soit $p = N$. Montrer que l'injection de $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est continue pour tout $q \in [N, \infty[$ (Pour $N = 1$, le cas $q = \infty$ est autorisé).

corrigé

Le cas $N = 1$ est facile. La question 2 donne l'injection continue de $W^{1,1}(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Comme $W^{1,1}(\mathbb{R})$ s'injecte aussi continûment dans $L^1(\mathbb{R})$, on obtient aussi une injection continu de $W^{1,1}(\mathbb{R})$ dans $L^q(\mathbb{R})$ pour tout $q \in]1, +\infty[$ (en utilisant (1.14) avec $r = +\infty$, $p = 1$ et $\theta = 1/q$).

On suppose maintenant $N > 1$. On a bien une injection continue de $W^{1,N}(\mathbb{R})$ dans $L^N(\mathbb{R})$. Le seul cas à considérer est donc $N < q < +\infty$. Plusieurs démonstration sont possibles. Une première démonstration consiste à utiliser pour $|u|^\alpha$, avec $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, l'inégalité démontrée à la question 1 (c), puis à utiliser l'inégalité de Hölder (pour faire apparître $|\nabla u|^N$) et l'inégalité (1.14). Enfin, on conclut avec la densité de $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. On donne ci dessous une démonstration probablement plus longue mais qui utilise de manière intéressante le caractère homogène de la norme. de la norme.

Soit $N < q < +\infty$. Il existe alors $p \in]1, N[$ t.q. $p^\star = Np/(N-p) = q$. On va utiliser la question 1 avec cette valeur de p.

On définit φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1, par :

$$\begin{array}{l} \varphi(s) = 0 \text{ si } |s| \le 1, \\ \varphi(s) = \frac{1}{2}(|s|-1)^2 \text{ si } 1 < |s| \le 2, \\ \varphi(s) = |s| - \frac{3}{2} \text{ si } 2 < |s|. \end{array}$$

On a $|\varphi(u)| \le 1$ et $|\varphi'(s)| \le 1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.
Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ t.q $\|u\|_{W^{1,N}} = 1$. On a $\varphi(u) \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Par question 1 (et la définition φ) on obtient

$$\|\varphi(u)\|_q^p \le C_{N,p} \|\,|\nabla\varphi(u)\,|\|_p \le C_{N,p} \int_{\{|u|\ge 1\}} |\nabla u(x)|^p dx \le C_{N,p} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^N dx \Big)^{\frac{p}{N}} \lambda_d(\{|u| \ge 1\}^{1-\frac{p}{N}}.$$

On a $\lambda_d(\{|u| \ge 1\} \le \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^N dx \le 1$ et $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^N dx \le 1$. On en déduit

$$\|\varphi(u)\|_q^p \le C_{N,p}.$$

Comme $|u|^q \le 2^q \varphi(u)^q + 2^q$, on a donc

$$\begin{array}{l} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^q dx = \int_{\{|u|\le 1\}} |u(x)|^q dx + \int_{\{|u|>1\}} |u(x)|^q dx \\ \le \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^N dx + 2^q \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(u(x))|^q dx + 2^q \lambda_d(\{|u| > 1\}) \le 1 + 2^q C_{N,p}^{\frac{q}{p}} + 2^q. \end{array}$$

Il existe donc $D_{N,q}$ ne dépendant que N et q t.q $\|u\|_q \le D_{N,q}$ si $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ et $\|u\|_{W^{1,N}} = 1$ Grâce au caractère homogène de la norme, on a en déduit que $\|u\|_q \le D_{N,q} \|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}$ pour tout $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Enfin, par densité de $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ on obtient que $W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|u\|_q \le D_{N,q} \|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} \text{ pour tout } u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N).$$

Ce qui montre bien qu'il y a une injection continue de $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$.

---

4. On suppose maintenant que Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne. Pour $1 \le p < N$, Montrer que l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est continue pour tout $q \in [p, p^\star]$ ($p^\star = (Np)/(N-p)$). Montrer que l'injection de $W^{1,N}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est continue pour tout $q \in [N, \infty[$ (Pour $N = 1$, le cas $q = \infty$ est autorisé).

corrigé

Cette question consiste seulement à utiliser l'existence d'un opérateur P linéaire continu de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $Pu = u$ p.p. dans Ω (opérateur dit de “prolongement" dont l'existence est donnée par le théorème 1.16). En effet, grâce à cette opérateur, la question 4 est une conséquence des questions précédentes (et de l'inégalité (1.14)).