Centre de Télé-Enseignement Sciences
Université de Provence

MASTER SCIENCES
Mention Mathématiques et Applications

Expédition dans la semaine n°	Etape	Code UE	N° d'envoi de l'UE
	M2-EDP	M2-EDP	3

Nom de l'UE : Equations aux Dérivées Partielles

– **Contenu de l'envoi : Polycopié, chapitre 3.**

- Guide du travail à effectuer

Semaine 1 :
Etudier le chapitre 3, section 3.1.1 et 3.1.2 (degré topologique, existence par Schauder)
Exercice proposé : 3.1
Exercice à faire pour le 1er devoir, à rendre en février : 3.2

Semaine 2 :
Etudier le chapitre 3, section 3.1.3, partie existence par degré topologique, sans l'unicité
Exercices proposés : 3.4, 3.5

Semaine 3 :
Etudier le chapitre 3, section 3.1.3, partie unicité, et section 3.2, existence pour le problème approché
Exercice proposé : 3.6

Semaine 4 :
Etudier le chapitre 3, section 3.2, existence pour les opérateurs de Leray-Lions et unicité)
Exercice proposé : 3.9

- Coordonnées des enseignants responsables de l'envoi

T. Gallouet, R. Herbin, LATP-CMI, 39 rue Joliot Curie, 13453 marseille cedex 13.
email : gallouet@cmi.univ-mrs.fr , herbin@cmi.univ-mrs.fr

Vous pouvez aussi consulter la page web: http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/tele.d
et nous poser des questions par email.

Chapitre 3

Problèmes elliptiques non linéaires

Dans ce chapitre, on va présenter deux types de méthodes pour obtenir des résulats d'existence de solution pour des problèmes elliptiques non linéaires : une méthode de compacité et une méthode de monotonie. On donnera également une méthode pour obtenir un résultat d'unicité.

3.1 Méthodes de compacité

3.1.1 Degré topologique et théorème de Schauder

Objectif. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, ou un ouvert borné d'un espace de Banach E. Soit $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ (ou $f \in C(\bar{\Omega}, E)$) et $y \in \mathbb{R}^N$ (ou $y \in E$). On cherche à montrer qu'il existe $x \in \bar{\Omega}$ t.q. $f(x) = y$.

On commence par donner l'existence (et l'unicité) d'une application, appelée degré topologique, en dimension finie puis en dimension infinie. Cette application nous permet parfois d'obtenir le thèorème d'existence de solution recherché.

Définition 3.1 *Soit $N \geq 1$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des triplets (f, Ω, y) où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $y \in \mathbb{R}^N$ t.q. $y \notin \{f(x), x \in \partial\Omega\}$.*

Théorème 3.2 (Brouwer, 1933) *Soit $N \geq 1$ et $\mathcal{A}$ donné par la définition 3.1. Il existe alors une application d de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{Z}$, appelée "degré topologique", vérifiant les trois propriétés suivantes :*

(d1) (Normalisation) $d(I, \Omega, y) = 1$ si $y \in \Omega$.

(d2) (Degré d'une union) $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$ si $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $y \notin \{f(x), x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2\}$.

(d3) (Invariance par homotopie) Si $h \in C([0,1] \times \bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $y \in C([0,1], \mathbb{R}^N)$ et $y(t) \notin \{h(t,x), x \in \partial\Omega\}$ (pour tout $t \in [0,1]$), on a alors $d(h(t,\cdot), \Omega, y(t)) = d(h(0,\cdot), \Omega, y(0))$ pour tout $t \in [0,1]$.

Remarque 3.3 Des propriétés du degré topologique (données dans le théorème 3.2), on déduit 2 conséquences très intéressantes :

1. $d(f, \Omega, y) \neq 0$ implique qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $f(x) = y$.
2. Soit A une matrice $N \times N$ inversible, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $y \in \mathbb{R}^N$ t.q. $A^{-1}y \in \Omega$. On pose $f(x) = Ax$ pour $x \in \mathbb{R}^N$. On a alors $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ et $d(f, \Omega, y)$ est égal au signe du déterminant de A, on a donc $d(f, \Omega, y) \neq 0$.

La remarque 3.3 nous donne une méthode pour trouver des solutions à des problèmes non linéaires. Soit $N \geq 1$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $y \in \mathbb{R}^N$. On cherche à montrer qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $f(x) = y$. Pour cela, on construit une application h de $[0,1] \times \bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^N$ t.q.

1. $h(1, \cdot) = f$,
2. $h(0, \cdot) = g$ avec g linéaire inversible et t.q. $y \in \{g(x), x \in \Omega\}$.
3. $h(t, x) \neq y$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in \partial\Omega$.

On obtient alors $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y) \neq 0$ et donc qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $f(x) = y$.

On peut remarquer que dans le cas $N = 1$, cette méthode dite de “degré topologique" que l'on vient de décrire n'apporte rien de plus que le théorème des valeurs intermédiaires. Elle est donc sans intérêt si $N = 1$.

Un première conséquence de cette méthode de “degré topologique" est le théorème de point fixe de Brouwer que nous donnons maintenant.

Théorème 3.4 (Point fixe de Brouwer) *Soit $N \geq 1$, $R > 0$ et $f \in C(B_R, B_R)$ avec $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| \leq R\}$. (On a muni $\mathbb{R}^N$ d'une norme notée $\|\cdot\|$.) Alors f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in B_R$ t.q. $f(x) = x$.*

Démonstration Si il existe $x \in \partial B_R$ (c'est-à-dire t.q. $\|x\| = R$) t.q. $f(x) = x$, il n'y a plus rien à démontrer. On suppose donc maintenant $f(x) \neq x$ pour tout $x \in \partial B_R$. On pose alors $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| < R\}$ (ce qui donne $B_R = \bar{\Omega}$) et, pour $t \in [0,1]$ et $x \in B_R$, $h(t,x) = x - tf(x)$. Il est facile de voir que $h(t,x) \neq 0$ pour tout $x \in \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| = R\}$. On en déduit que $d(h(1,\cdot), \Omega, 0) = d(h(0,\cdot), \Omega, 0) = d(I, \Omega, 0) = 1$ et donc qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $f(x) = x$ ■

Le théorème 3.2 a été généralisé (dès 1934) en dimension infinie par Leray et Schauder sous une hypothèse de compacité que nous donnons maintenant

Définition 3.5 *Soit E un espace de Banach (réel), B une partie de E et f une application de B dans E. On dit que f est compacte (la terminologie de Leray-Schauder est différente, ils utilisent l'expression “complètement continue") si f vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. f est continue,

2. $\{f(x), x \in C\}$ est relativement compacte (dans E) pour tout partie C bornée de B.

On peut remarquer, dans la définition précédente, que si f est linéaire (et $B = E$) la deuxième condition entraîne la première. Mais ceci est faux pour des applications non linéaires.

Définition 3.6 *Soit E un espace de Banach (réel). On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des triplets $(I - f, \Omega, y)$ où Ω est un ouvert borné de E, f est une application compacte de $\bar{\Omega}$ dans E (ce qui est équivalent à dire que f est continue et $\{f(x), x \in \bar{\Omega}\}$ est une partie relativement compacte de E). et $y \in E$ t.q. $y \notin \{f(x), x \in \partial\Omega\}$.*

Théorème 3.7 (Leray, Schauder, 1934) *Soit E un espace de Banach (réel) et $\mathcal{A}$ donné par la définition 3.6. Il existe alors une application d de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{Z}$, appelée “degré topologique", vérifiant les trois propriétés suivantes :*

(d1) (Normalisation) $d(Id, \Omega, y) = 1$ si $y \in \Omega$.

(d2) (Degré d'une union) $d(I - f, \Omega, y) = d(I - f, \Omega_1, y) + d(I - f, \Omega_2, y)$ si $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $y \notin \{x - f(x), x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2\}$.

(d3) (Invariance par homotopie) Si h est une application compacte de $[0,1]\times\bar\Omega$ dans E (ce qui est équivalent à dire que h est continue et $\{h(t,x),\, t\in[0,1],\, x\in\bar\Omega\}$ est une partie relativement compacte de E), $y\in C([0,1],E)$ et $y(t)\notin\{x-h(t,x),\, x\in\partial\Omega\}$ (pour tout $t\in[0,1]$), on a alors $d(I-h(t,\cdot),\Omega,y(t)) = d(I-h(0,\cdot),\Omega,y(0))$ pour tout $t\in[0,1]$.

Comme dans le cas de la dimension finie (voir la remarque 3.3), des propriétés du degré topologique (données dans le théorème 3.7), on déduit que $d(I-f,\Omega,y)\neq 0$ implique qu'il existe $x\in\Omega$ t.q. $x-f(x)=y$. Pour donner l'analogue de la seconde propriété de la remarque 3.3, nous avons besoin d'un deuxième théorème dû à Leray et Schauder que nous donnons maintenant.

Théorème 3.8 (Application linéaire compacte) *Soit E un espace de Banach (réel), L une application linéaire compacte de E dans E et Ω un ouvert borné contenant 0. On suppose que*

$$x\in E,\ Lx=x\Rightarrow x\notin\partial\Omega. \tag{3.1}$$

Alors $(I-L,\Omega,0)\in\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est donné par la définition 3.6) et $d(I-L,\Omega,0)\neq 0$.
Noter que, comme L est linéaire, l'hypothèse (3.1) est équivalente à dire $(x\in E,\, Lx=x)\Rightarrow x=0$, ce qui est équivalent à dire que 1 n'est pas valeur propre de L.

On peut maintenant, comme en dimension finie, donner une méthode pour trouver des solutions à des problèmes non linéaires. Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert borné de E, f une application de $\bar\Omega$ dans E. On cherche à montrer qu'il existe $x\in\Omega$ t.q. $x-f(x)=0$ (quitte à changer f, on peut toujours se ramener à cette forme). Pour cela, on construit une application h de $[0,1]\times\bar\Omega$ dans E, compacte et t.q.

1. $h(1,\cdot)=f$,
2. $h(0,\cdot)=L$ avec L linéaire de E de E,
3. $x-h(t,x)\neq 0$ pour tout $t\in[0,1]$ et tout $x\in\partial\Omega$.

On obtient alors $d(I-f,\Omega,0)=d(I-L,\Omega,0)\neq 0$ et donc qu'il existe $x\in\Omega$ t.q. $x-f(x)=0$.

Comme en dimension finie, une première conséquence de l'existence du degré topologique est l'obtention d'un théorème de point fixe que nous donnons maintenant.

Théorème 3.9 (Point fixe de Schauder) *Soit E un espace de Banach, $R>0$, $B_R=\{x\in E,\, \|x\|\leq R\}$ et f une application compacte de B_R dans B_R (c'est-à-dire f continue et $\{f(x),\, x\in B_R\}$ relativement compacte dans E). Alors f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x\in B_R$ t.q. $f(x)=x$.*

Démonstration La démonstration est très voisine de celle du théorème 3.4. Si il existe $x\in\partial B_R$ (c'est-à-dire t.q. $\|x\|=R$) t.q. $f(x)=x$, il n'y a plus rien à démontrer. On suppose donc maintenant $f(x)\neq x$ pour tout $x\in\partial B_R$. On pose alors $\Omega=\{x\in E,\, \|x\|<R\}$ (ce qui donne $B_R=\bar\Omega$) et, pour $t\in[0,1]$ et $x\in B_R$, $h(t,x)=tf(x)$. Il est facile de voir que $x-h(t,x)\neq 0$ pour tout $x\in\partial\Omega=\{x\in\mathbb{R}^N,\, \|x\|=R\}$. La compacité de h se déduit de celle de f. On en déduit alors que $d(I-h(1,\cdot),\Omega,0)=d(I-h(0,\cdot),\Omega,0)=d(I,\Omega,0)=1$ et donc qu'il existe $x\in\Omega$ t.q. $f(x)=x$. ■

Le théorème de Schauder est faux si on remplace l'hypothèse de compacité de f par la simple hypothèse de continuité. Toutefois, la difficulté principale dans l'utilisation du théorème de Schauder (ou, plus généralement, dans l'utilisation du degré topologique) est souvent de montrer la continuité de f (ou, dans l'utilisation du degré topologique, la continuité de l'application notée h ci avant).

3.1.2 Existence avec le théorème de Schauder

On rappelle tout d'abord la définition de fonction de Carathéodory.

Définition 3.10 *Soit $N, p, q \in \mathbb{N}^\star$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soit a une application de $\Omega \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. On dit que a est fonction de Carathéodory si $a(\cdot, s)$ est borélienne pour tout $s \in \mathbb{R}^p$ et $a(x, \cdot)$ est continue pour presque tout $x \in \Omega$.*

On travaille dans cette section avec les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} N \geq 1,\ \Omega \text{ est un ouvert borné de } \mathbb{R}^N, \\ a\ :\ \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N \text{ est une fonction de Carathéodory }, \\ \text{il existe } \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \alpha \leq a(\cdot, s) \leq \beta \text{ p.p. et pour tout } s \in \mathbb{R}, \\ f \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sous les hypothèses 3.2, on cherche à montrer l'existence de u, solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, u(x)) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x, u(x)) v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Théorème 3.11 *Sous les hypothèses* (3.2)*, il existe u solution de* (3.3)*.*

Démonstration Pour $\bar{u} \in L^2(\Omega)$, le chapitre sur les équations elliptiques linéaires nous donne l'existence et l'unicité de u solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, \bar{u}(x)) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x, \bar{u}(x)) v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.4}$$

On pose $T(\bar{u}) = u$. L'application T est donc une application de E dans E avec $E = L^2(\Omega)$. Un point fixe de T est une solution de (3.3). Pour démontrer l'existence d'un tel point fixe, on va utiliser le théorème 3.9.

Tout d'abord, en utilisant α, l'inégalité de Poincaré et la borne L^∞ de f, on montre facilement que l'image de T est dans un borné de $H_0^1(\Omega)$ et donc (par le théorème de Rellich) dans un compact de $L^2(\Omega)$. En prenant R assez grand, l'application T envoie donc $B_R = \{v \in L^2(\Omega), \|v\|_2 \leq R\}$ dans B_R et $\{T(\bar{u}), \bar{u} \in B_R\}$ est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$. Pour utiliser le théorème 3.9, il reste à montrer la continuité de T.

Soit $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E t.q. $\bar{u}_n \to \bar{u}$ dans E, quand $n \to +\infty$. On pose $u_n = T(\bar{u}_n)$. Après extraction d'une sous suite, on peut supposer que $\bar{u}_n \to \bar{u}$ p.p. et qu'il existe $w \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u_n \to w$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ (et donc aussi $u_n \to w$ dans $L^2(\Omega)$). On va montrer que w est solution de (3.4). En effet, Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega a(x, \bar{u}_n(x)) \nabla u_n(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x, \bar{u}_n(x)) v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ (en utilisant la convergence dominée et le passage à la limite sur le produit d'une convergence faible et d'une convergence forte dans L^2), on obtient

$$\int_\Omega a(x, \bar{u}(x)) \nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x, \bar{u}(x)) w(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Ceci prouve que $w = T(\bar{u})$. On a donc prouvé, après extraction d'une sous suite, que $T(\bar{u}_n) \to T(\bar{u})$ dans $L^2(\Omega)$. Par un raisonnement classique par l'absurde on peut montrer que cette convergence reste vraie sans extraction de sous suite (voir l'exercice 3.1 pour un exemple de ce type de raisonnement). On a ainsi démontré la continuité de T. On peut donc appliquer le théorème 3.9 et conclure à l'existence d'un point fixe de T, ce qui termine cette démonstration. ■

3.1.3 Existence avec le degré topologique

On donne maintenant une application du degré topologique, (cette application pourrait d'ailleurs aussi se faire par le théorème de Schauder).
On reprend le même problème que dans le paragraphe 3.1.2 en supprimant l'hypothèse f bornée qui permettait une application simple du théorème de Schauder.
On considère l'équation de diffusion-convection-réaction suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int a(x,u(x))\nabla u(x)\cdot\nabla v(x) + \int_\Omega G(x)\varphi(u(x))\cdot\nabla v(x)dx = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \displaystyle\int_\Omega f(x,u(x))v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right. \tag{3.5}$$

qui est la formulation faible du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} -\mathrm{div}(a(x,u)\nabla u) - \mathrm{div}(G(x)\varphi(u)) = f(x,u),\ x \in \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{3.6}$$

Notons que cette équation est non linéaire pour trois raisons : les termes de diffusion, convection et réaction sont non linéaires. On se place sous les hypothèses suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} (i)\ \Omega \text{ est un ouvert borné de } \mathbb{R}^N,\ N \geq 1, \\ (ii)\ a \text{ est une fonction de Carathéodory (voir la définition 3.10)}, \\ (iii)\ \exists \alpha,\beta > 0; \alpha \leq a(x,s) \leq \beta \quad \forall s \in \mathbb{R} \qquad \text{p.p. } x \in \Omega, \\ (iv)\ G \in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^N),\ \mathrm{div}G = 0, \\ (v)\ \varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ et il existe } C_1 \geq 0 \text{ t.q. } |\varphi(s)| \leq C_1|s| \qquad \forall s \in \mathbb{R}, \\ (vi)\ f \text{ est une fonction de Carathéodory, et } \exists C_2 \geq 0 \text{ et } d \in L^2(\Omega);\ |f(x,s)| \leq d(x) + C_2|s|, \\ (vii)\ \displaystyle\lim_{s\to\pm\infty} \frac{f(x,s)}{s} = 0. \end{array}\right. \tag{3.7}$$

Remarque 3.12 (Sur l'existence et l'unicité des solutions de (3.5)**)** Dans le cas où $a \equiv 1$, $\varphi = 0$ et f est de la forme $f(x,s) = d(x) + \lambda s$ où λ est une valeur popre du Laplacien sur Ω avec condition de Dirichet et d un élément de $L^2(\Omega)$, le problème (3.6) devient $-\Delta u = \lambda u + d$, avec condition de Dirichlet. Ce problème n'a une solution que si d est orthogonal à l'espace propre associé à λ (et dans ce cas on n'a pas unicité). C'est pour assurer l'existence qu'on rajoute l'hypothèse de sous-linéarité sur f (hypothèse (vii)).

Remarque 3.13 (Coercivité) Lorsque $\mathrm{div}\, G \neq 0$, le problème peut se traiter de manière similaire à celle donnée dans la démonstration de théorème 3.14 à condition que $\mathrm{div}\, G \leq \lambda_1$ a.e. où λ_1 est la première valeur propre de $u \mapsto -\mathrm{div}(\alpha \nabla u)$ avec condition de Dirichlet (cette valeur propre est strictement positive). Sans cette condition, le problème devient plus difficile (voir l'exercice 3.5), même dans le cas linéaire, c'est-à-dire le cas où a et f ne dépendent pas de u et où $\varphi(u) = u$. La difficulté principale est due à l'absence de coercivité de l'opérateur $u \mapsto -\mathrm{div}(\alpha \nabla u) - \mathrm{div}(Gu)$.

Théorème 3.14 (Existence) *Sous les hypothèses* (3.7)*, il existe une solution de* (3.5).

Démonstration Essayons d'abord d'appliquer le théorème de Schauder. On considère le problème linéaire suivant :

$$\int_\Omega a(\bar{u}) \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega G\varphi(\bar{u}) \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(\bar{u}) v \,\mathrm{d}x \qquad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.8}$$

Soit T l'opérateur défini de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ par $T(\bar{u}) = u$ où u est solution de (3.8). Il est assez facile de montrer que T est linéaire continue et même compact. Par contre il est difficile de montrer que T envoie une boule dans une boule. Pour cela, il faut obtenir une estimation sur u en fonction de $\bar{u}$, et ce n'est pas gagné. Prenons $v = u$ dans (3.8), comme on a fait dans le paragraphe 3.1.2. On obtient grâce aux hypothèses (3.7) :

$$\alpha \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \|G\|_\infty C_1 \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|d\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Montrons que le dernier terme à lui tout seul empêche d'avoir les estimations. Supposons $G = 0$ et $d = 0$, on a alors avec l'inégalité de Poincaré :

$$\frac{\alpha}{C_\Omega^2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \alpha \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2 \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

c'est à dire $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \dfrac{C_\Omega^2}{\alpha} C_2 \|\bar{u}\|_{L^2} \leq \dfrac{C_\Omega^2}{\alpha} C_2 R$ si $\bar{u} \in B_R$, c'est-à-dire $\|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R$.
On ne peut pas en conclure que $\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} < R$ (sauf si $C_\Omega^2 C_2 < \alpha$ et dans ce cas la seule solution de (3.8) est $u = 0 \ldots$). Donc, la méthode ne marche pas de manière directe. Une solution est de considérer un problème tronqué et de passer à la limite, mais dans ce cas les difficultés sont les mêmes qu'avec le degré topologique. On va maintenant donner la preuve par degré topologique.
Cette méthode demande des estimations *a priori* c'est à dire des estimations sur u, sans connaître son existence. Supposons donc u solution de (3.5), on peut (et on va) montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $\|u\|_{L^2} \leq R$. Le gros avantage de considérer (3.5) plutôt que (3.8) est d'avoir uniquement u, et non pas u et $\bar{u}$, et ceci simplifie considérablement les estimations. Par exemple dans le terme de convection non linéaire, on peut écrire (formellement)

$$\begin{aligned} \int_\Omega G\varphi(u) \cdot \nabla u \quad \mathrm{d}x &= \int_\Omega G \cdot \nabla \phi(u) \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega \mathrm{div}\, G \quad \phi(u) \,\mathrm{d}x \\ &= 0 \quad \text{car} \quad \mathrm{div}\, G = 0, \end{aligned}$$

où ϕ est une primitive de φ. Notons que l'estimation $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq R$ revient à montrer que toutes les solutions sont dans la boule B_R (boule fermée de centre 0 et de rayon R), ce qui est une estimation <u>uniforme</u> sur toutes les solutions.
On réécrit le problème sous la forme :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(u) \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \langle F(u), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

où $F(u)$ est, pour $u \in L^2(\Omega)$, l'élément de $H^{-1}(\Omega)$ défini par

$$\langle F(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = -\int_\Omega G\varphi(u)\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega f(u)v \,\mathrm{d}x.$$

Comme $G \in L^\infty(\Omega)^N$, $|\varphi(s)| \le C_1|s|$ et $|f(\cdot,s)| \le d + C_2|s|$, il est facile de voir que l'application F qui à u associe $F(u)$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Pour $S \in H^{-1}(\Omega)$, le problème linéaire

$$\left\{\begin{array}{l} w \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(u)\nabla w\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x = \langle S, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}, \end{array}\right. \tag{3.9}$$

admet une unique solution $w \in H_0^1(\Omega)$. On note B_u l'opérateur qui à S dans $H^{-1}(\Omega)$ associe w solution de (3.9). L'opérateur B_u est linéaire continu de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^2(\Omega)$. On en déduit que l'opérateur B_u est compact de $H^{-1}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Le problème (3.5) est équivalent à résoudre le problème de point fixe $u = B_u(F(u))$. On va donc montrer, par degré topologique, que le problème suivant admet une solution

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^2(\Omega), \\ u = B_u(F(u)). \end{array}\right.$$

Pour $t \in [0,1]$, on pose $h(t,u) = B_u(t\,F(u)) \in L^2(\Omega)$. L'application h est ainsi définie de $[0,1]\times L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Pour $R > 0$, on pose $B_R = \{u \in L^2(\Omega)$ t.q. $\|u\|_{L^2(\Omega)} < R\}$. On va montrer que

(1) $\exists R > 0; \left\{\begin{array}{l} u - h(t,u) = 0 \\ t\in[0,1], u \in L^2(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} < R$
   (c'est l'estimation *a priori*, qui est le point le plus difficile à montrer) ;

(2) h est continue de $[0,1]\times\bar B_R$ dans $\bar B_R$;

(3) $\{h(t,u),\ t\in[0,1], u \in \bar B_R\}$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$.

Si on suppose qu'on a démontré (1) (2) (3), on n'a pas de solution à l'équation $u - h(t,u) = 0$ sur le bord de la boule B_R, et on peut donc définir le degré $d(Id - h(t,.), B_R, 0)$. Ce degré ne dépend pas de t, on a donc :

$$\begin{aligned} d(Id - h(t,\cdot), B_R, 0) &= d(Id - h(0,\cdot), B_R, 0) \\ &= d(Id, B_R, 0) = 1. \end{aligned}$$

On en déduit l'existence de $u \in B_R$ tel que $u - h(1,u) = 0$, c'est à dire

$$u = B_u(F(u)).$$

Donc u est solution de (3.5) (et le théorème 3.14 est démontré).

Il reste donc à montrer (1), (2) et (3). Commençons par démontrer (3) (pour tout $R > 0$). Soit $R > 0$. On suppose que $\|u\|_{L^2} \le R$. On a :

$$F(u) \in H^{-1}(\Omega),\ \text{et}\ \langle F(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = -\int_\Omega G\varphi(u)\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega f(u)v \,\mathrm{d}x$$

On veut estimer $\langle F(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$.

$$\begin{aligned} \langle F(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} &\le \|G\|_\infty \|\varphi(u)\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f(u)\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \|G\|_\infty\, C_1\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|d\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + C_2\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le (\|G\|_\infty\, C_1\, R + C_\Omega\|d\|_{L^2(\Omega)} + C_2\ C_\Omega\ R\,)\|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

où C_Ω ne dépend que de Ω (et est donnée par l'inégalité de Poincaré). Donc

$$t\|F(u)\|_{H^{-1}} \leq \|G\|_\infty\, C_1 R + C_\Omega \|d\|_{L^2(\Omega)} + C_2\, C_\Omega\, R, \quad \forall t \in [0,1].$$

Posons $h(t,u) = B_u(tF(u)) = w$ et montrons qu'il existe $\bar{R}$ dépendant que de $R, G, C_\Omega, C_1, C_2, \alpha$ tel que

$$\|h(t,u)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \bar{R}\ ;$$

Par définition, w est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega a(u)\nabla w \cdot \nabla v = \langle t\, F(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ w \ \in\ H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.10}$$

En prenant $v = w$ dans (3.10), on obtient :

$$\alpha \|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \|tF(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \widetilde{R} \|w\|_{H_0^1(\Omega)},$$

avec $\widetilde{R} = \|G\|_\infty\, C_1 R + C_\Omega \|d\|_{L^2(\Omega)} + C_2\, C_\Omega\, R$. On a donc $\|h(t,u)\|_{H_0^1(\Omega)} = \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\widetilde{R}}{\alpha} = \bar{R}$.
On en déduit par le théorème de Rellich (théorème 1.22) que l'ensemble $\{h(t,u), t \in [0,1], u \in \bar{B}_R\}$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$. Ce qui montre bien (3).

Montrons maintenant le point (2). Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ telle que $t_n \to t$ lorsque $n \to +\infty$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ t.q. $u_n \to n$ dans $L^2(\Omega)$. On veut montrer que $h(t_n, u_n) \to h(t,u)$ dans $L^2(\Omega)$. Soit $w_n = h(t_n, u_n)$ et $w = h(t,u)$. Pour montrer que $w_n \to w$ dans $L^2(\Omega)$, on cherche à passer à la limite sur l'équation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega a(u_n)\nabla w_n.\nabla v \,\mathrm{d}x = -t_n \int_\Omega G\varphi(u_n)\cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + t_n \int_\Omega f(u_n) v \,\mathrm{d}x \\ w_n \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.11}$$

On sait déjà que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ (c'est ce qu'on a montré à l'étape précédente : si $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq R$ alors $\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \bar{R}$.
La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, et à une sous suite près, (on ne renumérote pas) on a donc

$$w_n \to \bar{w} \text{ dans } H_0^1 \text{ faible et } w_n \to \bar{w} \text{ dans } L^2(\Omega),$$

$$u_n \to u \text{ p.p. et } \exists\, H \in L^2(\Omega)\ ;\ |u_n| \leq H \text{ p.p..}$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$; comme $a(u_n) \to a(u)$ p.p. donc $a(u_n)\nabla v \to a(v)\nabla v$ p.p., et $|a(u_n)\nabla v| \leq \beta|\nabla v|$, on a donc donc $a(u_n)\nabla v \to a(u)\nabla v$ dans $L^2(\Omega)$. Mais $\nabla w_n \to \nabla \bar{w}$ dans $(L^2(\Omega))^N$ faible. On a donc

$$\int_\Omega a(u_n)\nabla w_n \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega a(u)\nabla \bar{w}\cdot \nabla v \,\mathrm{d}x \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

On remarque ensuite que $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ p.p. et que $|\varphi(u_n)| \leq C_1|u_n| \leq C_1 H$; donc par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ dans $L^2(\Omega)$ et $\displaystyle\int_\Omega G\varphi(u_n)\cdot\nabla v\, dx \to \int_\Omega G\varphi(u)\cdot \nabla v \,\mathrm{d}x$ lorsque $n \to +\infty$.
Enfin pour le dernier terme, $f(u_n) \to f(u)$ p.p.. Par convergence dominée (car $|f(u_n)| \leq |d| + C_2 H$ p.p.) on a donc $f(u_n) \to f(u)$ dans L^2 et donc $\displaystyle\int_\Omega f(u_n) v \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega f(u) v \,\mathrm{d}x$ lorsque $n \to +\infty$.

En passant à la limite dans (3.11), on obtient donc :

$$\int_\Omega a(u)\nabla\bar{w}\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x = -t\int_\Omega G\varphi(u)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x + t\int_\Omega f(u)v\,\mathrm{d}x.$$

et donc $\bar{w} = h(t,u) = w$.
En raisonnant par l'absurde, on montre ensuite que (sans sous-suite) $w_n \to w$ dans H_0^1 faible et $w_n \to w$ dans $L^2(\Omega)$ où $w_n = h(t_n,\ u_n)$ et $w = h(t,u)$; l'application h est donc continue. Ce qui montre bien (2).

Il reste maintenant à démontrer (1). On veut montrer que $\exists R > 0$ t.q. :

$$\exists R > 0; \left\{\begin{array}{l} t\in[0,1] \\ u = h(t,u)) \end{array}\right\} \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} < R.$$

Soit $t\in[0,1]$, et $u = h(t,u) = t\ B_u(F(u))$, c'est à dire

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega a(u)\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x = -t\int_\Omega G\varphi(u)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x + t\int_\Omega f(u)v\,\mathrm{d}x, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega). \\ u\in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{3.12}$$

Pour $s\in\mathbb{R}$, on pose $\Phi(s) = \int_0^s \varphi(\xi)d\xi$ (Φ est donc une primitive de φ). Comme $u\in H_0^1(\Omega)$, il n'est pas difficile de montrer que $\Phi(u)\in W_0^{1,1}(\Omega)$ et que

$$\int_\Omega G\varphi(u)\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x = \int_\Omega G\cdot\nabla\Phi(u)\,\mathrm{d}x.$$

(Ceci est laissé en exercice, il suffit d'approcher u, dans $H_0^1(\Omega)$, par une suite de fonctions appartenant à $C_c^\infty(\Omega)$.)
Comme $\mathrm{div}(G) = 0$, on a alors

$$\int_\Omega G\varphi(u)\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x = \int_\Omega G\cdot\nabla\Phi(u)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathrm{div}G\ \Phi(u)\,\mathrm{d}x = 0.$$

On choisit alors $v = u$ dans (3.12). Par les hypothèses (3.7) , on a donc :

$$\alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \int_\Omega |f(u)u|dx.$$

On va déduire de cette inégalité qu'il existe $R > 0$ t.q $\|u\|_{L^2(\Omega)} < R$. C'est ici qu'on utilise l'hypothèse (vii), i.e. $\lim_{s\to\pm\infty} f(x,s)/s = 0$.
On raisonne par l'absurde. Supposons qu'un tel R n'existe pas. Alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}\subset L^2(\Omega)$ telle que

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \ge n \ \text{ et } \ \alpha\|u_n\|^2_{H_0^1} \le \int_\Omega |f(u_n)u_n|\,\mathrm{d}x.$$

Montrons que ceci est impossible. Posons $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}$. On a donc $\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et

$$\alpha\|v_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \int_\Omega \left|\frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}v_n\right|\,\mathrm{d}x.$$

Or $|f(s)| \leq |d| + C_2|s|$, on a donc

$$\begin{aligned}
\alpha\|v_n\|^2_{H^1_0(\Omega)} &\leq \int_\Omega \frac{|d| + C_2|u_n|}{\|u_n\|_{L^2}}|v_n| \,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_\Omega \frac{|d||v_n|}{\|u_n\|_{L^2}} \,\mathrm{d}x + C_2 \int_\Omega |v_n|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leq \|d\|_{L^2(\Omega} + C_2.
\end{aligned}$$

Donc, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée dans $H^1_0(\Omega)$, et donc, à une sous-suite prés, $v_n \to v$ dans $L^2(\Omega)$. On a donc $\|v\|_{L^2} = 1$ (ce qui donne $v \neq 0$). On a aussi (toujours à une sous-suite prés) :

$$\begin{aligned}
&v_n \to v \quad \text{p.p.,} \\
&|v_n| \leq H \quad \text{avec} \quad H \in L^2(\Omega).
\end{aligned}$$

Enfin, en utilisant l'inégalité de Poincaré, il existe C_Ω, ne dépendant que de Ω t.q.

$$\frac{\alpha}{C_\Omega} = \frac{\alpha}{C_\Omega}\|v_n\|^2_{L^2} \leq \ \alpha\ \|v_n\|^2_{H^1_0} \leq \int_\Omega \frac{|f(u_n)|}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}|v_n| \,\mathrm{d}x.$$

On pose

$$X_n = \int_\Omega \frac{|f(u_n)||v_n|}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} \,\mathrm{d}x$$

et on montre maintenant que $X_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, ce qui est impossible puisque X_n est minoré par la constante α/C_Ω qui est strictement positive.

Montrons que $\dfrac{f(u_n)|v_n|}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} \to 0$ p.p. avec domination (dans $L^1(\Omega)$), on aura alors par le théorème de convergence dominée que $X_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

On montre tout d'abord la domination. On a

$$\frac{|f(u_n)|}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} \leq \frac{|d| + C_2|u_n|}{\|u_n\|_{L^2}} \leq |d| + C_2|v_n| \leq |d| + \ C_2H,$$

donc $|\dfrac{f(u_n)}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}v_n| \leq (|d| + C_2H)H \in L^1(\Omega)$.

On montre maitanant la convergence p.p.. On a $v_n \to v$ p.p. donc $\exists A$; mes$(A^c) = 0$ et $v_n(x) \to v(x) \forall x \in A$.

Soit $x \in A$,

1er cas : si $v(x) > 0$; $v_n(x) \to v(x)$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} = +\infty$ donc $u_n(x) = v_n(x)\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \to +\infty$.

$$\frac{f(u_n(x))}{\|u_n\|_{L^2(\Omega}}v_n(x) = \frac{f(u_n(x))}{u_n(x)} \quad \frac{u_n(x)}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}v_n(x) = \frac{f(u_n(x))}{u_n(x)}(v_n(x))^2 \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

On a utilisé ici $\lim_{s\to+\infty} f(s)/s = 0$.

2ème cas : si $v(x) < 0$; on a de même $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(u_n(x))}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}v_n(x) = 0$, car $\lim\limits_{s\to-\infty} \dfrac{f(s)}{s} = 0$.

3ème cas : si $v(x) = 0$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(u_n(x))}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}v_n(x)\right| &\leq \frac{|d(x)| + C_2|u_n(x)|}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}|v_n(x)| \\
&\leq (|d(x)| + C_2|v_n(x)|)|v_n(x)| \\
&\to 0 \quad \text{car} \quad v(x) = 0.
\end{aligned}$$

En résumé on a $\quad \dfrac{f(u_n)}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} v_n \to 0$ p.p..
On a ainsi montré que $\lim_{n\to+\infty} X_n = 0$, en contradiction avec $X_n \geq \alpha/C_\Omega$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
On a donc montré qu'il existe $R > 0$ t.q. $(u = h(t,u)) \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} < R$. Ce qui montre (1). On a ainsi montré l'existence de solution à (3.5). Ceci termine la démonstration du théorème 3.14. ■

Sous les hypothèses (3.7) (hypothèses du théorème 3.14). Peut-on montrer l'unicité de la solution ? Dans le cas où f ne dépend pas de u et où l'équation est linéaire (c'est-à-dire que a ne dépend pas de u et φ est linéaire), il suffit de prendre la différence de deux solutions comme fonction test dans les deux formulations faibles associées à ces deux solutions et de faire la différences des deux équations obtenues. On montre ainsi que les deux solutions sont égales (p.p.). Dans le cas général, la situation est plus compliquée.
Pour avoir l'unicité, on va supposer a lipschitzienne. Par contre il est inutile de supposer f lipschitzienne, ça ne suffira pas pour l'unicité. En effet, prenons par exemple $a = 1$, $\varphi = 0$ et $f(u) = \lambda u$, où λ est une valeur propre $(-\Delta)$ avec condition de Dirichlet. Le problème est alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega uv \,\mathrm{d}x \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Ce problème admet deux solutions $u_1 = 0$ et $u_2 \neq 0$ une fonction propre associée à λ. Evidemment $f(u) = \lambda u$ ne satisfait pas la condition (vii) mais on peut modifier légérement f pour vérifier (vii) et garder u_1 et u_2 comme solutions, dés que $u_2 \in L^\infty(\Omega)$ (ce qui toujours vrai en dimension $N \leq 3$). En effet, en prenant $\widetilde{f}$ qui est égale à f sur $]-\gamma,\gamma[$ où $\gamma = \|u_2\|_{L^\infty}$ et qui est raccordée à 0 ensuite, de telle sorte que $\tilde{f} \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a les mêmes solutions pour $\tilde{f} \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, c'est-à-dire pour le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \tilde{f}(u) v \,\mathrm{d}x \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

on a ainsi 2 solutions avec $\lim_{s\to\pm\infty} \tilde{f}(s)/s < +\infty$. Cette hypothèse est donc inutile pour l'unicité.
On va montrer l'unicité dans le cas où f ne dépend pas de s, *i.e.* $f(x,s) = d(x)$, sous les hypothèses d'existence (3.7) et en supposant de plus que a et φ sont lipschitziennes, c'est-à-dire :

$$\exists C_3 > 0 \,;\, \forall s, s_2 \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} |a(x,s_1) - a(x,s_2)| \leq C_3 |s_1 - s_2| \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}, \\ |\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \leq C_3 |s_1 - s_2|. \end{array} \right. \tag{3.13}$$

Théorème 3.15 (Existence et unicité) *Sous les hypothèses* (3.7) *et* (3.13)*, il existe une et une seule solution à* (3.5) .

Démonstration : La technique utilisée apparaît pour la première fois dans un article d'Artola en 1985. Soient u_1 et u_2 deux solutions de (3.5). On a donc :

$$\int_\Omega a(u_1) \nabla u_1 \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega G\varphi(u_1) \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x, \tag{3.14}$$

et

$$\int_\Omega a(u_2) \nabla u_2 \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega G\varphi(u_2) \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x. \tag{3.15}$$

L'idée est de prendre $v = T_\varepsilon(u_1 - u_2)$ dans (3.14) et (3.15), où $\varepsilon > 0$ et T_ε est la troncature au niveau ε, c'est-à-dire $T_\varepsilon(s) = \begin{cases} -\varepsilon \text{ si } s < -\varepsilon, \\ s \text{ si } -\varepsilon \leq s \leq \varepsilon, \\ \varepsilon \text{ si } s > \varepsilon. \end{cases}$

Si u_1 et $u_2 \in H_0^1(\Omega)$, alors $T_\varepsilon(u_1 - u_2) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla T_\varepsilon(u_1 - u_2) = \nabla(u_1 - u_2)1_{\{0<|u_1-u_2|<\varepsilon\}}$ (ceci est une généralisation simple du lemme 2.19). En prenant $v = T_\varepsilon(u_1 - u_2)$, et en faisant la différence de (3.14) et (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (a(u_1)\nabla u_1 \cdot \nabla(T_\varepsilon(u_1 - u_2)) - &\quad a(u_2)\nabla u_2 \cdot \nabla(T_\varepsilon(u_1 - u_2)))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega G(\varphi(u_2) - \varphi(u_1)) \cdot \nabla(T_\varepsilon(u_1 - u_2))\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

soit encore, en posant $A_\varepsilon = \{0 < |u_1 - u_2| < \varepsilon\}$,

$$\begin{aligned}\int_{A_\varepsilon} a(u_1)\nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla(u_1 - u_2)\,\mathrm{d}x &= \int_{A_\varepsilon} (a(u_2) - a(u_1))\nabla u_2 \cdot \nabla(u_1 - u_2)\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_{A^\varepsilon} G(\varphi(u_2) - \varphi(u_1)) \cdot \nabla(u_1 - u_2)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Par hypothèse, $a(u_1) \geq \alpha$ p.p., et donc :

$$\alpha \int_{A_\varepsilon} |\nabla(u_1 - u_2)|^2\,\mathrm{d}x \leq \int_{A_\varepsilon} C_3|u_2 - u_1|\,|\nabla u_2|\,|\nabla(u_2 - u_1)\,|\,\mathrm{d}x + \int_{A_\varepsilon} C_3|u_1 - u_2|\,|G|\,|\nabla(u_1 - u_2)|\,\mathrm{d}x.$$

On a $|u_1 - u_2| \leq \varepsilon$ p.p. dans A_ε. En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz dans les deux dernières intégrales, on obtient donc :

$$\begin{aligned}\alpha \int_{A_\varepsilon} |\nabla(u_1 - u_2)|^2\,\mathrm{d}x &\leq C_3\ \varepsilon \left(\int_{A_\varepsilon} |\nabla u_2|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{A_\varepsilon} |\nabla(u_2 - u_1)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+C_3\ \varepsilon \left(\int_{A_\varepsilon} |G|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_{A_\varepsilon} |\nabla(u_1 - u_2)|^2\ \mathrm{d}x\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\alpha \left(\int_{A_\varepsilon} (\nabla(u_1 - u_2))^2\right)^{1/2} \leq C_3\ \varepsilon\, a_\varepsilon, \text{ avec } a_\varepsilon = \left(\int_{A_\varepsilon} |G|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_{A_\varepsilon} |\nabla u_2|^2 dx\right)^{1/2}$$

ou encore

$$\alpha \left(\int_\Omega |\nabla(T_\varepsilon(u_1 - u_2))|^2 dx\right)^{1/2} = \alpha \|\,|\nabla T_\varepsilon(u_1 - u_2)|\,\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3\ \varepsilon\, a_\varepsilon$$

donc, en désignant par m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$,

$$\frac{\alpha}{m(\Omega)^{1/2}} \|\,|\nabla T_\varepsilon(u_1 - u_2))|\,\|_{L^1(\Omega)} \leq \alpha \|\,|\nabla T_\varepsilon(u_1 - u_2)|\,\|_{L^2(\Omega)} \leq\ C_3\, \varepsilon\, a_\varepsilon.$$

Comme $H_0^1(\Omega) \subset W_0^{1,1}(\Omega)$, on a $T_\varepsilon(u_1 - u_2) \in H_0^1(\Omega) \subset W_0^{1,1}(\Omega)$ et l'inégalité de Sobolev donne

$$\|T_\varepsilon(u_1 - u_2)\|_{L^{1^\star}} \leq \| \, |\nabla T_\varepsilon(u_1 - u_2)| \, \|_{L^1(\Omega)}, \text{avec } 1^\star = \frac{N}{N-1}$$

et donc

$$\frac{\alpha}{(mes\ \Omega)^{1/2}} \|T_\varepsilon(u_1 - u_2)\|_{L^{1^\star}} \leq C_3 \ \varepsilon \ a_\varepsilon.$$

Si $N = 1$, on a $N/(N-1) = +\infty$ et conclut facilement que $u_1 = u_2$ p.p.. Le cas $N \geq 2$ demande un léger développement supplémentaire. On remarque que

$$\begin{aligned}
\|T_\varepsilon(u_1 - u_2)\|_{L^{1^\star}} &= \left(\int_\Omega |T_\varepsilon(u_1 - u_2)|^{1^\star} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{1^\star}} \\
&\geq \left(\int_{B_\varepsilon} \varepsilon^{1^\star} \,\mathrm{d}x \right)^{1/1^\star} \\
&\geq \ \varepsilon \, (m(B_\varepsilon))^{\frac{N-1}{N}},
\end{aligned}$$

où $B_\varepsilon = \{x; |u_1(x) - u_2(x)| \geq \varepsilon\}$. On a donc

$$\varepsilon (m(B_\varepsilon))^{\frac{N-1}{N}} \leq \frac{(m(\Omega))^{1/2}}{\alpha} C_3 \ \varepsilon \ a_\varepsilon$$

et on en déduit que $(m(B_\varepsilon))^{\frac{N-1}{N}} \leq C_4 \, a_\varepsilon$. Prenons, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\varepsilon = 1/n$, on a $A_{1/(n+1)} \subset A_{1/n}$ et $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$, donc $m(A_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ (par continuité décroissante d'une mesure). On rappelle que

$$a_{\frac{1}{n}} = \left(\int_{A_n} |G^2| dx \right)^{1/2} + \left(\int_{A_n} |\nabla u_2|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Comme $G, |\nabla u_2| \in L^2(\Omega)$, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} a_{1/n} = 0$.
On a aussi $B_{n+1} \supset B_n$ et $\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{|u_1 - u_2| > 0\}$. Donc $\lim_{n \to +\infty} m(B_n) = m\{|u_1 - u_2| > 0\}$ (par continuité croissante d'une mesure). Comme

$$\left(m(B_{\frac{1}{n}}) \right)^{\frac{N-1}{N}} \leq C_4 \ a_{\frac{1}{n}},$$

en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $m\{|u_1 - u_2| > 0\} \leq 0$, et donc $u_1 = u_2$ p.p., ce qui termine la démonstration. ■

3.2 Méthodes de monotonie

3.2.1 Introduction

Pour le problème (3.3), dans le cas où f (le second membre) dépend de ∇u, on sait encore prouver l'existence d'une solution avec le théorème de Schauder, voir exercice 3.3. La question est plus difficile dans le cas où a dépend de ∇u. On se place sous les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases}
\Omega \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^N, \\
a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \\
\exists \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}; \alpha \leq a(\xi) \leq \beta, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \\
f \in L^2(\Omega).
\end{cases}$$

On cherche à montrer l'existence d'une solution au problème suivant :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(\nabla u)\nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Peut-on appliquer le théorème de Schauder ? Pour l'appliquer, il faut l'utiliser dans $H_0^1(\Omega)$ pour que $a(\nabla u)$ ait un sens. Soit $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$, par le lemme de Lax Milgram, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(\nabla \tilde{u})\nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x, \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.16}$$

Soit T l'opérateur de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ défini par $T(\tilde{u}) = u$ solution de (3.16). L'opérateur T est bien de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et

(1) il existe $R > 0$ t..q. $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le R$ pour tout $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$,

(2) l'application T est continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, si $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$, on a $\nabla\tilde{u}_n \to \nabla\tilde{u}$ dans $L^2(\Omega)^N$ et il n'est pas très difficile de montrer que $T(\tilde{u}_n) \to T(\tilde{u})$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Mais, l'application T n'est (en général) pas compacte (de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$). Si on était en dimension finie, les points (1) et (2) suffiraient à montrer l'existence d'une solution. L'idée est donc de considérer des problèmes approchés en dimension finie et de passer à la limite en utilisant la monotonie de l'opérateur (qui est vraie sous des hypothèses données sur a ci-après).

3.2.2 Opérateur de Leray-Lions

On considère ici un cas un peu simplifié des opérateurs de Leray-Lions. On considère les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned}
&1)\ \Omega \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^N,\ N \ge 1,\ 1 < p < +\infty,\\
&2)\ a\ :\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \text{ continue},\\
&3)\ \text{(coercivité) } \exists \alpha > 0\ t.q\ \ a(\xi)\cdot\xi \ge \alpha|\xi|^p,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\\
&4)\ \text{(croissance) } \exists C \in \mathbb{R};\ |a(\xi)| \le C(1+|\xi|^{p-1}),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\\
&5)\ \text{(monotonie) } (a(\xi)-a(\eta))\cdot(\xi-\eta) \ge 0 \quad \forall(\xi,\eta) \in (\mathbb{R}^N)^2,\\
&6)\ \sigma \in L^\infty(\Omega); \exists \sigma_0 > 0; \sigma \ge \sigma_0 \quad \text{p.p. },\\
&6)\ f \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Ces hypothèses permettent en particulier de traiter certains modèles dits “LES” (Large Eddy Simulations) utilisés en mécanique des fluides. On s'intéresse alors au problème suivant :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\sigma(x)a(\nabla u(x))) = f(x) \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.18}$$

Exemple 3.16 Pour $\sigma \equiv 1$ et $a(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$ $(1 < p < +\infty)$, l'équation s'écrit $-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f$.

L'opérateur $u \mapsto -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ s'appelle le p-laplacien. Pour $p = 2$, on retrouve le Laplacien classique. Le cas $p = 3$ donne l'opérateur de Smagoriskii qui apparaît dans un modèle de LES.

Cherchons une forme faible adéquate de (3.18). Remarquons que si $w \in L^p(\Omega)^N$, alors, l'hypothèse de croissance sur a donne

$$\begin{aligned}|a(w)| &\leq C(1+|w|^{p-1})\\ &\leq C + C|w|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)\end{aligned}$$

car $C \in L^\infty$ et $|w|^{p-1} \in L^{p/p-1}(\Omega) = L^{p'}(\Omega)$ avec $p' = \frac{p}{p-1}$ (ou encore $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Donc si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a $\nabla u \in (L^p(\Omega))^N$ et $a(\nabla u) \in (L^{p'}(\Omega))^N$.
Prenons alors $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a $\nabla v \in L^p(\Omega)^N$. On a donc

$$a(\nabla u) \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^N a_i(\nabla u) D_i v \ \in L^1(\Omega).$$

Il est donc naturel de chercher $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et de prendre les fonctions test dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
On rappelle aussi que si $f \in L^{p'}(\Omega)$, l'application $v \mapsto \int_\Omega f(x)v(x)dx$ est linéaire continue de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. C'est donc un élément du dual (topologique) de $W_0^{1,p}(\Omega)$ (ce dual est noté $W^{-1,p'}(\Omega)$). Par abus de langage, on note encore f cet élément de $W^{-1,p'}(\Omega)$, c'est-à-dire que pour $f \in L^{p'}(\Omega)$, on a

$$\langle f, v\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega),W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

La forme faible de (3.18) que l'on considère est donc :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \sigma a(\nabla u)\cdot \nabla v \, dx = < f, v >_{W^{-1,p'}(\Omega),W_0^{1,p}(\Omega)}, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{array}\right. \tag{3.19}$$

Remarque 3.17 Le cadre "naturel" du problème (3.19) n'est donc pas limité au cas $f \in L^{p'}(\Omega)$. On peut remplacer dans (3.19) f par n'importe quel élément de $W^{-1,p'}(\Omega)$. Par exemple, si $F \in L^{p'}(\Omega)^N$, on peut remplacer, dans (3.19), $\langle f, v\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega),W_0^{1,p}(\Omega)}$ par $\int_\Omega F(x)\cdot\nabla v(x)dx$. Sous cette hypothèse, le théorème d'existence et d'unicité donné ci après (théorème 3.18) reste vrai.

Théorème 3.18 (Existence et unicité) *Sous les hypothèses* (3.17)*, il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution de* (3.19)*. Si de plus a est strictement monotone, c'est à dire $(a(\xi) - a(\eta))(\xi - \eta) > 0$ pour tout $(\xi,\eta) \in (\mathbb{R}^N)^2$, $\xi \neq \eta$, alors il existe une unique solution u de* (3.19)*.*

Pour la démonstration de ce théorème, nous aurons besoin des lemmes (classiques) d'intégration suivants :

Lemme 3.19 (Cv forte contre cv faible) *Soit $1 < p < +\infty$. On pose $p' = \frac{p}{p-1}$. On suppose que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ et $g_n \to g$ faiblement dans $L^{p'}(\Omega)$. Alors*

$$\int_\Omega f_n\, g_n\, dx \to \int_\Omega f\, g\, dx \textit{ lorsque } n \to +\infty.$$

Par contre, on rappelle que si $f_n \to f$ dans L^p faible et $g_n \to g$ dans $L^{p'}$ faible, on n'a pas en général convergence de $\int_\Omega f_n\, g_n\, \mathrm{d}x$ vers $\int_\Omega fg dx$.

Lemme 3.20 *Si $a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $a(\xi) \leq C(1 + |\xi|^{p-1})$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et si $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ alors $a(\nabla u_n) \to a(\nabla u)$ dans $L^{p'}(\Omega)^N$.*

Ce lemme se démontre par le théorème de convergence dominée de Lebesgue.
On rappelle aussi que les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ et $L^{p'}(\Omega)$ sont réflexifs pour $1 < p < +\infty$, et donc pour toute suite bornée d'un de ces espaces, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente dans cet espace. On rappelle enfin que les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ et $L^{p'}(\Omega)$ sont séparables, i.e. ils contiennent une partie dénombrable dense, ce qui va nous permettre l'approximation par des problèmes de dimension finie. On aura également besoin pour la démonstration du lemme suivant :

Lemme 3.21 (Opérateur coercif dans $\mathbb{R}^N$) *Soit $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continue. On suppose que T est coercif, c'est à dire que*

$$\frac{T(v) \cdot v}{|v|} \to +\infty \text{ quand } |v| \to +\infty.$$

Soit $b \in \mathbb{R}^N$. Alors, il existe $v \in \mathbb{R}^N$ t.q. $T(v) = b$. L'opérateur T est donc surjectif.

Démonstration On utilise le degré topologique de Brouwer (ce qui possible car on est en dimension finie). On pose $h(t, v) = tT(v)+(1-t)v$. Pour $t = 0$, on a $h(0, v) = v$ (donc $h(0, v) = I$, où I est l'opérateur $v \mapsto v$). Pour $t = 1$ on a $h(1, v) = T(v)$. Pour appliquer le degré, on remarque d'abord que l'application $h : [0, 1] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est continue (car T est continue).

On veut ensuite montrer qu'il existe $R > 0$ t.q.

$$t \in [0, 1], v \in \mathbb{R}^N \text{ et } h(t, v) = b \Rightarrow |v| < R. \tag{3.20}$$

On suppose qu'on a démontré (3.20). Quitte à augmenter R, on peut aussi supposer que $|b| < R$. On pose $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ t.q. } |x| < R\}$. Par invariance par homotopie du degré, on a donc que $d(h(t, \cdot), B_R, b)$ ne dépend pas de t, et donc :

$$d(T, B_R, b) = d(I, B_R, b).$$

Comme $b \in B_R$, on a $d(I, B_R, b) = 1$ et donc $d(T, B_R, b) = 1$. On en déduit l'existence de $v \in B_R$ tel que $T(v) = b$.

Il reste à démontrer qu'il existe $R > 0$ vérifiant (3.20).

Soit $t \in [0, 1]$ et $v \in \mathbb{R}^N$ t.q. $h(t, v) = b$, c'est-à-dire $tT(v) + (1 - t)v = b$.
On a donc :

$$\frac{1}{2}\min\left(\frac{T(v) \cdot v}{|v|}, |v|\right) \le t\frac{T(v) \cdot v}{|v|} + (1-t)\frac{v \cdot v}{|v|} = \frac{b \cdot v}{|v|} \le |b|.$$

mais $\frac{1}{2}\min(\frac{T(w)\cdot w}{|w|}, |w|) \to +\infty$ lorsque $|w| \to +\infty$, il existe donc $R > 0$ t.q.

$$|w| \ge R \Rightarrow \frac{1}{2}\min(\frac{T(w) \cdot w}{|w|}, |w|) > |b|.$$

On en déduit que $|v| < R$. Ceci termine la démonstration. ■

Ce lemme se généralise à n'importe quel espace de dimension finie :

Lemme 3.22 (Opérateur coercif en dimension finie) *Soit E un espace de dimension finie, et $T : E \to E'$ continue (noter que $\dim E' = \dim E < +\infty$). On suppose que T est coercif , c'est-à-dire :*

$$\frac{\langle T(v), v\rangle_{E',E}}{\|v\|_E} \to +\infty \text{ quand } \|v\|_E \to +\infty.$$

Alors, pour tout $b \in E'$ il existe $v \in E$ t.q. $T(v) = b$.

Démonstration On se ramène à $\mathbb{R}^N$. Soit $N = \dim E$. On choisit une base de E, notée $(e_1, \ldots, e_N)$, et on note $(e_1^\star, \ldots, e_N^\star)$ la base duale de E' (c'est-à-dire t.q. $\langle e_i^\star, e_j\rangle_{E',E} = \delta_{ij}$). On définit une application I de $\mathbb{R}^N$ dans E et une application J de $\mathbb{R}^N$ dans E' par

$$I(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i \text{ et } J(\beta) = \sum_{i=1}^N \beta_i e_i^\star \text{ pour } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^N.$$

L'opérateur I est une bijection linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans E et l'opérateur J est une bijection linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans E'. Soit $\tilde{T} = J^{-1} \circ T \circ I$. L'opérateur $\tilde{T}$ est continu de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^N$. On pose $v = I(\alpha)$ et $\beta = \tilde{T}(\alpha)$ (donc $\beta = J^{-1}(T(v))$). On a donc

$$\tilde{T}(\alpha)\cdot\alpha = \beta\cdot\alpha = \sum_{i=1}^N \beta_i\alpha_i = \langle \sum_{j=1}^N \beta_j e_j^\star, \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i\rangle_{E',E} = \langle J(\beta), I(\alpha)\rangle_{E',E} = J(\beta)(\sum_{i=1}^N \alpha_i e_i) = \langle T(v), v\rangle_{E',E}.$$

En prenant comme norme sur $\mathbb{R}^N$, $\|\alpha\| = \|I(\alpha)\|_E$, l'hypothèse de coercivité sur T donne alors

$$\lim_{\|\alpha\|\to+\infty} \frac{\tilde{T}(\alpha)\cdot\alpha}{\|\alpha\|} = +\infty.$$

Par équivalence des normes en dimension finie, on a donc aussi

$$\lim_{|\alpha|\to+\infty} \frac{\tilde{T}(\alpha)\cdot\alpha}{|\alpha|} = +\infty.$$

On peut donc appliquer le lemme 3.21 à $\tilde{T}$.

Soit $b \in E'$. On pose $\beta = J^{-1}(b)$. Le lemme 3.21 donne l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}^N$ t.q. $\tilde{T}(\alpha) = \beta$. On pose $v = I(\alpha)$ et on a alors $T(v) = T \circ I(\alpha) = J \circ \tilde{T}(\alpha) = J(\beta) = b$. On a ainsi montré l'existence de v dans E t.q. $T(v) = b$. ■

Démonstration du théorème 3.18

Etape 1 Existence de la solution à un problème en dimension finie

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est séparable. Il existe donc une famille dénombrable $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Soit $E_n = \text{Vect}\{f_1 \ldots f_n\}$ l'espace vectoriel engendré par les n premières fonctions de cette famille. On a donc $\dim E_n \le n$ et $E_n \subset E_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et on a $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n} = W_0^{1,p}$. On en déduit que pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telle que $v_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $v_n \to v$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ lorsque $n \to +\infty$.

Dans cette première étape, on fixe $n \in \mathbb{N}^\star$ et on cherche u_n solution du problème suivant, posé en dimension finie :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \in E_n, \\ \displaystyle\int_\Omega \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = < f, v >_{W^{-1,p}, W_0^{1,p}} \; \forall v \in E_n. \end{array} \right. \tag{3.21}$$

L'appication $v \mapsto < f, v >_{W^{-1,p}, W_0^{1,p}}$ est une application linéaire E_n dans $\mathbb{R}$ (elle est donc aussi continue car $\dim E_n < +\infty$). On note b_n cette application. On a donc $b_n \in E_n'$ et

$$\langle b_n, v\rangle_{E_n', E_n} = < f, v >_{W^{-1,p}, W_0^{1,p}} .$$

Soit $u \in E_n$. On note $T_n(u)$ l'application de E_n dans $\mathbb{R}$ qui a $v \in E_n$ associe $\int_\Omega \sigma a(\nabla u) \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x$. Cette application est linéaire, c'est donc aussi un élément de E_n' et on a

$$\langle T_n(u), v\rangle_{E_n', E_n} = \int_\Omega \sigma a(\nabla u) \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x.$$

On a ainsi défini une application T de E_n dans E'_n. On va montrer que T est continue et coercive. On pourra ainsi en déduire, par le lemme 3.22, que T est surjectif, et donc qu'il existe $u_n \in E_n$ vérifiant $T(u_n) = b_n$, c'est-à-dire u_n solution du problème (3.21).

(a) Continuité de T_n On rappelle que n est fixé. Pour simplifier les notations, on oubli ici l'indice n, c'est-à-dire que l'on pose $E = E_n$ et $T = T_n$. On munit E de la norme définie par $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_{W_0^{1,p}}$. Soit $u, \bar{u} \in E$. On a :

$$\begin{aligned}
\|T(u) - T(\bar{u})\|_{E'} &= \max_{v \in E,\, \|v\|_E = 1} < T(u) - T(\bar{u}), v >_{E',E} \\
&= \max_{v \in E,\, \|v\|_{W_0^{1,p}} = 1} \int_\Omega \sigma(a(\nabla u) - a(\nabla \bar{u})) \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \\
&\leq \max_{v \in W_0^{1,p},\, \|v\|_{W_0^{1,p}} = 1} \int_\Omega \sigma(a(\nabla u) - a(\nabla \bar{u})) \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

On pose $\beta = \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\|T(u) - T(\bar{u})\|_{E'} &\leq \max_{v \in W_0^{1,p},\, \|v\|_{W_0^{1,p}} = 1} \beta \|\, |a(\nabla u) - a(\nabla \bar{u})| \,\|_{L^{p'}(\Omega)} \|\, |\nabla v| \,\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \beta \|\, |a(\nabla u) - a(\nabla \bar{u})| \,\|_{L^{p'}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Donc si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de E t.q. $u_n \to \bar{u}$ dans E, on a

$$\|T(u_n) - T(\bar{u})\|_{E'} \leq \beta \|a(\nabla u_n) - a(\nabla \bar{u})\|_{(L^{p'}(\Omega))^N}.$$

Par le lemme 3.20, on a $a(\nabla u_n) \to a(\nabla u)$ dans $(L^{p'}(\Omega))^N$. On a ainsi montré que $T(u_n) \to T(\bar{u})$ dans E', et donc que T est continue (de E dans E').

(b) Coercivité de T_n On rappelle qu'on a posé $E = E_n$ et $T = T_n$. On veut montrer que

$$\frac{< T(u), u >_{E',E}}{\|u\|_E} \to +\infty \text{ lorsque } \|u\|_E \to +\infty.$$

Par définition, et grâce aux hypothèses (3.17),

$$< T(u), u >_{E',E} = \int_\Omega \sigma \; a(\nabla u) \cdot \nabla u \; dx \geq \sigma_0 \; \alpha \int_\Omega |\nabla u|^p dx.$$

On a donc

$$< T(u), u >_{E',E} \geq C \|u\|^p_{W_0^{1,p}} = C \|u\|^p_E \quad \text{ avec } C = \sigma_0 \; \alpha.$$

Finalement,

$$\frac{< T(u), u >_{E',E}}{\|u\|_E} \geq C \|u\|_E^{p-1} \to +\infty \text{ lorsque } \|u\|_E \to +\infty,$$

car on a supposé $p > 1$ (le cas $p = 1$ est plus difficile et demande des outils supplémentaires, mais il est intéressant en géométrie pour le problème des surfaces minimales par exemple).

On a ainsi montré que T est coercive. On peut donc appliquer le lemme 3.22. Il donne l'existence d'une solution au problème en dimension finie (3.21) (cette technique permet aussi par exemple de démontrer l'existence de solution pour le problème (3.19) approché par éléments finis $P1$).

Etape 2 Existence de la solution à un problème en dimension infinie On a montré l'existence d'une solution au problème (3.21). On va maintenant tenter (et réussir !) un passage à la limite sur ce problème lorsque $n \to +\infty$ pour montrer l'existence d'une solution au problème (3.19). Pour cela nous allons :

(a) obtenir une *estimation* sur u_n, qui nous permettra d'obtenir de la *compacité*, et donc d'effectuer
(b) un *passage à la limite* sur les problèmes (3.21) de manière à avoir l'existence d'une solution u du problème (3.19) comme limite des solutions u_n des problèmes (3.21) ; pour cela, il nous faudra une
(c) astuce pour montrer que la *limite du terme non linéaire* est bien le terme qu'on veut. . . .

(a) Estimation sur u_n
On prend $v = u_n$ dans (3.21). On obtient :

$$\sigma_0\ \alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx \le \|f\|_{W^{-1,p'}} \|u_n\|_{W_0^{1,p}}$$

par coercivité de a. On a donc : $\sigma_0\ \alpha \|u_n\|^p_{W_0^{1,p}} \le \|f\|_{W^{-1,p'}} \|u_n\|_{W_0^{1,p}}$, d'où

$$\|u_n\|^{p-1}_{W_0^{1,p}} \le \frac{1}{\sigma_0 \alpha} \|f\|_{W^{-1,p'}}.$$

(b) Passage à la limite
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, qui est réflexif. On en déduit qu'il existe une sous-suite encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Par hypothèse, $|a(\nabla u_n)| \le C(1 + |\nabla u_n|^{p-1})$, donc la suite $(a(\nabla u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(L^{p'}(\Omega))^N$, qui est réflexif. Donc il existe $\zeta \in (L^{p'}(\Omega))^N$ telle que, à une sous-suite près,

$$a(\nabla u_n) \to \zeta \quad \text{faiblement dans} \quad (L^{p'}(\Omega))^N.$$

Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on sait que $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} = W_0^{1,p}$, donc il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $v_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et

$$\begin{aligned} v_n &\to v \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega), \\ \nabla v_n &\to \nabla v \text{ dans } (L^p(\Omega))^N. \end{aligned}$$

On utilise alors (3.21) avec $v = v_n$ on obtient :

$$\int_\Omega \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla v_n dx =< f, v_n > .$$

Mais $< f, v_n > \to < f, v >$, car v_n converge faiblement vers v dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
De plus $a(\nabla u_n) \to \zeta$ faiblement dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ et $\nabla v_n \to \nabla v$ (fortement) dans $(L^p(\Omega))^N$. Donc par le lemme 3.19, on a

$$\int_\Omega \sigma\zeta \cdot \nabla v dx =< f, v >_{W^{-1,p'},W_0^{1,p}} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.22}$$

On a ainsi prouvé l'existence de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ vérifiant (3.22). On y est presque. . .

(c) Limite du terme non linéaire Pour terminer, il reste à démontrer que

$$\int_\Omega \sigma\zeta \cdot \nabla v\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \sigma\ a(\nabla u) \cdot \nabla v\ \mathrm{d}x \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.23}$$

On peut le démontrer par deux manières différentes, selon les hypothèses :

1. Par l'astuce de Minty, qui utilise uniquement la monotonie de a, c'est-à-dire $(a(\xi) - a(\eta)).(\xi - \eta) \ge 0$. On a dans ce cas uniquement $u_n \to u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

2. Par la méthode de Leray-Lions, qui utilise la stricte monotonie de a, c'est-à-dire $(a(\xi)-a(\eta)).(\xi-\eta)>0$ pour tout ξ,η, $\xi\neq\eta$. On a alors en plus $u_n\to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. La méthode de Leray Lions est surtout intéressante parce qu'elle marche dans le cadre général des opérateurs dits "de Leray-Lions", c'est-à-dire avec $a(x,u,\nabla u)$ au lieu de $a(x,\nabla u)$.

(A) Etape commune à Minty et Leray-Lions.

Pour montrer (3.23), on commence par étudier la limite de $\displaystyle\int_\Omega \sigma\ a(\nabla u_n)\cdot\nabla u_n\ dx$. L'astuce consiste à utiliser l'équation ! En effet $\displaystyle\int_\Omega \sigma\ a(\nabla u_n).\nabla u_n dx = < f,u_n > \to < f,u >$ car $u_n\to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ faible. Mais on sait (étape précédente) que u satisfait (3.22), et donc : $\displaystyle < f,u >_{E',E} = \int_\Omega \sigma\zeta\cdot\nabla u\ dx$.

$$\text{Donc } \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \sigma\ a(\nabla u_n)\cdot\nabla u_n\ dx \quad = < f,u >_{E',E} = \int_\Omega \sigma\zeta\cdot\nabla u\ dx.$$

Il reste à passer à la limite sur le terme non linéaire.

(B) Démonstration de (3.23)

- **1ére méthode : Astuce de Minty**

  Soit $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$; il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $v_n\in E_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $v_n\to v$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ lorsque $n\to+\infty$. On va passer à la limite dans le terme $\displaystyle\int_\Omega \sigma\ a(\nabla u_n).\nabla v_n\ dx$ grâce à l'hypothèse de monotonie. En effet,

$$0\le \int_\Omega \sigma(a(\nabla u_n)-a(\nabla v_n))\cdot(\nabla u_n-\nabla v_n)\,\mathrm{d}x =$$
$$\int_\Omega \sigma\ a(\nabla u_n)\cdot\nabla u_n\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \sigma\ a(\nabla u_n)\cdot\nabla v_n\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \sigma a(\nabla v_n)\cdot\nabla u_n\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \sigma\ a(\nabla v_n)\cdot\nabla v_n\,\mathrm{d}x$$
$$= \quad T_{1,n} \quad - \quad T_{2,n} \quad - \quad T_{3,n} \quad + \quad T_{4,n}\quad .$$

  On a vu que en (A) que $\displaystyle T_{1,n}\to\int_\Omega \sigma\zeta\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x$ lorsque $n\to\infty$.

  On a

$$\lim_{n\to+\infty} T_{2,n} = \int_\Omega \sigma\ \zeta\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x$$

  par produit d'une convergence forte dans $(L^p)^N$ et d'une convergence faible dans $(L^{p'}(\Omega)^N)$ (lemme 3.19). De même,

$$\lim_{n\to+\infty} T_{3,n} = \int_\Omega \sigma\ a(\nabla v)\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x$$

  par produit d'une convergence forte dans $(L^{p'}(\Omega)^N)$ et d'unc convergence faible dans $(L^p(\Omega))^N$. Enfin, on a aussi

$$\lim_{n\to+\infty} T_{4,n} = \int_\Omega \sigma\ a(\nabla v)\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x$$

  lorsque $n\to+\infty$ et ce dernier terme est le plus simple car on a le produit d'une convergence forte dans $(L^{p'}(\Omega)^N)$ et d'une convergence forte dans $(L^p(\Omega))^N$.

Le passage à la limite dans l'inégalité donne donc :

$$\int_\Omega \sigma(\zeta - a(\nabla v)) \cdot (\nabla u - \nabla v) dx \geq 0 \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On choisit maintenant astucieusement la fonction test v. On prend $v = u + \frac{1}{n}w$, avec $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On obtient ainsi :

$$-\frac{1}{n}\int_\Omega \sigma \left(\zeta - a(\nabla u + \frac{1}{n}\nabla w)\right) \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x \geq 0$$

et donc

$$\int_\Omega \sigma \left(\zeta - a(\nabla u + \frac{1}{n}\nabla w)\right) \cdot \nabla w \; dx \leq 0.$$

Mais $u + \frac{1}{n}\, w \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, donc par le lemme 3.20, $a\left(\nabla u + \frac{1}{n}\nabla w\right) \to a(\nabla u)$ dans $(L^{p'}(\Omega))^N$. En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient alors

$$\int_\Omega \sigma(\zeta - a(\nabla u)) \cdot \nabla w \; dx \leq 0 \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Par linéarité (on peut changer w en $-w$), on a donc : $\int_\Omega \sigma(\zeta - a(\nabla u)) \cdot \nabla w \; dx = 0, \; \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. On en déduit que

$$\int_\Omega \sigma\; \zeta \cdot \nabla w \; dx = \int_\Omega \sigma\; a(\nabla u) \cdot \nabla w \; dx \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On a donc bien démontré que u est solution de (3.19).
Notons que l'on a montré ce résultat par approximation, c'est à dire en montrant d'abord l'existence de solution à un problème approché qui se pose en dimension finie, puis en passant à la limite. Ceci est également possible en utilisant un problème approché obtenu avec des schémas numériques. Par exemple, avec un schéma numérique utilisant des éléments finis $P1$.

- **2ére méthode : Astuce de Leray-Lions** On suppose maintenant la stricte monotonie de a, c'est-à-dire :

$$(a(\xi) - a(\eta)).(\zeta - \eta) > 0 \;\text{ si }\; \xi \neq \eta.$$

On va montrer que u est solution de (3.19) (on le sait déjà, grâce à la première méthode) mais aussi que $a(\nabla u) = \zeta$ (ceci est plus fort que ce qui a été montré par Minty) et que $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Comme $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n} = W_0^{1,p}$, il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q $v_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Par hypothèse de monotonie, on a :

$$\int_\Omega \sigma(a(\nabla u_n) - a(\nabla v_n)) \cdot (\nabla u_n - \nabla v_n) \geq 0.$$

Avec le même raisonnement que pour Minty (mais maintenant $v_n \to u$ au lieu de $v_n \to v$), on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \sigma(a(\nabla u_n) - a(\nabla v_n)) \cdot (\nabla u_n - \nabla v_n) dx = \int_\Omega \sigma(\zeta - a(\nabla u)).\underbrace{(\nabla u - \nabla u)}_{=0} dx,$$

donc si on pose $F_n(x) = \sigma(a(\nabla u_n) - a(\nabla v_n)) \cdot (\nabla u_n - \nabla v_n)$, on a $F_n \geq 0$ p.p. et $\int_\Omega F_n \, \mathrm{d}x \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Donc $F_n \to 0$ dans L^1, et donc, après extraction d'une sous-suite, $F_n \to 0$ p.p.. On peut aussi supposer, après extraction d'une sous-suite, que $\nabla v_n \to \nabla v$ p.p..

Soit $x \in \Omega$ t.q. $F_n(x) \to 0$ (c'est-à-dire $a(\nabla u_n(x)) - a(\nabla v_n(x)) \cdot (\nabla u_n(x) - \nabla v_n(x)) \to 0$) et $\nabla v_n(x) \to \nabla u(x)$ lorsque $n \to +\infty$.

Etape A : La suite $(\nabla u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}^N$. En effet, grâce aux hypothèses de croissance et coercivité sur a, on a

$$F_n(x) = (a(\nabla u_n(x)) - a(\nabla v_n(x)) \cdot (\nabla u_n(x) - \nabla v_n(x))$$

$$\geq \alpha |\nabla u_n(x)|^p - C(1 + |\nabla u_n(x)|^{p-1})|\nabla v_n(x)| - C(1 + |\nabla v_n(x)|^{p-1})|\nabla u_n(x)| + \alpha |\nabla v_n(x)|^p.$$

On en déduit que la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée si la suite $(\nabla u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée. Or $F_n(x) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Donc il faut que la suite $(\nabla u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ soit borné.

Etape B : Soit $\zeta \in \mathbb{R}^N$ limite d'une sous suite de la suite $(\nabla u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$. On a donc pour cette sous suite (encore notée $(\nabla u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$) $\lim_{n \to +\infty} a(\nabla u_n(x)) = a(\zeta)$. Comme $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$, on en déduit

$$(a(\zeta) - a(\nabla u(x)) \cdot (\zeta - \nabla u(x)) = 0.$$

Or, le 1er terme ce cette égalité est strictement positif si $\zeta \neq \nabla u(x)$. On a donc donc $\zeta = \nabla u(x)$. On a donc (sans extraction de sous suite pour cette étape) $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ quand $n \to +\infty$.

En résumé, on a ainsi montré que $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. (à une sous suite près, car on extrait une sous suite pour avoir $F_n \to 0$ p.p. et $\nabla v_n \to \nabla u$ p.p.). On en déduit que $a(\nabla u_n) \to a(\nabla u)$ p.p.. Ceci est suffisant pour montrer que $\zeta = a(\nabla u)$. En effet, on sait déjà que $a(\nabla u_n) \to \zeta$ dans $(L^{p'})^N(\Omega)$ faible. On en déduit alors que $\zeta = a(\nabla u)$ par le lemme d'intégration (voir poly d'intégration) suivant :

Lemme 3.23 (Compacité $L^p - L^q$) *Soit Ω un ouvert borné. On suppose que $f_n \to f$ p.p. et que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée dans L^q, $q > 1$. alors $f_n \to f$ dans $L^r(\Omega)$ pour tout r t.q. $1 \leq r < q$.*

Du lemme 3.23, on déduit que la suite $(a(\nabla u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^r(\Omega)^N$, pour $1 \leq r < p'$, vers $a(\nabla u)$. Comme cette même suite converge faiblement dans $(L^{p'})^N(\Omega)$ vers ζ, on peut conclure (par exemple en utilisant l'unicité de la limite faible dans $L^r(\Omega)^N$) que les limites sont égales, c'est-à-dire

$$\zeta = a(\nabla u) \text{ p.p..}$$

Il reste à montrer que $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. On sait déjà que $u_n \to u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et donc (fortement) dans $L^p(\Omega)$. Comme, après extraction d'une sous suite, on a $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p., le lemme 3.23 nous donne $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $L^r(\Omega)$ pour tout $1 \leq r < p$ et donc $u_n \to u$ dans $W_0^{1,r}(\Omega)$ pour tout $1 \leq r < p$. En raisonnant par contradiction on a même $u_n \to u$ dans $W_0^{1,r}(\Omega)$ pour tout $1 \leq r < p$ sans extraction de sous suite. Mais ceci ne donne pas la convergence dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pour démontrer cette convergence dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, on réutilise l'étape (A). Cette étape a donné

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla u_n dx = \int_\Omega \sigma \zeta \cdot \nabla u dx.$$

Mais, on sait maintenant que $\zeta = a(\nabla u)$ p.p., on a donc

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla u_n dx = \int_\Omega \sigma a(\nabla u) \cdot \nabla u dx.$$

On rappelle maintenant un lemme classique d'intégration (encore...), valable dans tout espace mesuré mais que l'on donne ici dans le cas qui nous intéresse.

Lemme 3.24 (Convergence L^1 pour une suite de fonctions positives)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Soit $f \in L^1(\Omega)$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $L^1(\Omega)$ vérifie :
1. $f_n \geq 0$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$,
2. $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$,
3. $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx$.
Alors $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$.

Après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut supposer $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p.. On applique alors le lemme 3.24 à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n = \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla u_n$. Le lemme 3.24 donne la convergence $L^1(\Omega)$ de cette suite et donc l'équiintégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Avec l'hypothèse de coercivité sur a et l'hypothèse sur σ, on obtient l'équiintégrabilité de la suite $(|\nabla u_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$. Il reste à appliquer le théorème de Vitali (voir le poly d'intégration) pour conclure que $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $L^p(\Omega)^N$ et donc que $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Comme d'habitude, un argument par contradiction montre que cette convergence dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ a lieu sans extraction sous suite dès que u_n converge faiblement vers u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ (et pour avoir cette convergence, on a dû extraire une sous suite). Dans l'étape 3 ci dessous, on va démontrer l'unicité de la solution de (3.19) si a est strictement monotone. Ceci permet de conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (sans extraction de sous suite) dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ vers l'unique solution de (3.19).

On a ainsi terminé la partie "existence" du théorème 3.18

Etape 3 : Unicité On suppose que a est strictement monotone. Soient u_1 et u_2 deux solutions.

$$\int_\Omega \sigma a(\nabla u_i) \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x =< f, v > \quad i = 1, 2 \qquad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On fait la différence des deux équations, et on prend $v = u_1 - u_2$. On obtient :

$$\int_\Omega \sigma(a(\nabla u_1) - a(\nabla u_2))(u_1 - u_2) \, dx = 0.$$

Or $Y = \sigma(a(\nabla u_1) - a(\nabla u_2))(u_1 - u_2) \geq 0$, et $Y > 0$ si $\nabla u_1 \neq \nabla u_2$; on a donc $\nabla u_1 = \nabla u_2$ p.p. et donc $u_1 = u_2$ car u_1 et $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 3.25 Dans le cas des opérateurs de Leray - Lions, lorsque a dépend de x, ∇u mais aussi de u, on arrive encore à montrer des résulats d'unicité si $p \leq 2$.

■

3.3 Exercices

Exercice 3.1 (Continuité d'une application de L^p dans L^q) *Corrigé 3.1*
Soit (E, T, m) un espace mesuré fini, $p, q \in [1, \infty[$ et g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^\star ; \ |g(s)| \leq C|s|^{\frac{p}{q}} + C, \ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.24}$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

   On pose $L^r = L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, pour $r = p$ et $r = q$. Pour $u \in L^p$, on pose $G(u) = \{h \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m); h = g \circ v$ p.p.$\}$, avec $v \in u$ (de sorte que $G(u) \in L^q$).

2. Montrer que la définition précédente a bien un sens, c'est à dire que $G(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$. On suppose que $u_n \to u$ p.p., quand $n \to +\infty$, et qu'il existe $F \in L^p$ t.q. $|u_n| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^q.
4. Montrer que G est continue de L^p dans L^q.
5. On considère ici $(E, T, m) = ([0,1], \mathcal{R}, \lambda)$ et on prend $p = q = 1$. On suppose que g ne vérifie pas (3.24). On va construire $u \in L^1$ t.q. $G(u) \notin L^1$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que : $|g(\alpha_n)| \ge n|\alpha_n|$ et $|\alpha_n| \ge n$.
   (b) On choisit une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ vérifiant les conditions données à la question précédente. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{|\alpha_n| n^2} = 1.$$
   (c) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite définie par : $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n - \dfrac{\alpha}{|\alpha_n| n^2}$ (où α_n et α sont définies dans les 2 questions précédentes). On pose $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n 1_{[a_{n+1}, a_n[}$. Montrer que $u \in L^1$ et $G(u) \notin L^1$.

Exercice 3.2 (Existence par Schauder)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \ge 1$), $g \in L^2(\Omega)$, a une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et h une fonction continue de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

- $0 < \alpha = \inf_{s\in\mathbb{R}} a(s) \le \sup_{s\in\mathbb{R}} a(s) = \beta < +\infty$,
- il existe $\delta \in [0, 1[$ et $C_1 \in \mathbb{R}$ t.q. $|h(s, \xi)| \le C_1(1 + |s|^\delta + |\xi|^\delta)$ pour tout $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

1. Soit $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $h(\overline{u}, \nabla\overline{u}) \in L^2(\Omega)$ et qu'il existe un unique u solution de
$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(\overline{u}(x))\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_\Omega h(\overline{u}(x), \nabla\overline{u}(x))v(x)dx = \int_\Omega g(x)v(x)dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.25}$$
   Dans la suite, on note T l'application qui à $\overline{u}$ associe u, unique solution de (3.25). L'application T est donc de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.
2. (Estimation sur u) Soit $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$ et $u = T(\overline{u})$. Montrer qu'il existe C_2 ne dépendant que Ω, α, g et C_1 t.q.
   $$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_2(1 + \|\overline{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^\delta).$$
   [On pourra prendre $v = u$ dans (3.25).]
   En déduire qu'il existe $R \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q.
   $$\|\overline{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \le R \Rightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le R.$$
3. (Continuité de T) Soit $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $H_0^1(\Omega)$ et $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$. On suppose que $\overline{u}_n \to \overline{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$ (quand $n \to +\infty$). On pose $f_n = h(\overline{u}_n, \nabla\overline{u}_n)$, $f = h(\overline{u}, \nabla\overline{u})$, $u_n = T(\overline{u}_n)$ et $u = T(\overline{u})$.
   (a) Montrer que $f_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$.
   (b) Montrer que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\int_\Omega a(\bar{u}_n(x))\nabla u_n(x)\cdot\nabla u_n(x)dx \to \int_\Omega a(\bar{u}(x))\nabla u(x)\cdot\nabla u(x)dx$.
   En déduire que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$. [On pourra s'inspirer de l'exercice 2.13.]

4. (Compacité de T) Soit $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $H_0^1(\Omega)$. On pose $f_n = h(\overline{u}_n, \nabla\overline{u}_n)$ et $u_n = T(\overline{u}_n)$. Montrer qu'il existe une sous suite de la suite $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $f \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ t.q.
   - $f_n \to f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$,
   - $a(\overline{u}_n) \to b$ p.p..

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $H_0^1(\Omega)$. [On pourra raisonner comme dans l'exercice 2.13.]
5. Montrer qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u = T(u)$ (et donc u solution de (3.25) avec $\overline{u} = u$).

Exercice 3.3 (Existence par Schauder, généralisation de l'exercice 3.2)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), a une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

- a est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, et continue par rapport à $s \in \mathbb{R}$, p.p. en $x \in \Omega$.
- Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $\alpha \leq a(x,s) \leq \beta$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et p.p. en $x \in \Omega$.
- f est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s, p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, et continue par rapport à $(s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, p.p. en $x \in \Omega$.
- Il existe $d \in L^2(\Omega)$, $C \in \mathbb{R}$ et $\delta \in [0,1[$ t.q. $|f(\cdot,s,p)| \leq C(d+|s|^\delta+|p|^\delta)$ p.p., pour tout $s, p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Montrer qu'il existe un et un seul u solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u(x))\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))v(x)dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{3.26}$$

[On pourra construire une application de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et utiliser le théorème de Schauder.]

Exercice 3.4 (Degré d'une application affine) *Corrigé 3.2*

Soit E un espace de Banach (réel). Pour $R > 0$, on pose $B_R = \{v \in E \text{ t.q. } \|v\|_E < R\}$.

1. Soit f une application constante de E dans E. Il existe donc $a \in E$ t.q. $f(v) = a$ pour tout $v \in E$. Soit $R > 0$ t.q. $\|a\|_E \neq R$. Montrer que $d(I-f, B_R, a)$ est bien défini et que $d(I-f, B_R, a) = 1$ si $R < \|a\|_E$ et $d(I-f, B_R, a) = 0$ si $R > \|a\|_E$.
2. Soit L une application linéaire compact de E dans E. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de L. Soit $a \in E$. On définit f de E dans E en posant $f(v) = Lv + a$ pour tout $v \in E$.
   (a) Montrer que l'équation $u - f(u) = 0$ a au plus une solution.
   (b) Montrer que l'équation $u - f(u) = 0$ a une unique solution. On note b cette solution. Montrer que $d(I - f, B_R, 0) \neq 0$ si si $R < \|a\|_E$ et $d(I-f, B_R, a) = 0$ si $R > \|a\|_E$.

Exercice 3.5 (Convection-diffusion, Dirichlet, existence) *Corrigé 3.3*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou 3, $p > N$, $W \in L^p(\Omega)^N$, φ une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi(0) = 0$ et $f \in L^2(\Omega)$.
On s'intéresse ici au problème suivant

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta u + \operatorname{div}(W\varphi(u)) = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{3.27}$$

Le but de cet exercice est de montrer l'existence de solution faible au problème (3.27). L'unicité (et la positivité si $f \geq 0$ a.e.) de la solution faible est montré dans l'exercice 3.6.

1. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, montrer que $W\varphi(u) \in L^2(\Omega)^N$. [Utiliser le théorème d'injection de Sobolev, théorème 1.24.]

   Cette première question permet de définir la formulation faible du problème (3.27). Elle consiste à chercher u solution de (3.28).

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_\Omega \varphi(u(x)) W(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx \text{ for all } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.28}$$

   Pour montrer l'existence d'une solution à (3.28) on va utiliser la méthode du degré topologique en construisant une application h de $[0,1] \times L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ avec $q = 2p/(p-2)$ (de sorte que $1/p + 1/q = 1/2$). On pose donc pour la suite $q = 2p/(p-2)$. Si $N = 3$, on pose $2^\star = 6$ et si $N = 2$, on choisit pour $2^\star$ un nombre strictement supérieur à q (de sorte que, pour $N = 2$ ou 3, $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^{2^\star}(\Omega)$ et compactement dans $L^q(\Omega)$).

2. (Construction des opérateurs B et h) Soit $\tilde{u} \in L^q$. Montrer qu'il existe un unique u solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_\Omega \varphi(\tilde{u}(x)) W(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx \text{ for all } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.29}$$

   On note B l'opérateur qui à $\tilde{u}$ dans $L^q(\Omega)$ associe u solution de (3.40). Puis, pour $t \in [0,1]$ et $\tilde{u} \in L^q(\Omega)$, on pose $h(t, \tilde{u}) = B(t\tilde{u})$.

3. Montrer que h est continu et compact de $[0,1] \times L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

4. (Estimations *a priori*) Soit $u \in L^q(\Omega)$ t.q. $u = h(t, u)$. On a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_\Omega \varphi(t\, u(x)) W(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx \text{ for all } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.30}$$

   Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $\psi(x) = \int_0^s \frac{1}{(1+|\xi|)^2} d\xi$.

   (a) Montrer que $\psi(u) \in H_0^1(\Omega)$. En prenant $v = \psi(u)$ dans (3.30), montrer qu'il existe C_l ne dépendant que Ω, W, φ et f t.q.
$$\|\ln(1 + |u|)\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_l.$$

   (b) Pour $v \in L^{2^\star}(\Omega)$, montrer que pour tout $A \ge 0$ on a
$$\int_\Omega |v(x)|^q dx \le \Big(\int_\Omega |v(x)|^{2^\star} dx\Big)^{\frac{q}{2^\star}} \lambda_N(\{|u| \ge A\})^{1-\frac{q}{2^\star}} + A^q \lambda_N(\Omega).$$

   On rappelle que λ_N est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$.

   (c) En utilisant (a) et (b), montrer qu'il existe $C > 0$, ne dépendant que de Ω, W, φ et f t.q. $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} < C$.

5. (Degré topologique) Montrer l'existence d'une solution à (3.28).

6. On retire dans cette question l'hypothèse $\varphi(0) = 0$ et on se donne un élément T de $H^{-1}(\Omega)$. Montrer qu'il existe u solution de (3.28) avec $\int_\Omega f(x)v(x)dx$ remplacé par $\langle T, v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$.

Exercice 3.6 (Convection-diffusion, Dirichlet, unicité) *Corrigé 3.4*

On reprend ici les mêmes hypothèses que dans l'exercice 3.5, c'est-à-dire :
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou 3, $p > N$, $W \in L^p(\Omega)^N$, φ une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi(0) = 0$ et $f \in L^2(\Omega)$.

L'exercice 3.5 a montré qu'il existait u solution faible de (3.27), c'est-à-dire u solution de

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_\Omega \varphi(u(x)) W(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx \text{ for all } v \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{3.31}$$

L'objectif de cet exercice est de montrer l'unicité de la solution de (3.31) et de montrer que $u \geq 0$ p.p. si $f \geq 0$ p.p..

1. Montrer l'unicité de la solution de (3.31).
2. On retire dans cette question (et seulement dans cette question) l'hypothèse $\varphi(0) = 0$ et on se donne un élément T de $H^{-1}(\Omega)$. Montrer que le problème (3.28) avec $\int_\Omega f(x)v(x)dx$ remplacé par $\langle T, v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$ a une unique solution (l'existence a été montrée dans l'exercice 3.5).
3. On suppose $f \leq 0$ p.p.. Soit u la solution de (3.31). Montrer que $u \leq 0$ p.p.. [Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pourra prendre $v = S_n(u)$ dans (3.31) avec $S_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $S_n(s) = \max(0, \min(s, 1/n))$ et faire tendre n vers $+\infty$.]

Exercice 3.7 (Existence par minimisation)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), a une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

- $a \in L^\infty(\Omega)$.
- Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $\alpha \leq a$ p.p..
- f est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, et continue par rapport à $s \in \mathbb{R}$, p.p. en $x \in \Omega$.
- Il existe $d \in L^2(\Omega)$, $C \in \mathbb{R}$ et $\delta \in [0, 1[$ t.q. $|f(\cdot, s)| \leq C|s|^\delta + d$ p.p., pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et p.p. en $x \in \Omega$, on pose $F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt$.

1. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $F(\cdot, u) \in L^1(\Omega)$.
   Pour $u \in H_0^1(\Omega)$, on pose $E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega a(x) \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx - \int_\Omega F(x, u(x)) dx$.
2. Montrer que $E(u) \to +\infty$ quand $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$.
3. Montrer qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $E(u) \leq E(v)$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.
4. Montrer qu'il existe u solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x, u(x)) v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{3.32}$$

Exercice 3.8 (Minimisation avec contrainte)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) et $p \in]1, \frac{N+2}{N-2}[$. On cherche une solution non nulle au problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta u = |u|^{p-1} u \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{3.33}$$

1. Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, on pose $E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx$ et $F(v) = \int_\Omega |v|^{p+1} dx$. On pose aussi $A = \{v \in H_0^1(\Omega),$ $F(v) = 1\}$. Montrer qu'il existe $u \in A$ t.q. $u \geq 0$ p.p. et $E(u) \leq E(v)$ pour tout $v \in A$.
2. Montrer qu'il existe u non nulle, $u \geq 0$ p.p., solution faible de (3.33).

Exercice 3.9 (Convergence faible et non linéarité) *Corrigé 3.5*

Remarque liminaire : Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Lorsqu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend faiblement vers u dans un espace L^p et que la suite $\varphi(u_n)$ tend faiblement vers f dans un espace L^q, il est en général faux que $f = \varphi(u)$ p.p.. On ajoute l'hypothèse que $\int u_n\varphi(u_n)$ converge vers $\int uf$. Si φ est croissante, l'"astuce de Minty" permet alors de montrer que $f = \varphi(u)$ p.p.. Si φ est strictement croissante, on obtient même une convergence forte de u_n vers u (c'est l'"astuce de Leray-Lions"). Cet exercice détaille ces idées dans le cadre $p = q = 2$ avec une mesure finie.

Soit (X, T, m) un espace mesuré fini (c'est-à-dire $m(X) < +\infty$). On note L^2 l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(X, T, m)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites bornées de L^2 et $u, v \in L^2$. On suppose que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent faiblement dans L^2 vers u et v. On rappelle que ceci signifie que

$$\lim_{n\to+\infty} \int u_n w \, dm = \int uw \, dm \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int v_n w \, dm = \int vw \, dm \text{ pour tout } w \in L^2.$$

1. On suppose, dans cette question seulement, que $v_n = u_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et donc $u = v$ p.p.). Montrer que $u_n \to u$ dans L^2 (quand $n \to +\infty$) si et seulement si $\int u_n^2 dm \to \int u^2 dm$ (quand $n \to +\infty$).

   On suppose pour toute la suite de l'exercice que $\int u_n v_n \, dm \to \int uv \, dm$ (quand $n \to +\infty$) et qu'il existe une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q.

   - φ continue et il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(s) \leq C + C|s|$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.
   - $v_n = \varphi(u_n)$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $w \in L^2$, montrer que, quand $n \to +\infty$,
$$\int (\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w) \, dm \to \int (v - \varphi(w))(u - w) \, dm. \tag{3.34}$$
3. On suppose que φ est croissante.
   (a) Soit $\bar{w} \in L^2$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que
   $$\int (v - \varphi(u + t\bar{w}))t\bar{w} \, dm \leq 0.$$
   [Utiliser (3.34).] En déduire que $\int (v - \varphi(u))\bar{w} \, dm = 0$.
   (b) Montrer que $v = \varphi(u)$ p.p..
4. On suppose que φ strictement croissante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $G_n = (\varphi(u_n) - \varphi(u))(u_n - u)$.
   (a) Montrer que $G_n \to 0$ dans L^1 quand $n \to +\infty$ (utiliser (3.34)).
   (b) Montrer qu'il existe une sous suite de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(G_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) t.q. $G_{\psi(n)} \to 0$ p.p.. En déduire que $u_{\psi(n)} \to u$ p.p. (utiliser la croissance stricte de φ).
   (c) Montrer que $u_n \to u$ dans L^p pour tout $p \in [1, 2[$.

Exercice 3.10 (Opérateur de Leray-Lions)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), a une fonction de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ et $p \in]1, +\infty[$ vérifiant (avec $p' = p/(p-1)$) :

– a est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s, \xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, et continue par rapport à $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, p.p. en $x \in \Omega$.
– (Coercivité) Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $\alpha(x, s, \xi) \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^p$ pour tout $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.
– (Croissance) Il existe $d \in L^{p'}(\Omega)$ et $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|a(\cdot, s, \xi)| \leq C(d + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1})$ p.p., pour tout $s, \xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.
– (Monotonie) $(a(x, s, \xi) - a(x, s, \eta) \cdot (\xi - \eta) > 0$ pour tout $(s, \xi, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $\xi \neq \eta$, et p.p. en $x \in \Omega$.

Soit $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Montrer qu'il existe u solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, u(x), \nabla u(x)) \cdot \nabla v(x) dx = \langle f, v \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)}, \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.35}$$

[Reprendre la démonstration du cours.]

3.4 Corrigés d'exercices

Corrigé 3.1 (Continuité d'une application de L^p dans L^q)

Soit (E, T, m) un espace mesuré fini, $p, q \in [1, \infty[$ et g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^\star \,;\; |g(s)| \leq C|s|^{\frac{p}{q}} + C, \; \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.36}$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(E, T, m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^q(E, T, m)$.

———————————————corrigé———————————————

La fonction u est mesurable de E (muni de la tribu T) dans $\mathbb{R}$ (muni de la tribu $B(\mathbb{R})$) et g est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu $B(\mathbb{R})$). On en déduit, par composition, que $g \circ u$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

Pour $s \in [-1, 1]$, on a $|g(s)| \leq 2C$ et donc $|g(s)|^q \leq 2^q C^q$. Pour $s \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, on a $|g(s)| \leq 2C|s|^{\frac{p}{q}}$ et donc $|g(s)|^q \leq 2^q C^q |s|^p$. On a donc, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $|g(s)|^q \leq 2^q C^q + 2^q C^q |s|^p$. On en déduit que, pour tout $x \in E$, $|g \circ u(x)|^q = |g(u(x))|^q \leq 2^q C^q + 2^q C^q |u(x)|^p$, et donc :

$$\int |g \circ u|^q dm \leq 2^q C^q \|u\|_p^p + 2^q C^q m(E),$$

ce qui donne $g \circ u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^q(E, T, m)$.

———————————————————————————————

On pose $L^r = L_{\mathbb{R}}^r(E, T, m)$, pour $r = p$ et $r = q$. Pour $u \in L^p$, on pose $G(u) = \{h \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^q(E, T, m); h = g \circ v$ p.p.$\}$, avec $v \in u$ (de sorte que $G(u) \in L^q$).

2. Montrer que la définition précédente a bien un sens, c'est à dire que $G(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u.

———————————————corrigé———————————————

Soient $v, w \in u$. Il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $v = w$ sur A^c. On a donc aussi $g \circ v = g \circ w$ sur A^c et donc $g \circ v = g \circ w$ p.p.. On en déduit que $\{h \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^q(E, T, m); h = g \circ v$ p.p.$\} = \{h \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^q(E, T, m); h = g \circ w$ p.p.$\}$.

$G(u)$ ne dépend donc pas du choix de v dans u.

———————————————————————————————

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$. On suppose que $u_n \to u$ p.p., quand $n \to +\infty$, et qu'il existe $F \in L^p$ t.q. $|u_n| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^q.

corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de u_n, encore notée u_n. On choisit aussi des représentants de u et F, notés toujours u et F. Comme $u_n \to u$ p.p. quand $n \to +\infty$ et que g est continu, il est facile de voir que $g \circ u_n \to g \circ u$ p.p.. On a donc $G(u_n) \to G(u)$ p.p..

On remarque aussi que $|g \circ u_n| \le C|u_n|^{\frac{p}{q}} + C \le C|F|^{\frac{p}{q}} + C$ p.p. et donc $|G(u_n)| \le C|F|^{\frac{p}{q}} + C$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $F \in F^p$, on a $|F|^{\frac{p}{q}} \in L^q$. Les fonctions constantes sont aussi dans L^q (car $m(E) < \infty$). On a donc $C|F|^{\frac{p}{q}} + C \in L^q$. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée dans L^q, il donne que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^q quand $n \to +\infty$.

---

4. Montrer que G est continue de L^p dans L^q.

corrigé

On raisonne par l'absurde. On suppose que G n'est pas continue de L^p dans L^q. Il existe donc $u \in L^p$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ t.q. $u_n \to u$ dans L^p et $G(u_n) \not\to G(u)$ dans L^q quand $n \to +\infty$.

Comme $G(u_n) \not\to G(u)$, il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi \;:\; \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$ et :

$$\|G(u_{\varphi(n)}) - G(u)\|_q \ge \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.37}$$

(La suite $(G(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de la suite $(G(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.)

Comme $u_{\varphi(n)} \to u$ dans L^p, on peut appliquer la "réciproque partielle de la convergence dominée dans L^q". On obtient l'existence de $\psi \;:\; \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et de $F \in L^p$ t.q. $\psi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$, $u_{\varphi\circ\psi(n)} \to u$ p.p. et $|u_{\varphi\circ\psi(n)}| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. (La suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$).

On peut maintenant appliquer la question 2 à la suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle donne que $G(u_{\varphi\circ\psi(n)}) \to G(u)$ dans L^q quand $n \to +\infty$. Ce qui est en contradiction avec (3.37).

---

5. On considère ici $(E, T, m) = ([0,1], \mathcal{R}, \lambda)$ et on prend $p = q = 1$. On suppose que g ne vérifie pas (3.36). On va construire $u \in L^1$ t.q. $G(u) \notin L^1$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que : $|g(\alpha_n)| \ge n|\alpha_n|$ et $|\alpha_n| \ge n$.

corrigé

On raisonne par l'absurde. On suppose que $|g(s)| < n|s|$ pour tout s t.q. $|s| \ge n$. On pose $M = \max\{|g(s)|,\; s \in [-n, n]\}$. On a $M < \infty$ car g est continue sur le compact $[-n, n]$ (noter que n est fixé). en posant $C = \max\{n, M\}$, on a donc :

$$|g(s)| \le C|s| + C, \text{ pour tout } s \in \mathbb{R},$$

en contradiction avec l'hypothèse que g ne vérifie pas (3.36).

Il existe donc s, t.q. $|s| \ge n$ et $|g(s)| \ge n|s|$. Ceci prouve l'existence de α_n.

(b) On choisit une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ vérifiant les conditions données à la question précédente. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{|\alpha_n|n^2} = 1.$$

corrigé

Comme $\alpha_n \geq n$, on a $\frac{1}{|\alpha_n|n^2} \leq \frac{1}{n^3}$ et donc :

$$0 < \beta = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{1}{|\alpha_n|n^2} < \infty.$$

On choisit alors $\alpha = \frac{1}{\beta}$.

(c) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite définie par : $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n - \dfrac{\alpha}{|\alpha_n|n^2}$ (où α_n et α sont définies dans les 2 questions précédentes). On pose $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n 1_{[a_{n+1},a_n[}$. Montrer que $u \in L^1$ et $G(u) \notin L^1$.

corrigé

Pour $n \geq 2$, on a $a_n = 1 - \sum_{p=1}^{n-1} \dfrac{\alpha}{|\alpha_p|p^2}$.

Grâce au choix de α, on a donc $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et $a_n \downarrow 0$, quand $n \to +\infty$.

La fonction u est bien mesurable et, par le théorème de convergence monotone, on obtient :

$$\int |u| d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} |\alpha_n|(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\alpha}{n^2} < \infty.$$

Donc, $u \in \mathcal{L}^1$ et aussi $u \in L^1$ en confondant, comme d'habitude, u avec sa classe.

on remarque ensuite que $g \circ u = \sum_{n=1}^{+\infty} g(\alpha_n) 1_{[a_{n+1},a_n[}$. On a donc :

$$\int |g \circ u| d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} |g(\alpha_n)|(a_n - a_{n+1}) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\alpha}{n} = \infty.$$

ceci montre que $g \circ u \notin \mathcal{L}^1$ et donc $G(u) \notin L^1$.

Corrigé 3.2 (Degré d'une application affine)

Soit E un espace de Banach (réel). Pour $R > 0$, on pose $B_R = \{v \in E \text{ t.q. } \|v\|_E < R\}$.

1. Soit f une application constante de E dans E. Il existe donc $a \in E$ t.q. $f(v) = a$ pour tout $v \in E$. Soit $R > 0$ t.q. $\|a\|_E \neq R$. Montrer que $d(I - f, B_R, a)$ est bien défini et que $d(I - f, B_R, a) = 1$ si $R < \|a\|_E$ et $d(I - f, B_R, a) = 0$ si $R > \|a\|_E$.

corrigé

Il est clair que f est continue et compacte et que $u - f(u) = 0$ si et seulement si $u = a$. Si $\|a\|_E \neq R$, $d(I - f, B_R, a)$ est donc bien défini.

Si $R > \|a\|_E$, l'équation $u - f(u) = 0$ n'a pas de solution dans B_R et donc $d(I - f, B_R, a) = 0$.

Si $R < \|a\|_E$, on pose $h(t, v) = tf(v)$. La fonction h est continue et compacte de $[0, 1] \times E$ dans E et l'équation $u = tf(u)$ n'a pas de solution sur ∂B_R pour $t \in [0, 1]$ (car l'unique solution de $u = tf(u)$ est ta). On a donc $d(I - f, B_R, 0) = d(I - h(1, \cdot), B_R, 0) = d(I - h(0, \cdot), B_R, 0) = d(I, B_R, 0) = 1$.

---

2. Soit L une application linéaire compact de E dans E. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de L. Soit $a \in E$. On définit f de E dans E en posant $f(v) = Lv + a$ pour tout $v \in E$.

(a) Montrer que l'équation $u - f(u) = 0$ a au plus une solution.

corrigé

Soit $u_1, u_2 \in E$ t.q. $u_1 - f(u_1) = 0$ et $u_2 - f(u_2) = 0$. En posant $u = u_1 - u_2$ on a donc $u - Lu = 0$. Comme 1 n'est pas valeur propre de L, on a donc $u = 0$. Ce qui prouve bien que $u - f(u) = 0$ a au plus une solution.

(b) Montrer que l'équation $u - f(u) = 0$ a une unique solution. On note b cette solution. Montrer que $d(I - f, B_R, 0) \neq 0$ si $R < \|b\|_E$ et $d(I - f, B_R, 0) = 0$ si $R > \|b\|_E$.

corrigé

On pose $h(t, u) = Lu + ta$. La fonction h est continue et compacte de $[0, 1] \times E$ dans E. Soit $R > 0$. L'équation $u = h(0, u)$ n'a pas de solution sur ∂B_R (car 1 n'est pas valeur propre de L).

Si l'équation $u = h(t, u)$ n'a pas de solution pour $t \in]0, 1]$ sur ∂B_R, on a $d(I - f, B_R, 0) = d(I - h(1, 0), B_R, 0) = d(I - L, B_R, 0) \neq 0$, d'après le théorème 3.8. Il existe donc $u \in B_R$ t.q. $u - f(u) = 0$.

D'autre part, si l'équation $u = h(t, u)$ a une solution sur ∂B_R pour un t dans $]0, 1]$. On note c cette solution et on remarque $(c/t) - f(c/t) = 0$.

Dans tous les cas, on a donc montré qu'il existe $u \in E$ t.q. $u - f(u) = 0$.

Enfin, il est facile de voir que $d(I - f, B_R, 0) = d(I - L, B_R, 0) \neq 0$ si $R < \|b\|_E$ et $d(I - f, B_R, 0) = 0$ si $R > \|b\|_E$.

Corrigé 3.3 (Convection-diffusion, Dirichlet, existence)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou 3, $p > N$, $W \in L^p(\Omega)^N$, φ une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi(0) = 0$ et $f \in L^2(\Omega)$.
On s'intéresse ici au problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + \mathrm{div}(W\varphi(u)) = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.38}$$

Le but de cet exercice est de montrer l'existence de solution faible au problème (3.38). L'unicité (et la positivité si $f \geq 0$ a.e.) de la solution faible est montré dans l'exercice 3.6.

1. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, montrer que $W\varphi(u) \in L^2(\Omega)^N$. [Utiliser le théorème d'injection de Sobolev, théorème 1.24.]

corrigé

Le théorème 1.24 donne que $u \in L^6(\Omega)$ si $N = 3$ et que $u \in L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1, +\infty[$ si $N = 2$. Comme φ est lipschitzienne et $\varphi(0) = 0$, il existe C_1 t.q. $|\varphi(s)| \leq C_1|s|$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On a donc aussi $\varphi(u) \in L^6(\Omega)$ si $N = 3$ et $\varphi(u) \in L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1, +\infty[$ si $N = 2$.

Pour $N = 3$, on a $W \in L^3(\Omega)^3$ et $\varphi(u) \in L^6(\Omega)$, ce qui donne $W\varphi(u) \in L^2(\Omega)^3$ car $1/6 + 1/3 = 1/2$.

Pour $N = 2$, on a $W \in L^p(\Omega)^2$ et $\varphi(u) \in L^{2p/(p-2)}(\Omega)$, ce qui donne $W\varphi(u) \in L^2(\Omega)^2$ car $1/p + (p-2)/2p = 1/2$.

Cette première question permet de définir la formulation faible du problème (3.38). Elle consiste à chercher u solution de (3.39).

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_\Omega \varphi(u(x))W(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{3.39}$$

Pour montrer l'existence d'une solution à (3.39) on va utiliser la méthode du degré topologique en construisant une application h de $[0,1]\times L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ avec $q = 2p/(p-2)$ (de sorte que $1/p + 1/q = 1/2$). On pose donc pour la suite $q = 2p/(p-2)$. Si $N = 3$, on pose $2^\star = 6$ et si $N = 2$, on choisit pour $2^\star$ un nombre strictement supérieur à q (de sorte que, pour $N = 2$ ou 3, $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^{2^\star}(\Omega)$ et compactement dans $L^q(\Omega)$).

2. (Construction des opérateurs B et h) Soit $\tilde u \in L^q$. Montrer qu'il existe un unique u solution de

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_\Omega \varphi(\tilde u(x))W(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{3.40}$$

corrigé

L'application $v \mapsto \int_\Omega \varphi(\tilde u(x))W(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_\Omega f(x)v(x)dx$ est linéaire continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. L'existence et l'unicité de u solution de (3.40) est donc une conséquence du théorème 2.6.

On note B l'opérateur qui à $\tilde u$ dans $L^q(\Omega)$ associe u solution de (3.40). Puis, pour $t \in [0,1]$ et $\tilde u \in L^q(\Omega)$, on pose $h(t,\tilde u) = B(t\tilde u)$.

3. Montrer que h est continu et compact de $[0,1]\times L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

corrigé

On montre tout d'abord la continuité de h. Soit $(t_n,\tilde u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[0,1]\times L^q(\Omega)$ t.q. $t_n \to t$ et $\tilde u_n \to \tilde u$ dans $L^q(\Omega)$ quand $n\to+\infty$. On pose $u_n = h(t_n,\tilde u_n)$ et $u = h(t,\tilde u)$. On veut montrer que $u_n \to u$ dans $L^q(\Omega)$. On raisonne par l'absurde. Si $u_n \not\to u$ dans $L^q(\Omega)$, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q.

$$\|u_n - u\|_{L^q(\Omega)} \ge \varepsilon \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}. \tag{3.41}$$

Après une éventuelle extraction de sous suite (ce qui ne change pas (3.41)), on peut aussi supposer que

$$\tilde u_n \to \tilde u \text{ p.p. et } |\tilde u_n| \le H \text{ p.p. pour tout } n\in\mathbb{N},$$

avec $H \in L^q(\Omega)$. On en déduit (par convergence dominée dans $L^q(\Omega)$ car φ est continue et $|\varphi(s)| \le C_1|s|$) que $\varphi(t_n\tilde u_n) \to \varphi(t\tilde u)$ dans $L^q(\Omega)$ et donc $\varphi(t_n\tilde u_n)W \to \varphi(t\tilde u)W$ dans $L^2(\Omega)^N$ (en remarquant que $HW \in L^2(\Omega)^N$).

Comme la suite $(\varphi(t_n\tilde u_n)W)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et que u_n est solution de (3.40) avec $t_n\tilde u_n$ au lieu de $\tilde u$, on montre (en prenant $v = u_n$ dans 3.40) que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. On peut donc supposer (toujours après extraction de sous suite) qu'il existe $\bar u$ t.q. $u_n \to \bar u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. On a donc aussi (par compacité de l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$) $u_n \to \bar u$ dans $L^q(\Omega)$. On montre alors que $\bar u$ est solution de (3.40) avec $t\tilde u$ au lieu de $\tilde u$ (et donc que $\bar u = u$). Il suffit pour cela de passer à limite, pour tout $v\in H_0^1(\Omega)$, dans l'équation suivante

$$\int_\Omega \nabla u_n(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_\Omega \varphi(t_n\tilde u_n(x))W(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

Ce passage à limite découle facilement du fait que $\nabla u_n \to \nabla u$ faiblement dans $L^2(\Omega)^N$ et $\varphi(t_n \tilde{u}_n)W \to \varphi(t\tilde{u})W$ dans $L^2(\Omega)^N$.

On obtient ainsi que $\bar{u} = B(t\tilde{u}) = u$, en contradiction avec (3.41) (car $u_n \to \bar{u}$ dans $L^q(\Omega)$). On a ainsi montré que $u_n \to u$ dans $L^q(\Omega)$. En fait, un raisonnement semblable par contradiction montrerait même que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ mais ceci est inutile pour la suite.

On montre maintenant la compacité de h (ce qui est un peu plus facile). On suppose que t est quelconque dans $[0,1]$ et que $\tilde{u}$ reste dans un borné de $L^q(\Omega)$. On pose $u = h(t,\tilde{u})$. La fonction u est donc solution de (3.40) avec $t\tilde{u}$ au lieu de $\tilde{u}$. Grâce $|\varphi(s)| \le C_1|s|$, la fonction $\varphi(\tilde{u})$ reste dans un borné de $L^q(\Omega)$ et donc $\varphi(\tilde{u})W$ reste dans un borné de $L^2(\Omega)^N$. En prenant maintenant $v = u$ dans (3.40) (avec $t\tilde{u}$ au lieu de $\tilde{u}$), on en déduit que u reste dans un borné de $H_0^1(\Omega)$. Comme $H_0^1(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^q(\Omega)$, on en déduit que u reste dans un compact de $L^q(\Omega)$. Ce qui prouve bien la compacité de h.

---

4. (Estimations *a priori*) Soit $u \in L^q(\Omega)$ t.q. $u = h(t,u)$. On a donc

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_\Omega \varphi(t\,u(x))W(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{3.42}$$

Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $\psi(x) = \int_0^s \frac{1}{(1+|\xi|)^2}d\xi$.

(a) Montrer que $\psi(u) \in H_0^1(\Omega)$. En prenant $v = \psi(u)$ dans (3.42), montrer qu'il existe C_l ne dépendant que Ω, W, φ et f t.q.

$$\|\ln(1+|u|)\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_l.$$

corrigé

La fonction ψ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et est lipschitzienne (car $|\psi'(s)| \le 1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$). Lemme 2.18 donne alors que $\psi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla\psi(u) = (\nabla u)/(1+|u|)^2$. On remarque aussi $|\psi(s)| \le 1$ pour tout s.

En prenant $v = \psi(u)$ dans (3.42) et en utilisant $|\varphi(s)| \le C_1|s|$ et $|\psi(s)| \le 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^2}{(1+|u(x)|)^2}dx &\le C_1\int_\Omega \frac{|tu(x)|}{(1+|u(x)|)^2}|W(x)||\nabla u(x)|dx + \|f\|_{L^1(\Omega)} \\ &\le C_1\int_\Omega |W(x)|\frac{|\nabla u(x)|}{1+|u(x)|}dx + \|f\|_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

En utilisant $ab \le \frac{a^2}{2C_1} + 2C_1b^2$ pour $a,b \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^2}{(1+|u(x)|)^2}dx \le 2C_1^2\||W|\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

On remarque maintenant que (toujours par le lemme 2.18) $\ln(1+|u|) \in H_0^1(\Omega)$ et l'inégalité précédente donne

$$\|\ln(1+|u|)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \le 2(2C_1^2\||W|\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^1(\Omega)}).$$

Ce qui donne la majoration désirée avec $C_l^2 = 2(2C_1^2\||W|\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^1(\Omega)})$.

(b) Pour $v \in L^{2^\star}(\Omega)$, montrer que pour tout $A \geq 0$ on a

$$\int_\Omega |v(x)|^q dx \leq \Big(\int_\Omega |v(x)|^{2^\star} dx\Big)^{\frac{q}{2^\star}} \lambda_N(\{|u| \geq A\})^{1-\frac{q}{2^\star}} + A^q \lambda_N(\Omega).$$

On rappelle que λ_N est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$.

corrigé

On a

$$\int_\Omega |v(x)|^q dx = \int_{\{|v|\geq A\}} |v(x)|^q dx + \int_{\{|v|<A\}} |v(x)|^q dx \leq \int_{\{|v|\geq A\}} |v(x)|^q dx + A^q \lambda_N(\Omega).$$

Puis, l'inégalité de Hölder (avec $2^\star/q$ et son conjugué) donne

$$\int_{\{|v|\geq A\}} |v(x)|^q dx = \int_\Omega |v(x)|^q 1_{\{|v|\geq A\}} dx \leq \Big(\int_\Omega |v(x)|^{2^\star} dx\Big)^{\frac{q}{2^\star}} \lambda_N(\{|v| \geq A\})^{1-\frac{q}{2^\star}}.$$

Ce qui donne bien l'inégalité désirée.

(c) En utilisant (a) et (b), montrer qu'il existe $C > 0$, ne dépendant que de Ω, W, φ et f t.q. $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} < C$.

corrigé

On prend $v = u$ dans (3.42), on obtient, avec l'inégalité de Hölder,

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{L^q(\Omega)} \||W|\|_{L^p(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2} C_\Omega \|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{3.43}$$

où C_Ω ne dépend que Ω et est donné par l'inégalité de Poincaré.

On commence par utiliser l'inégalité donnée dans 4(b) (élevée à la puissance $1/q$). Pour tout $A > 0$ on a

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq 2\|u\|_{L^{2^\star}} \lambda_N(\{|u| \geq A\})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2^\star}} + 2A\lambda_N(\Omega)^{\frac{1}{q}}.$$

Comme l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{2^\star}(\Omega)$ est continue, il existe $\bar{C}_\Omega$ ne dépendant que de Ω t.q. $\|u\|_{L^{2^\star}(\Omega)} \leq \bar{C}_\Omega \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. On a donc

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq 2\bar{C}_\Omega \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \lambda_N(\{|u| \geq A\})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2^\star}} + 2A\lambda_N(\Omega)^{\frac{1}{q}}.$$

On utilise maintenant 4(a). Pour tout $A \geq 0$ on a

$$\ln(1+A)\lambda_N(\{|u| \geq A\})^{\frac{1}{2}} \leq \|\ln(1+|u|)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_l.$$

Il existe donc A ne dépendant (comme C_l, noter aussi que p et q sont donnés par W) que de Ω, W, φ et f t.q.

$$\lambda_N(\{|u| \geq A\})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2^\star}} \leq \frac{1}{2\bar{C}_\Omega C_1 \||W|\|_{L^p(\Omega)}}.$$

Avec ce choix de A, (3.43) donne

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + (2AC_1\||W|\|_{L^p(\Omega)}\lambda_N(\Omega)^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{L^2(\Omega)} C_\Omega)\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On en déduit

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 2(2AC_1\||W|\|_{L^p(\Omega)}\lambda_N(\Omega)^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{L^2(\Omega)} C_\Omega).$$

Ce qui est une estimation sur $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ ne dépendant que Ω, W, φ et f.

---

5. (Degré topologique) Montrer l'existence d'une solution à (3.39).

corrigé

Comme $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continument dans $L^q(\Omega)$, la question 4(c) $R > 0$ t.q.

$$t \in [0,1],\ u \in L^q(\Omega),\ u = h(t,u) \Rightarrow \|u\|_{L^q(\Omega)} < R.$$

La question 3 donne la continuité et la compacité de h de $[0,1] \times L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$. On peut donc appliquer l'invariance par homotopie du degré topologique sur la boule (ouverte) de $L^p(\Omega)$ de centre 0 et de rayon R avec comme point cible 0. On obtient

$$d(I - h(1,\cdot), B_R, 0) = d(I - h(0,\cdot), B_R, 0).$$

L'application $\tilde{u} \mapsto h(0,\tilde{u})$ est constante ($h(0,\tilde{u})$ est, pour tout $\tilde{u}$, la solution faible de $-\Delta u = f$ dans Ω avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$). La solution de $v = h(0,v)$ est unique et appartient à B_R. Ceci suffit pour dire que $d(I - h(0,\cdot), B_R, 0) \neq 0$ (on peut ramener la constante à 0 par homotopie en remarquant, par exemple, que $d(I - th(0,\cdot), B_R, 0)$ ne dépend pas de $t \in [0,1]$, voir l'exercice 3.4).

6. On retire dans cette question l'hypothèse $\varphi(0) = 0$ et on se donne un élément T de $H^{-1}(\Omega)$. Montrer qu'il existe u solution de (3.39) avec $\int_\Omega f(x)v(x)dx$ remplacé par $\langle T, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$.

corrigé

On commence par remplacer $\int_\Omega f(x)v(x)dx$ par $\langle T, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$ dans (3.39). La démonstration est alors très semblable à la précédente. Les seuls points demandant une petite modification sont dans les questions 4(a) et 4(c). Dans la question 4(a), On a majoré $\int_\Omega |f\psi(u)|dx$ par $\|f\|_{L^1(\Omega)}$. Il faut maintenant majorer

$$|\langle T, \psi(v)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}|.$$

Cette majoration se fait en remarquant que

$$\begin{aligned}|\langle T, \psi(v)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}| \leq \|T\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\psi(u)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|T\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\frac{|\nabla u|}{(1+|u|)^2}\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ \leq \|T\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\frac{|\nabla u|}{1+|u|}\|_{L^2(\Omega)} \leq 4\|T\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{4}\|\frac{|\nabla u|}{1+|u|}\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Dans la question 4(c), on a majoré $\int_\Omega |fu|dx$ par $C_\Omega\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. Il faut maintenant majorer

$$|\langle T, u\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}|.$$

Ce qui est facile car

$$|\langle T, u\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}| \leq \|T\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Il reste maintenant à retirer l'hypothèse $\varphi(0) = 0$. Ceci est assez facile car il suffit de se ramener au cas précédent en remplaçant φ par $\varphi - \varphi(0)$ et en ajoutant au second membre de (3.39) $-\int_\Omega \varphi(0)W(x)\cdot\nabla v(x)dx$. On se ramène bien au cas précédent car l'application $v \mapsto \int_\Omega \varphi(0)W(x)\cdot\nabla v(x)dx$ est bien un élément de $H^{-1}(\Omega)$ (car $W \in L^2(\Omega)^N$).

Corrigé 3.4 (Convection-diffusion, Dirichlet, unicité)

On reprend ici les mêmes hypothèses que dans l'exercice 3.5, c'est-à-dire :
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou 3, $p > N$, $W \in L^p(\Omega)^N$, φ une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi(0) = 0$ et $f \in L^2(\Omega)$.

L'exercice 3.5 a montré qu'il existait u solution faible de (3.27), c'est-à-dire u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_\Omega \varphi(u(x)) W(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx \text{ for all } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.44}$$

L'objectif de cet exercice est de montrer l'unicité de la solution de (3.44) et de montrer que $u \geq 0$ p.p. si $f \geq 0$ p.p..

1. Montrer l'unicité de la solution de (3.44).

———————————corrigé———————————

La démonstration d'unicité faite pour le théorème 3.15 n'a pas utilisée complètement les hypothèses sur G (qui étaient $G \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $\operatorname{div} G = 0$). Elle a utilisé seulement le fait que $G \in L^2(\Omega)^N$. Ici nous avons $W \in L^p(\Omega)^N$. Comme $p > N$, ceci donne bien $W \in L^2(\Omega)^N$ et la démonstration faite pour le théorème 3.15 est donc aussi valable ici. Nous la rappelons rapidement.

Soient u_1 et u_2 deux solutions de (3.44). On a donc :

$$\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varphi(u_1) W \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x, \tag{3.45}$$

et

$$\int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varphi(u_2) W \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x. \tag{3.46}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on définit $T_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par $T_n(s) = \max(-1/n, \min(s, 1/n))$. Le lemme 2.19 (ou plutôt sa généralisation, voir la remarque 2.20) donne $T_n(u_1 - u_2) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla T_n(u_1 - u_2) = \nabla(u_1 - u_2) 1_{A_n}$ avec $A_n = \{0 < |u_1 - u_2| < 1/n\}$.

On prend $v = T_n(u_1 - u_2)$ dans (3.45) et (3.46), on obtient

$$\int_\Omega \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla T_n(u_1 - u_2) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega (\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) W \cdot \nabla(T_n(u_1 - u_2)) \,\mathrm{d}x.$$

Avec C_1 t.q. $|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \leq C_1 |s_1 - s_2|$ pour tout $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, ceci donne

$$\int_{A_n} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_{A_n} C_1 |u_1 - u_2| \, |W| \, |\nabla(u_1 - u_2)| \,\mathrm{d}x.$$

On a $|u_1 - u_2| \leq 1/n$ p.p. dans A_n. En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz dans la dernière intégrale, on obtient donc :

$$\int_{A_n} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \frac{C_1}{n} \left(\int_{A_n} |W|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2} \left(\int_{A_n} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

On a donc

$$\| \, |\nabla T_n(u_1 - u_2)| \, \|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{A_n} (\nabla(u_1 - u_2))^2 \right)^{1/2} \leq \frac{C_1}{n} a_n, \text{ avec } a_n = \left(\int_{A_n} |W|^2 dx \right)^{1/2}.$$

On utilise maintenant l'inégalité de Sobolev et Hölder pour obtenir, avec $1^\star = \frac{N}{N-1}$ et en désignant par m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$,

$$\|T_n(u_1-u_2)\|_{L^{1^\star}} \le \|\,|\nabla T_n(u_1-u_2)|\,\|_{L^1(\Omega)} \le m(\Omega)^{1/2}\|\,|\nabla T_n(u_1-u_2)|\,\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{C_1 m(\Omega)^{1/2}}{n} a_n.$$

On pose $B_n = \{|u_1-u_2| \ge 1/n\}$, de sorte que

$$\frac{1}{n}(m(B_n))^{\frac{N-1}{N}} \le \left(\int_{B_n} |T_n(u_1-u_2)|^{1^\star}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1^\star}} \le \|T_n(u_1-u_2)\|_{L^{1^\star}}.$$

On a donc

$$(m(B_n))^{\frac{N-1}{N}} \le C_1 m(\Omega)^{1/2} a_n. \tag{3.47}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $A_{n+1} \subset A_n$. Comme $\cap_{n\in\mathbb{N}^\star} A_n = \emptyset$, la continuité décroissante de m donne que $\lim_{n\to+\infty} m(A_n) = 0$. Comme $W \in L^2(\Omega)^N$ on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et donc, grâce à (3.47), que $\lim_{n\to+\infty} m(B_n) = 0$.

On remarque enfin que $B_{n+1} \supset B_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{|u_1-u_2| > 0\}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} m(B_n) = m\{|u_1-u_2| > 0\}$ (par continuité croissante d'une mesure). On obtient donc $m\{|u_1-u_2| > 0\} = 0$ et donc $u_1 = u_2$ p.p..

---

2. On retire dans cette question (et seulement dans cette question) l'hypothèse $\varphi(0) = 0$ et on se donne un élément T de $H^{-1}(\Omega)$. Montrer que le problème (3.28) avec $\int_\Omega f(x)v(x)dx$ remplacé par $\langle T, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$ a une unique solution (l'existence a été montrée dans l'exercice 3.5).

corrigé

La démonstration est identique à la précédente. Il suffit de remplacer, dans (3.45) et (3.46), $\int_\Omega f(x)v(x)dx$ par $\langle T, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$.

---

3. On suppose $f \le 0$ p.p.. Soit u la solution de (3.44). Montrer que $u \le 0$ p.p.. [Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pourra prendre $v = S_n(u)$ dans (3.44) avec $S_n \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $S_n(s) = \max(0, \min(s, 1/n))$ et faire tendre n vers $+\infty$.]

corrigé

La démonstration est voisine de celle de la première question. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on prend $v = S_n(u)$ dans (3.44) avec $S_n \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $S_n(s) = \max(0, \min(s, 1/n))$. Ceci est possible car $S_n(u) \in H_0^1(\Omega)$. On sait aussi que $\nabla S_n(u) = 1_{E_n}\nabla u$ avec $E_n = \{0 < u < 1/n\}$ (voir la remarque 2.20). Comme $S_n(u) \ge 0$ p.p. et $f \le 0$ p.p., on obtient

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla S_n(u)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varphi(u)W \cdot \nabla S_n(u)\,\mathrm{d}x \le 0. \tag{3.48}$$

On a donc

$$\int_\Omega |\nabla S_n(u)|^2\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla S_n(u)\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega \varphi(u)W \cdot \nabla S_n(u)\,\mathrm{d}x.$$

Il existe $C_1 > 0$ t.q. $|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \le C_1|s_1 - s_2|$ pour tout $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, ceci donne, avec l'inégalité de Cauchy Schwarz dans la dernière intégrale

$$\|\,|\nabla S_n(u)|\,\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{C_1}{n}\Big(\int_{E_n} |W(x)|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On pose $\gamma_n = \left(\int_{E_n} |W(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$.

On utilise maintenant l'inégalité de Sobolev et Hölder pour obtenir, avec $1^\star = \frac{N}{N-1}$ et en désignant par m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$,

$$\|S_n(u)\|_{L^{1^\star}} \leq \| \, |\nabla S_n(u)| \, \|_{L^1(\Omega)} \leq m(\Omega)^{1/2} \| \, |\nabla S_n(u)| \, \|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_1 m(\Omega)^{1/2}}{n} \gamma_n.$$

On pose $D_n = \{u \geq 1/n\}$, de sorte que

$$\frac{1}{n}(m(D_n))^{\frac{N-1}{N}} \leq \left(\int_{D_n} |S_n(u)|^{1^\star} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1^\star}} \leq \|S_n(u)\|_{L^{1^\star}}.$$

On a donc

$$(m(D_n))^{\frac{N-1}{N}} \leq C_1 m(\Omega)^{1/2} \gamma_n. \tag{3.49}$$

On conclut comme à la première question. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $E_{n+1} \subset E_n$. Comme $\cap_{n \in \mathbb{N}^\star} E_n = \emptyset$, la continuité décroissante de m donne que $\lim_{n\to+\infty} m(E_n) = 0$. Comme $W \in L^2(\Omega)^N$ on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = 0$ et donc, grâce à (3.49), que $\lim_{n\to+\infty} m(D_n) = 0$.

On remarque enfin que $D_{n+1} \supset D_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et $\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n = \{u > 0\}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} m(D_n) = m\{u > 0\}$ (par continuité croissante d'une mesure). On obtient donc $m\{u > 0\} = 0$ et donc $u \leq 0$ p.p..

Corrigé 3.5 (Convergence faible et non linéarité)

Remarque liminaire : Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Lorsque qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend faiblement vers u dans un espace L^p et que la suite $\varphi(u_n)$ tend faiblement vers f dans un espace L^q, il est en général faux que $f = \varphi(u)$ p.p.. On ajoute l'hypothèse que $\int u_n \varphi(u_n)$ converge vers $\int uf$. Si φ est croissante, l'"astuce de Minty" permet alors de montrer que $f = \varphi(u)$ p.p.. Si φ est strictement croissante, on obtient même une convergence forte de u_n vers u (c'est l'"astuce de Leray-Lions"). Cet exercice détaille ces idées dans le cadre $p = q = 2$ avec une mesure finie.

Soit (X, T, m) un espace mesuré fini (c'est-à-dire $m(X) < +\infty$). On note L^2 l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(X, T, m)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites bornées de L^2 et $u, v \in L^2$. On suppose que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent faiblement dans L^2 vers u et v. On rappelle que ceci signifie que

$$\lim_{n\to+\infty} \int u_n w \, dm = \int uw \, dm \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int v_n w \, dm = \int vw \, dm \text{ pour tout } w \in L^2.$$

1. On suppose, dans cette question seulement, que $v_n = u_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et donc $u = v$ p.p.). Montrer que $u_n \to u$ dans L^2 (quand $n \to +\infty$) si et seulement si $\int u_n^2 dm \to \int u^2 dm$ (quand $n \to +\infty$).

corrigé

On remarque que

$$\|u_n - u\|_2^2 = \int u_n^2 dm + \int u^2 dm - 2 \int u_n u dm. \tag{3.50}$$

Comme $u_n \to u$ faiblement dans L^2, on a $\lim_{n\to+\infty} \int u_n u dm = \int u^2 dm$. On déduit alors facilement de (3.50) que $u_n \to u$ dans L^2 si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \int u_n^2 dm = \int u^2 dm$.

On suppose pour toute la suite de l'exercice que $\int u_n v_n \, dm \to \int uv \, dm$ (quand $n \to +\infty$) et qu'il existe une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q.

– φ continue et il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(s) \leq C + C|s|$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.
– $v_n = \varphi(u_n)$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $w \in L^2$, montrer que, quand $n \to +\infty$,

$$\int (\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w)\, dm \to \int (v - \varphi(w))(u - w)\, dm. \tag{3.51}$$

corrigé

On commence par remarquer que $\varphi(w) \in L^2$ (grâce aux hypothèses sur φ et $m(X) < +\infty$). On a alors

$$\int (\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w) = \int (v_n u_n - v_n w - \varphi(w) u_n + \varphi(w) w) dm.$$

Les convergences faibles de u_n et v_n vers u et v donnent

$$\lim_{n\to+\infty} \int u_n \varphi(w) dm = \int u\varphi(w) dm \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int v_n w dm = \int vw dm.$$

Enfin on a, par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} \int u_n v_n dm = \int uv dm$. On en déduit que bien que

$$\lim_{n\to+\infty} (\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w) dm = \int (v - \varphi(w))(u - w) dm.$$

---

3. On suppose que φ est croissante.

(a) Soit $\bar{w} \in L^2$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int (v - \varphi(u + t\bar{w})) t\bar{w}\, dm \leq 0.$$

[Utiliser (3.51).] En déduire que $\int (v - \varphi(u))\bar{w}\, dm = 0$.

corrigé

On utilise ici (3.51) avec $w = u + t\bar{w}$. On obtient, quand $n \to +\infty$,

$$\int (\varphi(u_n) - \varphi(u + t\bar{w}))(u_n - u - t\bar{w})\, dm \to -\int (v - \varphi(u + t\bar{w})) t\bar{w}\, dm.$$

Comme φ est croissante, on a $(\varphi(u_n) - \varphi(u + t\bar{w}))(u_n - u - t\bar{w}) \geq 0$ p.p. et donc $\int (\varphi(u_n) - \varphi(u + t\bar{w}))(u_n - u - t\bar{w}) dm \geq 0$. On en déduit, quand $n \to +\infty$, $\int (v - \varphi(u + t\bar{w})) t\bar{w}\, dm \leq 0$.

En prenant $t = \frac{1}{m}$ ($m \in \mathbb{N}^\star$), on a donc $\int (v - \varphi(u + \frac{\bar{w}}{m}))\bar{w} \leq 0$. En appliquant le théorème de convergence dominée (remarquer que $|(v - \varphi(u + \frac{\bar{w}}{m}))\bar{w}| \leq F$ p.p. avec $F = (|v| + C + C|u| + C|\bar{w}|)|\bar{w}| \in L^1$), on obtient, quand $m \to \infty$,

$$\int (v - \varphi(u))\bar{w} dm \leq 0.$$

De même, en prenant $t = -\frac{1}{m}$, on montre $\int (v - \varphi(u))\bar{w} dm \geq 0$. On a donc $\int (v - \varphi(u))\bar{w} dm = 0$.

(b) Montrer que $v = \varphi(u)$ p.p..

corrigé

On choisit $\bar{w} = 1_A - 1_{A^c}$, avec $A = \{v - \varphi(u) \geq 0\}$. La question précédente donne alors $\int |v - \varphi(u)| dm = 0$ et donc $v = \varphi(u)$ p.p..

---

4. On suppose que φ strictement croissante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $G_n = (\varphi(u_n) - \varphi(u))(u_n - u)$.

(a) Montrer que $G_n \to 0$ dans L^1 quand $n \to +\infty$ (utiliser (3.51)).

corrigé

En prenant $w = u$ dans (3.51), on obtient $\lim_{n\to+\infty} \int G_n dm = 0$. Comme φ est croissante, on a $G_n \geq 0$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\|G_n\|_1 = \int G_n dm$. On en déduit bien que $G_n \to 0$ dans L^1.

(b) Montrer qu'il existe une sous suite de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(G_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) t.q. $G_{\psi(n)} \to 0$ p.p.. En déduire que $u_{\psi(n)} \to u$ p.p. (utiliser la croissance stricte de φ).

corrigé

Comme $G_n \to 0$ dans L^1, il existe une sous suite de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(G_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) t.q. $G_{\psi(n)} \to 0$ p.p. (c'est la réciproque partielle du théorème de convergence dominée). Il existe donc $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $G_{\psi(n)}(x) \to 0$ (quand $n \to +\infty$) si $x \in A^c$.

Soit $x \in A^c$. On pose $a = u(s)$. Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $f(s) = (\varphi(s) - \varphi(a))|s - a|$. Comme φ est strictement croissante continue, la fonction f est aussi strictement croissante continue. Elle admet donc une fonction réciproque, notée g, qui est continue. Comme $|f(u_{\psi(n)}(x)| = G_{\psi(n)}(x) \to 0$, on a $f(u_{\psi(n)}(x)) \to 0$ et donc $u_{\psi(n)}(x) = g(f(u_{\psi(n)}(x)) \to g(0) = a$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} u_{\psi(n)}(x) = u(x)$ pour tout $x \in A^c$. Ce qui prouve bien que $u_{\psi(n)} \to u$ p.p..

(c) Montrer que $u_n \to u$ dans L^p pour tout $p \in [1, 2[$.

corrigé

On montre que $u_n \to u$ dans L^p pour tout $p \in [1, 2[$ en raisonnant pas l'absurde. On suppose qu'il existe $p \in [1, 2[$ t.q. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge par vers u dans L^p. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une sous suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui reste en dehors de la boule (de L^p) de centre u et de rayon ε. Par le raisonnement de la question précédente, de cette sous suite, un peut extraire une sous suite, notée $(u_n)_{\psi(n)}$ qui converge p.p. vers u. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^2, on peut alors montrer que cette sous suite converge dans L^p vers u (c'est une conséquence du théorème de Vitali). En contradiction avec le fait que cette sous suite reste en dehors de la boule (de L^p) de centre u et de rayon ε. On a ainsi montré que $u_n \to u$ dans L^p pour tout $p \in [1, 2[$.
