Devoir 1, exercice 1.6

Corrigé 1.6 (Laplacien d'un élément de $H_0^1(\Omega)$) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) et $u \in H_0^1(\Omega)$.

1. Montrer que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = \int u(x) \Delta\varphi(x) dx = -\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x) dx.$$

Corrigé – *Par définition de la dérivée par transposition, on a*

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \langle D_i D_i u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \int_\Omega u(x) \partial_i^2 \varphi(x) dx.$$

Puis, comme $u \in H_0^1(\Omega)$, la forme linéaire (sur $C_c^\infty(\Omega)$) $D_i u$ est représentée par un élément de $L^2(\Omega)$ encore noté $D_i u$ et on a, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$,

$$\int_\Omega u(x) \partial_i^2 \varphi(x) dx = -\langle D_i u, \partial_i \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega D_i u(x) \partial_i \varphi(x) dx.$$

Comme ∇u est lélément de $L^2(\Omega)^N$ dont les composantes sont les $D_i u$, on obtient bien

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x) dx.$$

2. On rappelle que $H_0^1(\Omega)$ est un s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$. Muni de la norme de $H^1(\Omega)$, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est donc un espace de Hilbert. On note $H^{-1}(\Omega)$ le dual (topologique) de $H_0^1(\Omega)$. Déduire de la question précédente que $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ (c'est-à-dire que l'élément de $\mathcal{D}^\star(\Omega)$, noté Δu, se prolonge de manière unique en un élément de $H^{-1}(\Omega)$, encore notée Δu) et que

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \| \, |\nabla u| \, \|_{L^2(\Omega)}.$$

Corrigé – *Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,*

$$|\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)}| \leq \int_\Omega |\nabla u(x)||\nabla\varphi(x)| dx \leq \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)} \||\nabla\varphi|\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ceci montre que l'application $\varphi \mapsto \langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)}$ est linéaire continue de $C_c^\infty(\Omega)$, muni de la norme $H^1(\Omega)$, dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ cette application se prolonge donc, par densité, de manière unique en une application linéaire continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire en un élément de $H^{-1}(\Omega)$). Cet élément de $H^{-1}(\Omega)$ est encore noté Δu et le prolongement par densité donne, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle \Delta u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = -\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

On a donc, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$|\langle \Delta u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| \leq \int_\Omega |\nabla u(x)||\nabla v(x)| dx \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{1.19}$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est muni de la norme $H^1(\Omega)$, ce qui donne

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega),\, v \neq 0} \frac{\langle \Delta u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}.$$

on déduit alors de (1.19) que

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

NB. En fait, on montrera au chapitre 2 que sur $H_0^1(\Omega)$ la norme $H^1(\Omega)$ est équivalente à la norme notée $\| \cdot \|_{H_0^1(\Omega)}$ définie par $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \| \, |\nabla u| \, \|_{L^2(\Omega)}$. Avec ce choix de norme sur $H_0^1(\Omega)$ on obtient $\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Devoir 1, exercice 2.4

Corrigé 2.3 (Deux problèmes elliptiques emboités)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, et M et N deux matrices de taille $d \times d$ à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a

$$M(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2 \text{ et } N(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2.$$

1. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Montrer qu'il existe un unique u t.q.

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega N(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega (M(x) + N(x))\nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \end{array}\right. \tag{2.61}$$

avec w solution de

$$\left\{\begin{array}{l} w \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega M(x)\nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x)v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{2.62}$$

pour les questions suivantes, on note $T(f)$ cette unique solution de (2.61) avec w solution de (2.62).

Corrigé – *Le théorème 2.6 donne l'existence et l'unicité de w solution de (2.62). Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, on pose alors*

$$S(v) = \int_\Omega (M(x) + N(x))\nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

L'application S est linéaire continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, c'est donc un élément de $H^{-1}(\Omega)$. Le théorème 2.9 donne alors l'existence et l'unicité de u solution de (2.61). Ce qui est bien le résultat demandé.

2. Montrer que T est une application linéaire compacte de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (c'est-à-dire que T est linéaire, continue et transforme les parties bornées de $L^2(\Omega)$ en parties relativement compactes de $L^2(\Omega)$).

Corrigé – *La solution w de (2.62) dépend linéairement de f. Puis, la solution u de (2.61) dépend linéairement de w. On en déduit que u dépend linéairement de f et donc que l'application T est linéaire de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et donc aussi linéaire de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.*

Si w est la solution de (2.62), on a, en prenant $v = w$ dans (2.62),

$$\alpha\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré (Lemme 2.5), il existe C_Ω, ne dépendant que Ω, tel que $\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega\|w\|_{H_0^1(\Omega)}$. On a donc, avec $C_1 = C_\Omega/\alpha$,

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.63}$$

Comme M et N sont à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$, il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ (ne dépendant que de M et N) tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|(M + N)\xi| \leq \beta|\xi| \text{ p.p.}.$$

On a donc, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et S définie dans la première question,

$$|S(v)| \leq \beta\|w\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Si $u = T(f)$, on en déduit, en prenant $v = u$ dans (2.61),

$$\alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \beta\|w\|_{H_0^1(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

et donc, avec (2.63) et $C_2 = \beta C_1/\alpha$,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ceci prouve que l'application $f \mapsto u$ est linéaire continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Comme l'application $u \mapsto u$ est compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (théorème 1.23), on en déduit que T est une une application linéaire compacte de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

3. On suppose dans cette question (et seulement dans cette question) qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $M = \lambda N$. Montrer qu'il existe une matrice A, ne dépendant que de M et λ, tel que, si $u = T(f)$,

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.64}$$

Donner l'expression de A en fonction de M et λ.

Corrigé – *On commence par remarquer que les hypothèses sur M et N imposent $\lambda > 0$. Puis, si $u = T(f)$, (2.61) et (2.62) donnent, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega (\lambda+1)M(x)\nabla w(x) \cdot \nabla v(x)dx = (\lambda+1)\int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

Ce qui donne bien que u est solution de (2.64) avec $A = M/(\lambda+1)$.

4. On suppose dans cette question que $d = 2$ et $1 < p \le +\infty$. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe un unique u solution de (2.61) avec w solution de (2.62).

Montrer que l'application qui à f associe u (solution de (2.61) avec w solution de (2.62)) est compacte de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \le q < +\infty$

Corrigé – *Soit $f \in L^p(\Omega)$. On note p' l'exposant conjugué de p, c'est-à-dire $p' = p/(p-1)$. Le théorème d'injection de Sobolev (théorème 1.26) donne l'existence de C_p (ne dépendant en fait que de p) tel que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a $v \in L^{p'}(\Omega)$ et*

$$\|v\|_{L^{p'}(\Omega)} \le C_p \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Avec l'inégalité de Hölder, on en déduit que l'application $v \mapsto \int_\Omega f(x)v(x)dx$ est un élément $H^{-1}(\Omega)$ et que

$$|\int_\Omega f(x)v(x)dx| \le C_p \|f\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On peut alors reprendre (en les adpatant légèrement) les démonstrations des deux premières questions.
Le théorème 2.9 donne l'existence et l'unicité de w solution de (2.62) et on a $\alpha\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_p\|f\|_{L^p(\Omega)}$. Puis, le théorème 2.9 donne alors l'existence et l'unicité de u solution de (2.61) et, avec β défini à la question 2, on obtient

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{\beta C_p}{\alpha^2}\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Ceci donne que l'application $f \mapsto u$ est linéaire continue de $L^p(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Puis, comme l'application $u \mapsto u$ est compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \le q < +\infty$ (voir la remarque 1.27), on en déduit que l'application $f \mapsto u$ est une une application linéaire compacte de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \le q < +\infty$.

5. On suppose dans cette question que $d = 3$ et $p = 6/5$. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe un unique u solution de (2.61) avec w solution de (2.62).

Montrer que l'application qui à f associe u (solution de (2.61) avec w solution de (2.62)) est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ et compacte de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \le q < 6$.

Corrigé – *La démonstration est ici très voisine de la précédente. On a ici $p = 6/5$ et donc le conjugué de p est $p' = 6 = 2^\star$. Soit $f \in L^{6/5}(\Omega)$. Le théorème d'injection de Sobolev (théorème 1.26) donne l'existence de C (ne dépendant de rien) tel que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a $v \in L^6(\Omega)$ et*

$$\|v\|_{L^6(\Omega)} \le C\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Avec l'inégalité de Hölder, on en déduit que l'application $v \mapsto \int_\Omega f(x)v(x)dx$ est un élément $H^{-1}(\Omega)$ et que

$$|\int_\Omega f(x)v(x)dx| \le C\|f\|_{L^{6/5}(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Le théorème 2.9 donne l'existence et l'unicité de w *solution de (2.62) et on a* $\alpha\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \le C\|f\|_{L^{6/5}(\Omega)}$. *Puis, le théorème 2.9 donne alors l'existence et l'unicité de* u *solution de (2.61) et, avec* β *défini à la question 2, on obtient*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{\beta C}{\alpha^2}\|f\|_{L^{6/5}(\Omega)}.$$

Ceci donne que l'application $f \mapsto u$ *est linéaire continue de* $L^{6/5}(\Omega)$ *dans* $H_0^1(\Omega)$. *Puis, comme l'application* $u \mapsto u$ *est continue de* $H_0^1(\Omega)$ *dans* $L^6(\Omega)$ *(théorème 1.26) et est compacte de* $H_0^1(\Omega)$ *dans* $L^q(\Omega)$ *pour* $1 \le q < 6 = 2^\star$ *(voir la remarque 1.27), on en déduit que l'application* $f \mapsto u$ *est une application linéaire continue de* $L^{6/5}(\Omega)$ *dans* $L^6(\Omega)$ *et linéaire compacte de* $L^{6/5}(\Omega)$ *dans* $L^q(\Omega)$ *pour* $1 \le q < 6$.