Faculté des Sciences
Aix Marseille Université

CTES
Centre de Télé-Enseignement Sciences

# MASTER 2 – Ingénierie Mathématiques et Modélisation – SMA5B0.

| Code UE | N° d'envoi de l'UE |
|---|---|
| **MMAU2T** | **2** |

***Nom de l'UE : Equations aux Dérivées Partielles (3.2)***

**- Contenu de l'envoi : Polycopié, chapitre 2**

**- Guide du travail à effectuer**

Semaine 1 :
Etudier le chapitre 2, section 1 (formulation faible)
Exercice proposé (avec corrigé) : 2.1

Semaine 2 :
Etudier le chapitre 2, section 2 (analyse spectrale)
Exercices proposés (avec corrigé) : 2.2, 2.5

Semaine 3 :
Etudier le chapitre 2, section 3 (régularité)
Exercices proposés (avec corrigé) : 2.10, 2.13

Semaine 4 :
Etudier le chapitre 2, section 4 (principe du maximum)
Exercices proposés (avec corrigé) : 2.14, 2.15, 2.16
Exercice à faire pour le 1er devoir, à rendre en janvier : 2.4

**- Coordonnées des enseignants responsables de l'envoi**

T. Gallouet, R. Herbin, CMI, 39 rue Joliot Curie, 13453 marseille cedex 13.
**email :** thierry.gallouet@univ-amu.fr, raphaele.herbin@univ-amu.fr

Vous pouvez aussi consulter la page web: http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/master2.d/tele.d
et nous poser des questions par email.

# Chapitre 2

# Problèmes elliptiques linéaires

## 2.1 Formulation faible

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ de frontière $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$. Soient $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que les fonctions $a_{i,j}$ vérifient l'hypothèse d'ellipticité uniforme, c'est-à-dire :

$$\exists \alpha > 0;\ \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N,\ \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{2.1}$$

On se donne $f \in L^2(\Omega)$ et $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, et on cherche une solution au problème :

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j u)(x) = f(x),\ x \in \Omega, \tag{2.2a}$$

$$u(x) = g(x),\ x \in \partial\Omega, \tag{2.2b}$$

où $\partial_i u$ désigne la dérivée partielle de $u$ par rapport à sa $i$-ème variable.

**Exemple 2.1 (Le Laplacien)** *Si on prend $a_{i,j} = \delta_{i,j}$ ( c'est-à-dire 1 si $i = j$, 0 si $i \neq j$), alors le problème* (2.2) *devient*

$$-\Delta u = f \textit{ sur } \Omega,$$
$$u = g \textit{ sur } \partial\Omega.$$

**Définition 2.2 (Solution classique)** *On suppose que $a_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega})$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que $f \in C(\bar{\Omega})$ et $g \in C(\partial\Omega)$. On appelle alors solution classique de* (2.2) *une fonction $u \in C^2(\bar{\Omega})$ vérifiant* (2.2).

On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $C^k(\bar{\Omega})$ désigne l'ensemble des restrictions à $\Omega$ des fonctions appartenant à $C^k(\mathbb{R}^N)$.

Il n'existe pas forcément de solution classique à (2.2). Mais il existe des solutions en un sens plus faible que l'on va définir ci-après. Pour comprendre leur nature, considérons d'abord le cas $g = 0$, avec $a_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega})$ et $f \in C(\bar{\Omega})$, et supposons qu'il existe une solution classique $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Par définition, celle ci vérifie :

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j u)(x) = f(x),\ \forall x \in \Omega.$$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ; multiplions l'équation précédente par $\varphi(x)$ et intégrons sur $\Omega$ :

$$-\int_\Omega \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial_i (a_{i,j}(x)\partial_j u)(x) \right) \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Une intégration par parties donne alors :

$$\int_\Omega \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x)\partial_j u(x) \partial_i \varphi(x) \right) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.3}$$

Comme $u \in C^2(\bar{\Omega})$, on a $\partial_j u \in C^1(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$, et $D_j u = \partial_j u$ p.p (come cela a été vu au Chapitre 1). De plus $u \in C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ et donc $u \in H^1(\Omega)$. Enfin, comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a finalement $u \in H_0^1(\Omega)$ (voir l'exercice 1.15).
Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to v$ dans $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire $\varphi_n \to v$ dans $L^2(\Omega)$ et $\partial_i \varphi_n \to D_i v$ dans $L^2(\Omega)$ pour $i = 1, \ldots, N$. En écrivant (2.3) avec $\varphi = \varphi_n$, on obtient :

$$\int_\Omega \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x)\partial_j u(x) \partial_i \varphi_n(x) \right) dx = \int_\Omega f(x)\varphi_n(x) \, \mathrm{d}x,$$

et en passant à la limite, on obtient que $u$ satisfait le problème suivant, qu'on appelle <u>formulation faible</u> du problème (2.2) (on rappelle que l'on considère ici le cas $g = 0$)

$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(\Omega), \\ &\int_\Omega \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) \right) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x) v(x) \, \mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.4}$$

On vient ainsi de montrer que **toute solution classique du problème** (2.2) **(lorsque** $g = 0$**) est solution faible, c'est-à-dire vérifie** (2.4).

**Remarque 2.3 (Cas symétrique, formulation variationnelle)** Dans le cas où $a_{i,j} = a_{j,i}$ p.p. pour $i \neq j$, $u$ est solution de (2.4) si et seulement si $u$ est solution du problème suivant, qu'on appelle <u>formulation variationnelle</u> :

$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(\Omega), \\ &J(u) \leq J(v), \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \tag{2.5}$$

où la fonctionnelle $J$ est définie par : $J(v) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j} D_i v D_j v \right) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)v(x) \, \mathrm{d}x.$

La démonstration de l'existence et de l'unicité des solutions des problèmes (2.4) et (2.5) utilise le lemme de Lax-Milgram, que nous rappelons ici :

**Lemme 2.4 (Lax-Milgram)** *Soient $H$ un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire noté $(\cdot/\cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$, et $a(\cdot,\cdot)$ une application bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ qui est*

– *continue, ce qui équivalent à dire qu'il existe $c > 0$ t.q., pour tout $(u, v) \in H^2$, on a $|a(u, v)| \leq c\|u\|\|v\|$,*

– *coercive sur $H$ (certains auteurs disent plutôt $H$-elliptique), c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$, t.q., pour tout $u \in H$, $a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$,*

*et soit $T$ une forme linéaire continue sur $H$.*
*Alors il existe un unique $u$ de $H$ tel que l'équation $a(u,v) = T(v)$ soit vérifiée pour tout $v$ de $H$ :*

$$\exists!\ u \in H,\ \forall v \in H, \quad a(u,v) = T(v).$$

*Si de plus la forme bilinéaire $a$ est symétrique, alors $u$ est l'unique élément de $H$ qui minimise la fonctionnelle $J : H \to \mathbb{R}$ définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - T(v)$ pour tout $v$ de $H$, c'est-à-dire :*

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v) \ \text{ et } \ J(u) < J(v) \text{ si } u \neq v.$$

Notons que dans le cas où la forme bilinéaire $a$ est symétrique, elle définit un produit scalaire sur $H$ équivalent au produit scalaire initial. Dans ce cas, le lemme de Lax-Milgram est une conséquence directe du théorème de représentation de Riesz dans un espace de Hilbert.
Pour appliquer le théorème de Lax-Milgram au problème (2.4), nous aurons besoin de l'inégalité de Poincaré :

**Lemme 2.5 (Inégalité de Poincaré)** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ (ou qui est au moins borné dans une direction), alors il existe $C_\Omega$ ne dépendant que de $\Omega$ tel que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \| \, |\nabla u| \, \|_{L^2(\Omega)},\ \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.6}$$

N.B. On désigne toujours par $|\cdot|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$. On a donc

$$\| \, |\nabla u| \, \|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega D_i u(x)^2 dx.$$

**Démonstration** Par hypothèse sur $\Omega$, il existe $a > 0$ tel que $\Omega \subset ]-a, a[ \times \mathbb{R}^{N-1}$. Soit $u \in C_c^\infty(\Omega)$, on prolonge $u$ par 0 en dehors de $\Omega$, on a donc :

$$u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), u = 0 \text{ sur } \Omega^c.$$

Soit $x = (x_1, \ldots, x_N)^t = (x_1, y)^t \in \Omega$, avec $x_1 \in ]-a, a[$ et $y = (x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$. On a :

$$u(x_1, y) = \int_{-a}^{x_1} \partial_1 u(t, y) \, \mathrm{d}t,$$

et donc, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$|u(x_1,y)|^2 \leq \left( \int_{-a}^{a} |\partial_1 u(t,y)| \, \mathrm{d}t \right)^2 \leq 2a \int_{-a}^{a} (\partial_1 u(t,y))^2 \, \mathrm{d}t.$$

En intégrant entre $-a$ et $a$, on obtient :

$$\int_{-a}^{a} |u(x_1,y)|^2 \, \mathrm{d}x_1 \leq 4a^2 \int_{-a}^{a} (\partial_1 u(t,y))^2 \, \mathrm{d}t,$$

et donc, en intégrant par rapport à $y$,

$$\int_\Omega |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq 4a^2 \int_\Omega (\partial_1 u(x))^2 \, \mathrm{d}x,\ \forall u \in C_c^\infty(\Omega) \tag{2.7}$$

On procéde ensuite par densité ; pour $u \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$. On a donc $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ et $\partial_i u \to D_i u$ dans $L^2(\Omega)$. On écrit alors (2.7) pour $u_n$ et en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient :

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le 4a^2 \|D_1 u\|^2_{L^2(\Omega)} \le 4a^2 \sum_{i=1}^N \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} = 4a^2 \| \, |\nabla u| \, \|^2_{L^2(\Omega)}.$$

■

**Théorème 2.6 (Existence et unicité de la solution de** (2.4)**)** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^2(\Omega)$, et soient $(a_{i,j})_{i,j=1,\dots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que* (2.1) *soit vérifiée. Alors il existe une unique solution de* (2.4).

**Démonstration** Pour appliquer le lemme de Lax-Milgram on écrit le problème (2.4) sous la forme : $u \in H$ ; $a(u,v) = T(v)$ pour tout $v \in H$, avec $H = H_0^1(\Omega)$ (qui est bien un espace de Hilbert, muni de la norme définie par $\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \| \, |\nabla u| \, \|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$ ), et avec $a$ et $T$ définies par

$$a(u,v) = \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) \right) \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad T(v) = \int_\Omega f(x) v(x) \,\mathrm{d}x.$$

On remarque tout d'abord que la forme linéaire $T$ est bien continue. En effet,

$$|T(v)| \le \|v\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \le \|v\|_{H^1(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quant à la forme $a$, elle est évidemment bilinéaire, et elle vérifie :

$$|a(u,v)| \le \sum_{i,j=1}^N \|a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)} \|D_i u\|_{L^2(\Omega)} \|D_j v\|_{L^2(\Omega)} \le C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

avec $C = \sum_{i,j=1}^N \|a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)}$. Elle est donc continue.
Voyons si $a$ est coercive : il faut montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que $a(u,u) \ge \beta \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$. Par hypothèse sur $a$, on a :

$$a(u,u) = \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i u(x) \right) \,\mathrm{d}x \ge \alpha \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^N |D_i u(x)|^2 \right) \,\mathrm{d}x = \alpha \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

On applique alors l'inégalité de Poincaré (2.6) :

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} \le (C_\Omega^2 + 1) \sum_{i=1}^N \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

d'où on obtient que :

$$\sum_{i=1}^N \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} \ge \frac{1}{C_\Omega^2 + 1} \|u\|^2_{H^1(\Omega)},$$

et donc

$$a(u,u) \ge \alpha \sum_{i=1}^N \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} \ge \frac{\alpha}{C_\Omega^2 + 1} \|u\|^2_{H^1(\Omega)},$$

ce qui démontre la coercivité de $a$. Par le lemme de Lax-Milgram, on a donc bien existence et unicité de la solution du problème (2.4). ■

**Remarque 2.7** Le lemme 2.5 est encore vrai avec $1 \le p \le +\infty$ au lieu de $p = 2$. Si $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \ge 1$, et $1 \le p \le +\infty$, il existe $C_{p,\Omega}$ ne dépendant que de $p$ et $\Omega$ tel que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C_\Omega \| \, |\nabla u| \, \|_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Ceci permet de définir une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme $W^{1,p}(\Omega)$, voir la définition 2.8. (Pour $p = 2$, cette équivalence de norme est en fait démontrée dans la démonstration du théorème 2.6.)

**Définition 2.8** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \ge 1$) et $1 \le p \le +\infty$. Pou $u \in W_0^{1,p}$, on pose*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \Big( \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

*Selon la remarque 2.7, c'est donc, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.*
*Pour $p = 2$, l'espace $W_0^{1,2}(\Omega)$ est aussi noté $H_0^1(\Omega)$ et la norme $\| \cdot \|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ est la norme $\| \cdot \|_{H_0^1(\Omega)}$.*

Par le lemme de Lax-Milgram, on démontre de manière similaire l'existence et l'unicité dans le cas où le second membre de (2.4) est donné par un élément de $H^{-1}(\Omega)$ (dual de $H_0^1(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $H_0^1(\Omega)$).

**Théorème 2.9 (Existence et unicité, $T \in H^{-1}$)** *Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $(a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que (2.1) soit vérifiée. Soit $T \in H^{-1}(\Omega)$, il existe alors une unique solution $u$ de :*

$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(\Omega), \\ &\int_\Omega \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) \right) \mathrm{d}x = T(v), \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^1(\Omega)$. Il est intéressant de savoir si l'application $\varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ (définie, par exemple, pour $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$) se prolonge en un élément de $H^{-1}(\Omega)$ (et dans ce cas, le prolongement sera unique par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$). En dimension $N = 1$, l'hypothèse $f \in L^1(\Omega)$ est suffisante. En dimension $N \ge 3$, l'hypothèse $f \in L^q(\Omega)$, avec $q = 2N/(N+2)$ est suffisante. En dimension $N = 2$, l'hypothèse $f \in L^q(\Omega)$, avec $q > 1$ est suffisante. Un résultat plus précis (pour $N = 2$) est donné dans l'exercice 2.9.

Nous n'avons traité ici que le cas de la condition aux limites de Dirichlet homogène ( c'est-à-dire $g = 0$ dans le problème 2.2). Le cas de la condition aux limites de Dirichlet non homogène est traité dans la section 2.5.

L'existence et l'unicité de solutions faibles est possible avec d'autres conditions aux limites. L'exercice 2.5 traite le cas des conditions de Neuman et l'exercice 2.7 les conditions dites de Fourier (ou de Robin, selon les auteurs). La résolution du probème de Neuman permet d'ailleurs de montrer une décomposition utile d'un élément de $L^2(\Omega)^N$, appelée décomposition de Hodge, exercice 2.10. L'exercice 2.6 s'intéresse à des conditions aux limites apparaissant en mécanique du solide. Il est possible aussi de coupler un problème elliptique sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^2$ avec un problème elliptique unidimensionel sur le frontière de $\Omega$, ceci est l'objet de l'exercice 2.12.

Les exercices 2.11, 2.13 et 2.8 montrent l'existence (et l'unicité ou une "unicité partielle") pour des systèmes elliptiques (problème des Stokes et équation de Schrödinger).

Enfin, il est possible de traiter des problèmes elliptiques avec des coefficients $a_{i,j}$ non bornés. On introduit alors des espaces de Sobolev dit "à poids", exercice 2.3.

## 2.2 Analyse spectrale

### 2.2.1 Quelques rappels

Soit $E$ un espace de Banach réel, et $T$ une application linéaire continue de $E$ dans $E$. On note :

- $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; T - \lambda I$ est non bijective$\}$ l'ensemble des valeurs singulières de $T$,
- $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; T - \lambda I$ est bijective$\} = \mathbb{R} \setminus \sigma(T)$ l'ensemble des valeurs régulières de $T$,
- $\mathcal{VP}(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; T - \lambda I$ est non injective$\}$ l'ensemble des valeurs propres de $T$,

Lorsque dim $E < +\infty$, on a $\mathcal{VP}(T) = \sigma(T)$. On a un résultat similaire en dimension infinie, à condition que l'opérateur $T$ soit linéaire continu et compact. Plus précisément, dans ce cas on a : $\mathcal{VP}(T) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$. Le théorème suivant donne ce résultat dans les espaces de Hilbert séparables et pour un opérateur autoadjoint.

**Proposition 2.10 (Opérateur linéaire continu compact autoajoint)** *Soit $E$ un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_E$, et soit $T$ un opérateur linéaire continu compact autoadjoint dont le noyau $N(T) = \{u \in E\ ;\ T(u) = 0\}$ est réduit à $\{0\}$. Alors il existe une base hilbertienne de $E$ formée de vecteurs propres de $T$, c'est-à-dire d'éléments de $E$, notés $e_n$, $n \in \mathbb{N}$, vérifiant $(e_n, e_m)_E = \delta_{n,m}$ et tels que si $u \in E$, alors $u$ peut s'écrire $u = \sum_{n\in N}(u, e_n)_E e_n$ (cette série étant convergente dans $E$), et les valeurs propres $\lambda_n \in \mathbb{R}$ associées, i.e. telles que $Te_n = \lambda_n e_n$, sont telles que $\lambda_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.*

### 2.2.2 Le Laplacien

On va considérer dans cette section, pour simplifier, le cas du Laplacien. Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On rappelle que $\Delta u = \sum_{i=1}^N \partial_i^2 u$ si $u$ est une fonction régulière. Pour étendre cette définition aux fonctions seulement localement intégrables, on pose, si $u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$, $\Delta u = \sum_{i=1}^N D_i^2 u$. On définit maintenant un opérateur $A$ d'une partie de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ en définissant d'abord son **domaine** $D(A)$ :

$$D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega)\ ; \Delta u \in L^2(\Omega)\},$$

Puis on pose $Au = -\Delta u$ si $u \in D(A)$. On a ainsi définit un opérateur linéaire $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$.

On a vu dans les paragraphes précédents que si $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution au problème (2.4) qui s'écrit, pour le Laplacien, c'est-à-dire avec les valeurs $a_{i,j} = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, N$ :

$$\begin{aligned} & u \in H_0^1(\Omega), \\ & \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Grâce à la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, la fonction $u$ est solution de (2.9) si et seulement si $u \in D(A)$ et $-\Delta u = f$ p.p. ( c'est-à-dire $-\Delta u = f$ dans $L^2(\Omega)$). L'opérateur $A$ est donc inversible. Son inverse, l'opérateur $A^{-1}$, est défini de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ par $A^{-1}f = u$ où $u$ est solution de (2.9). Cet opérateur est injectif mais non surjectif. Les deux opérateurs sont linéaires.
Pour montrer qu'il existe une base hilbertienne formée des vecteurs propres de $A^{-1}$, on va démontrer le théorème suivant :

**Théorème 2.11** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Pour $f \in L^2(\Omega)$, on note $Tf$ l'unique solution de (2.9). L'opérateur $T$ est linéaire continu compact et autoadjoint de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. De plus $N(T) = \{f \in L^2(\Omega), Tf = 0$ p.p.$\} = \{0\}$.*

**Démonstration** Il est immédiat de voir que $T$ est linéaire. On remarque tout d'abord que $N(T) = \{f \in E, Tf = 0 \text{ p.p.}\} = \{0\}$. En effet, soit $f \in L^2(\Omega)$ t.q. $Tf = 0$ p.p.. On a donc, d'après (2.9),

$$\int_\Omega fv dx = 0 \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Comme $H_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ (on a même $C_c^\infty(\Omega)$ dense dans $L^2(\Omega)$), on en déduit $f = 0$ p.p..
On montre maintenant la continuité de $T$. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $u = Tf$. En prenant $v = u$ dans (2.9), on obtient

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x = \int_\Omega fu \, \mathrm{d}x \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par l'inégalité de Poincaré, il existe $C_\Omega \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de $\Omega$ tel que $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$, et donc :

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On en déduit que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}$ et donc :

$$\|Tf\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le C_\Omega^2 \|f\|^2_{L^2(\Omega)},$$

ce qui démontre la continuité de $T$.

Montrons maintenant que l'opérateur $T$ est compact, c'est-à-dire que l'image $T(B)$ d'un ensemble $B$ borné de $L^2(\Omega)$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$. On peut écrire $T$ sous la forme $T = I \circ T_0$ où $I$ est l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et $T_0$ est l'application qui à $f \in L^2(\Omega)$ associe $u = Tf \in H_0^1(\Omega)$. L'application $T_0$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ (car $\|Tf\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}$) et l'injection $I$ est compacte par le théorème de Rellich (théorème 1.23 page 10), et donc l'opérateur $T$ est compact.

Montrons maintenant que l'opérateur $T$ est auto-adjoint, c'est-à-dire que

$$(Tf, g)_{L^2(\Omega)} = (f, Tg)_{L^2(\Omega)}, \ \forall f, g \in L^2(\Omega). \tag{2.10}$$

Soient donc $f$ et $g \in L^2(\Omega)$, $u$ l'unique solution de (2.9), et $v$ l'unique solution de (2.9) où on a remplacé $f$ par $g$ dans le second membre. On a, comme $v$ est solution de (2.9) où on a remplacé $f$ par $g$ :

$$(Tf, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega Tf \ g \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u \ g \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x.$$

On montre de même que $(f, Tg)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x$, ce qui démontre (2.10). ■

D'après le théorème 2.11 et la proposition 2.10, il existe donc une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ de $L^2(\Omega)$ formées de fonctions propres de $T$. Les valeurs propres associées sont toutes strictement positives. En effet, si $f \in L^2(\Omega)$ et $f \neq 0$, alors $u = Tf \neq 0$ et

$$(Tf, f)_{L^2(\Omega)} = (u, f)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} > 0,$$

et donc si $\lambda_n \in \mathcal{VP}(T)$, est associée au vecteur propre $e_n \neq 0$, on a $Te_n = \lambda_n e_n$, et donc, comme $e_n \neq 0$,

$$\lambda_n (e_n, e_n)_{L^2(\Omega)} = (\lambda_n e_n, e_n)_{L^2(\Omega)} = (Te_n, e_n)_{L^2(\Omega)} > 0.$$

La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc formée de nombres strictement positifs. Quitte à changer l'ordre des $\lambda_n$, on peut supposer que cette suite est décroissance. Enfin, la proposition 2.10 donne que $\lim_{n\to+\infty}\lambda_n = 0$.

Remarquons que les valeurs propres de $A$ sont donc les valeurs $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n},\ n \in \mathbb{N}^\star$, avec $\mu_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ et $\mu_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
On peut alors caractériser le domaine de l'opérateur Laplacien $D(A)$ de la façon suivante :

$$\text{Soit } u \in L^2(\Omega), [u \in D(A)] \Longleftrightarrow \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n^2 (u, e_n)^2_{L^2(\Omega)} < +\infty.\right]$$

De plus si $u \in D(A)$, alors $Au = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n (u, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n$. On peut ainsi définir les puissances de l'opérateur $A$ :

**Définition 2.12 (Puissance de l'opérateur)** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $Au = -\Delta u$ avec $D(A) = \{u \in H^1_0(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$. On note $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de vecteurs propres de $A$, associés aux valeurs propres $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Soit $s \geq 0$. On définit*

$$D(A^s) = \{u \in L^2(\Omega) : \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^{2s} (u, e_n)^2_{L^2(\Omega)} < +\infty\}.$$

*Et pour $u \in D(A^s)$, on peut alors définir $A^s u$ par :*

$$A^s u = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^s (u, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n.$$

*Cette série étant convergente dans $L^2(\Omega)$.*

Pour $s = 0$, on a $D(A^0) = L^2(\Omega)$ et $A^0 u = u$ : $A^0$ est l'opérateur identité.
Pour $s = 1$, on retrouve l'opérateur $A$.
Pour $s = \frac{1}{2}$, on a $D(A^{\frac{1}{2}}) = \{u \in L^2(\Omega); \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n (u, e_n)^2_{L^2(\Omega)} < +\infty\}$. On peut montrer que $D(A^{\frac{1}{2}}) = H^1_0(\Omega)$, et on a $A^{\frac{1}{2}} u = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\mu_n} (u, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n$.

Pour le cas $N = 1$, $\Omega = ]0, 1[$, Le théorème de décomposition spectrale est détaillé dans l'exercice 2.2.

## 2.3 Régularité des solutions faibles

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^2(\Omega)$. Sous les hypothèses (2.1), on sait par les résultats précédents qu'il existe une unique solution au problème (2.4), et on se demande quelle est la régularité de cette solution en fonction des données du problème. Le problème est assez simple en dimension $N = 1$, voir l'exercice 2.1, mais beaucoup plus difficile en dimension $N > 1$. La réponse dépend de la régularité des coefficients de l'opérateur et de la régularité de la frontière de l'ouvert (on dit que la frontière de $\Omega$ est de classe $C^k$ si elle est localement le graphe d'une fonction de classe $C^k$).

**Théorème 2.13 (Régularité de la solution du problème de Dirichlet)**
*Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^2(\Omega)$. Sous les hypothèses* (2.1)*, soit $u \in H^1_0(\Omega)$ la solution de* (2.4).

1. *Si $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$ pour $i, j = 1, \ldots, N$ et $\Omega$ est à frontière $C^2$, alors, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, on a $u \in H^2(\Omega)$.*
2. *Si $a_{i,j} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ pour $i, j = 1, \ldots, N$, si $\Omega$ est à frontière $C^\infty$, et si $f \in H^m(\Omega)$ avec $m \geq 0$, alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$.*

*En conséquence, si $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, alors $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et donc $u$ est solution classique. De même, si $f \in H^m(\Omega)$ avec $m > \frac{N}{2}$, alors $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et donc $u$ est encore solution classique.*

**Remarque 2.14 (Optimalité des hypothèses)** Notons que la partie 1. du théorème précédent est fausse sans les hypothèses $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$ et $\Omega$ est à frontière $C^2$.
Par contre dans le cas du Laplacien, c'est-à-dire $a_{i,j} = \delta_{i,j}$, si $\Omega$ est convexe, alors $u \in H^2(\Omega)$ dés que $f \in L^2(\Omega)$.

**Idée de démonstration du théorème 2.13, première partie**
On se ramène par la technique dite des "cartes locales" au cas $\Omega = \mathbb{R}^N_+ = \{(x_1, y), y \in \mathbb{R}^{N-1}, x_1 > 0\}$, et au problème suivant :

$$\begin{aligned}
&u \in H^1_0(\Omega),\\
&\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x, \forall v \in H^1_0(\Omega).
\end{aligned}$$

et on applique ensuite le théorème 2.17. Ce théorème montre que la solution de ce problème appartient à $H^2(\mathbb{R}^N_+)$. ■

La démonstration du théorème 2.17, due à L. Nirenberg [1] que nous énonçons un peu plus loin nécessite les lemmes techniques suivants, que nous enonçons pour $N = 2$, pour simplifier :

**Lemme 2.15** *Soit $\Omega = \mathbb{R}^2_+ = \{(x_1, y), x_1 > 0, y \in \mathbb{R}\}$. Soit $g \in L^2(\Omega)$ et, pour $h > 0$, $\Psi_h g$ défini par :$\Psi_h g = \frac{1}{h}(g_h - g)$, où $g_h \in H^1_0(\Omega)$ est définie par $g_h(x) = g(x_1, x_2 + h)$. Alors $\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \|g\|_{L^2(\Omega)}$.*

**Démonstration** Soit $g \in L^2(\Omega)$, par définition,

$$\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\int_\Omega \Psi_h g\ v \,\mathrm{d}x,\ v \in H^1_0(\Omega),\ \|v\|_{H^1(\Omega)} \le 1\},$$

et donc, par densité de $C^\infty_c(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$,

$$\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\int_\Omega \Psi_h g\ v \,\mathrm{d}x,\ v \in C^\infty_c(\Omega),\ \|v\|_{H^1(\Omega)} \le 1\}.$$

Soit $v \in C^\infty_c(\Omega)$ tel que $\|v\|_{H^1(\Omega)} \le 1$.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Psi_h g\ v \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} (g(x_1, x_2 + h) - g(x_1, x_2))\, v(x_1, x_2) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2\\
&= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} g(x_1, \tilde{x}_2) v(x_1, \tilde{x}_2 - h) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}\tilde{x}_2 - \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} g(x_1, x_2) v(x_1, x_2) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2\\
&= -\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} g(x_1, x_2) \frac{v(x_1, x_2 - h) - v(x_1, x_2)}{-h} \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2.
\end{aligned}$$

Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\int_\Omega \Psi_h g\ v \,\mathrm{d}x| \le \|g\|_{L^2(\Omega)} \,\|\frac{v(\cdot, \cdot - h) - v(\cdot, \cdot)}{-h}\|_{L^2(\Omega)} \le \|g\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \le \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

On en déduit que $\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \|g\|_{L^2(\Omega)}$. ■

1. Louis Nirenberg (né en 1925) est un mathématicien Canadien qui a beaucoup contribué à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires.

**Lemme 2.16** *Sous les hypothèses du lemme 2.15, soit $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, alors $\Psi_h u \to D_2 u$ dans $\mathcal{D}^\star$ lorsque $h \to 0$.*

**Démonstration** On pose $\mathcal{D} = C_c^\infty(\Omega)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ ; on veut montrer que

$$\int_\Omega \Psi_h u \, \varphi \, \mathrm{d}x \to -\int_\Omega u \partial_2 \varphi \, \mathrm{d}x = \langle D_2 u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star, \mathcal{D}} \text{ lorsque } h \to 0.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Psi_h u \varphi \, \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x_1, x_2 + h) - u(x_1, x_2)}{h} \varphi(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \\ &= -\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} u(x_1, x_2) \frac{\varphi(x_1, x_2 - h) - \varphi(x_1, x_2)}{-h} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2.\end{aligned}$$

Mais $\frac{\varphi(x_1, x_2 - h) - \varphi(x_1, x_2)}{-h} \to \partial_2 \varphi$ uniformément lorsque $h \to 0$, et le support de cette fonction est inclus dans un compact $K$ de $\Omega$, indépendant de $h$ si $|h| < 1$. Donc $\lim_{h \to 0} \int_\Omega \Psi_h u \, \varphi \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega u \partial_2 \varphi \, \mathrm{d}x$. ■

**Théorème 2.17 (Nirenberg)** *Soit $\Omega = \mathbb{R}^N_+ = \{(x_1, y), y \in \mathbb{R}^{N-1}, x_1 > 0\}$ et $f \in L^2(\Omega)$, et soit $u \in H^1_0(\Omega)$ solution du problème suivant :*

$$\begin{aligned} &u \in H^1_0(\Omega), \\ &\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x, \forall v \in H^1_0(\Omega). \end{aligned} \tag{2.11}$$

*Alors $u \in H^2(\mathbb{R}^N_+)$.*

**Démonstration** On va effectuer la démonstration dans le cas $N = 2$. Soit $u \in H^1_0(\Omega)$ solution de (2.11), $u$ vérifie donc :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u \, v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega g v \, \mathrm{d}x, \forall v \in H^1_0(\Omega), \text{ où } g = u + f \in L^2(\Omega).$$

On a donc

$$(u, v)_{H^1_0(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^2_+} g \, v \, \mathrm{d}x \le \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \tag{2.12}$$

puisque, par définition, $\|g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\int_{\mathbb{R}^2_+} g \, v \, \mathrm{d}x, \; v \in H^1_0(\Omega), \|v\|_{H^1(\Omega)} \le 1\}$, où, comme d'habitude, on confond l'application $T_g$ qui à $v \in H^1_0(\Omega)$ associe $\int g v \, \mathrm{d}x$, qui est donc un élement de $H^{-1}(\Omega)$, avec la (classe de) fonction(s) $g \in L^2(\Omega)$. On prend $v = u$ dans (2.12). On obtient $\|u\|_{H^1(\Omega)} \le \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}$.
Pour montrer la régularité sur $D_2 u$, on introduit la fonction $\Psi_h u = \frac{1}{h}(u_h - u)$ où $u_h \in H^1_0(\Omega)$ est définie par $u_h(x) = u(x_1, x_2 + h)$. Comme $u$ vérifie (2.11), $u_h$ vérifie $\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f_h v \, \mathrm{d}x$ où $f_h(x) = f(x_1, x_2 + h)$, et donc $\Psi_h u = \frac{1}{h}(u_h - u)$ appartient à $H^1_0(\Omega)$ et vérifie

$$\int_\Omega \nabla \Psi_h u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \Psi_h f v \, \mathrm{d}x \text{ pour tout } v \in H^1_0(\Omega).$$

On en déduit que $(\Psi_h u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \Psi_h g v \, \mathrm{d}x$, et donc que $\|\Psi_h u\|_{H^1(\Omega)} \le \|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)}$. Par le lemme 2.15, comme $g \in L^2(\Omega)$, on a donc

$$\|\Psi_h u\|_{H^1(\Omega)} \le \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Prenons maintenant $h = \frac{1}{n}$ et faisons $n \to +\infty$. Par ce qui précéde, la suite $(\Psi_{\frac{1}{n}} u)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, il existe donc une sous-suite encore notée $(\Psi_{\frac{1}{n}} u)_{n\in\mathbb{N}}$, et $w \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\Psi_{\frac{1}{n}} u \to w$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible ( c'est-à-dire $S(\Psi_{\frac{1}{n}} u) \to S(w)$ pour tout $S \in H^{-1}(\Omega)$). Donc $\Psi_{\frac{1}{n}} u \to w$ dans $\mathcal{D}^\star$. Mais par le lemme 2.16, $\Psi_{\frac{1}{n}} u \to D_2 u$ dans $\mathcal{D}^\star$. Donc $D_2 u = w \in H_0^1(\Omega)$, et par conséquent, $D_1 D_2 u \in L^2(\Omega)$ et $D_2 D_2 u \in L^2(\Omega)$. Pour conclure, il ne reste plus qu'à montrer que $D_1 D_1 u \in L^2(\Omega)$. Pour cela, on utilise l'équation satisfaite par $u$. En effet, comme $u$ est solution faible de (2.4), on a $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}^\star$, et donc $D_1 D_1 u = -f - D_2 D_2 u$ ce qui prouve que $D_1 D_1 u \in L^2(\Omega)$. Ceci termine la preuve. ■

**Remarque 2.18 (Plus de régularité. . . )**

1. Supposons que $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$ et que $\Omega$ est à frontière $C^2$. On a déjé vu que si $f \in L^2(\Omega)$ alors $u \in H^2(\Omega)$. On peut montrer que si $f \in L^p(\Omega)$ alors $u \in W^{2,p}(\Omega)$ $(2 \le p < +\infty)$.
2. Supposons maintenant qu'on ait seulement $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$. On peut montrer (c'est un résultat de Meyers) qu'il existe $p^\star > 2$ tel que si $f \in L^p(\Omega)$ avec $2 \le p \le p^\star$, alors $u \in W^{2,p}(\Omega)$.
3. Toujours dans le cas $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, on peut montrer (ce résultat est dû à Stampacchia [2]) que si $f \in L^p(\Omega)$, avec $p > \frac{N}{2}$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$.
4. Il est possible aussi de démontrer des résultat de régularité pour d'autres conditions aux limites. L'exercice 2.5 donne un exemple avec les conditions de Neuman, l'exercice 2.7 un exemple avec conditions de Fourier et l'exercice 2.8 traite l'exemple du système elliptique induit par l'équation de Schrödinger (qui est généralement présenté comme une équation dont l'inconnue prend ses valeurs dans $\mathbb{C}$).

## 2.4 Positivité de la solution faible

**Question.** (Positivité de la solution faible.) Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \ge 1$, $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j = 1, \dots, N$. On suppose que les fonctions $a_{i,j}$ vérifient (2.1). Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $u$ la solution de (2.4). On suppose que $f \ge 0$ p.p.. A-t-on $u \ge 0$ p.p. ?

**Remarque 2.19** Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \ge 1$. On suppose que $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $-\Delta u = f$ dans $\Omega$ et $u = 0$ sur le bord de $\Omega$ (la fonction $u$ est donc une solution classique avec $a_{i,j} = 0$ si $i \ne j$ et $a_{i,j} = 1$ si $i = j$). On suppose aussi que $f > 0$ dans $\Omega$. On va montrer que $u \ge 0$ dans $\Omega$. Pour cela, on raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $a \in \Omega$ t.q. $u(a) < 0$. On choisit alors $x \in \Omega$ t.q. $u(x) = \min\{u(y), y \in \overline{\Omega}\}$ (un tel $x$ existe car $\overline{\Omega}$ est compact, $u$ continue et $u = 0$ sur le bord de $\Omega$). On a alors

$$\partial_i u(x) = 0 \text{ et } \partial_i^2 u(x) \ge 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N\}.$$

Ceci donne $\Delta u(x) \ge 0$ en contradiction avec $\Delta u(x) = -f(x) < 0$. On obtient donc finalement que $u(x) \ge 0$ pour tout $x \in \Omega$. Un argument supplémentaire permet de remplacer l'hypothèse $f > 0$ par $f \ge 0$. En effet, supposons seulement $f \ge 0$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon x_1^2$ de sorte que $-\Delta u_\varepsilon = f + 2\varepsilon > 0$ dans $\Omega$. Soit $x \in \bar{\Omega}$ t.q. $u(x) = \min\{u_\varepsilon(y), y \in \overline{\Omega}\}$. Si $x \in \Omega$, le raisonnement précédent montre que $\Delta u_\varepsilon(x) \ge 0$ en contraction avec $-\Delta u_\varepsilon(x) = f(x) + 2\varepsilon > 0$. On a donc $x \in \partial\Omega$. On en déduit que

$$u_\varepsilon(y) \ge u_\varepsilon(x) \ge -\varepsilon \max_{x\in\partial\Omega} x_1^2 \text{ pour tout } y \in \bar{\Omega}.$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient le résultat désiré, c'est-à-dire $u \ge 0$ dans $\bar{\Omega}$.
La question posée au début de ce paragraphe consiste donc à étendre cette propriété de positivité aux solutions faibles.

2. Mathématicien italien né à Naples en 1922, mort en 1978, spécialiste de calcul des variations et des équations aux dérivées partielles, entre autres.

Nous donnons maintenant deux petits lemmes, dûs à G. Stampacchia.

**Lemme 2.20** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) et $\varphi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que $\varphi'$ est bornée et $\varphi(0) = 0$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_iu$ p.p. (pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}$). (La notation $\varphi(u)$ désigne la fonction $\varphi \circ u$.)*

**Démonstration** Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c^\infty(\Omega)$ t.q. $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$ (quand $n \to +\infty$), c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&u_n \to u \text{ dans } L^2(\Omega),\\&D_iu_n \to D_iu \text{ dans } L^2(\Omega), \text{ pour tout } i \in \{1,\ldots,N\}.\end{aligned}$$

Après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut même supposer qu'il existe $F \in L^2(\Omega)$ et, pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}$, $F_i \in L^2(\Omega)$ t.q.

$$\begin{aligned}&u_n \to u \text{ p.p. et } |u_n| \leq F \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N},\\&D_iu_n \to D_iu \text{ p.p. et } |D_iu_n| \leq F_i \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N},\ i \in \{1,\ldots,N\}.\end{aligned}$$

On a alors $\varphi(u_n) \in C_c^1(\Omega)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \{1,\ldots,N\}$,

$$D_i\varphi(u_n) = \partial_i\varphi(u_n) = \varphi'(u_n)\partial_iu_n.$$

On pose $M = \sup\{|\varphi'(s)|,\ s \in \mathbb{R}\}$, de sorte que $|\varphi(s)| \leq M|s|$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\varphi(u_n) \to \varphi(u) \text{ p.p. et } |\varphi(u_n)| \leq MF \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $MF \in L^2(\Omega)$, le théorème de convergence dominée (dans $L^2(\Omega)$) donne $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ dans $L^2(\Omega)$. On a donc aussi $D_i\varphi(u_n) \to D_i\varphi(u)$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$. On rappelle maintenant que $D_i\varphi(u_n) = \varphi'(u_n)\partial_iu_n$. Comme

$$\begin{aligned}&\varphi'(u_n) \to \varphi'(u) \text{ p.p.},\\&\partial_iu_n \to D_iu \text{ p.p.},\\&|\varphi'(u_n)\partial_iu_n| \leq MF_i \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée donne $\varphi'(u_n)\partial_iu_n \to \varphi'(u)D_iu$ dans $L^2(\Omega)$ et donc aussi dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$. Par unicité de la limite dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ on a donc $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_iu$ p.p. (et pour tout $i$). Finalement, on obtient donc que $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ (comme limite, pour la norme de $H^1(\Omega)$, de fonctions de $H_0^1(\Omega)$) et $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_iu$ p.p., pour tout $i$. ■

**Lemme 2.21** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On définit $u^+$ par $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ Pour $x \in \Omega$. Alors, $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ et $D_iu^+ = 1_{u\geq 0}D_iu = 1_{u>0}D_iu$ p.p. (pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}$). En particulier on a $D_iu = 0$ p.p. (pour tout $i$) sur l'ensemble $\{u = 0\}$.*

**Démonstration** Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $\varphi_n \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned}&\varphi_n(s) = 0 \text{ si } s \leq 0,\\&\varphi_n(s) = \tfrac{n}{2}s^2 \text{ si } 0 < s < \tfrac{1}{n},\\&\varphi_n(s) = s - \tfrac{1}{2n} \text{ si } \tfrac{1}{n} \leq s.\end{aligned}$$

On a donc $\varphi_n(s) \to s^+$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ (quand $n \to +\infty$) et $|\varphi_n'(s)| \leq 1$ pour tout $s$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Le lemme 2.20 donne $\varphi_n(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i(\varphi_n(u)) = \varphi_n'(u)D_iu$ p.p. (et pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}$). D'autre part, on a

$$\varphi_n(u) \to u^+ \text{ p.p.}, \ |\varphi_n(u)| \leq |u| \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le théorème de convergence dominée donne donc $\varphi_n(u) \to u^+$ dans $L^2(\Omega)$ (et donc que $D_i\varphi_n(u) \to D_iu^+$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$). Puis, on remarque que $\varphi_n'(u) \to 1_{\{u>0\}}$ p.p. et donc

$$\varphi_n'(u)D_iu \to 1_{\{u>0\}}D_iu \text{ p.p., } |\varphi_n'(u)D_iu| \le |D_iu| \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N},$$

ce qui (toujours par le théorème de convergence dominée) donne $\varphi_n'(u)D_iu \to 1_{\{u>0\}}D_iu$ dans $L^2(\Omega)$ (et donc dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$). Comme $D_i(\varphi_n(u)) = \varphi_n'(u)D_iu$ on en déduit (par unicité de la limite dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$) que $D_iu^+ = 1_{\{u>0\}}D_iu$ p.p.. La suite $(\varphi_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de $H_0^1(\Omega)$, elle converge dans $H^1(\Omega)$ vers $u^+$. On a bien montré, finalement, que $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ et $D_iu^+ = 1_{\{u>0\}}D_iu$ p.p. (et pour tout $i$).

En considérant la suite $(\psi_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\psi_n$ définie par $\psi_n(s) = \varphi(s+1/n)-1/(2n)$, un raisonnement analogue montre que $D_iu^+ = 1_{\{u\ge0\}}D_iu$ (la différence essentielle entre $\varphi_n$ et $\psi_n$ est que $\varphi_n'(0) = 0$ alors que $\psi_n'(0) = 1$). ■

**Remarque 2.22** Le lemme 2.21 peut se généraliser à toute fonction lipschitzienne s'annulant en 0, on obtient ainsi le résultat suivant : Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \ge 1$) et $\varphi$ une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, s'annulant en 0. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On a alors $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_iu$ p.p. (pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$). Un exemple important consiste à prendre $\varphi(s) = (s-k)^+$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, avec $k$ donné dans $\mathbb{R}_+$. On obtient ainsi, pour $u \in H_0^1(\Omega)$, $(u-k)^+ \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i\varphi(u) = 1_{\{u>k\}}D_iu = 1_{\{u\ge k\}}D_iu$ p.p..

On peut maintenant répondre à la question posée au début de ce paragraphe.

**Théorème 2.23 (Positivité de la solution faible)** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \ge 1$, $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i,j = 1,\dots,N$. On suppose que les $a_{i,j}$ vérifient (2.1). Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $u$ la solution de* (2.4). *On suppose que $f \ge 0$ p.p.. On a alors $u \ge 0$ p.p..*

**Démonstration** On suppose que $f \le 0$ p.p. et on va montrer que $u \le 0$ p.p. (en changeant $f$ en $-f$ et $u$ et $-u$ on obtient le résultat désiré). Comme $u$ est solution de (2.4), on a

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)D_ju(x)D_iv(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

On choisit, dans cette égalité, $v = u^+$ et on obtient

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 1_{\{u\ge0\}}(x)dx \le \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)D_ju(x)D_iu^+(x)dx = \int_\Omega f(x)u^+(x)dx \le 0.$$

On en déduit que $\alpha\|u^+\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \alpha\int_\Omega |\nabla u^+(x)|^2dx \le \int_\Omega f(x)u^+(x)dx \le 0$, et donc $u^+ = 0$ p.p., c'est-à-dire $u \le 0$ p.p.. ■

## 2.5 Condition de Dirichlet non homogène

Nous n'avons considéré jusqu'ici que les problèmes elliptiques (linéaires) avec condition aux limites homogène ( c'est-à-dire solution nulle au bord du domaine). On souhaite maintenant remplacer la condition "$u = 0$" sur le bord de $\Omega$ par "$u = g$" sur le bord de $\Omega$. Ceci va être possible en se ramenant au problème de Dirichlet avec une condition aux limites homogène ( c'est-à-dire en se ramenant aux théorèmes 2.6 et 2.9) à condition que $\Omega$ est assez régulier pour que l'opérateur "trace", noté $\gamma$ et introduit au chapitre 1, soit bien défini et que $g$ soit dans l'image de $\gamma$ ( c'est-à-dire $g = \gamma(G)$ avec $G \in H^1(\Omega)$).

Plus précisèment, soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne. On note $\partial\Omega$ cette frontière. Soient $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j = 1, \ldots, N$, vérifiant l'hypothèse d'ellipticité uniforme (2.1). Soit $f$ une fonction de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ et $g$ une fonction de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}$. On cherche une solution au problème (2.2). Le théorème 2.6 permet de démontrer le théorème suivant, où (2.13) est la formulation faible du problème (2.2).

**Théorème 2.24 (Condition de Dirichlet non homogène (1))** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in \mathrm{Im}(\gamma)$ (où $\gamma$ désigne l'opérateur trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ vu au théorème 1.21). Soient $(a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que* (2.1) *soit vérifiée. Alors il existe une unique solution de* (2.13).

$$\begin{aligned} & u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = g, \\ & \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) \right) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x) v(x) \, \mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.13}$$

La démonstration fait partie de l'exercice 2.19. Elle consiste à chercher $u-G$ comme solution faible d'un problème elliptique posé dans $H_0^1(\Omega)$ avec un second membre dans $L^2(\Omega)$ et $G \in H^1(\Omega)$ t.q. $\gamma(G) = g$. Il est possible aussi de remplacer le second membre de (2.13) par $T(v)$ où $T \in H^{-1}(\Omega)$. On obtient alors le théorème 2.25 qui se démontre aussi en cherchant $u - G$ comme solution faible d'un problème elliptique posé dans $H_0^1(\Omega)$ avec un second membre dans $H^{-1}(\Omega)$ (voir l'exercice 2.19).

**Théorème 2.25 (Condition de Dirichlet non homogène (2))** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne, $T \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in \mathrm{Im}(\gamma)$ (où $\gamma$ désigne l'opérateur trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ vu au théorème 1.21). Soient $(a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que* (2.1) *soit vérifiée. Alors il existe une unique solution de* (2.14).

$$\begin{aligned} & u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = g, \\ & \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) \right) \, \mathrm{d}x = T(v), \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.14}$$

**Remarque 2.26** *Sous les hypothèses du théorème 2.24, on peut aussi montrer, par une méthode voisine de celle donnée dans le théorème 2.23, que, si $f = 0$ et $A \leq g \leq B$ p.p., avec $A, B \in \mathbb{R}$ (p.p. est à prendre ici au sens de la mesure de Lebesgue $N-1$ dimensionnelle sur $\partial\Omega$), on a alors $A \leq u \leq B$ p.p.,o ù $u$ est la solution de (2.13). C'est ce résultat que l'on appelle "principe du maximum".*

La suite de cette section donne quelques compléments sur l'image de l'opérateur trace (noté $\gamma$) défini sur $H^1(\Omega)$ lorque $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière lipschitzienne.

**Définition 2.27 (Espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$)** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne. On note $H^{1/2}(\partial\Omega)$ l'ensemble des traces des fonctions $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire $H^{1/2}(\partial\Omega) = \mathrm{Im}\gamma$ où $\gamma$ est l'opérateur trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ vu au théorème 1.21. On définit sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$ une norme en posant*

$$\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf\{\|\overline{u}\|_{H^1(\Omega)},\ \gamma(\overline{u}) = u\}.$$

*La proposition 2.29 montre que $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est alors un espace de Hilbert et que l'application $u \mapsto u$ est continue de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. (On dit alors que $H^{1/2}(\partial\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^2(\partial\Omega)$.) On note $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ l'espace dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ (c'est donc aussi un espace de Hilbert).*

**Remarque 2.28** Dans le cadre de la définition 2.27, on peut montrer (mais ceci n'est pas fait dans ce cours) la compacité de l'application $u \mapsto u$ de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.

**Proposition 2.29** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne. On note $\gamma$ l'opérateur trace défini sur $H^1(\Omega)$.*

1. *Soit $u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Alors $\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \|\overline{u}\|_{H^1(\Omega)}$ où $\bar{u}$ est l'unique solution faible de $-\Delta\bar{u} = 0$ dans $\Omega$ avec $\gamma(\overline{u}) = u$, c'est-à-dire l'unique solution de*

$$\bar{u} \in H^1(\Omega), \gamma(\bar{u}) = u,$$
$$\int_\Omega \nabla\bar{u}(x)\nabla v(x)\,\mathrm{d}x = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

2. *L'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est un esapce de Hilbert.*
3. *L'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^2(\partial\Omega)$.*

La démonstration de cette proposition fait l'object de l'exercice 2.20.

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne. Avec la définition 2.27 (et la proposition 2.29), on voit que L'opérateur trace défini sur $H^1(\Omega)$ est un opérateur linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$ (et sa norme est égale à 1). Si maintenant $u \in H^1(\Omega)^N$, on peut définir la trace de $u$ encore notée $\gamma(u)$ en prenant la trace de chacune des composantes de $u$. On a donc $\gamma(u) \in H^{1/2}(\partial\Omega)^N \subset L^2(\partial\Omega)^N$. On note $n(x)$ le vecteur normal à $\partial\Omega$, extérieur à $\Omega$. Comme $\Omega$ est à frontière lipschizienne, le vecteur $n(x)$ est défini p.p. en $x \in \partial\Omega$ (p.p. signifie ici, comme d'habitude, p.p. pour la mesure de Lebesgue $(N-1)$-dimensionnelle sur $\partial\Omega$) et la fonction $x \mapsto n(x)$ définit un élément de $L^\infty(\partial\Omega)$. On obtient ainsi $\gamma(u)\cdot n \in L^2(\partial\Omega)$. Cette (classe de) fonction(s) $\gamma(u)\cdot n$ est appelée “trace normale de $u$ sur $\partial\Omega$".

L'exercice 2.21 montre qu'on peut définir $\gamma(u)\cdot n$ comme un élément de $H^{-1/2}(\Omega)$ sous l'hypothèse $u \in L^2(\Omega)^N$ avec $\mathrm{div}(u) \in L^2(\Omega)$ (cette hypothèse est donc plus faible que $u \in H^1(\Omega)^N$). Il est toutefois intéressant de noter que, sous cette hypothèse, $\gamma(u)\cdot n$ n'est pas toujours représenté par une fonction sur $\partial\Omega$ et ceci induit une difficulté lorsque l'on souhaite considérer la restriction de $\gamma(u)\cdot n$ à une partie du bord de $\Omega$, voir à ce propos l'exercice 2.22.

## 2.6 Exercices

**Exercice 2.1 (Régularité en dimension** 1**)** *Corrigé 2.1*

$f \in L^2(]0,1[)$. On rappelle (cf. cours) qu'il existe un et un seul $u$ solution de

$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(]0,1[),\\ &\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt,\ \forall v \in H_0^1(]0,1[). \end{aligned} \tag{2.15}$$

On suppose maintenant que $f \in C([0,1],\mathbb{R})(\subset L^2(]0,1[)$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, pour tout $x \in [0,1]$. Soit $u$ la solution de (2.15). Montrer que, pour tout $\varphi \in C([0,1],\mathbb{R})$, on a

$$\int_0^1 (Du(t) + F(t))\varphi(t)dt = \int_0^1 c\varphi(t)dt$$

avec un certain $c \in \mathbb{R}$ convenablement choisi (et indépendant de $\varphi$).
En déduire que $Du = -F + c$ p.p., puis que $u$ est deux fois continûment dérivable sur $]0,1[$ et $-u''(x) = f(x)$ pour tout $x \in ]0,1[$ (et que $u(0) = u(1) = 0$).

**Exercice 2.2 (Décomposition spectrale en dimension** 1**)** *Corrigé 2.2*

On reprend l'exercice précédent. On pose $E = L^2(]0,1[)$ (muni de la norme $\|\cdot\|_2$). Pour $f \in E$, on rappelle qu'il existe un et un seul $u$ solution de (2.15).
On note $T$ l'application de $E$ dans $E$ qui à $f$ associe $u$ (solution de (2.15), noter que $H^1_0(]0,1[) \subset E$). On rappelle que $T$ est un opérateur linéaire compact autoadjoint de $E$ dans $E$.

1. Soit $\lambda \in \mathcal{VP}(T)$. Montrer qu'il existe $u \in C([0,1],\mathbb{R}) \cap C^2(]0,1[,\mathbb{R})$, $u \neq 0$, tel que $-\lambda u'' = u$, sur $]0,1[$ et $u(0) = u(1) = 0$.
2. Montrer que $\mathcal{VP}(T) = \{\frac{1}{k^2\pi^2},\, k \in \mathbb{N}^\star\}$ et $\sigma(T) = \mathcal{VP}(T) \cup \{0\}$.
3. Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $c_n = 2\int_0^1 f(t)\sin(n\pi t)dt$. Montrer que :
$$\|f - \sum_{p=1}^{n} c_p \sin(p\pi\cdot)\|_2 \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$
(Comparer avec les séries de Fourier. . . , )
4. Soit $\mu \in \mathbb{R}^\star$. En utilisant l'alternative de Fredholm, donner une C.N.S. sur $f \in E$ pour que le problème suivant ait une solution :
$$\begin{aligned}&u \in H^1_0(]0,1[),\\ &\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt + \mu\int_0^1 u(t)v(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt,\ \forall v \in H^1_0(]0,1[).\end{aligned}$$

**Exercice 2.3 (Problème elliptique à coefficients non bornés)**
Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et $p : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable t.q. $\inf\{p(x), x \in \Omega\} = a > 0$. On pose $H^1(p,\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)$ t.q. $D_i u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ et $p\,D_i u \in L^2(\Omega)$ pour tout $i \in \{1,\dots,N\}\}$.
On rappelle que $D_i u$ désigne la dérivée, au sens des dérivées par transposition, de $u$ dans la direction $x_i$, la variable de $\mathbb{R}^N$ étant notée $x = (x_1,\dots,x_N)^t$.

Pour $u \in H^1(p,\Omega)$, on définit $\|u\|$ par $\|u\|^2 = \|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^{N}\|p\,D_i u\|_2^2$, avec $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$.

1. (Etude de l'espace fonctionnel.)
   (a) Montrer que $H^1(p,\Omega) \subset H^1(\Omega)$.
   (b) Montrer que $H^1(p,\Omega)$, muni de la norme $\|\cdot\|$, est un espace de Hilbert. [On pourra remarquer qu'une suite de Cauchy dans $H^1(p,\Omega)$ est aussi de Cauchy dans $H^1(\Omega)$.]

   On pose $H^1_0(p,\Omega) = H^1(p,\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.
2. (Espace fonctionnel, suite.) Montrer que $H^1_0(p,\Omega)$ est un s.e.v. fermé de $H^1(p,\Omega)$.
3. (solution faible.) Soit $h \in L^2(\Omega)$, montrer qu'il existe un et un seul $u$ t.q.
$$u \in H^1_0(p,\Omega), \tag{2.16}$$
$$\int_\Omega p^2(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega h(x)v(x)dx,\ \forall v \in H^1_0(p,\Omega). \tag{2.17}$$
4. (Précisions. . . )
   (a) On suppose ici que $p^2 \in L^1_{loc}(\Omega)$. Montrer que $C_c^\infty(\Omega) \subset H^1_0(p,\Omega)$.

(b) On prend maintenant $N = 1$ et $\Omega = ]0,1[$. Donner un exemple de fonction $p$ (avec $p : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable et t.q. $\inf\{p(x), x \in \Omega\} > 0$) pour lequel $C_c^\infty(\Omega) \cap H_0^1(p,\Omega) = \{0\}$ (cette question est plus difficile).

**Exercice 2.4 (Deux problèmes elliptiques emboités)**
Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et $M$ et $N$ deux matrices de taille $N \times N$ à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, on a

$$M(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2 \text{ et } N(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2.$$

1. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Montrer qu'il existe un unique $u$ t.q.

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega N(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega (M(x) + N(x))\nabla w(x) \cdot \nabla v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{2.18}$$

avec $w$ solution de

$$\begin{cases} w \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega M(x)\nabla w(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.19}$$

pour la question suivante, on note $T(f)$ cette unique solution de (2.18) avec $w$ solution de (2.19).

2. Montrer que $T$ est une application linéaire compacte de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ ( c'est-à-dire que $T$ est linéaire, continue et transforme les parties bornées de $L^2(\Omega)$ en parties relativement compactes de $L^2(\Omega)$).
3. On suppose dans cette question (et seulement dans cette question) qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $M = \lambda N$. Montrer qu'il existe une matrice $A$, ne dépendant que de $M$ et $\lambda$, t.q.

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Donner l'expresson de $A$ en fonction de $M$ et $\lambda$.

4. On suppose dans cette question que $N = 2$ et $1 < p \leq +\infty$. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe un unique $u$ solution de (2.18) avec $w$ solution de (2.19).

Montrer que l'application qui à $f$ associe $u$ (solution de (2.18) avec $w$ solution de (2.19)) est compacte de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < +\infty$

5. On suppose dans cette question que $N = 3$ et $p = 6/5$. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe un unique $u$ solution de (2.18) avec $w$ solution de (2.19).

Montrer que l'application qui à $f$ associe $u$ (solution de (2.18) avec $w$ solution de (2.19)) est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ et compacte de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < 6$.

**Exercice 2.5 (Problème de Neumann)** *Corrigé 2.3*
Soient $\Omega$ un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), à frontière lipschitzienne. On pose $H = \{u \in H^1(\Omega), \int_\Omega u(x)dx = 0\}$. On rappelle que sur un tel ouvert, une fonction $L^1_{loc}$ dont les dérivées (au sens des dérivées par transposition) sont nulles est nécessairement constante ( c'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. cette fonction soit égale à $C$ p.p.).

1. (Inégalité de “Poincaré moyenne”.) Montrer que $H$ est un s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$ et que, sur $H$, la norme $H^1$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_m$ définie par $\|u\|_m = \|(|\nabla u|)\|_{L^2(\Omega)}$.
[On pourra montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'il existe $C$, ne dépendant que $\Omega$, t.q. $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_m$, pour tout $u \in H$.]

2. (Caractérisation de $(H^1(\Omega))'$.) Soit $T \in (H^1(\Omega))'$, Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$ t.q.

$$\langle T, u\rangle_{(H^1(\Omega))',H^1(\Omega)} = a\int_\Omega u(x)dx + \int_\Omega F(x)\cdot\nabla u(x)dx,\ \forall u \in H^1(\Omega). \tag{2.20}$$

[On pourra considérer $T_{|_H}$ et utiliser une injection convenable de $H$ dans $L^2(\Omega)^N$.]

Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$. On cherche $u$ solution de

$$\begin{aligned}&u \in H^1(\Omega),\\ &\int_\Omega A(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx = a\int_\Omega v(x)dx + \int_\Omega F(x)\cdot\nabla v(x)dx,\ \forall v \in H^1(\Omega).\end{aligned} \tag{2.21}$$

3. (Existence et unicité.)
   (a) Si $a \neq 0$, montrer que (2.21) n'a pas de solution.
   (b) Si $a = 0$, montrer que (2.21) a une solution et que cette solution est unique si l'on demande qu'elle appartienne à $H$.
   (c) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, $a_{i,j} \in C^\infty(\bar\Omega, \mathbb{R})$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$, $F \in C^\infty(\bar\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\Omega$ est de classe $C^\infty$ et que la solution (appartenant à $H$) de (2.21) est aussi dans $C^\infty(\bar\Omega, \mathbb{R})$, montrer que $-\mathrm{div}(A\nabla u) = -\mathrm{div}F$, dans $\Omega$, et que $A\nabla u\cdot\mathbf{n} = F\cdot\mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$, où $\mathbf{n}$ est la normale à $\partial\Omega$, extérieure à $\Omega$.
4. (Dépendance par rapport aux paramètres.) On suppose $a = 0$ et on note $u$ la solution (appartenant à $H$) de (2.21). On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in H$ est la solution de (2.21) avec $A_n$ au lieu de $A$ et $F_n$ au lieu de $F$ (et $a = 0$). On suppose que
   - $A_n = (a_{i,j}^{(n)})_{i,j=1,\ldots,N}$ vérifie, pour tout $n$, les mêmes hypothèses que $A$ avec un $\alpha$ indépendant de $n$,
   - $(a_{i,j}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$, pour tout $i, j = 1, \ldots, N$,
   - $a_{i,j}^{(n)} \to a_{i,j}$ *p.p.*, quand $n \to \infty$, pour tout $i, j = 1, \ldots, N$,
   - $F_n \to F$ dans $L^2(\Omega)^N$, quand $n \to \infty$.

   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H$, puis que $u_n \to u$ faiblement dans $H^1(\Omega)$ (quand $n \to \infty$) et enfin que $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$.
5. (Régularité $H^2$ par la technique des réflexions, cette question est indépendante de la précédente.). On suppose que $a = 0$ et qu'il existe $f \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_\Omega F(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)\cdot v(x)dx$, pour tout $v \in H^1(\Omega)$. On note $u$ la solution (appartenant à $H$) de (2.21). On suppose que $N = 2$ et que $\Omega = ]0,1[\times]0,1[$. On pose $\Omega_s = ]-1,1[\times]0,1[$. On définit $A$, $f$ et $u$ sur $\Omega_s$ en posant $a_{i,j}(x_1,x_2) = a_{i,j}(-x_1,x_2)$ si $(x_1,x_2) \in ]-1,0[\times]0,1[$ et $i = j$, $a_{i,j}(x_1,x_2) = -a_{i,j}(-x_1,x_2)$ si $(x_1,x_2) \in ]-1,0[\times]0,1[$ et $i \neq j$, $f(x_1,x_2) = f(-x_1,x_2)$ si $(x_1,x_2) \in ]-1,0[\times]0,1[$ et $u(x_1,x_2) = u(-x_1,x_2)$ si $(x_1,x_2) \in ]-1,0[\times]0,1[$. Montrer que $u$ est solution de (2.21), avec $\Omega_s$ au lieu de $\Omega$.

   En utilisant ainsi plusieurs réflexions, montrer (en se ramenant au théorème de régularité locale vu en cours) que $u \in H^2(\Omega)$ dans le cas $A(x) = Id$ pour tout $x \in \Omega$.

**Exercice 2.6 (Modélisation d'un problème de contact)**

On pose $B = \{x \in \mathbb{R}^2,\, |x| < 2\}$, $I = ]-1,1[$ ($\subset \mathbb{R}$), et $\Omega = B \setminus [-1,1] \times \{0\}$ ($\Omega$ est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$). On note $\partial B = \overline{B} - B$. On rappelle que $|x|$ désigne la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^2$ et $x \cdot y$ le produit scalaire correspondant de $x$ et $y$ ($\in \mathbb{R}^2$).
Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^\infty(I)$ t.q. $g \geq 0$ p.p. (sur $I$). On s'intéresse au problème suivant.

$$-\Delta u(x) = f(x),\ x \in \Omega, \tag{2.22}$$
$$u(x) = 0,\ x \in \partial B, \tag{2.23}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0^+) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,0^-),\ x \in I, \tag{2.24}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0^+) = g(x)(u(x,0^+) - u(x,0^-)),\ x \in I. \tag{2.25}$$

1. (Recherche d'une formulation faible)
   On suppose, dans cette question, que $f$ est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et $g$ une fonction continue sur $I$. On note $\Omega_+ = \Omega \cap \{(x,y),\, y > 0\}$ et $\Omega_- = \Omega \cap \{(x,y),\, y < 0\}$. Soit $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ t.q. $u_{|\Omega_+} \in C^2(\overline{\Omega_+})$ et $u_{|\Omega_-} \in C^2(\overline{\Omega_-})$. Noter alors que toutes les expressions dans (2.22)-(2.25) ont bien un sens. On a, par exemple, $u(x,0^+) = \lim_{y \to 0,\, y>0} u(x,y)$.
   Montrer que $u$ est solution "classique" de (2.22)-(2.25) (c'est-à-dire vérifie (2.22) pour tout $x \in \Omega$, (2.23) pour tout $x \in \partial B$ et (2.24),(2.25) pour tout $x \in I$) si et seulement si $u$ vérifie :

$$\begin{aligned} &u(x) = 0,\ \forall x \in \partial B,\\ &\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx +\\ &\int_I g(x)(u(x,0^+) - u(x,0^-))(v(x,0^+) - v(x,0^-)) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx, \end{aligned} \tag{2.26}$$

   pour tout $v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ t.q. $v_{|\Omega_+} \in C^2(\overline{\Omega_+})$, $v_{|\Omega_-} \in C^2(\overline{\Omega_-})$ et $v(x) = 0$ pour tout $x \in \partial B$. Noter que $dx$ désigne l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue (1 ou 2 dimensionnelle).
2. (Construction de l'espace fonctionnel) On se donne une fonction $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+)$ t.q. $\rho(x) = 0$, si $|x| \geq 1$, et d'intégrale 1 (sur $\mathbb{R}^2$). Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\rho_n$ par $\rho_n(x) = n^2 \rho(nx)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.
   (a) (Trace sur $\partial B$, sans "cartes locales") Soit $u \in H^1(\Omega)$. Pour $n > 5$, on pose $u_n(x) = \int_\Omega u(y) \rho_n(x(1 - \frac{1}{n}) - y) dy$, pour $x \in D$, avec $D = \{x \in B,\, \frac{3}{2} < |x| < 2\}$. Montrer que $u_n \in C^\infty(\overline{D})$, et que $u_n \to u_{|D}$, dans $H^1(D)$, quand $n \to \infty$.
   En déduire qu'il existe un opérateur linéaire continu $\gamma$ de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(]0,2\pi[)$ t.q. $\gamma(u)(\theta) = u(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ p.p. en $\theta \in ]0,2\pi[$ si $u \in H^1(\Omega)$ et $u$ est continue sur $\overline{B} \setminus [-1,1] \times \{0\}$.
   (b) Montrer qu'il existe $\gamma_+$ [resp. $\gamma_-$] linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(I)$ t.q. $\gamma_+(u)(x) = u(x,0+)$ [resp. $\gamma_-(u)(x) = u(x,0-)$] p.p. en $x \in I$ si $u \in H^1(\Omega)$ et $u_{|\Omega_+}$ est continue sur $\overline{\Omega_+}$ [resp. $u_{|\Omega_-}$ est continue sur $\overline{\Omega_-}$].
3. (Coerci(ti)vité)
   On pose $H = \mathrm{Ker}\gamma$ (où $\gamma$ est défini à la question précédente).
   Montrer qu'il existe $C$ t.q. $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}$ pour tout $u \in H$. [On pourra, par exemple, remarquer que $u_{|\Omega_+} \in H^1(\Omega_+)$ et $u_{|\Omega_-} \in H^1(\Omega_-)$]
4. (Existence et unicité de solutions faibles)
   On rappelle que $H = \mathrm{Ker}\gamma$. Montrer qu'il existe un et un seul $u$ solution de (2.27).

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_I g(x)(\gamma_+ u(x) - \gamma_- u(x))(\gamma_+ v(x) - \gamma_- v(x)) dx \\ = \displaystyle\int_\Omega f(x) v(x) dx, \ \forall v \in H. \end{array}\right. \tag{2.27}$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n$ la solution de (2.27) avec $g$ t.q. $g(y) = n$, pour tout $y \in I$. Montrer que $u_n \to u$ (en un sens à préciser), quand $n \to \infty$, où $u$ est la (unique) solution (faible) de $-\Delta u = f$ dans $B$, $u = 0$ sur $\partial B$.

**Exercice 2.7 (De Fourier à Dirichlet. . . )**

Soient $\sigma \geq 0$, $f \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^{N-1})$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{array}{l} -\Delta u(x) + u(x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}^N_+, \\ -\partial_1 u(0,y) + \sigma u(0,y) = g(y), \ y \in \mathbb{R}^{N-1}. \end{array} \tag{2.28}$$

1. Donner une définition de solution "classique" de (2.28) et de solution "faible" de (2.28).
2. Montrer l'existence et l'unicité de la solution faible de (2.28).
3. Montrer que si $g = 0$ presque partout, la solution faible de (2.28) (trouvée à la question précédente) appartient à $H^2(R^N_+)$.
4. Toujours lorsque $g = 0$ presque partout, on note $u_n$ la solution forte associée à $\sigma = n$. Montrer que $u_n$ converge dans $H^1(\mathbb{R}^N_+)$ vers $u$ solution faible de :

$$\begin{array}{l} -\Delta u(x) + u(x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}^N_+, \\ u(0,y) = 0, \ y \in \mathbb{R}^{N-1}. \end{array} \tag{2.29}$$

**Exercice 2.8 (Equation de Schrödinger)**

Soit $N \geq 1$. On note $\Omega$ la boule unité de $\mathbb{R}^N$ (en fait, les résultats de cet exercice restent vrais si $\Omega$ un ouvert borné "assez régulier" de $\mathbb{R}^N$).

Pour $f_1$, $f_2 \in L^2(\Omega)$, on s'intéresse au système :

$$\begin{array}{l} -\Delta u_1 + u_2 = f_1 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta u_2 - u_1 = f_2 \text{ dans } \Omega, \end{array} \tag{2.30}$$

avec diverses conditions aux limites.

1. On considère dans cette première question la condition aux limites :

$$u_1 = 0, \ u_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{2.31}$$

Soit $f_1$, $f_2 \in L^2(\Omega)$, on dit que $(u_1, u_2)$ est solution faible du problème (2.30)-(2.31) si

$$\begin{array}{l} u_1 \in H^1_0(\Omega), \ u_2 \in H^1_0(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u_1(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_\Omega u_2(x)\varphi(x) dx = \int_\Omega f_1(x)\varphi(x) dx, \ \forall \varphi \in H^1_0(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u_2(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx - \int_\Omega u_1(x)\varphi(x) dx = \int_\Omega f_2(x)\varphi(x) dx, \ \forall \varphi \in H^1_0(\Omega). \end{array} \tag{2.32}$$

(a) Montrer que le problème (2.32) admet une et une seule solution. [Utiliser l'espace $V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.]

(b) Montrer que le problème (2.30)-(2.31) admet une et une seule solution au sens suivant : $u_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u_2 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et les équations (2.30) sont satisfaites $p.p.$ sur $\Omega$. [Utiliser, en particulier, la question précédente et un théorème de régularité vu en cours. Ne pas oublier de montrer aussi l'unicité.]

On suppose maintenant que $f_1, f_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Montrer que $u_1,\ u_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$. [Utiliser aussi des théorèmes de régularité vu en cours.]

(c) Pour $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, soit $u = (u_1, u_2)$ la solution de (2.32), on note $u = T(f)$. Montrer que l'opérateur $T : f \mapsto u$ est un opérateur linéaire continu et compact de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dans lui-même.

2. On considère dans cette deuxième question la condition aux limites :

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0,\ \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{2.33}$$

où $n$ désigne le vecteur normal à $\partial\Omega$, extérieure à $\Omega$.

Pour résoudre le problème (2.30)-(2.33), on va introduire un paramètre, $n \in \mathbb{N}^\star$, destiné à tendre vers l'infini.

Soit $f_1,\ f_2 \in L^2(\Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on s'intéresse au système :

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + u_2 + \frac{1}{n} u_1 &= f_1 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta u_2 - u_1 + \frac{1}{n} u_2 &= f_2 \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \tag{2.34}$$

avec la condition aux limites (2.33).

On dit que $(u_1,\ u_2)$ est solution faible du problème (2.34)-(2.33) si

$$\begin{aligned} & u_1 \in H^1(\Omega),\ u_2 \in H^1(\Omega), \\ & \int_\Omega \nabla u_1(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_\Omega (u_2(x) + \frac{1}{n} u_1(x))\varphi(x) dx = \int_\Omega f_1(x)\varphi(x) dx,\ \forall \varphi \in H^1(\Omega), \\ & \int_\Omega \nabla u_2(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_\Omega (\frac{1}{n} u_2(x) - u_1(x))\varphi(x) dx = \int_\Omega f_2(x)\varphi(x) dx,\ \forall \varphi \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Noter aussi que $(u_1,\ u_2)$ est solution faible du problème (2.30)-(2.33) si $(u_1,\ u_2)$ est solution de (2.35) en remplaçant $\frac{1}{n}$ par 0.

Soit $f_1,\ f_2 \in L^2(\Omega)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

Montrer que le problème (2.35) admet une et une seule solution, que l'on note $(u_1^{(n)}, u_2^{(n)})$ dans la suite.

(b) Montrer que :

$$\|u_1^{(n)}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_2^{(n)}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|f_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f_2\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En déduire que les suites $(u_1^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^\star}$, et $(u_2^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^\star}$ sont bornées dans $H^1(\Omega)$.

(c) Montrer qu'il existe une et une seule solution au problème (2.35) obtenu en remplaçant $1/n$ par $0$, c'est à dire une et une solution faible au problème (2.30)-(2.33). [Pour l'existence, utiliser les suites $(u_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$, et $(u_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de la question précédente et faire tendre $n$ vers $+\infty$. Montrer ensuite l'unicité.]

(d) Montrer que le problème (2.30)-(2.33) admet une et une seule solution au sens suivant : $u_1 \in H^2(\Omega)$, $u_2 \in H^2(\Omega)$, les équations (2.30) sont satisfaites $p.p.$ sur $\Omega$ et les équations (2.33) sont satisfaites $p.p.$ (pour la mesure de lebesgue $N-1$-dimensionnelle) sur $\partial\Omega$ en utilisant l'opérateur "trace" (vu en cours) de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ pour donner un sens à $\frac{\partial u_1}{\partial n}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial n}$.

On suppose maintenant que $f_1, f_2 \in C^\infty(\bar\Omega)$. Montrer que $u_1,\ u_2 \in C^\infty(\bar\Omega)$. [Utiliser aussi des théorèmes de régularité vu en cours.]

(e) Pour $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, soit $u = (u_1, u_2)$ la solution faible de (2.30)-(2.33), on note $u = T(f)$. Montrer que l'opérateur $T : f \mapsto u$ est un opérateur linéaire continu et compact de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dans lui-même.

3. De manière similaire, résoudre le problème (2.30) avec la condition aux limites :

$$u_1 = 0,\ \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

**Exercice 2.9 (A la limite de $H^{-1}$)**

**Partie I, décomposition dans $H_0^1(\Omega)$**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

1. Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\varphi' \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi(0) = 0$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On note $\varphi(u)$ la fonction (de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$) $x \mapsto \varphi(u(x))$. Montrer que $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et que $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_i u$ $p.p.$ pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$ (où $\varphi'(u)$ désigne la fonction $x \mapsto \varphi'(u(x))$). [Reprendre la méthode vue en cours.]

   On définit maintenant $\varphi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{l} \varphi(s) = s,\ \text{pour } 0 \leq s \leq 1, \\ \varphi(s) = -\frac{s^2}{2} + 2s - \frac{1}{2},\ \text{pour } 1 < s \leq 2, \\ \varphi(s) = \frac{3}{2},\ \text{pour } 2 < s, \\ \varphi(s) = -\varphi(-s),\ \text{pour } s < 0. \end{array}$$

   Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, On définit $\varphi_k$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\varphi_k(s) = k\varphi(\frac{s}{k})$ pour $s \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\varphi_k(s) \to s$ et $\varphi_k'(s) \to 1$ quand $k \to \infty$ et que $|\varphi_k(s)| \leq |s|$, $\varphi_k'(s) \leq 1$.
3. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $\varphi_k(u) \in H_0^1(\Omega)$, pour tout $k \in N^\star$, et que $\varphi_k(u) \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$, quand $k \to \infty$.
4. En déduire que, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_1 \in L^\infty(\Omega)$ et $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u = u_1 + u_2$ et $\|u_2\|_{H_0^1} \leq \varepsilon$.

**Partie II, Inégalité de Trudinger-Möser**

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. On admet qu'il existe $C > 0$, ne dépendant que de $\Omega$, t.q.

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\sqrt{q}\|u\|_{H_0^1(\Omega)},\ \forall u \in H_0^1(\Omega),\ \forall q \in [1,\infty[.$$

(Noter que cette inégalité a été démontrée en T.D. avec $q$ au lieu de $\sqrt{q}$.)

1. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$. Montrer qu'il existe $\sigma > 0$ et $a > 0$, ne dépendant que de $C$ (donné ci dessus) t.q. $e^{\sigma u^2} \in L^1(\Omega)$ et $\|e^{\sigma u^2}\|_{L^1(\Omega)} \leq a$. [Développer $e^s$ en puissances de $s \ldots$.]
2. En utilisant la partie I (et la question précédente), Montrer que $e^{\sigma u^2} \in L^1(\Omega)$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et tout $\sigma > 0$. En déduire que $e^{\sigma u^2} \in L^p(\Omega)$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, tout $\sigma > 0$ et tout $p \in [1, \infty[$.

**Partie III, sur la résolution du problème de dirichlet**

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in L^1(\Omega)$ t.q. $f\sqrt{|\ln(|f|)|} \in L^1(\Omega)$.

1. (Préliminaire.) Soit $\sigma > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^\star$, ne dépendant que de $\sigma$, t.q.

$$st \leq \alpha e^{\sigma s^2} + \beta t\sqrt{|\ln t|} + \gamma t, \ \forall s, t \in \mathbb{R}_+^\star.$$

[On pourra, par exemple, remarquer que $st \leq \max\{\beta t\sqrt{|\ln t|}, se^{(s^2/\beta^2)}\}$ puis choisir $\beta$ et conclure.]
2. Montrer que $fu \in L^1(\Omega)$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et que l'application $T \ : \ u \mapsto \int_\Omega f(x)u(x)dx$ est un élément de $H^{-1}(\Omega)$.
3. Montrer qu'il existe un et un seul $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$.

**Partie IV, contre-exemple**

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $\theta \in ]0, \frac{1}{2}[$. On suppose que $0 \in \Omega$ et on se donne $\delta \in ]0, \frac{1}{2}[$ t.q. $B_{2\delta} = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| < 2\delta\} \subset \Omega$.

1. Soit $\gamma \in ]0, \frac{1}{2}[$. Montrer qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u(x) = (\ln|x|)^\gamma$ $p.p.$ sur $B_\delta$. [On pose $v(x) = (\ln(|x|)^\gamma$. On rappelle qu'on a vu en T.D. que $v \in H^1(B_{2\delta})$. Il n'est pas demandé de redémontrer ce résultat.]
2. Montrer qu'il existe $f \in L^1(\Omega)$ t.q. $f(\ln|f|)^\theta \in L^1(\Omega)$ et $fu \notin L^1(\Omega)$ pour certains $u \in H_0^1(\Omega)$.
3. Montrer qu'il existe $f \in L^1(\Omega)$ t.q. $f(\ln|f|)^\theta \in L^1(\Omega)$ et t.q. il n'existe pas $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$.

**Exercice 2.10 (Décomposition de Hodge)** *Corrigé 2.4*

Soient $\Omega$ un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ et $f \in (L^2(\Omega))^N$.
Montrer qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ t.q.

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx, \ \ \forall\varphi \in H^1(\Omega).$$

En déduire qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ et $g \in (L^2(\Omega))^N$ t.q. $f = \nabla u + g$, p.p. dans $\Omega$ et $\int_\Omega g(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx = 0$ pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$.
On suppose maintenant que $g \in C^1(\bar{\Omega})$ et que $\Omega = (]0, 1[)^N$. Montrer que $\operatorname{div} g = 0$ sur $\Omega$ et que $g \cdot \mathbf{n} = 0$ p.p. (pour la mesure de Lebesgue $(N-1)-$dimensionnelle) sur $\partial\Omega$, où $\mathbf{n}$ est un vecteur normal à $\partial\Omega$.

**Exercice 2.11 (Problème de Stokes, vitesse)**

Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ et $f = (f_1, \ldots, f_N)^t \in (L^2(\Omega))^N$. On pose $H = \{u \in (H_0^1(\Omega))^N;$ $\operatorname{div} u = 0$ p.p. dans $\Omega\}$. On rappelle que $u$ est solution du problème de Stokes si :

$$u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in H, \ \sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x)dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x)dx, \ \forall v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in H. \quad (2.36)$$

On se propose ici de montrer qu'il existe une et une seule solution de (2.36) par une méthode de pénalisation. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère le problème suivant :

$$\begin{aligned} & u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in (H_0^1(\Omega))^N, \\ & \int_\Omega (\nabla u_i(x) \cdot \nabla v(x) + n(\operatorname{div} u(x)) D_i v(x)) dx = \int_\Omega f_i(x) v(x) dx, \ \forall v = H_0^1(\Omega), \ \forall i \in \{1, \ldots, N\}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

1. Montrer que (2.36) admet au plus une solution.
2. Montrer qu'il existe une et une seule solution à (2.37). [Utiliser le lemme de Lax-Milgram sur $(H_0^1(\Omega))^N$.] On note, dans la suite, $u^{(n)}$ cette solution.
3. Montrer que la suite $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(H_0^1(\Omega))^N$ et que la suite $(\sqrt{n} \operatorname{div} u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$.
4. Montrer que, après extraction éventuelle d'une sous suite, $u^{(n)} \to u$ faiblement dans $(H_0^1(\Omega))^N$, quand $n \to \infty$, où $u$ est solution de (2.36). En déduire (avec la question 1) que (2.36) admet une unique solution, notée $u$, et que $u^{(n)} \to u$ faiblement dans $(H_0^1(\Omega))^N$, quand $n \to \infty$ (sans extraction de sous suite).

**Exercice 2.12 (Conditions aux limites de Vencel)**

**Notations et Rappels du cours**

On note $H_p^1(0, 2\pi) = \{u \in H^1(]0, 2\pi[); u(0) = u(2\pi)\}$ (on rappelle que, si $u \in H^1(]0, 2\pi[)$, $u$ admet toujours un représentant continu sur $[0, 2\pi]$ et on identifie $u$ avec ce représentant continu).

Soit $B = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$. On rappelle qu'il existe une application $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial B)$, linéaire, continue et t.q. $\gamma(u) = u$ p.p. sur $\partial B$ si $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{B}, \mathbb{R})$.

Si $w \in L^2(\partial B)$, on définit $j(w) \in L^2(]0, 2\pi[)$ par $j(w)(\theta) = w(\cos\theta, \sin\theta)$, pour $\theta \in [0, 2\pi[$. L'application $j$ est donc une isométrie de $L^2(\partial B)$ sur $L^2(]0, 2\pi[)$, de sorte que $\overline{g} = j o \gamma$ est linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(]0, 2\pi[)$.

On pose $H = \{u \in H^1(\Omega)\,;\, \overline{g}(u) \in H_p^1(0, 2\pi)\}$. On munit $H$ du produit scalaire $(u/v)_H = (u/v)_{H^1(\Omega)} + (\overline{g}(u)/\overline{g}(v))_{H_p^1(0,2\pi)}$.

**Partie I (Préliminaire d'analyse fontionnelle)**

1. Montrer que $H_p^1(0, 2\pi)$ est une espace de Hilbert.
2. Montrer que $H$ est une espace de Hilbert.

**Partie II (Conditions aux limites de Vencel)**

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$, on définit $r$ et $\theta$ par $r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ t.q. $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Pour $u \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus (0, 0), \mathbb{R})$, on pose $u_r(x, y) = \frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ et $u_\theta(x, y) = -y\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + x\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$. (Dans la suite, on pose $u_{\theta\theta} = (u_\theta)_\theta$, si $u \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R})$.)

Pour $f$ et $g$ données, on s'intéresse au problème :

$$-\Delta u(x, y) + u(x, y) = f(x, y), \ (x, y) \in B, \tag{2.38}$$

$$u_r(x, y) - u_{\theta\theta}(x, y) + u(x, y) = g(x, y), \ (x, y) \in \partial B. \tag{2.39}$$

Soient $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$, on appelle "solution faible" de (2.38)-(2.39) une solution du problème suivant :

$$u \in H, \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}\int_B (\sum_i D_i u(z) D_i v(z) + u(z)v(z))dz + \int_0^{2\pi} (D\overline{g}(u)(\theta)D\overline{g}(v)(\theta) + \overline{g}(u)(\theta)\overline{g}(v)(\theta))d\theta \\ = \int_B f(z)v(z)dz + \int_0^{2\pi} j(g)(\theta)j(\gamma(v))(\theta)d\theta,\ \forall v \in H.\end{aligned} \tag{2.41}$$

1. Soient $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$. Montrer qu'il existe une et une seule solution de (2.40)-(2.41).
2. (Question plus difficile) On retire, dans cette question, "uv" dans la 1ère intégrale de (2.41). Soient $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$. Montrer qu'il existe encore une et une seule solution de (2.40)-(2.41).
3. Soient $f \in C(\overline{B}, \mathbb{R})$ et $g \in C(\partial B, \mathbb{R})$. Soit $u \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R})$. Montrer que $u$ est solution au sens "classique" de (2.38)-(2.39) (c.a.d. vérifie (2.38) pour tout $(x, y) \in \overline{B}$ et (2.39) pour tout $(x, y) \in \partial B$) si et seulement si $u$ est solution faible de (2.38)-(2.39).
4. Pour $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$, on note $T(f, g) = (u, \gamma(u)) \in L^2(B) \times L^2(\partial B)$, où est l'unique solution faible de (2.38)-(2.39). Montrer que $T$ est un opérateur linéaire compact autoadjoint de $L^2(B) \times L^2(\partial B)$ dans lui-même.

**Exercice 2.13 (problème de Stokes, vitesse et pression)** *Corrigé 2.5*

Soient $\Omega$ un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne et $f = (f_1, \ldots, f_N)^t \in (L^2(\Omega))^N$. On s'intéresse ici au problème de Stokes, c'est-à-dire à trouver $u = (u_1, \ldots, u_N)^t$ et $p$ solution de

$$\begin{aligned}&-\Delta u + \nabla p = f \text{ dans } \Omega,\\ &\operatorname{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega,\\ &u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Noter que la première équation de (2.42) est vectorielle.
On pose $H = \{u \in (H_0^1(\Omega))^N; \operatorname{div} u = 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$. On appelle solution faible de (2.42) un couple $(u, p)$ solution de

$$\begin{aligned}&u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in H,\ p \in L^2(\Omega),\\ &\sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x)dx - \int p(x)\operatorname{div} v(x)dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x)dx\\ &\qquad\qquad \text{pour tout } v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in (H_0^1(\Omega))^N.\end{aligned} \tag{2.43}$$

On pourra remarquer qu'une solution classique $(u, p)$ de (2.42) est solution de (2.43).

**Partie I, existence et unicité de $u$**

Montrer que, si $(u, p)$ est une solution classique de (2.42), $u$ est alors solution de

$$u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in H,\ \sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x)dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x)dx,\ \forall v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in H. \tag{2.44}$$

On montre dans cette pemière partie que (2.44) a une et une seule solution et que si $(u, p)$ est solution de (2.43), $u$ est alors l'unique solution de (2.44).

1. Montrer que $H$ est un s.e.v. fermé de $(H_0^1(\Omega))^N$.
2. Montrer que (2.44) admet une et une seule solution. [Utiliser le lemme de Lax-Milgram.]
3. Soit $(u, p)$ une solution de (2.43). Montrer que $u$ est l'unique solution de (2.44).

Soit $u$ la solution de (2.44). La suite de l'exercice consiste à trouver $p$ pour que $(u, p)$ soit solution de (2.43).

**Partie II, préliminaire d'analyse fonctionnelle**

Soit $E$ et $F$ deux espaces de Hilbert (réels). On note $(\cdot/\cdot)_E$ (resp. $(\cdot/\cdot)_F$) le produit scalaire dans $E$ (resp. $F$). Soit $A$ un opérateur linéaire continu de $E$ dans $F$. On note $A^\star$ l'opérateur adjoint de $A$. L'opérateur $A^\star$ est un opérateur linéaire continu de $F$ dans $E$. Pour tout $g \in F$, $A^\star g$ est l'unique élément de $E$ défini par

$$(A^\star g/u)_E = (g/Au)_F \text{ pour tout } u \in E.$$

(Noter que l'existence et l'unicité de $A^\star g$ est donnée par le théorème de représentation de Riesz.)

1. Montrer que $\mathrm{Ker}A = (\mathrm{Im}A^\star)^\perp$.
   (On rappelle que si $G \subset E$, $G^\perp = \{u \in E, (u/v)_E = 0 \text{ pour tout } v \in G\}$.)
2. Montrer que $(\mathrm{Ker}A)^\perp = \overline{\mathrm{Im}A^\star}$.

**Partie III, Existence et unicité partielle de $p$**

Dans cette partie, on va utiliser le lemme suivant (souvent attribué à J. Nečas, 1965) que nous admettons.

**Lemme 2.30** *Soient $\Omega$ un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne et $q \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_\Omega q(x)dx = 0$. Il existe alors $v \in (H_0^1(\Omega))^N$ t.q. $\mathrm{div}(v) = q$ p.p. dans $\Omega$ et*

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)^N} \leq C\|q\|_{L^2(\Omega)},$$

*où $C$ ne dépend que de $\Omega$.*

On prend ici $E = H_0^1(\Omega)^N$ et $F = L^2(\Omega)$. Pour $u \in E$ on pose $Au = \mathrm{div}\, u$, de sorte que $A$ est un opérateur linéaire continu de $E$ dans $F$.

1. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $F$ et $v \in E$ t.q. $A^\star p_n \to v$ dans $E$ quand $n \to +\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $q_n = p_n - a_n$, où $a_n$ est la moyenne de $p_n$ dans $\Omega$.
   (a) Montrer que $A^\star p_n = A^\star q_n$.
   (b) Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $F$. [Utiliser le lemme 2.30.]
   (c) Montrer que $v \in \mathrm{Im}A^\star$.
2. Montrer que $(\mathrm{Ker}A)^\perp = \mathrm{Im}A^\star$ et que $\mathrm{Ker}A = H$.
3. On rappelle que le produit scalaire dans $E$ est défini par

$$(u/v)_E = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx.$$

   On définit $T_f \in E$ par $(T_f/v)_E = \int_\Omega f(x) \cdot v(x)dx$ pour tout $v \in E$. Soit $u$ la solution de (2.44).
   (a) Montrer que $u - T_f \in H^\perp$. En déduire que $u - T_f \in \mathrm{Im}A^\star$.
   (b) Montrer qu'il existe $p \in F$ t.q. $(u, p)$ est solution de (2.43).
4. Soit $(u_1, p_1)$ et $(u_2, p_2)$ deux solutions de (2.43). Montrer que $u_1 = u_2 = u$ (où $u$ est l'unique solution de (2.44)) et qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $p_1 - p_2 = a$ p.p..

**Exercice 2.14 (Continuité séquentielle de $L^2$-faible dans $H_0^1$)** *Corrigé 2.6*

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N > 1)$. Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.

Pour $f \in L^2(\Omega)$, on sait qu'il existe une unique solution au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.45}$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$. On note $u$ la solution de (2.45) et, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n$ la solution de (2.45) avec $f_n$ au lieu de $f$. On suppose que $f_n \to f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.
2. Montrer que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et que $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ (quand $n \to +\infty$).
3. Montrer que, quand $n \to +\infty$,

$$\int_\Omega A(x)\nabla u_n(x) \cdot \nabla u_n(x) dx \to \int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx.$$

   [Utiliser le fait que $\int_\Omega A(x)\nabla u_n(x) \cdot \nabla u_n(x) dx = \int_\Omega f_n(x)u_n(x)dx$ et passer à la limite sur le terme de droite de cette égalité.]
4. Montrer que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$. [On pourra considérer $\int_\Omega A(x)\nabla(u_n - u)(x) \cdot \nabla(u_n - u)(x)dx$.]

**Exercice 2.15 (Exercice liminaire à l'exercice 2.16)** *Corrigé 2.7*

Soit $\varphi$ une fonction décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $\beta > 1$ t.q.

$$0 \leq x < y \Rightarrow \varphi(y) \leq C\frac{\varphi(x)^\beta}{y - x}.$$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\varphi(a) = 0$. [On pourra montrer l'existence d'une suite strictement croissante $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ t.q. $\varphi(a_k) \leq \frac{1}{2^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ et $\lim_{k\to\infty} a_k < +\infty$. Pour cela, on pourra montrer qu'il existe $a_0$ t.q. $\varphi(a_0) \leq 1$ puis, par récurrence, définir $a_{k+1}$ par $\frac{C}{a_{k+1}-a_k}\frac{1}{2^{k\beta}} = \frac{1}{2^{k+1}}$.]

**Exercice 2.16 (Solutions bornées d'un problème elliptique)** *Corrigé 2.8*

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N > 1)$. Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.

Si $B$ est une partie borélienne de $\mathbb{R}^N$, on note mes$(B)$ le mesure de Lebesgue $N$-dimensionnelle de $A$ ( c'est-à-dire la "surface" si $N = 2$ et le volume si $N = 3$).

1. Soit $F \in L^2(\Omega)^N$. Montrer qu'il existe un et un seul $u$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega F(x) \cdot \nabla v(x)dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.46}$$

   Soit $p > N$. On suppose pour la suite de l'exercice que $F \in L^p(\Omega)^N$ (On rappelle que $L^p(\Omega)^N \subset L^2(\Omega)^N$ car $p > 2$) et on note $u$ l'unique solution de (2.46).

Pour $k \in \mathbb{R}_+$, on définit la fonction $S_k$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} S_k(s) = 0 \text{ si } -k \leq s \leq k, \\ S_k(s) = s - k \text{ si } s > k, \\ S_k(s) = s + k \text{ si } s < -k. \end{cases}$$

On rappelle que si $v \in H_0^1(\Omega)$ on a $S_k(v) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla S_k(v) = 1_{A_k} \nabla v$ p.p., avec $A_k = \{|v| > k\}$.

2. Soit $k \in \mathbb{R}_+$, Montrer que

$$\alpha \| |\nabla S_k(u)| \|_{L^2(\Omega)} = \alpha \left( \int_{A_k} \nabla u(x).\nabla u(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \text{mes}(A_k)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \| |F| \|_{L^p(\Omega)}.$$

[On pourra prendre $v = S_k(u)$ dans (2.46) et utiliser l'inégalité de Hölder.]

3. On pose $1^\star = \frac{N}{N-1}$. On rappelle qu'il existe $C_1$ ne dépendant que de $N$ t.q.

$$\|w\|_{L^{1^\star}(\Omega)} \leq C_1 \|w\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} = C_1 \| |\nabla w| \|_{L^1(\Omega)} \text{ pour tout } w \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

Soit $k, h \in \mathbb{R}_+$ t.q. $k < h$. Montrer que

$$(h-k)\text{mes}(A_h)^{\frac{N-1}{N}} \leq (\int_{A_h} |S_k(u(x)|^{1^\star} dx)^{\frac{1}{1^\star}} \leq C_1 \| |\nabla S_k(u)| \|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 \| |\nabla S_k(u)| \|_{L^2(\Omega)} \text{mes}(A_k)^{\frac{1}{2}}.$$

En déduire qu'il existe $C_2$ ne dépendant que de $C_1$, $\alpha$, $F$ et $p$ t.q.

$$(h-k)\text{mes}(A_h)^{\frac{N-1}{N}} \leq C_2 \text{mes}(A_k)^{1-\frac{1}{p}}.$$

4. Montrer que $u \in L^\infty(\Omega)$ ( c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\text{mes}(A_a) = 0$). [On pourra poser $\varphi(k) = \text{mes}(A_k)^{\frac{N-1}{N}}$ et utiliser l'exercice 2.15.]
5. Montrer qu'il existe $C_3$ ne dépendant que de $\Omega$, $\alpha$ et $p$ t.q.

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_3 \| |F| \|_{L^p(\Omega)}.$$

**Exercice 2.17 (Solutions bornées d'un problème elliptique, suite)**

On reprend les premières hypothèses de l'exercice 2.16.

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N > 1$). Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.

1. Soit $f \in L^p(\Omega)$ avec $p > 1$ si $N = 2$ et $p = 2N/(N+2)$ si $N \geq 3$. Montrer qu'il existe un et un seul $u$ solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.47}$$

2. Soit $p > N/2$ et $f \in L^p(\Omega)$. Montrer qu'il existe un unique $u$ solution de (2.47). [Se ramener à la question précédente.]

Montrer que $u \in L^\infty(\Omega)$ et qu'il existe $C$ ne dépendant que de $\Omega$, $\alpha$ et $p$ t.q.

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

[Se ramener à l'exercice 2.16.]

**Exercice 2.18 (Diffusion évanescente et convection)** *Corrigé 2.9*

**Partie I** Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ et $w = (w_1, \ldots, w_N)^t \in (L^\infty(\Omega))^N$ t.q. $\operatorname{div}(w) = 0$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ (On rappelle que $\operatorname{div}(w) = \sum_{i=1}^N D_i w_i$). Soit $u \in H_0^1(\Omega)$.

1. Montrer que $u^2 \in W_0^{1,1}(\Omega)$ et que $D_i(u^2) = 2uD_iu$, pour tout $i \in 1, \ldots, N$. [Utiliser la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.]
2. Montrer que $\displaystyle\int_\Omega w(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx = 0$, pour tout $\varphi \in W_0^{1,1}(\Omega)$. [Utiliser la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W_0^{1,1}(\Omega)$.]
3. Montrer que $\displaystyle\int_\Omega w(x) \cdot \nabla(u^2)(x)dx = 2\int_\Omega u(x)w(x) \cdot \nabla u(x)dx = 0$ (on rappelle que $w \cdot \nabla(u^2) = \sum_{i=1}^N w_i D_i(u^2)$).

**Partie II** Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, à frontière lipschiztienne (cette hypothèse donne l'existence de l'opérateur "trace", noté $\gamma$, linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et t.q. $\gamma(u) = u$ sur $\partial\Omega$ si $u \in C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ et $\operatorname{Ker}(\gamma) = H_0^1(\Omega)$). Soient $a \in \mathbb{R}_+^\star$ et $w \in (L^\infty(\Omega))^N$ t.q. $\operatorname{div}(w) = 0$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$. Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in \operatorname{Im} \gamma$. On cherche $u$ solution du problème suivant :

$$
\begin{aligned}
&u \in H^1(\Omega),\ \gamma(u) = g \text{ (dans } L^2(\partial\Omega)),\\
&\int_\Omega a\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_\Omega u(x)w(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx,\ \forall v \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

1. Soit $G \in H^1(\Omega)$ t.q. $\gamma(G) = g$ (dans $L^2(\partial\Omega)$). Montrer que $u$ est solution de (2.48) si et seulement si $u = G + \overline{u}$ avec $\overline{u}$ solution de (2.49).

$$
\begin{aligned}
&\overline{u} \in H_0^1(\Omega),\\
&\int_\Omega a\nabla\overline{u}(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_\Omega \overline{u}(x)w(x) \cdot \nabla v(x)dx =\\
&\int_\Omega f(x)v(x)dx - \int_\Omega a\nabla G(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_\Omega G(x)w(x) \cdot \nabla v(x)dx,\ \forall v \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

2. Montrer que (2.48) admet une et une seule solution.

   On note $u$ cette solution dans la suite de cette partie.
3. On suppose, dans cette question, que $g = 0$ (de sorte que $u \in H_0^1(\Omega)$). Montrer que $a\|u\|_{H_0^1}^2 \leq \displaystyle\int_\Omega f(x)u(x)dx$.
4. Soit $b \in \mathbb{R}$. On suppose, dans cette question, que $f \leq 0$ p.p. dans $\Omega$ et que $g \leq b$ p.p. sur $\partial\Omega$ (pour la mesure $N-1$-dimensionnelle sur $\partial\Omega$). Montrer que $u \leq b$ p.p. dans $\Omega$. [On pourra admettre que $(u-b)^+ \in H_0^1(\Omega)$ et que $\nabla(u-b)^+ = 1_{u>b}\nabla u$ p.p. (ce résultat est semblable à celui du lemme 2.21), utiliser (2.48) et la partie I.]

**Partie III** Dans cette partie on prend $N = 2$, $\Omega = ]0,1[^2$, $w = (-1, 0)$ et $g = 0$. On suppose aussi que $f \in L^\infty(\Omega)$ et que $f \geq 0$ p.p. sur $\Omega$. On note $u_n$ la solution de (2.48) pour $a = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}^\star$) et on s'intéresse à la limite de $u_n$ quand $n \to \infty$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $u_n \geq 0$ p.p..[Utiliser la Partie II, question 4.]
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe $C_1$, ne dépendant que de $f$, t.q. $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1$. [On pourra, par exemple, chercher de quel problème de type (2.48) est solution la fonction $u_n + \beta\psi$, avec $\psi(x) = x_1$ et $\beta$ convenablement choisi, et utiliser la Partie II, question 4.]
3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe $C_2$, ne dépendant que de $f$, t.q. $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2\sqrt{n}$.
4. En utilisant la remarque 2.14, montrer que $u_n \in H^2(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Si $u_n \in C^1(\overline{\Omega})$, déduire de la question 1 de la partie III que $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}(0,x_2) \geq 0$ et $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}(1,x_2) \leq 0$ pour tout $x_2 \in ]0,1[$ (de même, $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_2}(x_1,0) \geq 0$ et $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_2}(x_1,1) \leq 0$ pour tout $x_1 \in ]0,1[$). On admettra, dans la suite, que ce résultat est encore vrai, avec seulement $u_n \in H^2(\Omega)$, au sens $\gamma(D_1 u_n)(0,x_2) \geq 0$ et $\gamma(D_1 u_n)(1,x_2) \leq 0$ p.p. en $x_2 \in ]0,1[$ (de même $\gamma(D_2 u_n)(x_1,0) \geq 0$ et $\gamma(D_2 u_n)(x_1,1) \leq 0$ p.p. en $x_1 \in ]0,1[$).
6. En utilisant la question 2 de la partie III, montrer qu'on peut supposer (à une sous suite près) que $u_n \to u$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(\Omega)$ quand $n \to +\infty$, c'est à dire :
$$\int_\Omega u_n(x)\varphi(x)dx \to \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \text{ pour tout } \varphi \in L^1(\Omega).$$
Montrer que $u \geq 0$ p.p..

   On cherche, dans la suite, l'équation et les conditions aux limites satisfaites par $u$.
7. Montrer que $D_1 u = f$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$, montrer que
$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_\Omega \nabla u_n(x)\nabla\varphi(x)dx + \frac{1}{n}\int_0^1 \gamma(D_1u_n)(0,x_2)\varphi(0,x_2)dx_2 - \frac{1}{n}\int_0^1 \gamma(D_1u_n)(1,x_2)\varphi(1,x_2)dx_2 \\ +\frac{1}{n}\int_0^1 \gamma(D_2u_n)(x_1,0)\varphi(x_1,0)dx_1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \gamma(D_2u_n)(x_1,1)\varphi(x_1,1)dx_1 \\ -\int_\Omega u_n(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$
9. Soit $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ t.q. $\varphi \geq 0$ sur $\partial\Omega$. Montrer que
$$-\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)dx \leq \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx. \tag{2.50}$$
10. On suppose, dans cette question, que $u \in C^1(\overline{\Omega})$ et que $f \in C(\overline{\Omega})$. Montrer que $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = f$ partout dans $\Omega$ et que $u(0,x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in ]0,1[$.

    La fonction $u$ est-elle alors entièrement déterminée par $f$ ?
11. On remplaçe $w = (-1,0)$ par $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\ldots$. De quel problème, dépendant de $w$, $u$ est elle solution ? [distinguer les signes des 2 composantes de $w$.]

**Exercice 2.19 (Condition de Dirichlet non homogène)** Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière lipschitzienne et $g \in \text{Im}(\gamma)$ (où $\gamma$ désigne l'opérateur trace vu au théorème 1.21). Soient $(a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que (2.1) soit vérifiée.

1. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Montrer que (2.13) admet une unique solution.
2. Soit $T \in H^{-1}(\Omega)$. Montrer que (2.14) admet une unique solution.
3. On suppose dans cette question que $N = 2$ et $1 < p \leq +\infty$. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe une unique solution au problème (2.13).
4. On suppose dans cette question que $N \geq 3$ et $p = 2N/(N+2)$. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe une unique solution au problème (2.13).

**Exercice 2.20 (Espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$)** Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ à frontière lipschitzienne. On note $\gamma$ l'opérateur trace défini sur $H^1(\Omega)$.
On rappelle que $H^{1/2}(\partial\Omega) = \mathrm{Im}\gamma$ et que $\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf\{\|\overline{u}\|_{H^1(\Omega)},\ \gamma(\overline{u}) = u\}$.

1. Soit $u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Montrer que $\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \|\overline{u}\|_{H^1(\Omega)}$ où $\bar{u}$ est l'unique solution faible de $-\Delta\bar{u} = 0$ dans $\Omega$ avec $\gamma(\overline{u}) = u$, c'est-à-dire l'unique solution de

$$\bar{u} \in H^1(\Omega), \gamma(\bar{u}) = u,$$
$$\int_\Omega \nabla\bar{u}(x)\nabla v(x)\,\mathrm{d}x = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

2. Montrer que l'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est un espace de Hilbert.
3. Montrer que l'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^2(\partial\Omega)$.

**Exercice 2.21 (trace normale d'un élément de $H_{\mathrm{div}}$)** Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière lipschitzienne. On pose $H_{\mathrm{div}}(\Omega) = \{v = (v_1, v_2) \in L^2(\Omega)^2$ t.q. $\mathrm{div}(v) \in L^2(\Omega)\}$ et, pour $v \in H_{\mathrm{div}}(\Omega)$,

$$\|v\|_{H_{\mathrm{div}}(\Omega)} = (\||v|\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\mathrm{div}(v)\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}. \tag{2.51}$$

1. Montrer que $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$, muni de la norme définie par (2.51), est un espace de Hilbert.
2. Soit $v \in H_{\mathrm{div}}(\Omega)$.
   (a) Montrer que
$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot v\,dx + \int_\Omega \varphi\,\mathrm{div}(v)\,dx = 0,$$
   Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, puis pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.
   (b) Soit $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ t.q. $\gamma(u_1) = \gamma(u_2)$ (où $\gamma$ est l'opérateur trace défini sur $H^1(\Omega)$). Montrer que
$$\int_\Omega \nabla u_1 \cdot v\,dx + \int_\Omega u_1\,\mathrm{div}(v)\,dx = \int_\Omega \nabla u_2 \cdot v\,dx + \int_\Omega u_2\,\mathrm{div}(v)\,dx.$$

   On rappelle que $H^{1/2}(\partial\Omega) = \mathrm{Im}\gamma$ et que $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est un espace de Hilbert avec la norme définie dans l'exercice 2.20. On note $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ l'espace dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ ( c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires continues de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dans $\mathbb{R}$).
3. Soit $v \in H_{\mathrm{div}}(\Omega)$. Montrer que l'on peut définir un élément de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, noté $T(v)$, en posant, pour $u \in H^{1/2}(\Omega)$,
$$\langle T(v), u\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} = \int_\Omega \nabla\overline{u} \cdot v dx + \int_\Omega \overline{u}\,\mathrm{div}(v) dx, \tag{2.52}$$
   avec $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ t.q. $\gamma(\overline{u}) = u$. (En particulier, le terme de droite de (2.52) est bien défini et ne dépend pas de $\overline{u}$ si $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ et $\gamma(\overline{u}) = u$.)
   On a ainsi défini une application $T$ de $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.
4. Montrer que l'application $T$ est linéaire continue de $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.
5. On suppose dans cette question que $v \in H^1(\Omega)^2$ (on a donc aussi $v \in H_{\mathrm{div}}(\Omega)$). On note $\gamma(v)$ la fonction obtenue sur $\partial\Omega$ en prenant la trace de chacune des composantes de $v$. (On a donc $\gamma(v) \in H^{1/2}(\partial\Omega)^2 \subset L^2(\partial\Omega)^2$.) On note $n(x)$ le vecteur normal à $\partial\Omega$, extérieur à $\Omega$. Comme $\Omega$ est à frontière lipschizienne, le vecteur $n(x)$ est défini p.p. en $x \in \partial\Omega$ (p.p. signifie ici, comme d'habitude, p.p. pour la mesure de Lebesgue

1-dimensionnelle sur $\partial\Omega$) et la fonction $x \mapsto n(x)$ définit un élément de $L^\infty(\partial\Omega)$. On obtient ainsi $\gamma(v)\cdot n \in L^2(\partial\Omega)$. Cette (classe de) fonction(s) $\gamma(u)\cdot n$ est appelée “trace normale de $u$ sur $\partial\Omega$". Montrer que

$$\langle T(v), u\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega),H^{1/2}(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} u\,\gamma(v)\cdot n\,d\lambda(x). \tag{2.53}$$

N.B. Cette question explique pourquoi l'application $T(v)$ est souvent notée $v\cdot n$ même si $v \in H_{\mathrm{div}(\Omega)}$ (et non à $H^1(\Omega)^2$). On peut aussi montrer que $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$. Ceci permet de montrer que, lorsque $v \in H^1(\Omega)$, $\gamma(v)\cdot n$ est l'unique élément de $L^2(\partial\Omega)$ vérifiant (2.53).

**Exercice 2.22 (Pas de trace normale sur une partie du bord)** On reprend ici les notations de l'exercice 2.21. Soit maintenant $I$ une partie du bord de $\Omega$. Il semble naturel de poser

$$H^{1/2}(I) = \{u \text{ t.q. } u = \gamma(\overline{u}) \text{ p.p. sur } I \text{ avec } \overline{u} \in H^1(\Omega)\}. \tag{2.54}$$

(où p.p. signifie p.p. pour $\lambda$.) La norme sur $H^{1/2}(I)$ est alors

$$\|u\|_{H^{1/2}(I)} = \inf\{\|\overline{u}\|_{H^1(\Omega)},\ \gamma(\overline{u}) = u \text{ p.p. sur } I\}. \tag{2.55}$$

$H^{1/2}(I)$ est alors un espace de Hilbert et on note $H^{-1/2}(I)$ son dual. L'objectif de cet exercice est de remarquer qu'en général il n'existe pas d'opérateur $T$ linéaire continu de $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(I)$ t.q.

$$\langle T(v), u\rangle_{H^{-1/2}(I),H^{1/2}(I)} = \int_I u\,v\cdot n d\lambda(x),$$

pour tout $u \in H^{1/2}(I)$ et $v \in C^1(\bar\Omega)$. Autrement dit on ne peut pas prolonger continûment l'opérateur naturel $v \mapsto v\cdot n$ (bien défini si $v$ est régulière) à l'espace $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$. Nous donnons dans cet exercice un exemple pour lequel ce prolongement est effectivement impossible.

Noter aussi que la définition de $H^{1/2}(I)$ (donnée par (2.54)) et de sa norme (donnée par (2.55)) dépend de $\Omega$ (et pas seulement de $I$). Cette dépendance est sans importance. Plus précisément, soit $\Omega_1$ et $\Omega_2$ deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$ à frontières lipschitziennes. On suppose que $I$ est une partie de $\partial\Omega_1$ et une partie de $\partial\Omega_2$. Par un argument de cartes locales, permettant de ramener l'étude des traces de $H^1(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, à celles de $H^1(\mathbb{R}^2_+)$, on peut montrer que l'espace $H^{1/2}(I)$ ne dépend pas du fait que l'on considère $I$ comme une partie de $\partial\Omega_1$ ou une partie de $\partial\Omega_2$. De plus, les deux normes obtenues alors pour l'espace $H^{1/2}(I)$ sont équivalentes.

Pour construire notre exemple, on prend $\Omega = ]0, a[^2$, avec $a > 0$ t.q. $a\sqrt{2} < 1$, et $I = ]0, a[\times\{0\}$. L'objectif est de montrer qu'il n'existe pas d'opérateur $T$ linéaire continu de $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(I)$ t.q.

$$\langle T(v), u\rangle_{H^{-1/2}(I),H^{1/2}(I)} = \int_I u\,v\cdot n d\lambda(x), \text{ pour tout } u \in H^{1/2}(I) \text{ et } v \in C^1(\bar\Omega). \tag{2.56}$$

Pour cela, on va raisonner par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $T$ linéaire continu de $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(I)$ vérifiant (2.56).

Soit $0 < \beta < 1/2$. Pour $x \in \Omega$, on pose ($|\cdot|$ désignant la norme euclidienne classique de $\mathbb{R}^2$)

$$u(x) = (-\ln(|x|))^\beta.$$

On a $u \in C^\infty(\Omega)$ et on sait que $u \in H^1(\Omega)$ (exercice 1.5). La trace de $u$ sur $I$ est égale (p.p. pour $\lambda$) à la trace classique. On note $x_1, x_2$ les composantes de $x \in \mathbb{R}^2$. On prend maintenant $v = (v_1, v_2)$ avec

$$v_1 = -\frac{\partial u}{\partial x_2},\ \ v_2 = \frac{\partial u}{\partial x_1}.$$

1. Montrer que $\mathrm{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0$ et donc que $v \in H_{\mathrm{div}}(\Omega)$.
   On définit $v^{(n)}$, pour $n$ t.q. $(a + 1/n)\sqrt{2} < 1$, par
$$v^{(n)}(x_1, x_2) = v(x_1 + \frac{1}{n}, x_2).$$
2. Montrer que $v^{(n)} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ et $v^{(n)} \to v$ dans $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ quand $n \to +\infty$.
   On note $\chi$ la fonction indentiquement égale à 1 sur $\partial\Omega$ (cette fonction est bien dans $H^{1/2}(I)$ car c'est la trace de la fonction qui vaut 1 sur tout $\Omega$).
3. Comme $v^{(n)} \cdot n = -v_2^{(n)}$ sur $I$, montrer que
$$\langle T(v^{(n)}), \chi\rangle_{H^{-1/2}(I),H^{1/2}(I)} = \int_I \chi\, v^{(n)} \cdot n\, d\lambda(x) = \int_0^a \beta \frac{(-\ln(x_1 + \frac{1}{n}))^{\beta-1}}{x_1 + \frac{1}{n}}\, dx_1.$$
   Montrer que le terme de gauche de cette égalité tend vers $\langle T(v), \chi\rangle_{H^{-1/2}(I),H^{1/2}(I)}$ (utiliser la continuité de $T$) et que le terme de droite tend vers $+\infty$ (car $\beta > 0$). En déduire la contradiction souhaitée.
4. Avec $v \cdot n$ pris au sens de l'exercice 2.21, montrer que
$$\langle v \cdot n, \chi\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega),H^{1/2}(\partial\Omega)} = 0,$$
   et que $\lim_{n\to+\infty} \int_{\partial\Omega} \chi\, v^{(n)} \cdot n\, d\lambda(x) = 0$.

## 2.7 Corrigés d'exercices

**Corrigé 2.1 (Régularité en dimension** $1$**)**

$f \in L^2(]0,1[)$. On rappelle (cf. cours) qu'il existe un et un seul $u$ solution de
$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(]0,1[),\\ &\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt,\ \forall v \in H_0^1(]0,1[). \end{aligned} \tag{2.57}$$
On suppose maintenant que $f \in C([0,1], \mathbb{R})(\subset L^2(]0,1[)$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, pour tout $x \in [0,1]$. Soit $u$ la solution de (2.57). Montrer que, pour tout $\varphi \in C([0,1], \mathbb{R})$, on a
$$\int_0^1 (Du(t) + F(t))\varphi(t)dt = \int_0^1 c\varphi(t)dt$$
avec un certain $c \in \mathbb{R}$ convenablement choisi (et indépendant de $\varphi$).
En déduire que $Du = -F + c$ p.p., puis que $u$ est deux fois continûment dérivable sur $]0,1[$ et $-u''(x) = f(x)$ pour tout $x \in ]0,1[$ (et que $u(0) = u(1) = 0$).

*Corrigé –* *Soit $\varphi \in C([0,1], \mathbb{R})$. Pour $x \in [0,1]$ on pose*
$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt - x\int_0^1 \varphi(t)dt.$$
*On a donc $\psi \in C^1([0,1])$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$ et la dérivée faible de $\psi$ est égale p.p. à sa dérivée classique (voir la Définition 1.2), c'est-à-dire*
$$D\psi(x) = \psi'(x) = \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(s)ds \text{ pour presque tout } x \in ]0,1[.$$

*On a donc $\psi \in L^2(\Omega)$ et $D\psi \in L^2(\Omega)$, ce qui prouve que $\psi \in H^1(]0,1[)$. Comme $\psi(0) = \psi(1) = 0$, on a même $\psi \in H_0^1(\Omega)$ (voir la section 1.5). On peut donc prendre $v = \psi$ dans (2.57), on obtient*

$$\int_0^1 Du(t)\varphi(t)dt - \int_0^1 \varphi(t)dt \int_0^1 Du(t)dt = \int_0^1 f(x)\psi(x)dx.$$

*Comme $F$ est de classe $C^1$ et $F' = f$, on a (en utilisant aussi $\psi(0) = \psi(1) = 0$)*

$$\int_0^1 f(x)\psi(x)dx = \int_0^1 F'(x)\psi(x)dx = -\int_0^1 F(x)\psi'(x)dx = -\int_0^1 F(x)\varphi(x)dx + \int_0^1 F(x)dx \int_0^1 \varphi(t)dt.$$

*En posant $c = \int_0^1 Du(t)dt + \int_0^1 F(t)dt$, on a donc*

$$\int_0^1 (Du(t) + F(t))\varphi(t)dt = c\int_0^1 \varphi(t)dt \text{ pour tout } \varphi \in C([0,1]).$$

*Comme $Du + F - c \in L^2(]0,1[)$ et que $C([0,1])$ est dense dans $L^2(]0,1[)$, on en déduit*

$$Du = -F + c \text{ p.p. dans } ]0,1[.$$

*On pose maintenant*

$$w(x) = \int_0^x (-F(t) + c)dt \text{ pour } x \in [0,1].$$

*Comme $w$ est de classe $C^1$(la fonction $w$ est même de classe $C^2$) la dérivée par transposition de $w$ est une dérivée faible et est égale p.p. à la dérivée classique de $w$. On a donc $Dw = w' = -F + c$ p.p.. On a donc $Dw = Du$ p.p. et on en déduit que $w - u$ est une fonction presque partout égale à une constante (voir l'exercice 1.2). En identifiant la (classe de) fonction(s) $u$ a son représentant continu, on a donc $u$ de classe $C^2$, $u' = -F + c$ et $u'' = -F' = f$. On a aussi $u(0) = u(1)$ (car $u \in H_0^1(]0,1[)$ et donc le représentant continu de $u$ vérifie $u(0) = u(1) = 0$).*

**Corrigé 2.2 (Décomposition spectrale en dimension 1)**

On reprend l'exercice précédent. On pose $E = L^2(]0,1[)$ (muni de la norme $\|\cdot\|_2$). Pour $f \in E$, on rappelle qu'il existe un et un seul $u$ solution de (2.57).
On note $T$ l'application de $E$ dans $E$ qui à $f$ associe $u$ (solution de (2.57), noter que $H_0^1(]0,1[) \subset E$). On rappelle que $T$ est un opérateur linéaire compact autoadjoint de $E$ dans $E$.

1. Soit $\lambda \in \mathcal{VP}(T)$. Montrer qu'il existe $u \in C([0,1],\mathbb{R}) \cap C^2(]0,1[,\mathbb{R})$, $u \neq 0$, tel que $-\lambda u'' = u$, sur $]0,1[$ et $u(0) = u(1) = 0$.

   *Corrigé – On a vu à la section 2.2.2 que $N(T) = \{f \in E, Tf = 0 \text{ p.p.}\} = \{0\}$, que les valeurs propres de $T$ sont toutes strictement positives et qu'il existe une base hilbertienne de $L^2(]0,1[)$ formée de fonctions propres de $T$. On cherche ici une telle base hilbertienne. Pour cela, on trouve tout d'abord les valeurs propres de $T$.*

   *On rappelle que, pour $f \in E$, On a $Tf \in H_0^1(]0,1[$ et, en posant $u = Tf$,*

   $$\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt \text{ pour tout } v \in H_0^1(]0,1[).$$

   *Soit $\lambda$ une valeur propre de $T$. On sait déjà que $\lambda > 0$. Il existe $f \in E$, $f \neq 0$ t.q. $Tf = \lambda f$. En posant $u = Tf$, on a donc $u \in H_0^1(]0,1[)$, $u \neq 0$ et $f = u/\lambda$, ce qui donne*

   $$\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 u(t)v(t)dt \text{ pour tout } v \in H_0^1(]0,1[).$$

   *Comme $u \in H_0^1(]0,1[)$, on a $u$ continu sur $[0,1]$ (plus précisément, $u$ admet un représentant continu et on identifie $u$ à ce représentant) et $u(0) = u(1) = 0$. L'exercice 2.1 montre alors que $u$ est de classe $C^2$ et que*

   $$-\lambda u''(x) = u(x) \text{ pour tout } x \in ]0,1[. \tag{2.58}$$

2. Montrer que $\mathcal{VP}(T) = \{\frac{1}{k^2\pi^2},\ k \in \mathbb{N}^\star\}$ et $\sigma(T) = \mathcal{VP}(T) \cup \{0\}$.

*Corrigé –* *Pour chercher les valeurs propres, la question précédente nous a ramené à la résolution d'une équation différentielle linéaire classique. Il est bien connu (c'est, par exemple, une conséquence du théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz) que l'ensemble de solutions de (2.58) est un espace vectoriel de dimension 2, engendré par le fonctions* $x \mapsto \sin(x/\sqrt{\lambda})$ *et* $x \mapsto \cos(x/\sqrt{\lambda})$.

*Si* $\lambda$ *est valeur propre de* $T$*, il existe donc (par la question précédente)* $u \neq 0$ *t.q.* $Tu = \lambda u$*,* $u$ *de classe* $C^2$*,* $u$ *continu sur* $[0,1]$*,* $u(0) = u(1) = 0$ *et* $u$ *solution de (2.58). Il existe donc* $A, B \in \mathbb{R}$ *t.q.*

$$u(x) = A\sin(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}) + B\cos(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

*Comme* $u(0) = 0$*, on a nécessairement* $B = 0$*. Puis, comme* $u \neq 0$*, on a nécessairement* $A \neq 0$*. Enfin, comme* $u(1) = 0$*, on a nécessairement* $\sin(1/\sqrt{\lambda}) = 0$*, ce qui donne l'existence de* $k \in \mathbb{Z}$ *t.q.* $1/\sqrt{\lambda} = k\pi$*. Comme* $\lambda > 0$*, on a donc* $k \in \mathbb{N}^\star$*,* $1/\lambda = k^2\pi^2$ *et* $u(x) = A\sin(k\pi x)$ *pour tout* $x \in [0,1]$ *avec* $A \neq 0$ *(la fonction* $u$ *vérifie bien* $Tu = \lambda u$*, ce qu'on peut vérifier facilement en remarquant qu'il suffit d'écrire la formulation faible en prenant des fonctions* $v$ *dans* $C_c^\infty(]0,1[)$*, car* $C_c^\infty(]0,1[)$ *est dense dans* $H_0^1(]0,1[)$*).*

*On a ainsi trouvé toutes les valeurs propres de* $T$*,* $\mathcal{VP}(T) = \{\frac{1}{k^2\pi^2},\ k \in \mathbb{N}^\star\}$*. La section 2.2 donne alors que* $\sigma(T) \setminus \{0\} = \mathcal{VP}(T) \setminus \{0\}$*. Enfin comme* $T$ *n'est pas surjectif (ce qui est toujours le cas pour un opérateur linéaire compact en dimension infinie), on a* $0 \in \sigma(T)$ *et donc* $\sigma(T) = \mathcal{VP}(T) \cup \{0\}$*.*

3. Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $c_n = 2\int_0^1 f(t)\sin(n\pi t)dt$. Montrer que :

$$\|f - \sum_{p=1}^{n} c_p \sin(p\pi\cdot)\|_2 \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

(Comparer avec les séries de Fourier. . . , )

*Corrigé –* *La question précédente nous a donné les valeurs propres de* $T$ *mais aussi les sous espaces propres correspondants. Cette question est alors une application immédiate de la section 2.2.2. Pour* $n \in \mathbb{N}^\star$*, on pose* $e_n(x) = \sqrt{2}\sin(p\pi x)$ *pour tout* $x \in [0,1]$*. La famille* $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}^\star\}$ *est une base hilbertienne de* $L^2(]0,1[)$*. On a donc, pour tout* $f \in L^2(]0,1[)$*,*

$$\|f - \sum_{p=1}^{n} c_p \sin(p\pi\cdot)\|_2 \to 0, \text{ quand } n \to \infty,$$

*c'est-à-dire* $f = \sum_{p=1}^\infty c_p \sin(p\pi\cdot)$*, la convergence de la série étant à prendre dans l'espace* $L^2(]0,1[)$*.*

*Cette série n'est pas la série de Fourier de* $f$*. En effet, la série de Fourier de* $f$ *est obtenue avec les fonctions* $\sin(2p\pi\cdot)$ *et* $\cos(2p\pi\cdot)$ *(*$p \in \mathbb{Z}$*). La décomposition de* $f$ *en série de Fourier correspond aussi à l'opérateur* $u \mapsto u''$*, mais avec des conditions périodiques (*$u(0) = u(1)$ *et* $u'(0) = u'(1)$*) au lieu des conditions de Dirichlet (*$u(0) = u(1) = 0$*).*

4. Soit $\mu \in \mathbb{R}^\star$. En utilisant l'alternative de Fredholm, donner une C.N.S. sur $f \in E$ pour que le problème suivant ait une solution :

$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(]0,1[),\\ &\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt + \mu\int_0^1 u(t)v(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt,\ \forall v \in H_0^1(]0,1[). \end{aligned} \tag{2.59}$$

*Corrigé –* *Soit* $f \in E$*. La fonction* $u$ *est solution du problème (2.59) si et seulement si* $T(f - \mu u) = u$*, c'est-à-dire*

$$T(u) + \frac{1}{\mu}u = \frac{T(f)}{\mu}. \tag{2.60}$$

*D'après l'alternative de Fredholm, ce problème à une solution si et seulement si $f$ est orthogonal (dans $E$) au sous espace propre de $T$ associé à $(-1/\mu)$.*

*Ceci peut se redémontrer à partir des questions précédentes. En effet, on pose $b_n = (f/e_n)_E$ (la famille $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}^\star\}$ étant la base hilbertienne de $E$ donnée la question 3), de sorte que $f = \sum_{p=1}^{\infty} b_n e_n$ (cette série étant convergente dans $E$). On a alors aussi*

$$T(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^2\pi^2} e_n,$$

*Cette série étant aussi convergente dans $E$.*

*Soit $u \in E$. On pose $a_n = (u/e_n)_E$, on a ainsi*

$$T(u) + \frac{1}{\mu} u = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{\mu + n^2\pi^2}{\mu n^2 \pi^2} e_n,$$

*Cette série étant convergente dans $E$. La fonction $u$ est donc solution de (2.60) si et seulement si*

$$a_n(\mu + n^2\pi^2) = \mu b_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^\star.$$

*Si $\mu \neq -n^2\pi^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe une et une seule solution à (2.60).*

*Si il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\mu = p^2\pi^2$, l'équation (2.60) a une solution si et seulement si $b_p = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $f$ est orthogonal (dans $E$) à $e_p$. Ce qui est équivalent à dire que $f$ est orthogonal au sous espace propre de $T$ associé à la valeur propre $(-1/\mu)$.*

**Corrigé 2.3 (Problème de Neumann)**

Soient $\Omega$ un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), à frontière lipschitzienne. On pose $H = \{u \in H^1(\Omega),\ \int_\Omega u(x)dx = 0\}$. On rappelle que sur un tel ouvert, une fonction $L^1_{loc}$ dont les dérivées (au sens des dérivées par transposition) sont nulles est nécessairement constante ( c'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. cette fonction soit égale à $C$ p.p.).

1. (Inégalité de "Poincaré moyenne".) Montrer que $H$ est un s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$ et que, sur $H$, la norme $H^1$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_m$ définie par $\|u\|_m = \|(|\nabla u|)\|_{L^2(\Omega)}$.
   [On pourra montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'il existe $C$, ne dépendant que $\Omega$, t.q. $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_m$, pour tout $u \in H$.]

   *Corrigé –* *Pour $u \in H^1(\Omega)$, on pose $S(u) = \int_\Omega u(x)dx$. L'application $S$ est bien définie sur $H^1(\Omega)$ (car $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$). Elle est linéaire. Enfin, elle est continue car*

   $$S(u) \leq \|u\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}},$$

   *où mes$(\Omega)$ est la mesure de Lebesgue ($N$-dimensionnelle) de $\Omega$. Comme $H = \text{Ker}(S)$, on en déduit que $H$ est s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$.*

   *Pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on a $\|\,|\nabla u|\,\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\,|\nabla u|\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$. On a donc $\|u\|_m \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$ pour tout $u \in H$. Pour montrer que $\|\cdot\|_m$ est équivalente dans $H$ à $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, il suffit donc de montrer qu'il existe $C > 0$ (ne dépendant que de $\Omega$) t.q.*

   $$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_m \text{ pour tout } u \in H. \tag{2.61}$$

   *(On aura alors $\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (C^2+1)\|u\|^2_m$ pour tout $u \in H$.)*

   *Pour montrer (2.61), on raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe une suite déléments de $H$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q.*

   $$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} > n\|u_n\|_m \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

   *En remplaçant $u_n$ par $\frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}$, on peut supposer $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$. On a alors aussi $\|u_n\|_m \leq 1/n$, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. Par les théorèmes de compacité vu au chapitre 1 (section 1.6), on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$. On peut supposer (après extraction d'une sous* *suite) qu'il existe $u \in L^2(\Omega)$ t.q. $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$, quand $n \to +\infty$. Comme $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$. On remarque aussi que les dérivées (par transposition) de $u_n$ convergent vers les dérivées de $u$ dans $\mathcal{D}^\star$. Or, de $\|u_n\|_m \le 1/n$ on déduit $\nabla u_n \to 0$ dans $L^2(\Omega)^N$. Comme la convergence $L^2$ entraîne la convergence dans $\mathcal{D}^\star$, on a donc $\nabla u = 0$. Ceci montre que $u$ est constante sur $\Omega$. Comme $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$ et que $u_n \in H$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $u \in H$ et donc $\int_\Omega u(x)dx = 0$. On en déduit que $u = 0$ p.p., ce qui est impossible car $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$.*

2. (Caractérisation de $(H^1(\Omega))'$.) Soit $T \in (H^1(\Omega))'$, Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$ t.q.

$$\langle T, u\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = a\int_\Omega u(x)dx + \int_\Omega F(x)\cdot\nabla u(x)dx,\ \forall u \in H^1(\Omega). \tag{2.62}$$

[On pourra considérer $T_{|_H}$ et utiliser une injection convenable de $H$ dans $L^2(\Omega)^N$.]

*Corrigé –* *Pour $v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in L^2(\Omega)^N$, on pose $\|v\|_{L^2(\Omega)^N} = \int_\Omega |v(x)|^2dx$, de sorte que $L^2(\Omega)^N$ muni de cette norme est un espace de Hilbert. Pour $u \in H$, on pose $J(u) = \nabla u = (D_1u, \ldots, D_Nu)^t$. L'application $J$ est alors une isométrie de $H$ (muni de la norme $\|\cdot\|_m$) dans une partie de $L^2(\Omega)^N$, notée $\mathrm{Im}(J)$.*

*Soit $v \in \mathrm{Im}(J)$, il existe un unique $u \in H$ t.q. $v = J(u)$. On pose $S(v) = \langle T, u\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)}$. Comme $J$ est une isométrie et que la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est équivalente dans $H$ à la norme $\|\cdot\|_m$, l'application $S$ est linéaire continue de $\mathrm{Im}(J)$, s.e.v. de $L^2(\Omega)^N$, dans $\mathbb{R}$. Par le théorème de Hahn-Banach, on peut donc prolonger $S$ en $\tilde{S}$, élément du dual topologique de $L^2(\Omega)^N$. Parle théorème de représentation de Riesz dans les espaces de Hilbert, il existe alors $F \in L^2(\Omega)^N$ t.q.*

$$\tilde{S}(v) = \int_\Omega F(x)\cdot v(x)dx.$$

*On a donc, pour tout $u \in H$,*

$$\langle T, u\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = \int_\Omega F(x)\cdot\nabla u(x)dx.$$

*On pose maintenant*

$$a = \frac{1}{mes(\Omega)}\langle T, 1_\Omega\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)},$$

*(où $1_\Omega$ désigne la fonction constante égale à 1 dans $\Omega$).*

*Pour $u \in H^1(\Omega)$, on a $u = u - m + m$ avec*

$$m = \frac{1}{mes(\Omega)}\int_\Omega u(x)dx.$$

*Comme $u - m \in H$, on a donc*

$$\langle T, u\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = \int_\Omega F(x)\cdot\nabla u(x)dx + a\int_\Omega u(x)dx.$$

Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi\cdot\xi \ge \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$. On cherche $u$ solution de

$$\begin{aligned}&u \in H^1(\Omega),\\ &\int_\Omega A(x)\nabla u(x)\nabla v(x)dx = a\int_\Omega v(x)dx + \int_\Omega F(x)\cdot\nabla v(x)dx,\ \forall v \in H^1(\Omega).\end{aligned} \tag{2.63}$$

3. (Existence et unicité.)

(a) Si $a \neq 0$, montrer que (2.63) n'a pas de solution.

*Corrigé –* *On suppose que $u$ est solution de (2.63). En prenant $v = 1_\Omega$ dans (2.63), on a alors*

$$0 = a\, mes(\Omega) + 0.$$

*Ce qui prouve que $a = 0$.*

(b) Si $a = 0$, montrer que (2.63) a une solution et que cette solution est unique si l'on demande qu'elle appartienne à $H$.

*Corrigé –* *On applique le lemme de Lax-Milgram (lemme 2.4) dans l'espace de Hilbert $H$ (muni de la norme $\|\cdot\|_m$) avec*

$$a(u,v) = \int_\Omega A(x)\nabla u(x)\nabla v(x)dx,$$

*et*

$$T(v) = \int_\Omega F(x)\cdot\nabla v(x)dx.$$

*La continuité de $a$ vient du fait que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j$. La coercivité de $a$ vient de l'existence de $\alpha > 0$ donnée dans les hypothèses sur $A$. Enfin, la continuité de $T$ vient du fait que $F \in L^2(\Omega)^N$.*

*On obtient ainsi un unique $u \in H$ t.q. (2.63) soit vrai pour tout $v \in H$. Comme (2.63) est aussi vrai si $v$ est une fonction constante, on obtient aussi l'existence et l'unicité de $u \in H$ t.q. (2.63) soit vrai pour tout $v \in H^1(\Omega)$.*

(c) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, $a_{i,j} \in C^\infty(\bar\Omega, \mathbb{R})$ pour tout $i, j = 1,\ldots,N$, $F \in C^\infty(\bar\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\Omega$ est de classe $C^\infty$ et que la solution (appartenant à $H$) de (2.63) est aussi dans $C^\infty(\bar\Omega, \mathbb{R})$, montrer que $-\mathrm{div}(A\nabla u) = -\mathrm{div}F$, dans $\Omega$, et que $A\nabla u\cdot\mathbf{n} = F\cdot\mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$, où $\mathbf{n}$ est la normale à $\partial\Omega$, extérieure à $\Omega$.

*Corrigé –* *On prend tout d'abord $v \in C_c^\infty(\Omega)$ dans (2.63) (avec $a = 0$). La régularité de $A$, $F$, $u$ et $v$ nous permet d'intégrer par parties (la régularité de $\Omega$ ne sert à rien pour cette étape). On obtient*

$$\int_\Omega (-\mathrm{div}(A(x)\nabla u(x)) + \mathrm{div}(F(x)))v(x)dx = 0 \text{ pour tout } v \in C_c^\infty(\Omega).$$

*On en déduit que $-\mathrm{div}(A(x)\nabla u(x)) + \mathrm{div}(F(x)) = 0$ p.p. (par le lemme fondamental 1.1) puis, par continuité de la fonction $-\mathrm{div}(A\nabla u) + \mathrm{div}(F)$, que $-\mathrm{div}(A(x)\nabla u(x)) + \mathrm{div}(F(x)) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.*

*On prend maintenant des fonctions $v \in C^\infty(\bar\Omega)$ dans (2.63). On peut ici aussi intégrer par parties (on utilise ici la régularité de $\Omega$). On obtient*

$$\int_{\partial\Omega} (A(x)\nabla u(x) - F(x))\cdot n(x)v(x)d\gamma(x) = 0 \text{ pour tout } v \in C^\infty(\bar\Omega),$$

*où $\partial\Omega$ est le bord de $\Omega$ et $d\gamma(x)$ désigne l'intégration par rapport à la mesure $(N-1)$-dimensionnelle sur $\partial\Omega$.*

*Par une technique de "cartes locales", on peut se ramener au cas du lemme fondamental (lemme 1.1) pour en déduire que $(A\nabla u - F)\cdot n = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$ puis partout sur $\partial\Omega$. Mais, il est plus rapide de voir qu'il est possible de choisir $v$ t.q. $v = (A\nabla u - F)\cdot n$ sur $\partial\Omega$. On obtient ainsi directement $(A\nabla u - F)\cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$.*

**Corrigé 2.4 (Décomposition de Hodge)**

Soient $\Omega$ un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ et $f \in (L^2(\Omega))^N$.
Montrer qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ t.q.

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx, \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega).$$

En déduire qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ et $g \in (L^2(\Omega))^N$ t.q. $f = \nabla u + g$, p.p. dans $\Omega$ et $\int_\Omega g(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx = 0$ pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$.

On suppose maintenant que $g \in C^1(\bar{\Omega})$ et que $\Omega = (]0,1[)^N$. Montrer que $\operatorname{div} g = 0$ sur $\Omega$ et que $g \cdot \mathbf{n} = 0$ p.p. (pour la mesure de Lebesgue $(N-1)-$dimensionnelle) sur $\partial\Omega$, où $\mathbf{n}$ est un vecteur normal à $\partial\Omega$.

*Corrigé –* *L'exercice 2.5 (corrigé 2.3) donne l'existence de $u \in H^1(\Omega)$ t.q.*

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx, \;\; \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

*On peut aussi ajouter la condition $\int_\Omega u(x)dx = 0$ et on a alors existence et unicité de $u$ (corrigé 2.3).*

*On pose alors $g = f - \nabla u$. Les fonctions $u$ et $g$ vérifient les conditions demandées.*

*On suppose maintenant que $g \in C^1(\bar{\Omega})$ et que $\Omega = (]0,1[)^N$. On a*

$$\int_\Omega g(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx = 0 \text{ pour tout } \varphi \in H^1(\Omega).$$

*On raisonne comme pour la fin du corrigé 2.3. En prenant $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, le lemme fondamental (lemme 1.1) nous permet de montrer que $\operatorname{div}(g) = 0$ partout dans $\Omega$. Puis, en prenant $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, une intégration par parties (plutôt plus facile que dans le corrigé 2.3) donne*

$$\int_{\partial\Omega} g(x) \cdot n(x)\varphi(x)d\gamma(x) = 0 \text{ pour tout } \varphi \in C^1(\bar{\Omega}).$$

*De cette égalité, on déduit que $g \cdot n = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$.*
*Ceci peut se démontrer si $N = 2$ de la manière suivante : $d\gamma(x) = dx_1$ ou $dx_2$, selon les parties de $\partial\Omega$ (avec $x = (x_1, x_2)^t$). Avec $g = (g_1, g_2)^t$, on en déduit que $g_1(x) = 0$ partout sur $\{0\} \times [0,1] \cup \{1\} \times [0,1]$ et $g_2(x) = 0$ partout sur $[0,1] \times \{0\} \cup [0,1] \times \{1\}$. (Ce qui donne bien $g \cdot n = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$.)*
*La généralisation au cas $N \geq 1$ ne pose pas de difficulté.*

**Corrigé 2.5 (problème de Stokes, vitesse et pression)**
Soient $\Omega$ un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ à frontière lipschitzienne et $f = (f_1, \ldots, f_N)^t \in (L^2(\Omega))^N$. On s'intéresse ici au problème de Stokes, c'est-à-dire à trouver $u = (u_1, \ldots, u_N)^t$ et $p$ solution de

$$\begin{aligned} &-\Delta u + \nabla p = f \text{ dans } \Omega, \\ &\operatorname{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ &u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Noter que la première équation de (2.64) est vectorielle.
On pose $H = \{u \in (H_0^1(\Omega))^N ;\ \operatorname{div} u = 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$. On appelle solution faible de (2.64) un couple $(u,p)$ solution de

$$\begin{aligned} &u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in H,\ p \in L^2(\Omega), \\ &\sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x)dx - \int p(x)\operatorname{div} v(x)dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x)dx \\ &\qquad\qquad \text{pour tout } v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in (H_0^1(\Omega))^N. \end{aligned} \tag{2.65}$$

On pourra remarquer qu'une solution classique $(u,p)$ de (2.64) est solution de (2.65).

**Partie I, existence et unicité de $u$**

Montrer que, si $(u,p)$ est une solution classique de (2.64), $u$ est alors solution de

$$u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in H,\ \sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x)dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x)dx,\ \forall v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in H. \tag{2.66}$$

*Corrigé –* *Soit $(u,p)$ est une solution classique de (2.64). On remarque tout d'abord que $u \in H$. Puis, pour $v \in H$, on multiplie la première équation de (2.64) par $v$ et on intègre sur $\Omega$. Le fonctions $u$ et $v$ sont suffisamment régulières pour intégrer par parties et obtient ainsi l'équation (2.66). Ceci montre que $u$ est alors solution de (2.66).*

On montre dans cette pemière partie que (2.66) a une et une seule solution et que si $(u,p)$ est solution de (2.65), $u$ est alors l'unique solution de (2.66).

1. Montrer que $H$ est un s.e.v. fermé de $(H_0^1(\Omega))^N$.

   *Corrigé –* *Pour $u \in H_0^1(\Omega)^N$, on pose $d(u) = \mathrm{div}(u)$. L'application $d$ est linéaire continue de $H_0^1(\Omega)^N$ dans $L^2(\Omega)$. Comme $H = \mathrm{Ker}\, d$, on en déduit que $H$ est un s.e.v. fermé de $H_0^1(\Omega)^N$.*

2. Montrer que (2.66) admet une et une seule solution. [Utiliser le lemme de Lax-Milgram.]

   *Corrigé –* *Il suffit ici d'appliquer le lemme de Lax-Milgram, lemme 2.4 (ou le théorème de Riesz dans les espaces de Hilbert) en remarquant que $H$ est un espace de Hilbert ($H$ est muni de la norme naturelle de $H_0^1(\Omega)^N$), avec $a$ et $T$ définis ainsi :*

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx,$$

   *et*

$$T(v) = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx.$$

3. Soit $(u,p)$ une solution de (2.65). Montrer que $u$ est l'unique solution de (2.66).

   *Corrigé –* *Pour $v \in H$, on a $\mathrm{div}(v) = 0$ p.p. dans $\Omega$ et donc $\int_\Omega p\mathrm{div}(v)dx = 0$. On en déduit que $u$ est solution de (2.66). Par la question précédente, la fonction (vectorielle) $u$ est donc l'unique solution de (2.66).*

Soit $u$ la solution de (2.66). La suite de l'exercice consiste à trouver $p$ pour que $(u,p)$ soit solution de (2.65).

**Partie II, préliminaire d'analyse fonctionnelle**

Soit $E$ et $F$ deux espaces de Hilbert (réels). On note $(\cdot/\cdot)_E$ (resp. $(\cdot/\cdot)_F$) le produit scalaire dans $E$ (resp. $F$). Soit $A$ un opérateur linéaire continu de $E$ dans $F$. On note $A^\star$ l'opérateur adjoint de $A$. L'opérateur $A^\star$ est un opérateur linéaire continu de $F$ dans $E$. Pour tout $g \in F$, $A^\star g$ est l'unique élément de $E$ défini par

$$(A^\star g/u)_E = (g/Au)_F \text{ pour tout } u \in E.$$

(Noter que l'existence et l'unicité de $A^\star g$ est donnée par le théorème de représentation de Riesz.)

1. Montrer que Ker$A = (\mathrm{Im}A^\star)^\perp$.
   (On rappelle que si $G \subset E$, $G^\perp = \{u \in E, (u/v)_E = 0 \text{ pour tout } v \in G\}$.)

   *Corrigé –* *Soit $u \in \mathrm{Ker}A$ (on a donc $Au = 0$). Pour $v \in \mathrm{Im}A^\star$, il existe $g \in F$ t.q. $v = A^\star g$, on a donc*

$$(v/u)_E = (A^\star g/u)_E = (g/Au)_F = 0.$$

   *Ce qui montre que $u \in (\mathrm{Im}A^\star)^\perp$. On a donc $\mathrm{Ker}A \subset (\mathrm{Im}A^\star)^\perp$.*

   *Récirpoquement, soit $u \in (\mathrm{Im}A^\star)^\perp$. On a alors, en posant $f = Au$,*

$$(Au/Au)_F = (f/Au)_F = (A^\star f/u)_E = 0,$$

   *car $A^\star f \in \mathrm{Im}A^\star$. Donc, $Au = 0$, c'est-à-dire $u \in \mathrm{Ker}A$. Ceci donne $(\mathrm{Im}A^\star)^\perp \subset \mathrm{Ker}A$.*

   *Finalement, on a bien montré que $(\mathrm{Im}A^\star)^\perp = \mathrm{Ker}A$.*

2. Montrer que $(\mathrm{Ker}A)^\perp = \overline{\mathrm{Im}A^\star}$.

*Corrigé –* *Si $F$ est un s.e.v. fermé d'un espace de Hilbert $H$, on a toujours $H = F \oplus F^\perp$. D'autre part, si $G \subset H$, on a $G^\perp = \bar{G}^\perp$.*

*Si $F$ est un s.e.v. d'un espace de Hilbert $H$, on a donc*

$$H = \bar{F} \oplus F^\perp \text{ et } H = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp.$$

*Ceci permet de prouver que $(F^\perp)^\perp = \bar{F}$.*

*On applique ici ce résutat avec $F = \mathrm{Im}A^\star$, on obtient (avec la question précédente)*

$$\overline{\mathrm{Im}A^\star} = ((\mathrm{Im}A^\star)^\perp)^\perp = (\mathrm{Ker}A)^\perp.$$

**Partie III, Existence et unicité partielle de $p$**

Dans cette partie, on va utiliser le lemme suivant (souvent attribué à J. Nečas, 1965) que nous admettons.

**Lemme 2.31** *Soient $\Omega$ un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne et $q \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_\Omega q(x)dx = 0$. Il existe alors $v \in (H_0^1(\Omega))^N$ t.q. $\mathrm{div}(v) = q$ p.p. dans $\Omega$ et*

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)^N} \leq C\|q\|_{L^2(\Omega)},$$

*où $C$ ne dépend que de $\Omega$.*

On prend ici $E = H_0^1(\Omega)^N$ et $F = L^2(\Omega)$. Pour $u \in E$ on pose $Au = \mathrm{div}\, u$, de sorte que $A$ est un opérateur linéaire continu de $E$ dans $F$.

1. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $F$ et $v \in E$ t.q. $A^\star p_n \to v$ dans $E$ quand $n \to +\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $q_n = p_n - a_n$, où $a_n$ est la moyenne de $p_n$ dans $\Omega$.

(a) Montrer que $A^\star p_n = A^\star q_n$.

*Corrigé –* *Soit $v \in E$. On a*

$$(A^\star p_n/v)_E = (p_n/Av)_F = \int_\Omega p_n \mathrm{div}(v)dx,$$

*et*

$$(A^\star q_n/v)_E = (q_n/Av)_F = \int_\Omega q_n \mathrm{div}(v)dx = \int_\Omega p_n \mathrm{div}(v)dx - a_n \int_\Omega \mathrm{div}(v)dx.$$

*Comme $v \in H_0^1(\Omega)^N$, on a (en intégrant par parties) $\int_\Omega \mathrm{div}(v)dx = 0$ et donc*

$$(A^\star p_n/v)_E = (A^\star q_n/v)_E \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega)^N.$$

*Ceci montre bien que $A^\star p_n = A^\star q_n$.*

(b) Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $F$. [Utiliser le lemme 2.31.]

*Corrigé –* *Par le lemme 2.31, il existe $v_n \in H_0^1(\Omega)^N$ t.q. $\mathrm{div}(v_n) = q_n$ p.p. dans $\Omega$ et $\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)^N} \leq C\|q_n\|_{L^2(\Omega)}$. On obtient alors*

$$(A^\star q_n/v_n)_E = \int_\Omega q_n \mathrm{div}(v_n)dx = \int_\Omega q_n^2 dx = \|q_n\|_F^2.$$

*La question précédente donne $A^\star p_n = A^\star q_n$. On a donc*

$$\|q_n\|_F^2 = (A^\star p_n/v_n)_E \leq \|A^\star p_n\|_E \|v_n\|_E \leq C\|A^\star p_n\|_E \|q_n\|_F,$$

*et donc*

$$\|q_n\|_F \leq C\|A^\star p_n\|_E.$$

*L"hypothèse de convergence de $A^\star p_n$ donne que la suite $(A^\star p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (dans $E$). On en déduit que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $F$.*

(c) Montrer que $v \in \text{Im}A^\star$.

*Corrigé –* *Comme la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans (l'espace de Hilbert) $F$, on peut supposer, après extraction éventuelle d'une sous suite, que cette suite converge faiblement dans $F$. Il existe donc $q \in F$ t.q. $q_n \to q$ faiblement dans $F$, quand $n \to +\infty$. On va montrer que $v = A^\star q$.*

*Soit $w \in E$, On a $\lim_{n\to+\infty}(q_n/Aw)_F = (q/Aw)_F$. Mais,*

$$(q_n/Aw)_F = (A^\star q_n/w)_E = (A^\star p_n/w)_E.$$

*Comme $A^\star p_n \to v$ dans $E$, on a donc aussi $\lim_{n\to+\infty}(q_n/Aw)_F = (v/w)_E$. On obtient donc*

$$(q/Aw)_F = (v/w)_E \text{ pour tout } w \in E.$$

*Ceci donne $(A^\star q/w)_E = (v/w)_E$ pour tout $w \in E$, et donc $v = A^\star q$. On a bien montré que $v \in \text{Im}A^\star$.*

2. Montrer que $(\text{Ker}A)^\perp = \text{Im}A^\star$ et que $\text{Ker}A = H$.

*Corrigé –* *La question précédente montre que $\text{Im}A^\star$ est fermé (dans $E$). Avec la partie II, on a donc $(\text{Ker}A)^\perp = \text{Im}(A^\star)$. On a déjà vu que $\text{Ker}A = H$. On a donc $H^\perp = \text{Im}(A^\star)$.*

3. On rappelle que le produit scalaire dans $E$ est défini par

$$(u/v)_E = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx.$$

On définit $T_f \in E$ par $(T_f/v)_E = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx$ pour tout $v \in E$. Soit $u$ la solution de (2.66).

(a) Montrer que $u - T_f \in H^\perp$. En déduire que $u - T_f \in \text{Im}A^\star$.

*Corrigé –* *On a $(u/v)_E = \int_\Omega f v dx = (T_f/v)_E$ pour tout $v \in H$. Ceci signifie bien que $u - T_f \in H^\perp$ et donc que $u - T_f \in \text{Im}A^\star$.*

(b) Montrer qu'il existe $p \in F$ t.q. $(u, p)$ est solution de (2.65).

*Corrigé –* *Comme $u - T_f \in \text{Im}A^\star$, il existe $p \in F = L^2(\Omega)$ t.q. $u - T_f = A^\star p$. On a donc pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^N$,*

$$(u/v)_E - \int_\Omega f v dx = (u - T_f/v)_E = (A^\star p/v)_E = (p/Av)_F = \int_\Omega p \text{div}(v) dx.$$

*Ce qui signifie bien que $(u, p)$ est solution de (2.65).*

4. Soit $(u_1, p_1)$ et $(u_2, p_2)$ deux solutions de (2.65). Montrer que $u_1 = u_2 = u$ (où $u$ est l'unique solution de (2.66)) et qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $p_1 - p_2 = a$ p.p..

*Corrigé –* *On a déja montré à la question 3 de la partie I que $u_1 = u_2 = u$ où $u$ est l'unique solution de (2.66).*

*On obtient alors que $\int_\Omega p_1 \text{div}(v) dx = \int_\Omega p_2 \text{div}(v) dx$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^N$. En prenant $v = (v_1, \ldots, v_N)^t$ avec $v_1 \in C_c^\infty(\Omega)$ et $v_i = 0$ pour $i \geq 2$, on en déduit que $D_1(p_1 - p_2) = 0$ (dans $\mathcal{D}^\star$). De manière analogue on a $D_i(p_1 - p_2) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Ceci permet d'affirmer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $p_1 - p_2 = a$ p.p. (voir l'exercice 1.4).*

**Corrigé 2.6 (Continuité séquentielle de $L^2$-faible dans $H_0^1$)**

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N > 1$). Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.
Pour $f \in L^2(\Omega)$, on sait qu'il existe une unique solution au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.67}$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$. On note $u$ la solution de (2.67) et, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n$ la solution de (2.67) avec $f_n$ au lieu de $f$. On suppose que $f_n \to f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

*Corrigé –* *En prenant $v = u_n$ dans (2.67) (avec $f_n$ et $u_n$ au lieu de $f$ et $u$), on obtient*

$$\alpha\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \|f_n\|_{L^2(\Omega)} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_n\|_{L^2(\Omega)} C_\Omega\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)},$$

*où $C_\Omega$ est donné par l'inégalité de Poincaré. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\alpha} \sup_{p\in\mathbb{N}}(\|f_p\|_{L^2(\Omega)}) = M < +\infty,$$

*la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée dans $L^2(\Omega)$.*

2. Montrer que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et que $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ (quand $n \to +\infty$).

*Corrigé –* *Si $u_n \not\to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, il existe $\varepsilon > 0$, $\psi \in H^{-1}(\Omega)$ et une sous suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q.*

$$|\langle \psi, u_n - u\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}| \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{2.68}$$

*Après une nouvelle extraction éventuelle, on peut supposer que $u_n \to \bar{u}$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.*
*Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. On a*

$$\int_\Omega A\nabla u_n \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f_n v dx,$$

*et donc, quand $n \to \infty$,*

$$\int_\Omega A\nabla \bar{u}.\nabla v dx = \int_\Omega f v dx.$$

*On en déduit que $\bar{u} = u$, ce qui est en contradiction avec (2.68).*
*On a donc bien montré que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et, par le théorème de Rellich, que $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$.*

3. Montrer que, quand $n \to +\infty$,

$$\int_\Omega A(x)\nabla u_n(x) \cdot \nabla u_n(x)dx \to \int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla u(x)dx.$$

[Utiliser le fait que $\int_\Omega A(x)\nabla u_n(x) \cdot \nabla u_n(x)dx = \int_\Omega f_n(x)u_n(x)dx$ et passer à la limite sur le terme de droite de cette égalité.]

*Corrigé –*

$$\int_\Omega A\nabla u_n \cdot \nabla u_n dx = \int_\Omega f_n u_n dx \to \int_\Omega f v dx = \int A\nabla u \cdot \nabla u \, dx,$$

*car $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ et $f_n \to f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.*

4. Montrer que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$. [On pourra considérer $\int_\Omega A(x)\nabla(u_n - u)(x)\cdot\nabla(u_n-u)(x)dx$.]

*Corrigé –*

$$\int_\Omega A(\nabla u_n - \nabla u)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx = \int_\Omega A\nabla u_n\cdot\nabla u_n dx - \int_\Omega A\nabla u_n\cdot\nabla u - \int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla u_n + \int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla u\, dx.$$

*Les quatre terme de droite de cette égalité tendent vers $\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u\, dx$ quand $n\to+\infty$. Le terme de gauche (qui est positif) tend donc vers $0$. Ceci donne $\alpha\|u_n - u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \to 0$ (quand $n\to+\infty$) et donc, quand $n\to+\infty$,*

$$u_n \to u \quad \text{dans } H_0^1(\Omega).$$

Remarque sur la topologie faible : L'application $f \mapsto u$ (où $u$ est solution de (2.67)) est donc séquentiellement continue de $L^2(\Omega)$-faible dans $H_0^1(\Omega)$ (fort), c'est-à-dire qu'elle transforme les suites faiblement convergentes de $L^2(\Omega)$ en suites (fortement) convergentes de $H_0^1(\Omega)$. Elle est donc aussi séquentiellement continue de $L^2(\Omega)$-faible dans $L^2(\Omega)$ (fort). Après avoir définie la topologie faible de $L^2(\Omega)$ (ce que nous ne faisons dans ce polycopié), on peut toutefois remarquer que cette application n'est pas continue de $L^2(\Omega)$-faible ( c'est-à-dire $L^2(\Omega)$ muni de la topologie faible) dans $L^2(\Omega)$ ( c'est-à-dire $L^2(\Omega)$ muni de la topologie associée à sa norme).

**Corrigé 2.7 (Exercice liminaire à l'exercice 2.16)**

Soit $\varphi$ une fonction décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe $C>0$ et $\beta>1$ t.q.

$$0\le x<y \Rightarrow \varphi(y)\le C\frac{\varphi(x)^\beta}{y-x}. \tag{2.69}$$

Montrer qu'il existe $a\in\mathbb{R}_+$ t.q. $\varphi(a)=0$. [On pourra montrer l'existence d'une suite strictement croissante $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ t.q. $\varphi(a_k)\le\frac{1}{2^k}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^\star$ et $\lim_{k\to\infty}a_k<+\infty$. Pour cela, on pourra montrer qu'il existe $a_0$ t.q. $\varphi(a_0)\le 1$ puis, par récurrence, définir $a_{k+1}$ par $\frac{C}{a_{k+1}-a_k}\frac{1}{2^{k\beta}}=\frac{1}{2^{k+1}}$.]

*Corrigé –* *En prenant $x=0$ dans (2.69), on obtient $\lim\limits_{y\to\infty}\varphi(y)=0$. Il existe donc $a_0$ t.q. $\varphi(a_0)\le 1$.*

*On définit maintenant, par récurrence, une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par*

$$\frac{C}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{2^k}\right)^\beta = \frac{1}{2^{k+1}}$$

*on a alors, par récurrence, $\varphi(a_k)\le\dfrac{1}{2^k}$.*

*En effet pour $k=0$ on a bien $\varphi(a_0)\le 1$.*

*Puis, pour $k\ge 0$, si $\varphi(a_k)\le\dfrac{1}{2^k}$, on a*

$$\varphi(a_{k+1}) \le \frac{C}{a_{k+1}-a_k}\varphi(a_k)^\beta \le \frac{C}{a_{k+1}-a_k}\frac{1}{2^{k\beta}} = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

*On montre maintenant que $\lim_{k\to\infty}a_k<\infty$. Pour cela, on remarque que*

$$a_{k+1}-a_k = 2C\frac{2^k}{2^{k\beta}} = 2C\frac{1}{2^{k(\beta-1)}} = 2Cb^k \text{ avec } b=\frac{1}{2^{\beta-1}}.$$

*On a donc*

$$a_k = a_0 + \sum_{p=0}^{k-1}2Cb^p \le a_0 + 2C\sum_{p=0}^{\infty}b^p = a_0+\frac{2C}{1-b},$$

*car $b=\frac{1}{2^{\beta-1}}<1$ car $\beta>1$. On prend donc $\boxed{a=a_0+\dfrac{2C}{1-b}}$ et on a, comme $\varphi$ est décroissante,*

$$0\le\varphi(a)\le\varphi(a_k) \text{ pour tout } k\in\mathbb{N},$$

*et donc*

$$0 \leq \varphi(a) \leq \frac{1}{2^k} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

*Ce qui donne* $\varphi(a) = 0$.

**Corrigé 2.8 (Solutions bornées d'un problème elliptique)**

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N > 1$). Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.

Si $B$ est une partie borélienne de $\mathbb{R}^N$, on note mes$(B)$ le mesure de Lebesgue $N$-dimensionnelle de $B$ ( c'est-à-dire la "surface" si $N = 2$ et le volume si $N = 3$).

1. Soit $F \in L^2(\Omega)^N$. Montrer qu'il existe un et un seul $u$ solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega F(x) \cdot \nabla v(x)dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.70}$$

*Corrigé –* *Pour* $u, v \in H_0^1(\Omega)$ *on pose*

$$a(u,v) = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx \text{ et } T(v) = \int_\Omega F.\nabla v \, dx.$$

*Comme cela a été vu dans ce chapitre, la forme* $a$ *est une forme bilinéaire continue coercive sur* $H_0^1(\Omega)$*. Puis, pour* $v \in H_0^1(\Omega)$*, on a*

$$T(v) \leq \int_\Omega |F.\nabla v| dx \leq \||F|\|_{L^2(\Omega)} \||\nabla v|\|_{L^2(\Omega)} = \||F|\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

*On en déduit que* $T \in (H_0^1(\Omega))'$ *et donc qu'il existe un et un seul* $u$ *solution de (2.70).*

Soit $p > N$. On suppose pour la suite de l'exercice que $F \in L^p(\Omega)^N$ (On rappelle que $L^p(\Omega)^N \subset L^2(\Omega)^N$ si $p \geq 2$) et on note $u$ l'unique solution de (2.70).

Pour $k \in \mathbb{R}_+$, on définit la fonction $S_k$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} S_k(s) = 0 \text{ si } -k \leq s \leq k, \\ S_k(s) = s - k \text{ si } s > k, \\ S_k(s) = s + k \text{ si } s < -k. \end{cases}$$

On rappelle que si $v \in H_0^1(\Omega)$ on a $S_k(v) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla S_k(v) = 1_{A_k}\nabla v$ p.p., avec $A_k = \{|v| > k\}$ (voir la remarque 2.22).

2. Soit $k \in \mathbb{R}_+$, Montrer que

$$\alpha\||\nabla S_k(u)|\|_{L^2(\Omega)} = \alpha\left(\int_{A_k} \nabla u(x).\nabla u(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \text{mes}(A_k)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\||F|\|_{L^p(\Omega)}.$$

[On pourra prendre $v = S_k(u)$ dans (2.70) et utiliser l'inégalité de Hölder.]

*Corrigé –* *En prenant $v = S_k(u)$ dans (2.70) on obtient*

$$\begin{aligned}\alpha \||\nabla(S_k(u))\|^2_{L^2(\Omega)} &= \alpha \int_{A_k} \nabla u.\nabla u\,dx = \int_{A_k} F.\nabla u\,dx \\ &\le \||F|\|_{L^2(A_k)} \||\nabla(S_k(u))|\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \||F|\|_{L^p(\Omega)} (mes(A_k))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \||\nabla(S_k(u))|\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

*car* $\int_{A_k} |F|^2 dx \le \left(\int_\Omega |F|^p dx\right)^{\frac{2}{p}} mes(A_k)^{1-\frac{2}{p}}$. *On obtient ainsi*

$\boxed{\alpha \||\nabla(S_k(u))|\|_{L^2(\Omega)} \le \||F|\|_{L^p(\Omega)} mes(A_k)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}.}$

3. On pose $1^\star = \frac{N}{N-1}$. On rappelle qu'il existe $C_1$ ne dépendant que de $N$ t.q.

$$\|w\|_{L^{1^\star}(\Omega)} \le C_1 \|w\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} = C_1 \||\nabla w|\|_{L^1(\Omega)} \text{ pour tout } w \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

Soit $k, h \in \mathbb{R}_+$ t.q. $k < h$. Montrer que

$$(h-k)\text{mes}(A_h)^{\frac{N-1}{N}} \le (\int_{A_h} |S_k(u(x))|^{1^\star} dx)^{\frac{1}{1^\star}} \le C_1 \||\nabla S_k(u)|\|_{L^1(\Omega)} \le C_1 \||\nabla S_k(u)|\|_{L^2(\Omega)} \text{mes}(A_k)^{\frac{1}{2}}.$$

En déduire qu'il existe $C_2$ ne dépendant que de $C_1$, $\alpha$, $F$ et $p$ t.q.

$$(h-k)\text{mes}(A_h)^{\frac{N-1}{N}} \le C_2 \text{mes}(A_k)^{1-\frac{1}{p}}.$$

*Corrigé –* *Pour $h > k$, on a $|S_k(u)| \ge (h-k)$ sur $A_h$. On a donc*

$$\begin{aligned}(h-k)(mes(A_h))^{\frac{1}{1^\star}} &\le \left(\int_\Omega |S_k(u)|^{1^\star} dx\right)^{\frac{1}{1^\star}} \\ &\le C_1 \||\nabla S_k(u)|\|_{L^1(\Omega)} \\ &\le C_1 \int_{A_k} |\nabla S_k(u)| dx \le C_1 \||\nabla S_k(u)|\|_{L^2(\Omega)} mes(A_k)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

*Avec la question 2, on obtient*

$$(h-k)(mes(A_h))^{\frac{1}{1^\star}} \le \frac{C_1}{\alpha} \||F|\|_{L^p} mes(A_k)^{1-\frac{1}{p}},$$

*et donc, avec $C_2 = \frac{C_1}{\alpha} \||F|\|_{L^p(\Omega)}$,*

$$(h-k) mes(A_h)^{\frac{N-1}{N}} \le C_2 mes(A_k)^{1-\frac{1}{p}}.$$

4. Montrer que $u \in L^\infty(\Omega)$ ( c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. mes$(A_a) = 0$). [On pourra poser $\varphi(k) =$ mes$(A_k)^{\frac{N-1}{N}}$ et utiliser l'exercice 2.15.]

*Corrigé –* *Pour $k \in \mathbb{R}_+$, on pose $\varphi(k) = (mes(A_k))^{\frac{N-1}{N}}$. On a alors, pour $h \ge k \ge 0$,*

$$(h-k)\varphi(h) \le C_2 \varphi(k)^{\frac{N}{N-1}\,\frac{p-1}{p}}.$$

*On pose* $\beta = \dfrac{N}{N-1}\dfrac{p-1}{p}$.

*On remarque que $\beta > 1$ car $p > N$ (en effet, on a* $\dfrac{N}{N-1}\dfrac{p-1}{p} > 1 \Leftrightarrow Np - N > Np - p$*).*

*On peut alors appliquer l'exercice 2.15, il donne l'existence de $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\varphi(a) = 0$ et donc* $\boxed{\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le a}$.

5. Montrer qu'il existe $C_3$ ne dépendant que de $\Omega$, $\alpha$ et $p$ t.q.

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_3 \||F|\|_{L^p(\Omega)}.$$

*Corrigé –* *On suppose tout d'abord que $\||F|\|_{L^p(\Omega)} = 1$, ce qui donne, avec les notations des questions précédentes, $C_2 = \dfrac{C_1}{\alpha}$.*
*On reprend alors le corrigé de l'exercice 2.15 ( c'est-à-dire le corrigé 2.7). Le choix de $a_0$ est t.q. $\varphi(a_0) \le 1$. Comme*

$$\varphi(0) \le mes(\Omega)^{\frac{N-1}{N}},\ \beta\frac{N-1}{N} = \frac{p-1}{p} \text{ et } C_2 = C_1/\alpha,$$

*il suffit donc de prendre $a_0$ t.q.*

$$\frac{C_1 mes(\Omega)^{\frac{p-1}{p}}}{\alpha a_0} \le 1.$$

*On peut donc choisir $a_0 = \dfrac{C_1 mes(\Omega)^{\frac{p-1}{p}}}{\alpha}$. On a alors $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le a$ avec*

$$a = a_0 + \frac{2C_2}{1-b} = a_0 + \frac{C_1}{\alpha}\frac{2}{1-\frac{1}{2^{\beta-1}}}.$$

*On a donc $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_3$, avec $C_3 = a_0 + \dfrac{C_1}{\alpha}\dfrac{2}{1-\frac{1}{2^{\beta-1}}}$.*
*On remarque bien que $C_3$ ne dépend que $\Omega$, $\alpha$ et $p$ (noter que $N$ est implicitement dans $\Omega$).*

*On peut maintenant supposer que $F$ est quelconque dans $L^p(\Omega)^N$ (la fonction $u$ est toujours la solution de (2.70)). Pour $\gamma > 0$ la fonction $u/\gamma$ est solution de (2.70) avec $F/\gamma$ au lieu de $F$. Si $\||F|\|_{L^p(\Omega)} > 0$, en choisissant $\gamma = \||F|\|_{L^p(\Omega)}$ (de sorte que $\||F/\gamma|\|_{L^p(\Omega)} = 1$) on a donc $\|u/\gamma\|_{\le} C_3$ ce qui donne*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_3 \||F|\|_{L^p(\Omega)}.$$

*(Noter aussi que l'inéaglité est évidente si $\||F|\|_{L^p(\Omega)} = 0$.)*

**Corrigé 2.9 (Diffusion évanescente et convection)**

**Partie I** Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \ge 1$) et $w = (w_1, \ldots, w_N)^t \in (L^\infty(\Omega))^N$ t.q. $\mathrm{div}(w) = 0$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ (On rappelle que $\mathrm{div}(w) = \sum_{i=1}^N D_i w_i$). Soit $u \in H_0^1(\Omega)$.

1. Montrer que $u^2 \in W_0^{1,1}(\Omega)$ et que $D_i(u^2) = 2uD_i u$, pour tout $i \in 1, \ldots, N$. [Utiliser la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.]

*Corrigé –* *Soit $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ t.q. $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$. On a donc, quand $n \to +\infty$, $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ et $\partial_i u_n \to D_i u$ dans $L^2(\Omega)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. (On rappelle que $\partial_i u_n$ désigne la dérivée partielle classique de $u_n$ par rapport à sa $i$-eme variable.) On peut aussi supposer (après extraction éventuelle d'une sous suite) que $u_n \to u$ p.p. et qu'il existe $F \in L^2(\Omega)$ t.q. $|u_n| \le F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit, par convergence dominée, que $u_n^2 \to u^2$ dans $L^1(\Omega)$ (quand $n \to +\infty$).*
*Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et $i \in \{1, \ldots, N\}$, on a alors*

$$\langle D_i(u^2), \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega u^2 \partial_i \varphi\, dx = -\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega u_n^2 \partial_i\varphi\, dx. \tag{2.71}$$

*Comme $u_n$ et $\varphi$ appartiennent à $C_c^\infty(\Omega)$, on a, en intégrant par parties*

$$\int_\Omega u_n^2 \partial_i \varphi\, dx = -2\int_\Omega \varphi u_n \partial_i u_n\, dx.$$

*Comme $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ et $\partial_i u_n \to D_i u$ dans $L^2(\Omega)$, on a $u_n \partial_i u_n \to u D_i u$ dans $L^1(\Omega)$ et donc (comme $\varphi \in L^\infty(\Omega)$,*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \varphi u_n \partial_i u_n\, dx = \int_\Omega \varphi u \partial_i u\, dx.$$

*En revenant à* (2.71), *on en déduit que*

$$\langle D_i(u^2), \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega u^2 \partial_i \varphi \, dx = 2\int_\Omega \varphi u D_i u \, dx.$$

*Ce qui prouve bien que $D_i(u^2) = 2uD_iu$ p.p. (les dérivées par transposition de $u$ et $u^2$ sont en fait des dérivées faibles et donc identifiées à des fonctions).*

*La démonstration précédente donne aussi que $u_n^2 \to u^2$ dans $L^1(\Omega)$ et $\partial_i(u_n^2) = 2u_n\partial_i u_n \to 2uD_iu = D_i(u^2)$ dans $L^1(\Omega)$. On a donc $u_n^2 \to u^2$ dans $W^{1,1}(\Omega)$, ce qui donne, comme $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$, que $u^2 \in W_0^{1,1}(\Omega)$.*

2. Montrer que $\int_\Omega w(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx = 0$, pour tout $\varphi \in W_0^{1,1}(\Omega)$. [Utiliser la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W_0^{1,1}(\Omega)$.]

*Corrigé –* *Soit $\varphi \in W_0^{1,1}(\Omega)$. il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C_c^\infty(\Omega)$ t.q. $\varphi_n \to \varphi$ dans $W^{1,1}(\Omega)$. Comme $\operatorname{div}(w) = 0$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$0 = \langle \operatorname{div}(w), \varphi_n\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\sum_{i=1}^N \int_\Omega w_i \partial_i \varphi_n \, dx.$$

*Comme $\partial_i\varphi_n \to D_i\varphi$ dans $L^1(\Omega)$ (et que $w \in L^\infty(\Omega)^N$), on en déduit, quand $n \to +\infty$,*

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega w_i D_i \varphi \, dx = 0,$$

*c'est-à-dire $\int_\Omega w(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx = 0$.*

3. Montrer que $\int_\Omega w(x)\cdot\nabla(u^2)(x)dx = 2\int_\Omega u(x)w(x)\cdot\nabla u(x)dx = 0$ (on rappelle que $w\cdot\nabla(u^2) = \sum_{i=1}^N w_iD_i(u^2)$).

*Corrigé –* *On utilise le résulat de la question précédente avec $\varphi = u^2$ et le fait que $D_i(u^2) = 2uD_iu$, on obtient*

$$0 = \int_\Omega w\cdot\nabla(u^2)dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega 2w_i u D_i u \, dx = 2\int_\Omega uw\cdot\nabla u \, dx.$$

**Partie II** Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, à frontière lipschiztienne (cette hypothèse donne l'existence de l'opérateur "trace", noté $\gamma$, linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et t.q. $\gamma(u) = u$ sur $\partial\Omega$ si $u \in C(\bar\Omega)\cap H^1(\Omega)$ et $\operatorname{Ker}(\gamma) = H_0^1(\Omega)$). Soient $a \in \mathbb{R}_+^\star$ et $w \in (L^\infty(\Omega))^N$ t.q. $\operatorname{div}(w) = 0$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$. Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in \operatorname{Im}\gamma$. On cherche $u$ solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} & u \in H^1(\Omega),\ \gamma(u) = g \text{ (dans } L^2(\partial\Omega)), \\ & \int_\Omega a\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_\Omega u(x)w(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx,\ \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.72}$$

1. Soit $G \in H^1(\Omega)$ t.q. $\gamma(G) = g$ (dans $L^2(\partial\Omega)$). Montrer que $u$ est solution de (2.72) si et seulement si $u = G + \overline{u}$ avec $\overline{u}$ solution de (2.73).

$$\begin{aligned} & \overline{u} \in H_0^1(\Omega), \\ & \int_\Omega a\nabla\overline{u}(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_\Omega \overline{u}(x)w(x)\cdot\nabla v(x)dx = \\ & \int_\Omega f(x)v(x)dx - \int_\Omega a\nabla G(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_\Omega G(x)w(x)\cdot\nabla v(x)dx,\ \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.73}$$

*Corrigé –* *On suppose que $u$ est solution de (2.72) et on pose $\overline{u} = u - G$. On a alors $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ et, comme $\gamma$ est un opérateur linéaire, $\gamma(\overline{u}) = \gamma(u) - \gamma(G) = g - g = 0$ (dans $L^2(\partial\Omega)$), ce qui prouve que $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$. Puis, si $v \in H_0^1(\Omega)$, en remplaçant $u$ par $\overline{u} + G$ dans (2.72), on montre bien que $\overline{u}$ est solution de (2.73).*

*Réciproquement, on suppose que $\overline{u}$ est solution de (2.73). On pose alors $u = \overline{u} + G$, on a bien $u \in H^1(\Omega)$ et $\gamma(u) = \gamma(\overline{u}) + \gamma(G) = 0 + g = g$ (dans $L^2(\partial\Omega)$). Puis, si $v \in H_0^1(\Omega)$, en remplaçant $\overline{u}$ par $u - G$ dans (2.73), on montre bien que $u$ est solution de (2.72).*

*On a bien ainsi montré l'équivalence désirée.*

2. Montrer que (2.72) admet une et une seule solution.

*Corrigé –* *En utilisant la lemme de Lax-Milgram (lemme 2.4) on va montrer que (2.73) admet une et une seule solution (grâce à la question précédente, on en déduit que (2.72) admet une et une seule solution).*

*Le problème (2.73) peut s'écrire*

$$\overline{u} \in H, \tag{2.74a}$$

$$\bar{a}(\overline{u}, v) = T(v) \text{ pour tout } v \in H, \tag{2.74b}$$

*avec $H = H_0^1(\Omega)$,*

$$\bar{a}(\overline{u}, v) = \int_\Omega a\nabla\overline{u}(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_\Omega \overline{u}(x)w(x) \cdot \nabla v(x)dx$$

*et*

$$T(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx - \int_\Omega a\nabla G(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_\Omega G(x)w(x) \cdot \nabla v(x)dx.$$

*L'espace $H$ est bien un espace de Hilbert (avec sa norme naturelle). L'application $T$ est bien linéaire de $H$ dans $\mathbb{R}$ et, en utilisant l'inégalité de Hölder, on voit que $T$ est continue (on utilise ici le fait que $f \in L^2(\Omega)$, $G \in H^1(\Omega)$ et $w \in L^\infty(\Omega)^d$). L'application $\bar{a}$ est bien bilinéaire de $H \times H$ dans R et continue (grâce encore au fait que $w \in L^\infty(\Omega)^d$). Pour montrer la coercivité de $\bar{a}$, on utilise la question 3 de la partie I, elle donne, pour tout $u \in H$,*

$$\bar{a}(u, u) = \int_\Omega a\nabla u(x) \cdot \nabla u(x)dx + \int_\Omega u(x)w(x) \cdot \nabla u(x)dx = \int_\Omega a\nabla u(x) \cdot \nabla u(x)dx = a\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

*Comme $a > 0$, on en déduit bien que $\bar{a}$ est coercive. On peut donc appliquer le lemme 2.4, il donne l'existence et l'unicité de $\overline{u}$ solution de (2.73). Grâce à la question précédente, on en déduit l'existence et l'unicité de $u$ solution de (2.72).*

On note $u$ cette solution dans la suite de cette partie.

3. On suppose, dans cette question, que $g = 0$ (de sorte que $u \in H_0^1(\Omega)$). Montrer que $a\|u\|_{H_0^1}^2 \le \int_\Omega f(x)u(x)dx$.

*Corrigé –* *Il sufffit de prendre $v = u$ dans (2.72). Avec la question 3 de la partie I on obtient*

$$a\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_\Omega f(x)u(x)dx.$$

4. Soit $b \in \mathbb{R}$. On suppose, dans cette question, que $f \le 0$ p.p. dans $\Omega$ et que $g \le b$ p.p. sur $\partial\Omega$ (pour la mesure $N-1$-dimensionnelle sur $\partial\Omega$). Montrer que $u \le b$ p.p. dans $\Omega$. [On pourra admettre que $(u-b)^+ \in H_0^1(\Omega)$ et que $\nabla(u-b)^+ = 1_{u>b}\nabla u$ p.p. (ce résultat est semblable à celui du lemme 2.21), utiliser (2.72) et la partie I.]

*Corrigé –* *Comme $(u-b)^+ \in H_0^1(\Omega)$, on peut prendre $v = (u-b)^+$ dans (2.72), on obtient, en utilisant $\nabla(u-b)^+ = 1_{u>b}\nabla u$ p.p. et $f \le 0$ p.p.,*

$$\int_{u>b} a\nabla u(x) \cdot \nabla u(x)dx + \int_\Omega u(x)w(x) \cdot \nabla(u-b)^+(x)dx = \int_\Omega f(x)(u-b)^+(x)dx \le 0. \tag{2.75}$$

*On remarque maintenant que* $\int_{u>b} a\nabla u(x)\cdot\nabla u(x)dx = \int_\Omega a\nabla(u-b)^+\cdot\nabla(u-b)^+ = a\|(u-b)^+\|_{H_0^1(\Omega)}$ *et que*

$$\int_\Omega u(x)w(x)\cdot\nabla(u-b)^+(x)dx = \int_\Omega (u(x)-b)w(x)\cdot\nabla(u-b)^+(x)dx + b\int_\Omega w(x)\cdot\nabla(u-b)^+(x)dx$$
$$= \int_\Omega (u(x)-b)^+w(x)\cdot\nabla(u-b)^+(x)dx + b\int_\Omega w(x)\cdot\nabla(u-b)^+(x)dx.$$

*La question 3 de la partie I donne* $\int_\Omega (u(x)-b)^+w(x)\cdot\nabla(u-b)^+(x)dx = 0$*. D'autre part, comme* $div(w)=0$ *dans* $\mathcal{D}^\star(\Omega)$*, on a* $\int_\Omega w\cdot\nabla\varphi dx = 0$ *pour tout* $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$*. Par densité de* $C_c^\infty(\Omega)$ *dans* $H_0^1(\Omega)$ *on a aussi (on utilise ici seulement le fait que* $w\in L^2(\Omega)^N$*)* $\int_\Omega w\cdot\nabla\varphi dx = 0$ *pour tout* $\varphi\in H_0^1(\Omega)$ *et donc, en particulier pour* $\varphi=(u-b)^+$*. On en déduit que*

$$\int_\Omega u(x)w(x)\cdot\nabla(u-b)^+(x)dx = 0.$$

*Revenant à (2.75), on obtient finalement* $a\|(u-b)^+\|_{H_0^1(\Omega)}\le 0$ *et donc* $(u-b)^+=0$ *p.p., c'est-à-dire* $u\le b$ *p.p. dans* $\Omega$*.*

*Remarque : On suppose maintenant* $g=0$ *et on note* $u$ *la solution de (2.72). La démonstration précédente montre donc que* $u\le 0$ *p.p. dans* $\Omega$ *si* $f\le 0$ *p.p. dans* $\Omega$*. Si maintenant on suppose* $f\ge 0$ *On remarque que* $(-u)$ *est la solution de (2.72) avec* $(-f)$ *au lieu de* $f$*. On a donc* $(-u)\le 0$ *p.p., c'est-à-dire* $u\ge 0$ *p.p..*

**Partie III** Dans cette partie on prend $N=2$, $\Omega=]0,1[^2$, $w=(-1,0)$ et $g=0$. On suppose aussi que $f\in L^\infty(\Omega)$ et que $f\ge 0$ p.p. sur $\Omega$. On note $u_n$ la solution de (2.48) pour $a=1/n$ ($n\in\mathbb{N}^\star$) et on s'intéresse à la limite de $u_n$ quand $n\to\infty$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Montrer que $u_n\ge 0$ p.p..[Utiliser la Partie II, question 4.]

   *Corrigé – Le fait que* $u_n\ge 0$ *p.p. dans* $\Omega$ *est une conséquence directe de la remarque à la fin de la démonstration de la question 4 de la partie II.*

2. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe $C_1$, ne dépendant que de $f$, t.q. $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)}\le C_1$. [On pourra, par exemple, chercher de quel problème de type (2.72) est solution la fonction $u_n+\beta\psi$, avec $\psi(x)=x_1$ et $\beta$ convenablement choisi, et utiliser la Partie II, question 4.]

   *Corrigé – La fonction* $u_n$ *vérfie*

$$u_n\in H_0^1(\Omega),$$
$$\frac{1}{n}\int_\Omega \nabla u_n(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_\Omega u_n(x)D_1v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx,\ \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

*On pose* $\bar u_n = u_n+\beta\psi$ *(de sorte que* $\nabla\bar u_n = \nabla u_n+\beta(1,0)^t$*). Les formules d'intégration par parties dans* $H^1(\Omega)$ *(théorème 1.22) donnent que, pour une fonction* $v\in H_0^1(\Omega)$*, on a*

$$\int_\Omega D_1v\,dx = 0,\quad \int_\Omega \psi D_1v\,dx = -\int_\Omega v\partial_1\psi\,dx = -\int_\Omega v\,dx.$$

*On en déduit que la fonction* $\bar u_n$ *est solution de*

$$\bar u_n\in H^1(\Omega),\ \gamma(u_n)=\beta x_1\ (dans\ L^2(\partial\Omega)),$$
$$\frac{1}{n}\int_\Omega \nabla\bar u_n(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_\Omega \bar u_n(x)D_1v(x)dx = \int_\Omega (f(x)+\beta)v(x)dx,\ \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

*On choisit* $\beta=-\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$*. On a alors* $f+\beta\le 0$ *p.p. dans* $\Omega$ *et* $\beta x_1\le 0$ *sur* $\partial\Omega$*. On peut donc appliquer la question 4 de la partie 2, elle donne* $\bar u_n\le 0$ *p.p. dans* $\Omega$ *et donc* $u_n\le\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ *p.p. dans* $\Omega$*. Avec la question précédente, ceci donne* $0\le u_n\le\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ *p.p. dans* $\Omega$*. On peut donc choisir* $C_1=\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$*.*

3. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe $C_2$, ne dépendant que de $f$, t.q. $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}\le C_2\sqrt{n}$.

*Corrigé –* *La question 3 de la partie II donne*

$$\frac{1}{n}\|u_n\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \int_\Omega f u_n\, dx.$$

*Comme (avec $C_1$ donné à la question précédente) $\int_\Omega f u_n\, dx \leq \lambda_N(\Omega)\|u_n\|_\infty \|f\|_\infty \leq \lambda_N(\Omega) C_1 \|f\|_\infty$, on a donc*

$$\|u_n\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq n\lambda_N(\Omega) C_1 \|f\|_\infty.$$

*On peut donc prendre $C_2 = \sqrt{\lambda_N(\Omega) C_1 \|f\|_\infty}$.*

4. En utilisant la remarque 2.14, montrer que $u_n \in H^2(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

*Corrigé –* *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. La fonction $u_n$ est la solution faible de $-\Delta u_n = f - D_1 u_n$. Comme $\Omega$ est convexe et que $f - D_1 u_n \in L^2(\Omega)$ (car $u_n \in H^1_0(\Omega)$), la remarque 2.14 donne que $u \in H^2(\Omega)$.*

5. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Si $u_n \in C^1(\overline{\Omega})$, déduire de la question 1 de la partie III que $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}(0, x_2) \geq 0$ et $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}(1, x_2) \leq 0$ pour tout $x_2 \in ]0,1[$ (de même, $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_2}(x_1, 0) \geq 0$ et $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_2}(x_1, 1) \leq 0$ pour tout $x_1 \in ]0,1[$). On admettra, dans la suite, que ce résultat est encore vrai, avec seulement $u_n \in H^2(\Omega)$, au sens $\gamma(D_1 u_n)(0, x_2) \geq 0$ et $\gamma(D_1 u_n)(1, x_2) \leq 0$ p.p. en $x_2 \in ]0,1[$ (de même $\gamma(D_2 u_n)(x_1, 0) \geq 0$ et $\gamma(D_2 u_n)(x_1, 1) \leq 0$ p.p. en $x_1 \in ]0,1[$).

*Corrigé –* *Comme $u_n \in C^1(\overline{\Omega})$ et que $u_n = 0$ sur $\partial\Omega$, on a, pour tout $x_2 \in ]0,1[$,*

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_1}(0, x_2) = \lim_{x_1 \to 0^+} \frac{u_n(x_1, x_2)}{x_1}.$$

*La question 1 de la partie III donne que $u_n(x_1, x_2) \geq 0$ pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$ (comme $u_n$ est continue, le fait que $u_n \geq 0$ p.p. dans $\Omega$ implique que $u_n \geq 0$ partout dans $\Omega$). On en déduit que $\frac{\partial u_n}{\partial x_1}(0, x_2) \geq 0$ pour tout $x_2 \in ]0,1[$.*
*Les trois autres propriétés demandées se montrent de manière analogue.*

6. En utilisant la question 2 de la partie III, montrer qu'on peut supposer (à une sous suite près) que $u_n \to u$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(\Omega)$ quand $n \to +\infty$, c'est à dire :

$$\int_\Omega u_n(x)\varphi(x)dx \to \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \text{ pour tout } \varphi \in L^1(\Omega).$$

Montrer que $u \geq 0$ p.p..

*Corrigé –* *La question 2 de la partie III donne que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné dans $L^\infty(\Omega)$. Il existe donc une sous suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $u \in L^\infty(\Omega)$ t.q. $u_n \to u$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(\Omega)$ quand $n \to +\infty$.*
*En prenant $\varphi = 1_{u<0}$, on remarque que $\int_\Omega u_n\varphi\, dx \geq 0$ (car $u_n \geq 0$ p.p.) et donc $\int_\Omega u\varphi\, dx \geq 0$, c'est-à-dire*

$$\int_{u<0} u(x)\, dx \geq 0.$$

*Ceci donne bien $u \geq 0$ p.p..*

On cherche, dans la suite, l'équation et les conditions aux limites satisfaites par $u$.

7. Montrer que $D_1 u = f$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$.

*Corrigé –* *Soit $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a*

$$\frac{1}{n}\int_\Omega \nabla u_n(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx - \int_\Omega u_n(x)\partial_1\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx. \tag{2.76}$$

*Comme $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_2\sqrt{n}$, on a*
$$|\frac{1}{n}\int_\Omega \nabla u_n(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx| \le \frac{1}{n}\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{C_2}{\sqrt{n}}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}.$$
*On a donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_\Omega \nabla u_n(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx = 0$.*
*D'autre part, on a $u_n \to u$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(\Omega)$, on en déduit que*
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega u_n(x)\partial_1\varphi(x)dx = \int_\Omega u(x)\partial_1\varphi(x)dx.$$
*Quand $n\to+\infty$ dans (2.76), on obtient donc*
$$-\int_\Omega u(x)\partial_1\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx,$$
*ce qui donne bien $D_1 u = f$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$.*

8. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$ et $\varphi\in C^1(\overline{\Omega})$, montrer que
$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_\Omega \nabla u_n(x)\nabla\varphi(x)dx + \frac{1}{n}\int_0^1\gamma(D_1u_n)(0,x_2)\varphi(0,x_2)dx_2 - \frac{1}{n}\int_0^1\gamma(D_1u_n)(1,x_2)\varphi(1,x_2)dx_2\\ +\frac{1}{n}\int_0^1\gamma(D_2u_n)(x_1,0)\varphi(x_1,0)dx_1 - \frac{1}{n}\int_0^1\gamma(D_2u_n)(x_1,1)\varphi(x_1,1)dx_1\\ -\int_\Omega u_n(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

*Corrigé –* *Comme $u_n\in H^2(\Omega)$, la dérivée par transposition $-\Delta u_n$ est un élément de $L^2(\Omega)$ et (2.76) donne*
$$-\frac{1}{n}\Delta u_n + D_1u_n = f \text{ p.p.}.$$
*En multipliant cette équation par $\varphi$ (on utilise ici uniquement le fait que $\varphi\in L^2(\Omega)$) on a donc*
$$-\frac{1}{n}\int_\Omega \Delta u_n\varphi\,dx + \int_\Omega \varphi D_1u_n\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx. \tag{2.77}$$
*Comme les fonctions $D_1u_n$ et $D_2u_n$ sont dans $H^1(\Omega)$, on peut maintenant utiliser les formules d'intégration par parties (théorème 1.22). On obtient (comme $\varphi\in C^1(\overline{\Omega})$)*
$$\begin{aligned}-\frac{1}{n}\int_\Omega (D_1D_1u_n)\varphi\,dx = \frac{1}{n}\int_\Omega D_1u_n\partial_1\varphi\,dx + \frac{1}{n}\int_0^1\gamma(D_1u_n)(0,x_2)\varphi(0,x_2)dx_2\\ -\frac{1}{n}\int_0^1\gamma(D_1u_n)(1,x_2)\varphi(1,x_2)dx_2.\end{aligned}$$
*et*
$$\begin{aligned}-\frac{1}{n}\int_\Omega (D_2D_2u_n)\varphi\,dx = \frac{1}{n}\int_\Omega D_2u_n\partial_2\varphi\,dx + \frac{1}{n}\int_0^1\gamma(D_2u_n)(x_1,0)\varphi(x_1,0)dx_1\\ -\frac{1}{n}\int_0^1\gamma(D_2u_n)(x_1,1)\varphi(x_1,1)dx_1.\end{aligned}$$
*Une intégration par parties donne aussi (comme $u_n\in H_0^1(\Omega)$)*
$$\int_\Omega \varphi D_1u_n\,dx = -\int_\Omega u_n\partial_1\varphi\,dx.$$
*En utilisant ces trois intégrations par parties dans (2.77), on obtient l'égalité demandée.*

9. Soit $\varphi\in C^1(\overline{\Omega})$ t.q. $\varphi\ge 0$ sur $\partial\Omega$. Montrer que
$$-\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)dx \le \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx. \tag{2.78}$$

*Corrigé –* *Comme $\varphi \geq 0$ sur $\partial\Omega$, la question 5 et l'égalité de la question 8 donnent, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,*

$$\frac{1}{n}\int_\Omega \nabla u_n(x)\nabla\varphi(x)dx - \int_\Omega u_n(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)dx \leq \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

*On peut alors passer à la limite quand $n \to +\infty$, comme à la question 7, et on obtient bien (2.78).*

10. On suppose, dans cette question, que $u \in C^1(\overline{\Omega})$ et que $f \in C(\overline{\Omega})$. Montrer que $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = f$ partout dans $\Omega$ et que $u(0, x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in ]0, 1[$.

    La fonction $u$ est-elle alors entièrement déterminée par $f$ ?

    *Corrigé –* *La question 7 donne $D_1 u = f$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$. Comme $u$ est de classe $C^1$, $D_1 u$ est représenté par la dérivée classique de $u$. Puis, comme $\partial_1 u$ et $f$ sont continues sur $\Omega$, on en déduit que $\partial_1 u = f$ partout dans $\Omega$. Comme $\partial_1 u$ et $f$ sont continues sur $\overline{\Omega}$, on a même $\partial_1 u = f$ partout dans $\overline{\Omega}$.*

    *On prend maintenant $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ t.q. $\varphi \geq 0$ sur $\partial\Omega$, $\varphi(x) = 0$ si $x = (x_1, x_2) \in \partial\Omega$, $x_1 \neq 0$.. Une intégration par parties dans (2.78) donne alors*

    $$\int_0^1 u(0, x_2)\varphi(0, x_2)\, dx_2 \leq 0.$$

    *Dans cette inégalité, la fonction $\varphi(0, \cdot)$ peut être égale (par exemple) à n'importe quelle fonction appartenant à $C_c^\infty(]0, 1[)$ et prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Comme $u(0, \cdot)$ est une fonction continue sur $]0, 1[$, On déduit donc de cette inégalité que $u(0, x_2) \leq 0$ pour tout $x_2 \in ]0, 1[$.*

    *La question 6 donne $u \geq 0$ p.p. sur $\Omega$. Comme $u$ est continue sur $\overline{\Omega}$, on a donc $u \geq 0$ partout sur $\overline{\Omega}$. On obtient donc finalement $u(0, x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in ]0, 1[$ (et même $[0, 1]$).*

    *La fonction $u$ est bien entièrement déterminée par $f$, on a*

    $$u(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} f(t, x_2)dt.$$

11. On remplaçe $w = (-1, 0)$ par $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\ldots$ De quel problème, dépendant de $w$, $u$ est elle solution ? [distinguer les signes des 2 composantes de $w$.]

    *Corrigé –* *On pose $w = (\alpha, \beta)$, avec $\alpha, \beta \neq 0$. En reprenant la même méthode que celle développée ci dessus pour le cas $w = (-1, 0)$, la question équivalente à la question 10 donnera que $u$ est solution du problème suivant :*

    $$-w \cdot \nabla u = f \text{ dans } \Omega,$$

    *$u(0, x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in ]0, 1[$ si $\alpha < 0$ et $u(1, x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in ]0, 1[$ si $\alpha > 0$.*

    *$u(x_1, 0) = 0$ pour tout $x_1 \in ]0, 1[$ si $\beta < 0$ et $u(x_1, 1) = 0$ pour tout $x_1 \in ]0, 1[$ si $\beta > 0$.*