Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

CTES
Centre de Télé-Enseignement Sciences

MASTER 2 – Ingénierie Mathématiques et Modélisation – SMA5B0.

Code UE	N° d'envoi de l'UE
MMAU2T	**4**

Nom de l'UE : ***Equations aux Dérivées Partielles (3.2)***

- Contenu de l'envoi : Polycopié, chapitre 4, corrigé du devoir 1

- Guide du travail à effectuer

Semaine 1 :
Etudier le chapitre 4, section 4.1 (Aperçu des méthodes)
Exercice proposé : 4.1

Semaine 2 :
Etudier le chapitre 4, section 4.2 (Intégration à valeurs vectorielles)
Exercice proposé : 4.2

Semaine 3 :
Etudier le chapitre 4, section 4.3 (Existence et unicité, problèmes linéaires)
Exercice proposé : 4.3

Semaine 4 :
Etudier le chapitre 4, section 4.4 (Existence et unicité, problèmes non linéaires)
et l'énoncé du premier théorème de la section 4.5 (théorème de Kolmogorov)
Exercice proposé : 4.4

- Coordonnées des enseignants responsables de l'envoi

T. Gallouet, R. Herbin, CMI, 39 rue Joliot Curie, 13453 marseille cedex 13.
email : thierry.gallouet@univ-amu.fr, raphaele.herbin@univ-amu.fr
Vous pouvez aussi consulter la page web: http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/master2.d/tele.d
et nous poser des questions par email.

L'application $\tilde{u} \mapsto h(0,\tilde{u})$ est constante ($h(0,\tilde{u})$ est, pour tout $\tilde{u}$, la solution faible de $-\Delta u = f$ dans Ω avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$). La solution de $v = h(0,v)$ est unique et appartient à B_R. Ceci suffit pour dire que $d(I - h(0,\cdot), B_R, 0) \neq 0$ (on peut ramener la constante à 0 par homotopie en remarquant, par exemple, que $d(I - th(0,\cdot), B_R, 0)$ ne dépend pas de $t \in [0,1]$, voir l'exercice 3.4).

6. On retire dans cette question l'hypothèse $\varphi(0) = 0$ et on se donne un élément T de $H^{-1}(\Omega)$. Montrer qu'il existe u solution de (3.46) avec $\int_\Omega f(x)v(x)dx$ remplacé par $\langle T, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$.

Corrigé – On commence par remplacer $\int_\Omega f(x)v(x)dx$ par $\langle T, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$ dans (3.46). La démonstration est alors très semblable à la précédente. Les seuls points demandant une petite modification sont dans les questions 4(a) et 4(c). Dans la question 4(a), On a majoré $\int_\Omega |f\psi(u)|dx$ par $\|f\|_{L^1(\Omega)}$. Il faut maintenant majorer

$$|\langle T, \psi(v)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}|.$$

Cette majoration se fait en remarquant que

$$|\langle T, \psi(v)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}| \leq \|T\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\psi(u)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|T\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\frac{|\nabla u|}{(1+|u|)^2}\|_{L^2(\Omega)} \leq$$
$$\leq \|T\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\frac{|\nabla u|}{1+|u|}\|_{L^2(\Omega)} \leq 4\|T\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{4}\|\frac{|\nabla u|}{1+|u|}\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Dans la question 4(c), on a majoré $\int_\Omega |fu|dx$ par $C_\Omega\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. Il faut maintenant majorer

$$|\langle T, u\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}|.$$

Ce qui est facile car

$$|\langle T, u\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}| \leq \|T\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Il reste maintenant à retirer l'hypothèse $\varphi(0) = 0$. Ceci est assez facile car il suffit de se ramener au cas précédent en remplaçant φ par $\varphi - \varphi(0)$ et en ajoutant au second membre de (3.46) $-\int_\Omega \varphi(0)W(x)\cdot\nabla v(x)dx$. On se ramène bien au cas précédent car l'application $v \mapsto \int_\Omega \varphi(0)W(x)\cdot\nabla v(x)dx$ est bien un élément de $H^{-1}(\Omega)$ (car $W \in L^2(\Omega)^N$).

Corrigé 3.5 (Convection-diffusion, Dirichlet, unicité)

On reprend ici les mêmes hypothèses que dans l'exercice 3.5, c'est-à-dire :
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou 3, $p > N$, $W \in L^p(\Omega)^N$, φ une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi(0) = 0$ et $f \in L^2(\Omega)$.
L'exercice 3.5 a montré qu'il existait u solution faible de (3.27), c'est-à-dire u solution de

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_\Omega \varphi(u(x))W(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{3.51}$$

L'objectif de cet exercice est de montrer l'unicité de la solution de (3.51) et de montrer que $u \geq 0$ p.p. si $f \geq 0$ p.p..

1. Montrer l'unicité de la solution de (3.51).

Corrigé – La démonstration d'unicité faite pour le théorème 3.15 n'a pas utilisée complètement les hypothèses sur G (qui étaient $G \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $\operatorname{div} G = 0$). Elle a utilisé seulement le fait que $G \in L^2(\Omega)^N$. Ici nous avons $W \in L^p(\Omega)^N$. Comme $p > N$, ceci donne bien $W \in L^2(\Omega)^N$ et la démonstration faite pour le théorème 3.15 est donc aussi valable ici. Nous la rappelons rapidement.

Soient u_1 et u_2 deux solutions de (3.51)*. On a donc :*

$$\int_\Omega \nabla u_1\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varphi(u_1)W\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x, \tag{3.52}$$

et

$$\int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \varphi(u_2) W \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x. \tag{3.53}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on définit $T_n \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par $T_n(s) = \max(-1/n, \min(s, 1/n))$. Le lemme 2.21 (ou plutôt sa généralisation, voir la remarque 2.22) donne $T_n(u_1-u_2) \in H^1_0(\Omega)$ et $\nabla T_n(u_1-u_2) = \nabla(u_1-u_2)1_{A_n}$ avec $A_n = \{0 < |u_1-u_2| < 1/n\}$.

On prend $v = T_n(u_1-u_2)$ dans (3.52) et (3.53), on obtient

$$\int_\Omega \nabla(u_1-u_2)\cdot\nabla T_n(u_1-u_2)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (\varphi(u_1)-\varphi(u_2))W\cdot\nabla(T_n(u_1-u_2))\,\mathrm{d}x.$$

Avec C_1 t.q. $|\varphi(s_1)-\varphi(s_2)| \le C_1|s_1-s_2|$ pour tout $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, ceci donne

$$\int_{A_n} |\nabla(u_1-u_2)|^2 \,\mathrm{d}x \le \int_{A_n} C_1|u_1-u_2|\,|W|\,|\nabla(u_1-u_2)|\,\mathrm{d}x.$$

On a $|u_1-u_2| \le 1/n$ p.p. dans A_n. En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz dans la dernière intégrale, on obtient donc :

$$\int_{A_n} |\nabla(u_1-u_2)|^2 \,\mathrm{d}x \le \frac{C_1}{n}\left(\int_{A_n}|W|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{A_n}|\nabla(u_1-u_2)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

On a donc

$$\|\,|\nabla T_n(u_1-u_2)|\,\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{A_n}|\nabla(u_1-u_2)|^2\right)^{1/2} \le \frac{C_1}{n}a_n, \text{ avec } a_n = \left(\int_{A_n}|W|^2 dx\right)^{1/2}.$$

On utilise maintenant l'inégalité de Sobolev et Hölder pour obtenir, avec $1^\star = \frac{N}{N-1}$ et en désignant par m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$,

$$\|T_n(u_1-u_2)\|_{L^{1^\star}} \le \|\,|\nabla T_n(u_1-u_2)|\,\|_{L^1(\Omega)} \le m(\Omega)^{1/2}\|\,|\nabla T_n(u_1-u_2)|\,\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{C_1 m(\Omega)^{1/2}}{n}a_n.$$

On pose $B_n = \{|u_1-u_2| \ge 1/n\}$, de sorte que

$$\frac{1}{n}(m(B_n))^{\frac{N-1}{N}} \le \left(\int_{B_n}|T_n(u_1-u_2)|^{1^\star}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1^\star}} \le \|T_n(u_1-u_2)\|_{L^{1^\star}}.$$

On a donc

$$(m(B_n))^{\frac{N-1}{N}} \le C_1 m(\Omega)^{1/2} a_n. \tag{3.54}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $A_{n+1} \subset A_n$. Comme $\cap_{n\in\mathbb{N}^\star} A_n = \emptyset$, la continuité décroissante de m donne que $\lim_{n\to+\infty} m(A_n) = 0$. Comme $W \in L^2(\Omega)^N$ on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et donc, grâce à (3.54), que $\lim_{n\to+\infty} m(B_n) = 0$.

On remarque enfin que $B_{n+1} \supset B_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{|u_1-u_2| > 0\}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} m(B_n) = m\{|u_1-u_2|>0\}$ (par continuité croissante d'une mesure). On obtient donc $m\{|u_1-u_2|>0\} = 0$ et donc $u_1 = u_2$ p.p..

2. On retire dans cette question (et seulement dans cette question) l'hypothèse $\varphi(0) = 0$ et on se donne un élément T de $H^{-1}(\Omega)$. Montrer que le problème (3.28) avec $\int_\Omega f(x)v(x)dx$ remplacé par $\langle T, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)}$ a une unique solution (l'existence a été montrée dans l'exercice 3.5).

   Corrigé – *La démonstration est identique à la précédente. Il suffit de remplacer, dans (3.52) et (3.53), $\int_\Omega f(x)v(x)dx$ par $\langle T, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)}$.*

3. On suppose $f \le 0$ p.p.. Soit u la solution de (3.51). Montrer que $u \le 0$ p.p.. [Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pourra prendre $v = S_n(u)$ dans (3.51) avec $S_n \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $S_n(s) = \max(0, \min(s, 1/n))$ et faire tendre n vers $+\infty$.]

Corrigé – La démonstration est voisine de celle de la première question. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on prend $v = S_n(u)$ dans (3.51) avec $S_n \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $S_n(s) = \max(0, \min(s, 1/n))$. Ceci est possible car $S_n(u) \in H_0^1(\Omega)$. On sait aussi que $\nabla S_n(u) = 1_{E_n} \nabla u$ avec $E_n = \{0 < u < 1/n\}$ (voir la remarque 2.22). Comme $S_n(u) \geq 0$ p.p. et $f \leq 0$ p.p., on obtient

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla S_n(u)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varphi(u) W \cdot \nabla S_n(u)\,\mathrm{d}x \leq 0. \tag{3.55}$$

On a donc

$$\int_\Omega |\nabla S_n(u)|^2\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla S_n(u)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \varphi(u) W \cdot \nabla S_n(u)\,\mathrm{d}x.$$

Il existe $C_1 > 0$ t.q. $|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \leq C_1 |s_1 - s_2|$ pour tout $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, ceci donne, avec l'inégalité de Cauchy Schwarz dans la dernière intégrale

$$\| \, |\nabla S_n(u)| \, \|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_1}{n} \Big(\int_{E_n} |W(x)|^2\,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On pose $\gamma_n = \Big(\int_{E_n} |W(x)|^2\,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}}$.

On utilise maintenant l'inégalité de Sobolev et Hölder pour obtenir, avec $1^\star = \frac{N}{N-1}$ et en désignant par m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$,

$$\|S_n(u)\|_{L^{1^\star}} \leq \| \, |\nabla S_n(u)| \, \|_{L^1(\Omega)} \leq m(\Omega)^{1/2} \| \, |\nabla S_n(u)| \, \|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_1 m(\Omega)^{1/2}}{n} \gamma_n.$$

On pose $D_n = \{u \geq 1/n\}$, de sorte que

$$\frac{1}{n} (m(D_n))^{\frac{N-1}{N}} \leq \left(\int_{D_n} |S_n(u)|^{1^\star}\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{1^\star}} \leq \|S_n(u)\|_{L^{1^\star}}.$$

On a donc

$$(m(D_n))^{\frac{N-1}{N}} \leq C_1 m(\Omega)^{1/2} \gamma_n. \tag{3.56}$$

On conclut comme à la première question. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $E_{n+1} \subset E_n$. Comme $\cap_{n\in\mathbb{N}^\star} E_n = \emptyset$, la continuité décroissante de m donne que $\lim_{n\to+\infty} m(E_n) = 0$. Comme $W \in L^2(\Omega)^N$ on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = 0$ et donc, grâce à (3.56), que $\lim_{n\to+\infty} m(D_n) = 0$.

On remarque enfin que $D_{n+1} \supset D_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et $\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n = \{u > 0\}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} m(D_n) = m\{u > 0\}$ (par continuité croissante d'une mesure). On obtient donc $m\{u > 0\} = 0$ et donc $u \leq 0$ p.p..

Corrigé 3.6 (Convergence faible et non linéarité)

Remarque liminaire : Soit $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Lorsque qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend faiblement vers u dans un espace L^p et que la suite $\varphi(u_n)$ tend faiblement vers f dans un espace L^q, il est en général faux que $f = \varphi(u)$ p.p.. On ajoute l'hypothèse que $\int u_n \varphi(u_n)$ converge vers $\int uf$. Si φ est croissante, l'"astuce de Minty" permet alors de montrer que $f = \varphi(u)$ p.p.. Si φ est strictement croissante, on obtient même une convergence forte de u_n vers u (c'est l'"astuce de Leray-Lions"). Cet exercice détaille ces idées dans le cadre $p = q = 2$ avec une mesure finie.

Soit (X, T, m) un espace mesuré fini (c'est-à-dire $m(X) < +\infty$). On note L^2 l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(X, T, m)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites bornées de L^2 et $u, v \in L^2$. On suppose que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent faiblement dans L^2 vers u et v. On rappelle que ceci signifie que

$$\lim_{n\to+\infty} \int u_n w\,dm = \int uw\,dm \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int v_n w\,dm = \int vw\,dm \text{ pour tout } w \in L^2.$$

1. On suppose, dans cette question seulement, que $v_n = u_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et donc $u = v$ p.p.). Montrer que $u_n \to u$ dans L^2 (quand $n \to +\infty$) si et seulement si $\int u_n^2 dm \to \int u^2 dm$ (quand $n \to +\infty$).

Corrigé – On remarque que

$$\|u_n - u\|_2^2 = \int u_n^2 dm + \int u^2 dm - 2\int u_n u dm. \tag{3.57}$$

Comme $u_n \to u$ faiblement dans L^2, on a $\lim_{n\to+\infty} \int u_n u dm = \int u^2 dm$. On déduit alors facilement de (3.57) que $u_n \to u$ dans L^2 si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \int u_n^2 dm = \int u^2 dm$.

On suppose pour toute la suite de l'exercice que $\int u_n v_n \, dm \to \int uv \, dm$ (quand $n \to +\infty$) et qu'il existe une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q.

– φ continue et il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|\varphi(s)| \leq C + C|s|$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

– $v_n = \varphi(u_n)$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $w \in L^2$, montrer que, quand $n \to +\infty$,

$$\int (\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w) \, dm \to \int (v - \varphi(w))(u - w) \, dm. \tag{3.58}$$

Corrigé – On commence par remarquer que $\varphi(w) \in L^2$ (grâce aux hypothèses sur φ et $m(X) < +\infty$). On a alors

$$\int (\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w) = \int (v_n u_n - v_n w - \varphi(w)u_n + \varphi(w)w) dm.$$

Les convergences faibles de u_n et v_n vers u et v donnent

$$\lim_{n\to+\infty} \int u_n \varphi(w) dm = \int u\varphi(w) dm \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int v_n w dm = \int vw dm.$$

Enfin on a, par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} \int u_n v_n dm = \int uv dm$. On en déduit que bien que

$$\lim_{n\to+\infty} (\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w) dm = \int (v - \varphi(w))(u - w) dm.$$

3. On suppose que φ est croissante.

(a) Soit $\bar{w} \in L^2$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int (v - \varphi(u + t\bar{w}))t\bar{w} \, dm \leq 0.$$

[Utiliser (3.58).] En déduire que $\int (v - \varphi(u))\bar{w} \, dm = 0$.

Corrigé – On utilise ici (3.58) avec $w = u + t\bar{w}$. On obtient, quand $n \to +\infty$,

$$\int (\varphi(u_n) - \varphi(u + t\bar{w}))(u_n - u - t\bar{w}) \, dm \to -\int (v - \varphi(u + t\bar{w}))t\bar{w} \, dm.$$

Comme φ est croissante, on a $(\varphi(u_n) - \varphi(u + t\bar{w}))(u_n - u - t\bar{w}) \geq 0$ p.p. et donc $\int (\varphi(u_n) - \varphi(u + t\bar{w}))(u_n - u - t\bar{w}) dm \geq 0$. On en déduit, quand $n \to +\infty$, $\int (v - \varphi(u + t\bar{w}))t\bar{w} \, dm \leq 0$.

En prenant $t = \frac{1}{m}$ ($m \in \mathbb{N}^\star$), on a donc $\int (v - \varphi(u + \frac{\bar{w}}{m}))\bar{w} \leq 0$. En appliquant le théorème de convergence dominée (remarquer que $|(v - \varphi(u + \frac{\bar{w}}{m}))\bar{w}| \leq F$ p.p. avec $F = (|v| + C + C|u| + C|\bar{w}|)|\bar{w}| \in L^1$), on obtient, quand $m \to \infty$,

$$\int (v - \varphi(u))\bar{w} dm \leq 0.$$

De même, en prenant $t = -\frac{1}{m}$, on montre $\int (v - \varphi(u))\bar{w} dm \geq 0$. On a donc $\int (v - \varphi(u))\bar{w} dm = 0$.

(b) Montrer que $v = \varphi(u)$ p.p..

Corrigé – *On choisit $\bar{w} = 1_A - 1_{A^c}$, avec $A = \{v - \varphi(u) \geq 0\}$. La question précédente donne alors $\int |v - \varphi(u)| dm = 0$ et donc $v = \varphi(u)$ p.p..*

4. On suppose que φ strictement croissante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $G_n = (\varphi(u_n) - \varphi(u))(u_n - u)$.

(a) Montrer que $G_n \to 0$ dans L^1 quand $n \to +\infty$ (utiliser (3.58)).

Corrigé – *En prenant $w = u$ dans (3.58), on obtient $\lim_{n\to+\infty} \int G_n dm = 0$. Comme φ est croissante, on a $G_n \geq 0$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\|G_n\|_1 = \int G_n dm$. On en déduit bien que $G_n \to 0$ dans L^1.*

(b) Montrer qu'il existe une sous suite de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(G_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) t.q. $G_{\psi(n)} \to 0$ p.p.. En déduire que $u_{\psi(n)} \to u$ p.p. (utiliser la croissance stricte de φ).

Corrigé – *Comme $G_n \to 0$ dans L^1, il existe une sous suite de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(G_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) t.q. $G_{\psi(n)} \to 0$ p.p. (c'est la réciproque partielle du théorème de convergence dominée). Il existe donc $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $G_{\psi(n)}(x) \to 0$ (quand $n \to +\infty$) si $x \in A^c$.*

Soit $x \in A^c$. On pose $a = u(s)$. Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $f(s) = (\varphi(s) - \varphi(a))|s - a|$. Comme φ est strictement croissante continue, la fonction f est aussi strictement croissante continue. Elle admet donc une fonction réciproque, notée g, qui est continue. Comme $|f(u_{\psi(n)}(x)| = G_{\psi(n)}(x) \to 0$, on a $f(u_{\psi(n)}(x)) \to 0$ et donc $u_{\psi(n)}(x) = g(f(u_{\psi(n)}(x))) \to g(0) = a$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} u_{\psi(n)}(x) = u(x)$ pour tout $x \in A^c$. Ce qui prouve bien que $u_{\psi(n)} \to u$ p.p..

(c) Montrer que $u_n \to u$ dans L^p pour tout $p \in [1, 2[$.

Corrigé – *On montre que $u_n \to u$ dans L^p pour tout $p \in [1, 2[$ en raisonnant pas l'absurde. On suppose qu'il existe $p \in [1, 2[$ t.q. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge par vers u dans L^p. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une sous suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui reste en dehors de la boule (de L^p) de centre u et de rayon ε. Par le raisonnement de la question précédente, de cette sous suite, un peut extraire une sous suite, notée $(u_n)_{\psi(n)}$ qui converge p.p. vers u. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^2, on peut alors montrer que cette sous suite converge dans L^p vers u (c'est une conséquence du théorème de Vitali). En contradiction avec le fait que cette sous suite reste en dehors de la boule (de L^p) de centre u et de rayon ε. On a ainsi montré que $u_n \to u$ dans L^p pour tout $p \in [1, 2[$.*

Chapitre 4

Problèmes paraboliques

4.1 Aperçu des méthodes

Equation de la chaleur dans $\mathbb{R}^N$, solutions classiques

Soit $N \geq 1$ et $u_0 \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. On s'intéresse ici à chercher des solutions classiques au problème suivant

$$\begin{array}{l} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R}^N,\ t \in \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^N. \end{array} \tag{4.1}$$

Par "solution classique", on entend une fonction $u \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ solution de (4.1) au sens classique de la dérivation et de la condition initiale. La notation u_t désigne la dérivée partielle de u par rapport au temps $\partial u/\partial t$ et Δu désigne la somme des dérivées secondes par rapport aux composantes de x.

On commence par un petit calcul formel (le terme "formel" signifiant souvent en mathématiques "non nécessairement justifié"). On suppose qu'on peut utiliser pour la condition initiale et pour la solution la transformée de Fourier (en espace). On retient comme formule pour la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^N$ la formule suivante :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx.$$

Si u est solution de (4.1), on obtient ainsi (si on est autorisé à utiliser la transformée de Fourier)

$$\hat{u}_t(\xi,t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) = 0, \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0, \text{ et } \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi), \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}^N,$$

ce qui donne

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi), \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et } t \geq 0.$$

En choisissant $g(t) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\widehat{g(t)}(\xi) = e^{-|\xi|^2 t}$, on a donc $\hat{u}(\cdot,t) = \widehat{g(t)}\hat{u}_0$ pour tout $t \geq 0$ et donc (en utilisant le fait que la transformée de Fourier transforme la convolution en produit),

$$\hat{u}(\cdot,t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \widehat{g(t) \star u_0} \text{ pour } t \geq 0.$$

ou encore

$$u(\cdot,t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} g(t) \star u_0 \text{ pour } t \geq 0.$$

Il reste à calculer $g(t)$. Comme $\widehat{g(t)} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour $t > 0$, le théorème d'inversion de Fourier nous donne $g(t) = \widehat{\widehat{g(t)}}(-\cdot)$, c'est-à-dire

$$g(t)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int e^{ix\cdot\xi} e^{-|\xi|^2 t} d\xi \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0.$$

Le changement de variable $\xi = \eta/\sqrt{2t}$ donne alors

$$g(t)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \frac{1}{(2t)^{\frac{N}{2}}} \int e^{ix\cdot\frac{\eta}{\sqrt{2t}}} e^{-\frac{|\eta|^2}{2}} d\eta \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0.$$

Finalement, on obtient

$$g(t)(x) = \frac{1}{(2t)^{\frac{N}{2}}} e^{-|\frac{x}{\sqrt{2t}}|^2 \frac{1}{2}} = \frac{1}{(2t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0,$$

Ce qui donne

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0. \tag{4.2}$$

Il est maintenant possible de donner des conditions sur u_0 pour lesquelles (4.2) donne une solution classique de (4.1). Voici deux exemples de conditions suffisantes pour lesquelles la fonction u donnée par (4.2) est une solution classique de (4.1) :

Exemple 1 :

$$u_0 \in (L^1(\mathbb{R}^N) + L^\infty(\mathbb{R}^N)) \cap C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}).$$

Exemple 2 :

$$u_0 \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \text{ et il existe } \exists C \in \mathbb{R} \text{ et } p \in \mathbb{N} \text{ t.q. } |u_0(x)| \leq C(1 + |x|^p) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.3}$$

On a ainsi obtenu des résultats d'existence d'une solution classique pour (4.1). A-t-on alors unicité de la solution ? On n'a pas de résultat d'unicité si on ne met des hypothèses que sur u_0. Plus précisément, on peut construire une solution classique non nulle de (4.1) avec $u_0 = 0$. Il n'y a donc jamais unicité de la solution classique de (4.1). Par contre, si on rajoute une hypothèse convenable de croissance sur la solution, on a un résultat d'unicité.

Théorème 4.1 *Sous l'hypothèse* (4.3)*, il existe une et une seule fonction u vérifiant :*

1. *u est solution classique de* (4.1)*.*
2. *$\forall T > 0, \exists C_T \in \mathbb{R}, P_T \in \mathbb{N}$ t.q. $|u(x,t)| \leq C_T(1 + |x|^{P_T})$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $\forall t \in [0,T]$.*

Comme nous l'avons déjà dit, sans la deuxième condition sur u donnée dans le théorème 4.1, il n'y a pas unicité de la solution puisque l'on peut trouver $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$, $u \neq 0$ et t.q.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Un exemple est donné dans le livre de Smoller [1]. La démonstration de l'unicité dans le théorème 4.1 peut se faire en utilisant la transformée Fourier dans l'espace $\mathcal{S}'$ (où $\mathcal{S}'$ est le dual de l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions C^∞ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, muni de sa topologie naturelle). Pour cela, on remarque que, sous l'hypothèse de croissance donnée dans le théorème 4.1, on a $u \in \mathcal{S}'$. Notons que ce raisonnement par analyse de Fourier est limité à $\mathbb{R}^N$ et essentiellement au cas du laplacien.

1. J. Smoller, Shock waves and reaction-diffusion equations. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 258. Springer-Verlag, New York, 1994. xxiv+632 pp. ISBN : 0-387-94259-9

Solutions presque classiques, équation de diffusion, Ω ouvert borné

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Pour u_0 donné, on s'intéresse maintenant au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,t) = 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega \text{ et } t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ pour } x \in \Omega. \end{array} \right. \tag{4.4}$$

Pour cela on définit un opérateur $\mathcal{A}$ d'une partie de $L^2(\Omega)$, notée $D(\mathcal{A})$, dans $L^2(\Omega)$ en posant

$$D(\mathcal{A}) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

et, pour $u \in D(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}u = -\Delta u$. Dans la définition de $D(\mathcal{A})$, Δu est une dérivée faible de u. Le fait que $u \in D(\mathcal{A})$ signifie donc simplement que $u \in H_0^1(\Omega)$ et qu'il existe $f \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx$ pour tout $v \in C_c^\infty(\Omega)$ (ou, de manière équivalente, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$).
On suppose maintenant que $u_0 \in L^2(\Omega)$ et va chercher une solution de (4.4) au sens suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in C^1(]0,+\infty[, L^2(\Omega)) \cap C([0,+\infty[, L^2(\Omega)), \\ u(t) \in D(\mathcal{A}) \text{ et } u'(t) + \mathcal{A}u(t) = 0 \text{ p.p., pour tout } t > 0, \\ u(0) = u_0 \text{ p.p..} \end{array} \right. \tag{4.5}$$

On rappelle (voir le chapitre 2) qu'il existe une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ (c'est à dire une famille orthonormale dense dans $L^2(\Omega)$), notée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, formée de fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction e_n est une solution faible de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta e_n = \lambda_n e_n \text{ dans } \Omega, \\ e_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

avec $\lambda_n > 0$ et $\lambda_n \uparrow +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a donc $e_n \in D(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A}e_n = \lambda_n e_n$.
Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$. En notant $(u|v)_2$ le produit scalaire de u et v dans $L^2(\Omega)$, on a

$$u_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} (u_0|e_n)_2 e_n$$

(cette série étant convergente dans $L^2(\Omega)$).
On a aussi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (u_0|e_n)_2^2 = \|u_0\|_2^2 < +\infty$.
On pose, pour $t \geq 0$,

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} (u_0|e_n)_2 e_n,$$

qui est une série convergente dans $L^2(\Omega)$. On a donc ainsi $u(t) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ pour tout $t \geq 0$ et on a même (comme la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée inférieurement par λ_1 avec $\lambda_1 > 0$) $u \in C([0,+\infty[, L^2(\Omega))$ et $u(0) = u_0$ p.p.. D'autre part, comme $\lambda_n \uparrow +\infty$ quand $n \to +\infty$, il est facile de montrer que la fonction u est dérivable de $]0,+\infty[$ dans $L^2(\Omega)$ et que la dérivée de u est obtenue est dérivant la série terme à terme (ceci est une conséquence du fait que la série dérivée terme à terme est, sur $]0,+\infty[$, localement uniformément convergente dans $L^2(\Omega)$). On a donc, pour tout $t > 0$,

$$u'(t) = \frac{du}{dt} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-\lambda_n) e^{-\lambda_n t} (u_0|e_n)_2 e_n.$$

(La série écrite dans le terme de droite est convergente dans $L^2(\Omega)$).

On rappelle que (selon le chapitre 2) $u(t) \in D(\mathcal{A})$ pour tout $t > 0$ car la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n t}(u_0|e_n)_2 e_n$ est convergente dans $L^2(\Omega)$. Le chapitre 2 donne aussi, pour tout $t > 0$,

$$\mathcal{A}u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n t}(u_0|e_n)_2 e_n.$$

On a donc $u \in C^1(]0,+\infty[, L^2(\Omega))$ et $u'(t) + \mathcal{A}(u(t)) = 0$ p.p. pour tout $t \in]0,+\infty[$. On a ainsi trouvé une solution au problème (4.5).

On veut montrer maintenant que cette solution est unique. Pour cela, nous allons montrer que si u est solution du problème avec donnée initiale nulle, c'est-à-dire

$$\begin{cases} u \in C^1(]0,+\infty[, L^2(\Omega)) \cap C([0,+\infty[, L^2(\Omega)), \\ u(t) \in D(\mathcal{A}) \text{ et } u'(t) + \mathcal{A}u(t) = 0 \text{ p.p., pour tout } t > 0, \\ u(0) = 0 \text{ p.p.}, \end{cases}$$

alors u reste nulle pour tout temps, c'est-à-dire $u(t) = 0$ p.p. pour tout $t \geq 0$.
Soit $t > 0$. Comme $u'(t) + \mathcal{A}u(t) = 0$ p.p., en prenant le produit scalaire avec $u(t) \in L^2(\Omega)$, on obtient $(u'(t)|u(t))_2 + (\mathcal{A}u(t)|u(t))_2 = 0$. Comme $(\mathcal{A}u(t)|u(t))_2 = \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx$, on a donc

$$(u'(t)|u(t))_2 = -\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \leq 0.$$

Soit ψ l'application définie par $t \mapsto \psi(t) = \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$. L'application ψ est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\psi'(t) = 2(u'(t)|u(t))_2$ pour tout $t > 0$. On a donc $\psi'(t) \leq 0$ pour tout $t > 0$. L'application ψ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $\psi(0) = 0$, on en déduit que $\psi(t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$. Donc $\psi(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. On a bien finalement $u(t) = 0$ p.p. pour tout $t \geq 0$.

Nous avons ainsi montré l'existence et l'unicité de la solution de (4.5). Cette solution est dite "presque classique" car la dérivation en temps est prise au sens classique (puisque u est de classe C^1 à valeurs dans $L^2(\Omega)$), la condition intiale est prise au sens classique dans $L^2(\Omega)$. Par contre le laplacien de $u(t)$ est pris au sens des dérivées faibles. Il faut un travail supplémentaire (sur la régularité des fonctions e_n) pour montrer que l'équation $u_t - \Delta u$ est vérifiée au sens classique sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^\star$. Ceci est fait pour $N = 1$ dans l'exercice 4.1.

Remarque 4.2 (Généralisation) On peut aussi montrer l'existence et l'unicité (pour $u_0 \in L^2(\Omega)$) de la solution de (4.5) en remplaçant, dans la définition de $\mathcal{A}$, Δu par $\sum_{i,j=1}^N D_j(a_{ij} D_i u)$, avec $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, sous une hypothèse de coercivité, c'est-à-dire si il existe $\alpha > 0$ t.q. $\alpha|\xi|^2 \leq \sum a_{ij}\xi_i\,\xi_j$ p.p. dans Ω et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$. On peut aussi remplacer $u'(t) + \mathcal{A}u(t) = 0$ par $u'(t) + \mathcal{A}u(t) = f(t)$ si $f \in C([0,\infty[, L^2(\Omega))$.

Solutions presque classiques par semi-groupes

Soit E un espace de Banach réel et $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \to E$ un opérateur linéaire. L'ensemble $D(\mathcal{A})$ est donc le s.e.v. de E sur lequel $\mathcal{A}$ est défini. On dit que $\mathcal{A}$ est m-accrétif si $\mathcal{A}$ vérifie :

(i) $D(\mathcal{A})$ est dense dans E,

(ii) $\forall \lambda > 0, (I + \lambda\mathcal{A})$ est inversible, d'inverse continue et $\|(I + \lambda\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(E,E)} \leq 1$.

On rappelle que $\mathcal{L}(E,E)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans E et que, pour $T \in \mathcal{L}(E,E)$, $\|T\|_{\mathcal{L}(E,E)} = \sup_{u\in E, u\neq 0} \|T(u)\|_E/\|u\|_E$.

Remarque 4.3 (Opérateur maximal monotone) Soit E est un espace de Hilbert réel et $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \to E$ un opérateur linéaire. L'opérateur $\mathcal{A}$ est m-accrétif si et seulement si il vérifie :

$$\begin{cases} (\mathcal{A}u|u)_E \geq 0 \quad \forall u \in D(\mathcal{A}), \\ (Id + \mathcal{A}) \text{ surjectif.} \end{cases}$$

Dans ce cas, on dit que $\mathcal{A}$ est maximal monotone.

Exemple : Le laplacien Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $E = L^2(\Omega)$ et $\mathcal{A}$ défini par $D(\mathcal{A}) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ et $\mathcal{A}u = -\Delta u$ si $u \in D(\mathcal{A})$. L'opérateur $\mathcal{A}$ est alors un opérateur m-accrétif (ou maximal monotone puisqu'on est dans le cas d'un Hilbert).

Remarque 4.4 (Graphe d'un opérateur m-accrétif) Le graphe d'un opérateur m-accrétif est fermé. En ce sens, il est maximal, d'où le "m" dans m-accrétif.

On admettra le théorème suivant :

Théorème 4.5 (Hille-Yosida) *Soit E un espace de Banach, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \to E$ un opérateur linéaire m-accrétif et $u_0 \in D(\mathcal{A})$. Alors il existe un unique $u : \mathbb{R}_+ \to E$ tel que*

$$u \in C^1([0,+\infty[, E), \tag{4.6a}$$
$$u(t) \in D(\mathcal{A}), \forall t \geq 0, \tag{4.6b}$$
$$u'(t) + \mathcal{A}(u(t)) = 0 \ \textit{sur} \ \mathbb{R}_+^\star, \tag{4.6c}$$
$$u(0) = u_0. \tag{4.6d}$$

La démonstration de ce théorème peut s'effectuer par une discrétisation en temps : on considére le problème elliptique $\frac{u_{n+1}-u_n}{\delta t} + \mathcal{A}u_{n+1} = 0$, qui s'écrit encore $u_{n+1} = (I + \delta t \mathcal{A})^{-1} u_n$, où $\delta t > 0$ est le pas de la discrétisation. On effectue ensuite un passage à la limite $\delta t \to 0$.

Définition 4.6 (Semi-groupe) *Soit E un espace de Banach, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \to E$ un opérateur linéaire m-accrétif. Pour $u_0 \in D(\mathcal{A})$ et $t \geq 0$, on pose $S(t)u_0 = u(t)$, où u est l'unique fonction vérifiant* (4.6)*. Alors l'opérateur $S(t)$ est un opérateur linéaire continu de $D(\mathcal{A}) \subset E$ dans E qui vérifie*

$$\begin{cases} S(t+s) = S(t) \circ S(s) \textit{ pour } t, s \geq 0; \\ S(0) = Id \\ \|S(t)u_0\|_E \leq \|u_0\|_E, \end{cases}$$

On dit que $\{S(t), t \geq 0\}$ est un semi-groupe de contraction.

Soit $t \geq 0$. Comme $\overline{D(\mathcal{A})} = E$, l'opérateur $S(t)$ se prolonge de manière unique à tout E en un opérateur $\overline{S(t)}$ et $\overline{S(t)} \in \mathcal{L}(E,E)$.

Définition 4.7 (Solution "mild") *Soit E un espace de Banach, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \to E$ un opérateur linéaire m-accrétif. Soit $u_0 \in E$, la fonction $u(t) = \overline{S(t)}u_0$, définie de manière unique, s'appelle solution mild du problème*

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}u = 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Dans le cas du laplacien, on peut se demander en quel sens la solution mild satisfait (4.4). On peut montrer que la solution mild est solution en un sens faible que nous verrons dans la section 4.3. De plus, cette solution mild est, dans ce cas particulier, l'unique solution faible. Cependant, cette situation n'est pas complètement générale. La solution mild, obtenue par densité, est toujours unique (dès que $u_0 \in E$, quelque soit l'espace de Banach E et l'opérateur m-accrétif $\mathcal{A}$). Pour les problèmes issus d'équations aux dérivées partielles, cette solution mild est en général une solution faible du problème que l'on veut résoudre ; toutefois le problème de l'unicité de la solution faible est beaucoup plus difficile. On peut avoir non unicité de la solution faible quand on prend une"solution faible" dans un sens qui semble pourtant raisonnable. Il n'y a pas alors d'équivalence entre la notion de solution mild et de solution faible, car la solution mild est unique et, malheureusement, il n'y a pas unicité de la solution faible.

Pour essayer d'éclairer cette difficulté, nous nous intéressons, dans le paragraphe qui suit, à un problème un peu plus simple. Nous nous intéressons à un problème elliptique pour lequel nous montrons que la solution obtenue par densité, à la manière de la solution mild introduite ci-dessus, est unique alors qu'on n'a pas unicité des solutions faibles en prenant une définition "naturelle" de solution faible. Ceci montre en particulier que dans le cas parabolique, il n'y a pas non plus d'équivalence entre solution mild et solution faible (par exemple en considérant les solutions stationnaires).

Le Laplacien avec donnée L^1 On considère un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, des fonctions a_{ij}, pour $i, j = 1, \ldots, N$, appartenant à $L^\infty(\Omega)$ et satisfaisant l'hypothèse de coercivité habituelle :

$$\exists\, \alpha > 0; \quad \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, \xi_i\, \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \text{ p.p. dans } \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

On note A la fonction à valeurs matricielle donnée par les fonctions a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, N$. On sait (par le lemme de Lax-Milgram) que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique u solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A\nabla u.\nabla v\, dx = \int f v, \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{4.7}$$

On considère le même problème avec une donnée moins régulière $f \in L^1(\Omega)$.

Etape 1 - Estimation, cas régulier. Pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$, on montre qu'il existe $C_q \in \mathbb{R}$ tel que si u est (l'unique) solution de (4.7) avec $f \in L^2(\Omega)$ alors $\|u\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq C_q \|f\|_{L^1(\Omega)}$. On pose alors $T_q(f) = u$.

Etape 2 - Solution mild Pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$, l'application T_q de $L^2(\Omega)$ dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ est continue de $L^2(\Omega)$ muni de la norme de $L^1(\Omega)$ dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ (muni de sa norme naturelle). On peut donc prolonger T_q de manière unique par densité sur tout $L^1(\Omega)$ (car $L^2(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$). On appelle $\overline{T}_q$ ce prolongement. On remarque alors que $\overline{T_{q_1}} f = \overline{T_{q_2}} f$ pour tout q_1, q_2 t.q. $1 \leq q_1 < q_2 < \frac{N}{N-1}$. On peut ainsi définir un opérateur (linéaire) T de L^1 dans $\bigcap_{1 \leq q < \frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$ par $T(f) = \overline{T_q}(f)$ pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$.

Définition 4.8 (Solution mild pour un problème elliptique à donnée L^1) *Sous les hypothèses précédentes sur Ω et A, soit $f \in L^1(\Omega)$. La fonction Tf est la solution mild de*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f \textit{ dans } \Omega, \\ u = 0 \textit{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{4.8}$$

Etape 3 - Quel sens donner à la solution mild ? Il est naturel de se demander quel rapport il y a entre la solution mild $u = Tf$ et une solution faible du problème de Dirichlet homogène. Il est assez facile de montrer que u est

solution faible dans le sens (naturel) suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in \displaystyle\bigcap_{1\le q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A\nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall v \in \bigcup_{r>N} W_0^{1,r}(\Omega). \end{array}\right. \tag{4.9}$$

Remarque : un résultat analogue d'existence de solution mild et donc d'existence de solution faible est encore vrai si f est une mesure sur Ω (dans (4.9), on remplace alors $fvdx$ par vdf). Pour montrer ce résultat, on utilise la densité de $L^2(\Omega)$ dans l'ensemble des mesures sur Ω au sens de la convergence faible-$\star$ dans $C(\bar\Omega)'$(car l'ensemble des mesures sur Ω peut être vu comme une partie du dual de $C(\overline{\Omega})$). Il faut aussi utiliser le fait que les éléments de $W_0^{1,r}(\Omega)$ sont des fonctions continues pour $r > N$.

Etape 4 - Unicité mild, non unicité faible La solution mild est unique. La solution de (4.9) est-elle unique ? pas toujours. . . . Montrons d'abord que si $N = 2$, la solution faible est unique. Ceci se montre par régularité sur le problème dual, qui entraîne l'unicité sur le problème primal. Soit u solution de

$$\left\{\begin{array}{l} u \in \displaystyle\bigcap_{1\le q<2} W_0^{1,q}(\Omega), \\ \displaystyle\int A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in \bigcup_{r>2} W_0^{1,r}(\Omega). \end{array}\right. \tag{4.10}$$

On veut montrer que $u = 0$. On ne peut pas prendre comme fonction test $v = u$ dans (4.9) ou (4.10) , en raison du manque de régularité de u. Pour contourner ce problème, on va raisonner en utilisant la régularité des solutions du problème dual. On remarque d'abord que u est solution de (4.10) et que (4.10) peut se re-écrire ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in \displaystyle\bigcap_{1\le q<2} W_0^{1,q}, \\ \displaystyle\int A^t\nabla v \cdot \nabla u \, dx = 0, \quad \forall v \in \bigcup_{r>2} W_0^{1,r}(\Omega). \end{array}\right. \tag{4.11}$$

Or on sait (par le lemme de Lax-Milgram) que si $g \in L^2(\Omega)$ il existe un unique v solution de

$$\left\{\begin{array}{l} v \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int A^t\nabla v \cdot \nabla w \, \mathrm{d}x = \int gw \, \mathrm{d}x, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{4.12}$$

((4.12) est le problème dual de (4.7).)
On aimerait pouvoir prendre $w = u$ dans (4.12), car on aurait alors, grâce à (4.11), $\int_\Omega gu \, \mathrm{d}x = 0$ pour tout $g \in L^2(\Omega)$, ce qui permettrait de conclure que $u = 0$. Mais pour l'instant, on ne peut pas car u et v ne sont pas dans les bons espaces. L'astuce consiste à considérer un second membre g plus régulier dans (4.12) et d'utiliser le résultat de régularité dû à Meyers suivant.

Théorème 4.9 (Meyers) *Il existe $p^\star > 2$, ne dépendant que de A et Ω, t.q. si $g \in L^\infty(\Omega)$ et v solution de* (4.12) *alors $v \in W_0^{1,p^\star}(\Omega)$.*

Soit donc $g \in L^\infty(\Omega)$ et v solution de (4.12). On a alors $v \in W_0^{1,p^\star}(\Omega)$ grâce au théorème de Meyers. On note $(p^\star)'$ l'exposant conjugué de $p^\star$, de sorte que $(p^\star)' = \frac{p^\star}{p^\star-1} < 2$. Par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W_0^{1,(p^\star)'}(\Omega)$, on déduit de (4.12) que

$$\int A^t\nabla v \cdot \nabla w \, \mathrm{d}x = \int gw \, \mathrm{d}x, \quad \forall w \in W_0^{1,(p^\star)'}(\Omega). \tag{4.13}$$

Or, comme $(p^\star)' = \frac{p^\star}{p^\star-1} < 2$, toute solution u solution de (4.11) appartient à $W_0^{1,(p^\star)'}(\Omega)$. On peut donc prendre $w = u$ dans (4.13). Mais comme $v \in W_0^{1,p^\star}(\Omega)$ avec $p^\star > 2$, on a également, par (4.11), $\int_\Omega A^t\nabla v \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x = 0$. On a donc $\int_\Omega gu \, \mathrm{d}x = 0$, pour tout $g \in L^\infty(\Omega)$. On en déduit que $u = 0$ en prenant successivement $g = 1_{\{u>0\}}$ puis $g = 1_{\{u<0\}}$.
Pour $N = 3$, le théorème de régularité de Meyers est encore vrai, la démonstration d'unicité est donc encore juste si A est telle que $p^\star > N = 3$ (afin de pouvoir prendre v comme fonction test dans (4.9)). Mais il existe des fonctions matricielle $A = (a_{ij})_{i,j=1,N}$ (à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ et coercive) pour lesquelles $p^\star < 3$. L'unicité n'est plus assuré et on peut effectivement construire des cas pour lesquels la solution de (4.9) n'est pas unique (voir l'article de Prignet sus-mentionné).
Etape 5 Que peut-on rajouter à solution faible pour avoir l'unicité ? Pour $f \in L^1(\Omega)$, on montre qu'il existe une et une solution à une nouvelle formulation, due à Ph. Bénilan [2] . Cette nouvelle formulation (aussi appelée formulation entropique), est la suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in W_0^{1,q}(\Omega), \text{ pour tout } 1 \le q < \frac{N}{N-1}, \qquad T_k(u) \in H_0^1(\Omega), \ \forall k > 0, \\ \\ \displaystyle\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla T_k(u-\varphi) \, \mathrm{d}x = \int f T_k(u-\varphi) \, \mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \ \forall k \ge 0. \end{array}\right. \tag{4.14}$$

où T_k est la fonction troncature, définie par : $T_k(s) = \max(\min(k, s), -k)$. L'article de Bénilan *et al*. démontre qu'il existe une unique solution au problème (4.14) (qui est donc la solution mild de (4.8)). Ph. Bénilan conjecturait que le fait d'ajouter la condition $T_k(u) \in H_0^1(\Omega)$ (pour tout $k > 0$) à la formulation (4.9) devait suffire à assurer l'unicité. De fait, dans le contre exemple de Serrin-Prignet [3], le contre exemple consiste à constuire une solution non nulle de (4.9) avec $f = 0$. Mais, cette solution ne vérifie pas $T_k(u) \in H_0^1(\Omega)$ pour $k > 0$. Toutefois, la conjecture de Bénilan reste une conjecture...
Une autre question ouverte consite à trouver une formulation semblable à (4.14) donnant l'unicité lorsque f est une mesure sur Ω.

Remarque 4.10 (Limitation de la méthode semi-groupe) Une difficulté importante de cette méthode par semi-groupe est sa généralisation au cas où A dépend de t.

Méthode de Faedo-Galerkin (discrétisation en espace)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T > 0$, u_0 une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\Omega\times]0,T[$ dans $\mathbb{R}$. On considère le problème

$$\left\{\begin{array}{l} u_t - \Delta u = f \text{ dans } \Omega\times]0,T[, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times]0,T[, \\ u(.,0) = u_0 \end{array}\right. \tag{4.15}$$

Pour $u_0 \in L^2(\Omega)$ et f dans un espace convenablement choisi, on va chercher $u \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ solution faible de ce problème.
Comme $H_0^1(\Omega)$ est séparable, il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espaces inclus dans $H_0^1(\Omega)$, de dimension finie, par exemple $\dim E_n = n$, et tels que $E_n \subset E_{n+1}$ et

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} = H_0^1(\Omega).$$

2. Ph. Bénilan, Philippe, L. Boccardo, Th. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J.-L. Vazquez, An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 22 (1995), no. 2, 241–273.

3. **J. Serrin**, Pathological solutions of elliptic differential equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 18 1964 385–387.
A. Prignet, Remarks on existence and uniqueness of solutions of elliptic problems with right-hand side measures. Rend. Mat. Appl. (7) 15 (1995), no. 3, 321–337.

Soit $\{e_1 \dots e_n\}$ une base de E_n. On cherche $u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) e_i$ t .q.

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \alpha_i'(t) e_i \, e_k \, \mathrm{d}x \, + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \alpha_i(t) \nabla e_i . \nabla e_k \, dx = \int_\Omega f(t) e_k \, \mathrm{d}x, \text{ pour tout } k = \{1 \dots n\} \text{ et } t > 0,$$

et les $\alpha_i(0)$ sont choisis pour que $u_n(0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(0) e_i \to u_0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. Ceci donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, un système de n équations différentielles avec condition initiale pour lequel on montre l'existence d'une solution. On cherche alors des estimations sur la solution u_n qui permettent de passer à la limite quand $n \to +\infty$. Cette technique, qu'on va développer plus loin, permet de montrer que pour $f \in L^2(]0,T[, H^{-1})$ la limite u des u_n satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)), u \in C([0,T], L^2(\Omega)), u(0) = u_0 \text{ p.p.}, \\ \displaystyle\int_0^T \langle u_t, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \, \mathrm{d}t + \int_0^T \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \right) \, \mathrm{d}t = \int_0^T \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \, \mathrm{d}t, \ \forall v \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)). \end{array} \right. \tag{4.16}$$

Discrétisation en espace et en temps

On discrétise le problème (4.15) par un schéma numérique, par exemple par éléments finis $P1$ en espace et par un schéma d'Euler implicite en temps. On obtient une solution approchée notée u_n. On obtient alors des estimations sur u_n. On passe ensuite à la limite lorsque $n \to +\infty$.
Pour $f \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$, on obtient ainsi pour le problème de la chaleur (4.15) que la limite u du schéma numérique satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)), \\ \displaystyle\int_0^T \int_\Omega u \varphi_t \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t - \int_\Omega u_0(x) \varphi(x,0) \, \mathrm{d}x \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_0^T \int_\Omega f \varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t, \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty([0,T[\times \Omega)). \end{array} \right. \tag{4.17}$$

On montrera plus loin que les problèmes (4.16) et (4.17) sont équivalents. Ceci est donné dans le lemme suivant.

Lemme 4.11 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T > 0$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$. Alors, la fonction u est solution de* (4.16) *si et seulement si u est solution de* (4.17)*.*

Existence par degré topologique

Dans le cas de problèmes non linéaires, plutôt que d'approcher ou de discrétiser, on peut se ramener à un problème linéaire et appliquer un argument de type degré topologique, en utilisant les résultats connus dans le cas linéaire. C'est ce qu'on fera par exemple sur le problème (voir le problème (4.33))

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + \mathrm{div}(v(t,x) f(u)) - \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \times]0,T[, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times]0,T[, \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{array} \right.$$

4.2 Intégration de fonctions à valeurs vectorielles

On a utilisé dans les formulations faible de la section 4.1 les espaces $L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$, $L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega))$ et $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$. Ce sont des espaces pour lesquels on utilise l'intégration de fonctions à valeurs dans un espace de Banach de dimension infinie (comme, par exemple, $L^2(\Omega)$). Il nous faut donc préciser comment on définit une telle intégrale. Rappelons d'abord comment on définit l'intégrale sur $\mathbb{R}$. On commence par définir la notion de mesurabilité. On rappelle que si (X,T,m) est un espace mesuré, une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable si $f^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Une généralisation facile de cette notion de mesurabilité aux espaces de Banach est donc la suivante : une fonction f de X dans E est mesurable si $f^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in \mathcal{B}(E)$ (où $\mathcal{B}(E)$ est la tribu engendrée par les ouverts de E). En fait cette notion n'a aucun intérêt du point de vue de l'intégrale si E n'est pas séparable. Par ailleurs, une fonction réelle $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si f est une limite simple de fonctions étagées, *i.e.* si et seulement si il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées t.q. $f_n \to f$ simplement (cette équivalence n'est plus vraie si f est à valeurs dans E où est E est un espace de Banach non séparable). C'est cette dernière notion (limite simple de fonctions étagées) qui est intéressante pour définir l'intégrale. Plus précisément, comme l'intégrale ne voit pas les changements d'une fonction sur un ensemble de mesure nulle, nous allons définir la notion de "m-mesurabilité" de la manière suivante :

Définition 4.12 (Fonction m-mesurable) *Soit (X,T,m) un espace mesuré. On dit qu'une fonction f, définie de X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou à valeurs dans un Banach E est m- mesurable si elle est limite presque partout de fonctions étagées.*

Proposition 4.13 (Mesurabilité et m-mesurabilité) *Soit (X,T,m) un espace mesuré.*

1. *Une fonction f de X à valeurs dans $\mathbb{R}$ est m-mesurable si et seulement si il existe g mesurable t.q. $f = g$ p.p..*
2. *Soit E est un espace de Banah séparable et f une fonction de X dans E. Alors,*
   (a) *f est mesurable au sens "$f^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in B(E)$" si et seulement si f est limite simple de fonctions étagées.*
   (b) *Comme dans le cas réel, la fonction f de X dans E est m-mesurable si et seulement si il existe g mesurable t.q. $f = g$ p.p..*

Soit (X,T,m) un ensemble mesuré, E un espace de Banach et f une fonction m-mesurable de X dans E. Il est facile de voir que la fonction $x \mapsto \|f(x)\|_E$ est m-mesurable de X dans $\mathbb{R}_+$. la quantité $\int \|f(x)\|_E dm(x)$ est donc parfaitement définie dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Ceci permet de définir l'espace $\mathcal{L}^1_E(X,T,m)$.

Définition 4.14 (L'espace $\mathcal{L}^1_E(X,T,m)$) *Soit (X,T,m) un ensemble mesuré, E un espace de Banach et f une fonction m-mesurable de X dans E. La fonction f appartient à $\mathcal{L}^1_E(X,T,m)$ si*

$$\int \|f(x)\|_E dm(x) < +\infty.$$

On veut maintenant définir l'intégrale d'un élément de $\mathcal{L}^1_E(X,T,m)$ où (X,T,m) est un espace mesuré et E un espace de Banach. Soit $f \in \mathcal{L}^1_E(X,T,m)$. On ne peut pas utiliser la même technique que pour $E = \mathbb{R}$ (c'est-à-dire décomposer f en f^+ et f^- et commencer par intégrer des fonctions mesurables positives). Par contre, comme f est m-mesurable, on sait qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées t.q. $f_n \to f$ p.p.. Il existe donc $A \in T$ t.q. $m(A^c) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in A$. On pose alors

$$A_n = \{x \in A; \|f_n(x)\|_E \leq 2\|f(x)\|_E\} \text{ et } g_n = f_n\, 1_{A_n}.$$

(le nombre 2 pourrait être remplacé ici par n'importe quel nombre > 1 et A pourrait être remplacé par un autre ensemble vérifiant les mêmes propriétés. Cela ne changerait pas la définition de l'intégrale donnée dans la définition 4.15.) La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

$$\begin{array}{l} g_n \text{ étagée pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ g_n \to f \text{ p.p.}, \\ \int \|g_n - f\|_E dm \to 0 \text{ par convergence dominée.} \end{array}$$

La définition de l'intégrale d'une fonction étagée est immédiate. On pose

$$I_n = \int g_n dm.$$

On peut alors montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E. Cette suite converge donc dans E. On peut aussi montrer que la limite de cette suite ne dépend que de f (et non du choix de f_n et de A). Il est donc naturel de définir l'intégrale de f comme la limite de cette suite. C'est ce qui est fait dans la définition 4.15.

Définition 4.15 (Intégrale à valeurs dans E) *Soit $f : X \to E$ où (X, T, m) est un espace mesuré et E un espace de Banach.*

1. *(Rappel) $f \in \mathcal{L}^1_E(X, T, m)$ si f est m-mesurable et $\int \|f\|_E dm < +\infty$.*
2. *(Intégrale) Soit $f \in \mathcal{L}^1_E(X, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions étagées t.q. $f_n \to f$ p.p.. Soit $A \in T$ t.q. $m(A^c) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in A$. On pose $A_n = \{x \in A$ t.q. $\|f_n(x)\|_E \leq 2\|f(x)\|\}$ et $g_n = f_n\, 1_{A_n}$. On définit l'intégrale de f par :*

$$\int f d_m = \lim_{n\to+\infty} \int g_n dm \in E.$$

Avec la relation d'équivalence $=$ p.p., on définit alors $L^1_E(X, T, m)$. Il est alors facile aussi de deviner les définitions de $\mathcal{L}^p_E(X, T, m)$ et $L^p_E(X, T, m)$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$. Un élément de $L^p_E(X, T, m)$ est donc un ensemble d'éléments de $\mathcal{L}^p_E(X, T, m)$ (et deux fonctions appartenant à cet ensemble sont égales p.p.). Comme d'habitude en intégration, si $F \in L^p_E(X, T, m)$, on confond F et f si $f \in F$ (de sorte que l'on raisonne comme si $F \in \mathcal{L}^p_E(X, T, m)$).

Proposition 4.16 *Soit $1 \leq p \leq +\infty$, (X, T, m) un espace mesuré σ-fini et E un espace de Banach. Alors*

1. *$L^p_E(X, T, m)$ (avec sa norme naturelle) est complet. C'est donc un espace de Banach.*
2. *Si $p < +\infty$ et E est séparable, $L^p_E(X, T, m)$ est séparable.*
3. *Si $p = 2$ et E est un Hilbert, alors $L^2_E(X, T, m)$ est aussi un espace de Hilbert, dont le produit scalaire est défini par :*

$$(u|v)_{L^2_E(X,T,m)} = \int_X (u(x)|v(x))_E dm(x).$$

   Par conséquent, de toute suite bornée de $L^2_E(X, T, m)$ on peut extraire une sous-suite faiblement convergente dans $L^2_E(X, T, m)$.
4. *Si $1 < p < +\infty$ et si E est un espace de Banach réflexif séparable, l'espace $L^p_E(X, T, m)$ est alors un espace de Banach réflexif séparable.*

5. *(Dualité dans $L^p_E(X,T,m)$) Soit $1 \leq p \leq +\infty$, $p' = p/(p-1)$ et $v \in L^{p'}_{E'}(X,T,m)$. Pour $u \in L^p_E(X,T,m)$, l'application $T_v : u \mapsto \int \langle v,u\rangle_{E',E} dm$ est bien définie, linéaire et continue de $L^p_E(X,T,m)$ dans $\mathbb{R}$. (On a donc $T_v \in (L^p_E(X,T,m))'$).*

   De plus, l'application $T : v \mapsto T_v$ est une isométrie de $L^{p'}_{E'}(X,T,m)$ sur son image (qui est donc une partie de $L^p_E(X,T,m)'$).

   Si E' est séparable et $p < \infty$, l'image de T est $(L^p_E(X,T,m))'$ en entier.

6. *(Convergence dominée) Soit $1 \leq p < +\infty$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p_E(X,T,m)$. Si*

   (a) $u_n \to u$ p.p.,

   (b) $\|u_n\|_E \leq G$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $G \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(X,T,m)$,

   alors $u_n \to u$ dans $L^p_E(X,T,m)$.

Démonstration de la proposition 4.16
Les propriétés 1-4 ne sont démontrées pas ici. La propriété 5 est partiellement démontrée dans l'exercice 4.2. La propriété 6 est plus facile. Il suffit de remarquer que

$$\|u_n - u\|_E \leq \|u_n\|_E + \|u\|_E \leq 2G.$$

On a donc $\|u_n - u\|^p_E \leq 2^p |G|^p \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X,T,m)$. Par le théorème de convergence dominée pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $\int \|u_n - u\|^p_E dm \to 0$ et donc que $u_n \to u$ dans $L^p_E(X,T,m)$. ∎

Remarque 4.17 Soit E une espace de Banach. On dit que E est uniformément convexe si

$$\forall \eta > 0, \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } (\|x\|_E = 1,\ \|y\|_E = 1,\ \|x-y\| \geq \eta) \Rightarrow \|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \varepsilon.$$

Les espaces $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < +\infty$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ sont uniformément convexes. Une conséquence importante du fait que E soit un Banach uniformément convexe est que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E t.q. $x_n \to x$ faiblement dans E et $\|x_n\|_E \to \|x\|_E$, alors $x_n \to x$ dans E. Cette propriété permet éventuellement de simplifier certaines démonstrations de la proposition 4.16 (mais n'est pas nécessaire).

Différentes notions de dérivée pour une fonction à valeurs vectorielles.
Plaçons nous maintenant dans le cadre qui va nous intéresser pour les équations paraboliques, c'est à dire :

$$(X,T,m) = (]0,T[, \mathcal{B}(]0,T[), \lambda).$$

On va d'abord définir "proprement" la dérivée par rapport au temps, $u_t = du/dt$, pour une fonction de $]0,T[$ dans E qui n'est pas dérivable au sens classique (c'est-à-dire au sens de l'existence de la limite, dans E, du quotient différentiel habituel).
On note maintenant $L^p_E(]0,T[)$ l'espace $L^p_E(]0,T[, \mathcal{B}(]0,T[), \lambda)$ et $L^1_{E,loc}(]0,T[)$ l'ensembles des (classes de) fonctions à valeurs dans E localement intégrables sur $]0,T[$ (avec la mesure de Lebesgue).

Lemme 4.18 *Soit $u \in L^1_{loc}(]0,T[,E)$ on suppose que $\int_0^T u(t)\varphi(t)dt = 0$ pour tout $\varphi \in C^\infty_c(]0,T[,\mathbb{R})$. Alors $u = 0$ p.p.*

Démonstration : Semblable au cas $E = \mathbb{R}$.

On peut ainsi définir la dérivée par transposition de u.

Définition 4.19 *(Dérivée par transposition) Soit E un espace de Banach, $1 \leq p \leq +\infty$ et $u \in L^p_E(]0,T[)$. On note $\mathcal{D}$ l'espace $C^\infty_c(]0,T[,\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}'_E$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathcal{D}$ dans E. On définit $u_t \in \mathcal{D}'_E$ par :*

$$\langle u_t, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = -\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt \in E.$$

Remarque 4.20 Si $u \in C^1(]0,T[,E)$ on a

$$-\int_0^T u(t)\varphi'(t) = \int_0^T u'(t)\varphi(t) = \langle u_t, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}}.$$

On confond alors u' (dérivée classique) avec u_t (dérivée par transposition), c'est à dire la fonction u' qui appartient à $C([0,T],E)$ avec l'application linéaire de $\mathcal{D}$ dans E notée u_t. (Grâce au lemme 4.18, la fonction u' est entièrement déterminée par u_t, ce qui justifie la confusion entre u' et u_t.)

Définition 4.21 *(dérivée faible) Soit E et F deux espaces de Banach et $1 \leq p,q \leq +\infty$. On suppose qu'il existe un espace vectoriel G t.q. $E \subset G$ et $F \subset G$. Soit $u \in L^p_E(]0,T[)$ (on a donc $u_t \in \mathcal{D}'_E$). On dit que $u_t \in L^q_F(]0,T[)$ si il existe $v \in L^q_F(]0,T[)$ t.q.*

$$\langle u_t, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = -\underbrace{\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt}_{\in E} = \underbrace{\int_0^T v(t)\varphi(t)dt}_{\in F}.$$

Cette égalité n'a de sens que si il existe un espace vectoriel G tel que $E \subset G$ et $F \subset G$. Dans ce cas, on confond $u_t \in \mathcal{D}'_E$ et $v \in L^q_F(]0,T[)$. (Ici aussi le lemme 4.18 est utile pour faire cette confusion car, grâce au lemme 4.18, si la fonction v existe elle est alors unique.)
En résumé, on a donc trois notions de dérivée d'une fonction u de $]0,T[$ à valeurs dans E (espace de Banach).
(1) dérivée classique : $u' :]0,T[\to E$ (existe rarement...).
(2) dérivée par transposition : $u_t \in \mathcal{D}'_E$ (existe dès que $u \in L^p_E(]0,T[)$).
(3) dérivée faible : $u_t \in L^q_F(]0,T[)$ où F est un Banach tel que $E \subset G$ et $F \subset G$ avec G espace vectoriel.
Exemples Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

1. $E = H^1_0(\Omega)$, $F = H^{-1}(\Omega)$. On a alors $E, F \subset G = \mathcal{D}'(\Omega)$.
2. $1 \leq p < +\infty$, $q = p/(p-1)$, $E = W^{1,p}_0(\Omega)$, $F = W^{-1,q}(\Omega)$. On a aussi $E, F \subset G = \mathcal{D}'(\Omega)$.
3. $E = H^1(\Omega)$ $F = (H^1(\Omega))'$. Pour cet exemple, on a $F \not\subset \mathcal{D}'(\Omega)$. En effet, on prend par exemple T définie, pour $v \in H^1(\Omega)$, par
$$T(v) = \int_{\partial\Omega} v d\gamma(x).$$
L'application T est bien une application linéaire continue sur $H^1(\Omega)$, donc $T \in H^1(\Omega)'$. Mais $T = 0$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$ donc, comme T n'est pas l'application nulle, F ne s'injecte pas dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

   Dans cet exemple, pour injecter E et F dans le même espace G, on commence par identifier $(L^2(\Omega))'$ (dual topologique de $L^2(\Omega)$) avec $L^2(\Omega)$. Ceci est possible car si $T \in L^2(\Omega)'$, par le théorème de représentation de Riesz, il existe un et un seul $u \in L^2(\Omega)$ t.q. $T(v) = (v/u)_2$ pour tout $v \in L^2(\Omega)$. On confond alors u et T. Par cette identification, on a donc $L^2(\Omega)' = L^2(\Omega)$. On remarque maintenant que, si E, H sont deux espaces de Banach avec $E \subset H$, injection continue de E dans H et densité de E dans H, on a alors $H' \subset E'$. On prend ici $E = H^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$ et on a donc (grâce à l'identification entre $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)'$) $H' = L^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)'$. Finalement, on a donc $E, F \subset G$ en prenant $G = (H^1(\Omega))'$. On a ainsi mis E et F dans le même espace $G = (H^1(\Omega))'$ grâce à l'identification de $L^2(\Omega)$ avec $(L^2(\Omega))'$.

4. Dans l'exemple précédent, on a deux espaces de Banach E et H avec injection continue de $E \subset H$ et densité de E dans H. On a alors $H' \subset E'$. L'espace H est une espace de Hilbert. En identifiant H avec H' on a donc $E \subset E'$. Mais, si l'objectif est seulement d'avoir $E \subset E'$, il n'est pas nécessaire d'avoir $H' \subset E'$ et on peut retirer l'hypothèse de densité de E dans H. Plus précisément, soit E un espace de Banach et H un espace de Hilbert avec $E \subset H$ et injection continue de E dans H. On identifie H avec H'. Soit maintenant $u \in E$. Comme $u \in H$, on a donc identification entre u et T_u qui est l'application $v \mapsto (v|u)_H$ de H dans $\mathbb{R}$. On peut alors aussi identifier u (qui est dans E) avec la restriction de T_u à E (qui est un élément de E'). Cette identification est légitime car si u_1 et u_2 sont deux élements différents de E les restrictions de T_{u_1} et T_{u_2} à E sont des applications différentes. On a ainsi $E \subset E'$. Dans cet exemple, il faut toutefois noter que (en l'absence de densité de E dans H) des éléments différents de H' ont la même restriction à E (et peuvent donc correspondre au même élément de E).
   Un exemple intéressant de cette situation est obtenu en prenant $H = L^2(\Omega)^N$ (avec Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N > 1$) et $E = \{u \in H \text{ t.q. } \mathrm{div}(u) = 0\}$.

Remarque 4.22 Soit E un espace de Banach, $u \in L^1_E(]0,T[)$, $\psi \in E'$ et $\varphi \in C^\infty_c(]0,T[)$. Alors,

$$< \psi, \int_0^T u(t)\varphi(t)dt >_{E',E} = \int_0^T < \psi, u(t) >_{E',E} \varphi(t)dt.$$

La preuve est laissée en exercice.

Lemme 4.23 *Soit E un espace de Banach, $1 \leq p \leq +\infty$ et $u \in L^p_E(]0,T[)$. On suppose que $u_t \in L^p_E(]0,T[)$ (on a alors $u \in W^{1,p}_E(]0,T[)$. Alors, $u \in C([0,T],E)$, et même $u \in C^{0,1-1/p}([0,T],E)$. Plus précisément, il existe $a \in E$ t.q. $u(t) = a + \int_0^t u_t(s)ds$ pour presque tout $t \in]0,T[$ et u est alors identifié à la fonction (continue sur $[0,T]$) $t \mapsto a + \int_0^t u_t(s)ds$.*

Démonstration La démonstration est semblable au cas $E = \mathbb{R}$. On pose $u_t = v \in L^p_E(]0,T[)$ et on définit w par $w(t) = \int_0^t v(s)ds$, de sorte que $w \in C([0,T],E)$. On montre assez facilement que $w_t = v = u_t$ et donc $(w-u)_t = 0$. On a donc

$$\int_0^T (w-u)\varphi_t \, dt = 0 \text{ pour tout } \varphi \in C^\infty_c(]0,T[,\mathbb{R}). \tag{4.18}$$

On choisit maintenant une fonction $\varphi_0 \in C^\infty_c(]0,T[,\mathbb{R})$ t.q. $\int_0^T \varphi_0(s)ds = 1$. Pour $\psi \in C^\infty_c(]0,T[,\mathbb{R})$ on définit φ par

$$\varphi(t) = \int_0^t \psi(s)ds - \int_0^t \varphi_0(s)ds \int_0^T \psi(s)ds,$$

de sorte que $\varphi \in C^\infty_c(]0,T[,\mathbb{R})$ et on peut prendre φ dans (4.18). On en déduit (la preuve est laissée en exercice) qu'il existe $a \in E$ t.q. $w - u = a$ p.p. Donc $u \in C([0,T],E)$. Avec l'inégalité de Hölder, on montre ensuite que $u \in C^{0,1-1/p}$. ∎

Nous allons maintenant montrer un lemme plus difficile donnant aussi la continuité de u. On suppose que E est un espace de Banach et F un espace de Hilbert t.q. $E \subset F$, avec injection continue, et E dense dans F. On a donc aussi $F' \subset E'$. Comme F est un espace de Hilbert, on peut identifier F avec son dual par le théorème de représentation de Riesz, c'est-à-dire que l'on identifie $v \in F$ avec l'appliaction $T_v : u \mapsto (v/u)_F$ (qui est un élément de F'). L'application $v \mapsto T_v$ est une isométrie (bijective) de F dans F'. Avec cette identification, on a donc $E \subset F = F' \subset E'$. Donc, tout élément de E est alors un élément de E'. Pour $u, v \in E$, on a

$$< v, u >_{E',E} = (v|u)_F,$$

c'est-à-dire $< T_v, u >_{E',E} = (v|u)_F$. où T_v est l'élément de F' identifié à $v \in F$. Avec cette identification de F avec F', on va maintenant donner un résultat de continuité de u dans F si $u \in L^2(]0,T[,E)$ et $u_t \in L^2(]0,T[,E')$. Il faut faire très attention que cette dernière hypothèse n'a de sens que par l'identification de F avec F' (si on change d'espace F, on change le sens de $u_t \in L^2(]0,T[,E')$, alors que E' n'est pas changé...).

Lemme 4.24 *Soit E un espace de Banach et F un espace de Hilbert t.q. $E \subset F$, avec injection continue, et E dense dans F. On identifie F avec F' (de sorte que $E \subset F = F' \subset E'$). Soit $u \in L^2_E(]0,T[)$. On suppose que $u_t \in L^2_{E'}(]0,T[)$. Alors $u \in C([0,T],F)$ et, pour tout $t_1, t_2 \in [0,T]$ on a*

$$\|u(t_1)\|_F^2 - \|u(t_2)\|_F^2 = 2\int_{t_2}^{t_1} < u_t, u >_{E',E} \, dt.$$

Démonstration On va montrer que $u \in C([0,T[,F)$.
Soit $\rho \in C_c^\infty(]-2,-1[)$ t.q. $\int_{\mathbb{R}} \rho dx = 1$ et $\rho \geq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $\rho_n = n\rho(n\cdot)$ de sorte que le support de ρ_n est inclus dans $]-\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}[$ et que $\int \rho_n dx = 1$. On définit u_n par convolution avec ρ_n, c'est-à-dire $u_n = \tilde{u} \star \rho_n$ avec

$$\begin{array}{l} \tilde{u} = u \text{ sur }]0,T[\\ u = 0 \text{ sur }]0,T[^c. \end{array}$$

On a donc $u_n \to u$ dans $L^2_E(]0,T[)$, $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R},E)$ et $u_n' = \tilde{u} \star \rho_n'$.
Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$u_n'(t) = \int_0^T u(s)\rho_n'(t-s)ds.$$

On remarque maintenant que $\rho_n(t-s) = 0$ si $t - s \notin \left]\frac{-2}{n}, \frac{-1}{n}\right[$ c'est à dire $s \notin \left]t + \frac{1}{n}, t + \frac{2}{n}\right[$.
Soit $\varepsilon > 0$ et $t \in [0, T-\varepsilon[$. Pour $n \geq n_0$ avec n_0 t.q. $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$ on a $t + \frac{2}{n} < T$ et donc

$$\rho_n(t - \cdot) \in C_c^\infty(]0,T[).$$

On a alors

$$\begin{array}{l} u_n'(t) =< u_t, \rho_n(t-\cdot) >_{\mathcal{D}'_E, \mathcal{D}} \\ = \displaystyle\int_0^T u_t(s)\rho_n(t-s)ds \in E', \text{ car } u_t \in L^2_{E'}(]0,T[). \end{array}$$

Donc, $u_n' = \tilde{u_t} \star \rho_n$ sur $[0, T-\varepsilon[$, avec

$$\tilde{u_t} = \left\{ \begin{array}{l} u_t \text{ sur }]0,T[\\ 0 \text{ sur }]0,T[^c. \end{array} \right.$$

Mais $\tilde{u_t} \star \rho_n \to \tilde{u_t}$ dans $L^2(\mathbb{R}, E')$. Donc $u_n' = \tilde{u_t} \star \rho_n \to u_t$ dans $L^2_{E'}(]0, T-\varepsilon[)$.
En résumé, $\left\{ \begin{array}{l} u_n \to u \text{ dans } L^2_E(]0,T[) \\ u_n' \to u_t \text{ dans } L^2_{E'}(]0,T-\varepsilon[) \quad \forall \varepsilon > 0. \end{array} \right.$
On va maintenant montrer que $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F pour tout $t \in [0,T[$, et même, pour tout $\varepsilon > 0$, uniformément si $t \in [0, T-\varepsilon]$.
Soit $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C^1([0,T],\mathbb{R})$ définie par $\varphi(t) = \|u_n(t) - u_m(t)\|_F^2$. On a donc, pour $t \in]0,T[$,

$$\varphi'(t) = 2(\underbrace{(u_n' - u_m')(t)}_{\in E} \,|\, \underbrace{(u_n - u_m)(t)}_{\in E})_F.$$

Soient $t_1, t_2 \in [0, T-\varepsilon]$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(t_2) - \varphi(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} 2(u_n'(s) - u_n'(s)|u_n(s) - u_m(s))_F ds \\ &= 2\int_{t_1}^{t_2} < (u_n)_t(s) - (u_m)_t(s), u_n(s) - u_m(s) >_{E',E} \, ds.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\varphi(t_2) - \varphi(t_1) &\leq 2\left(\int_0^{T-\varepsilon} \|(u_n)_t - (u_m)_t\|_{E'}^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_0^T \|u_n - u_m\|_E^2 ds\right)^{1/2} \\ &\leq 2\|(u_n)_t - (u_m)_t\|_{L^2_{E'}} \|u_n - u_m\|_{L^2_E}.\end{aligned}$$

Soit $\eta > 0$, comme $u_n \to u$ dans $L^2_E(]0,T[)$ et que la suite $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée dans $L^2_{E'}(]0, T-\varepsilon[)$, il existe n_0 t.q.

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) \leq \eta \text{ pour } m, n \geq n_0.$$

On a donc

$$\varphi(t_2) \leq \varphi(t_1) + \eta \quad \text{ pour } n, m \geq n_0.$$

On intègre cette inégalité pour $t_1 \in]0, T-\varepsilon[$. On obtient

$$\begin{aligned}(T-\varepsilon)\varphi(t_2) &\leq \int_0^{T-\varepsilon} \|u_n - u_m\|_F^2 dt_1 + T\eta \\ &\leq \|u_n - u_m\|_{L^2_F}^2 + T\eta\end{aligned}$$

En utilisant une nouvelle fois que $u_n \to u$ dans $L^2_E(]0,T[)$, il existe n_1 t.q.

$$(T-\varepsilon)\varphi(t_2) \leq (T+1)\eta \text{ pour } n, m \geq n_1.$$

On a donc $\varphi(t) \leq \frac{(T+1)\eta}{T-\varepsilon}$ pour $n, m \geq n_1$ et $t \in [0, T-\varepsilon]$. On a ainsi montré que, pour tout $t \in [0, T-\varepsilon]$,

$$n, m \geq n_1 \Rightarrow \|u_n(t) - u_m(t)\|_F^2 \leq \frac{(T+1)\eta}{T-\varepsilon}.$$

Ceci montre bien que la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F uniformément par rapport à t, si $t \in [0, T-\varepsilon]$. Il existe donc une fonction w de $[0,T[$ dans F t.q. $u_n(t) \to w(t)$ dans F pour tout $t \in [0,T[$. Comme cette convergence est uniforme sur $[0, T-\varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction w est continue sur $[0, T-\varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$. On a donc $w \in C([0,T[, F)$.
Comme $u_n \to u$ dans $L^2_E(]0,T[)$ (et donc p.p. sur $]0,T[$ après extraction éventuelle d'une sous suite), on a donc $u = w$ p.p., et donc $u \in C([0,T[, F)$ (car on identifie, comme d'habitude, la classe de fonctions u avec son représentant continu qui est justement w).
De manière analogue, en décentrant les noyaux régularisants de l'autre côté, on montre que $u \in C(]0,T], F)$. On a donc $u \in C([0,T], F)$.
Enfin, on a aussi pour $t_1, t_2 \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}\|u_n(t_1)\|_F^2 - \|u_n(t_2)\|_F^2 &= 2\int_{t_2}^{t_1} (u_n'(s)|u_n(s))_F ds \\ &= 2\int_{t_2}^{t_1} < (u_n)_t(s), u_n(s) >_{E',E} \, ds\end{aligned}$$

en passant à la limite sur n, on obtient

$$\|u(t_1)\|_F^2 - \|u(t_2)\|_F^2 = 2\int_{t_2}^{t_1} < u_t(s), u(s) >_{E',E} ds.$$

4.3 Existence par la méthode de Faedo-Galerkin

Notation : Si E est un espace de Banach et $T > 0$, on notera souvent $L^2(]0,T[,E)$ (au lieu de $L^2_E(]0,T[)$) l'espace $L^2_E(]0,T[,\mathcal{B}(]0,T[,\lambda)$.

On s'intéresse dans ce paragraphe au problème suivant :
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T \in \mathbb{R}_+^\star$, f une fonction de $\Omega\times]0,T[$ dans $\mathbb{R}$ et u_0 une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. On cherche u tel que

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t - \Delta u = f & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[, \\ u(\cdot,0) = u_0. & \end{array}\right.$$

On va donner pour ce problème linéaire un résultat d'existence et d'unicité de solution faible.

Théorème 4.25 (Faedo-Galerkin) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. On identifie $L^2(\Omega)$ avec son dual et on suppose que $f \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$. Alors, il existe un et un seul u tel que*

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)), \\ \displaystyle\int_0^T < u_t(s), v(s) >_{H^{-1},H_0^1} ds + \int_0^T \Big(\int_\Omega \nabla u(s).\nabla v(s) dx\Big) ds = \int_0^T < f(s), v(s) >_{H^{-1},H_0^1} ds \\ \forall v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), \\ u(0) = u_0 \text{ p.p.}. \end{array}\right. \tag{4.19}$$

Démonstration du théorème 4.25
On rappelle que l'on a identifié $L^2(\Omega)$ avec $L^2(\Omega)'$, de sorte que $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) = L^2(\Omega)' \subset H^{-1}(\Omega)$. Comme on cherche u t.q. $u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on a nécessairement $u \in C([0,T],L^2(\Omega))$ (d'après le lemme 4.24). La fonction u est donc définie en tout $t \in [0,T]$, ce qui permet de donner un sens à la condition $u(0) = u_0$ p.p..

L'idée, pour démontrer ce théorème, est de résoudre d'abord le problème dans des espaces de dimension finie ; on pourrait le faire par exemple avec des espaces d'éléments finis, mais c'est plus simple en utilisant une base hilbertienne formée de fonctions propres du Laplacien ; c'est-à-dire une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, notée $\{e_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ t.q. e_n est (pour tout n) une solution faible de

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta e_n = \lambda_n e_n & \text{dans } \Omega, \\ e_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array}\right.$$

avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

Etape 1, remarques liminaires. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ et vérifie

$$\left\{\begin{array}{l} e_n \in H_0^1(\Omega), \\ \int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla v dx = \lambda_n \int_\Omega e_n v dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \end{array}\right.$$

avec $\lambda_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\lambda_n \uparrow +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, on a, pour tout $w \in L^2(\Omega)$, $w = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star}(w|e_n)_2 e_n$ au sens de la convergence $L^2(\Omega)$ (c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^n (w|e_i)e_i \to w$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$).

On va montrer maintenant que la famille $(\lambda_n^{-1/2}e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$. On rappelle que $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, la norme de u dans $H_0^1(\Omega)$ est définie par $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \| \, |\nabla u| \, \|_{L^2(\Omega)}$ et donc le produit scalaire de u et v dans $H_0^1(\Omega)$ est donné par $(u|v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$.

On remarque tout d'abord que pour tout $n, m \geq 1$, on a

$$\int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla e_m dx = \lambda_n \int_\Omega e_n e_m dx = \lambda_n \delta_{n,m}.$$

On en déduit que $(e_n|e_m)_{H_0^1(\Omega)} = 0$ si $n \neq m$ et

$$\| \frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}} \|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \frac{\nabla e_n \cdot \nabla e_n}{\lambda_n} dx = 1.$$

Puis, on remarque que l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, noté $ev\{e_n, \, n \in \mathbb{N}^\star\}$, est dense dans $H_0^1(\Omega)$. En effet soit $v \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $(v|e_n)_{H_0^1(\Omega)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$0 = (v|e_n)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla v dx = \lambda_n \int_\Omega e_n v dx.$$

Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ (et $\lambda_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$), on en déduit que $v = 0$ p.p.. Ceci montre que l'orthogonal dans $H_0^1(\Omega)$ de $ev\{e_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ est réduit à $\{0\}$ et donc que $ev\{e_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. Finalement, on obtient ainsi que la famille $(\lambda_n^{-1/2}e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$.

Etape 2, solution approchée.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $E_n = ev\{e_p, p = 1, \ldots n\}$. On cherche une solution approchée u_n sous la forme $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)e_i$ avec $\alpha_i \in C([0,T], \mathbb{R})$. En supposant que les α_i sont dérivables pour tout t (ce qui n'est pas vrai, en général), on a donc

$$u_n'(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i'(t)e_i,$$

de sorte que, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et tout $t \in]0,T[$, on a (compte tenu de l'injection de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$),

$$\langle u_n'(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i'(t) \int_\Omega e_i \varphi dx.$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$-\Delta u_n(t) = -\sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \Delta e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i(t) e_i \text{ dans } \mathcal{D}^\star(\Omega) \text{ et dans } H^{-1}(\Omega),$$

c'est-à-dire , pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle -\Delta u_n(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u_n(t) \cdot \nabla \varphi dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i(t) \int_\Omega e_i \varphi dx.$$

Enfin, comme $f \in L^2(]0,T[,H^{-1})$, on a pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\langle f(\cdot),\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \in L^1_{\mathbb{R}}(]0,T[)$. La quantité $\langle f(t),\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$ est donc définie pour presque tout t et on obtient finalement, pour presque tout t et pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle u_n'(t) - \Delta u_n(t) - f(t),\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i'(t) + \lambda_i\alpha_i(t)) \int_\Omega e_i\varphi dx - \langle f(t),\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}.$$

Pour obtenir u_n, une idée naturelle est de choisir les fonctions α_i pour que

$$\langle u_n'(t) - \Delta u_n(t) - f(t),\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = 0$$

pour tout $\varphi \in E_n$. En posant $f_i(t) = \langle f(t),e_i\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$, ceci est équivalent à demander pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$,

$$\alpha_i'(t) + \lambda_i\alpha_i(t) = f_i(t).$$

En tenant compte de la condition initiale et en posant $\alpha_i^{(0)} = (u_0|e_i)_2$, ceci suggère donc de prendre

$$\alpha_i(t) = \alpha_i^{(0)}e^{-\lambda_i t} + \int_0^t e^{-\lambda_i(t-s)}f_i(s)ds. \tag{4.20}$$

Les fonctions α_i ainsi définies appartiennent à $C([0,T],\mathbb{R})$ et on a donc $u_n \in C([0,T],E_n) \subset C([0,T],H_0^1(\Omega))$ avec $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)e_i$.

Etape 3, précision sur la dérivée en temps. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et u_n la solution approchée donnée par l'étape précédente. Les fonctions α_i ne sont pas nécessairement dérivables. On va préciser ici ce que vaut la dérivée (par transposition) de u_n. On va noter cette dérivée $(u_n)_t$. Par définition de la dérivation par transposition, $(u_n)_t$ est un élément de $\mathcal{D}_E^\star$ avec $E = H_0^1(\Omega)$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$ on a

$$\langle (u_n)_t,\varphi\rangle_{\mathcal{D}_E^\star,\mathcal{D}} = -\int_0^T u_n(t)\varphi'(t)dt \in E_n \subset H_0^1(\Omega).$$

Comme $u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, on a donc

$$\langle (u_n)_t,\varphi\rangle_{\mathcal{D}_E^\star,\mathcal{D}} = -\sum_{i=1}^n \int_0^T \alpha_i(t)e_i\varphi'(t)dt = -\sum_{i=1}^n \big(\int_0^T \alpha_i(t)\varphi'(t)dt\big)e_i.$$

On utilise maintenant (4.20),

$$\int_0^T \alpha_i(t)\varphi' dt = T_i + S_i,$$

avec

$$T_i = \int_0^T \alpha_i^{(0)}e^{-\lambda_i t}\varphi'(t)dt = \int_0^T \alpha_i^{(0)}\lambda_i e^{-\lambda_i t}\varphi(t)dt.$$

$$S_i = \int_0^T \big(\int_0^t e^{-\lambda_i(t-s)}f_i(s)ds\big)\varphi'(t)dt.$$

Pour transformer S_i on utilise le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} S_i &= \int_0^T \big(\int_0^T 1_{[0,t]}(s)e^{-\lambda_i(t-s)}f_i(s)ds\big)\varphi'(t)dt = \int_0^T \big(\int_0^T 1_{[s,T]}(t)e^{-\lambda_i(t-s)}\varphi'(t)dt\big)f_i(s)ds \\ &= \int_0^T \big(\int_s^T e^{-\lambda_i(t-s)}\varphi'(t)dt\big)f_i(s)ds = \int_0^T \big(\int_s^T \lambda_i e^{-\lambda_i(t-s)}\varphi(t)dt\big)f_i(s)ds - \int_0^T \varphi(s)f_i(s)ds. \\ &= \int_0^T \big(\int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i(t-s)}f_i(s)ds\big)\varphi(t)dt - \int_0^T f_i(t)\varphi(t)dt. \end{aligned}$$

On en déduit que $T_i + S_i = \int_0^T \lambda_i \alpha_i(t)\varphi(t)dt - \int_0^T f_i(t)\varphi(t)dt$, et donc

$$\langle (u_n)_t, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star,\mathcal{D}} = -\sum_{i=1}^n \int_0^T \lambda_i \alpha_i(t) e_i \varphi(t)dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T f_i(t)e_i\varphi(t)dt.$$

Since this equality holds for all $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$, one has finally

$$(u_n)_t = -\sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i e_i + \sum_{i=1}^n f_i e_i \in L^2(]0,T[,E_n).$$

Ce qui peut aussi s'écrire, avec $f^{(n)} = \sum_{i=1}^n f_i e_i$,

$$(u_n)_t = \Delta u_n + f^{(n)} \in L^2(]0,T[,E_n) \subset L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)).$$

Soit maintenant $v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$. Comme $(u_n)_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on a $\langle (u_n)_t, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \in L^1(]0,T[)$ et

$$\int_0^T \langle (u_n)_t(t), v(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt = -\int_0^T\int_\Omega \nabla u_n\cdot\nabla v dxdt + \sum_{i=1}^n \int_0^T\int_\Omega f_i e_i v dxdt.$$

Ceci donne, en revenant à la définition de f_i,

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle (u_n)_t(t), v(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt + \int_0^T\int_\Omega \nabla u_n\cdot\nabla v dxdt &= \sum_{i=1}^n \int_0^T \langle f(t),e_i\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\big(\int_\Omega e_i v dx\big)dt\\ &= \int_0^T \langle f(t), \sum_{i=1}^n (v|e_i)_2 e_i\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt.\end{aligned}$$

On note P_n l'opérateur de projection orthogonale dans $L^2(\Omega)$ sur le s.e.v. E_n. L'opérateur P_n peut donc être vu comme un opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ (car $E_n \subset H_0^1(\Omega)$). On note alors P_n^t l'opérateur transposé qui est donc un opérateur de $H^{-1}(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))'$ qui est lui même identifié à $L^2(\Omega)$ et est aussi un s.e.v. de $H^{-1}(\Omega)$. On obtient alors (pour tout $v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$)

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt + \int_0^T\int_\Omega \nabla u_n\cdot\nabla v dxdt = \int_0^T \langle f, P_n v\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt = \int_0^T \langle P_n^t f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt. \quad (4.21)$$

On a aussi $u_n \in C([0,T],H_0^1(\Omega))$ et $u_n(0) = P_n u_0$.

Etape 4, estimations sur la solution approchée.
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $u_n \in C([0,T],H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $(u_n)_t = \Delta u_n + f^{(n)} \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$. D'après la section 4.2, on a donc

$$\frac{1}{2}\|u_n(T)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 = \int_0^T \langle (u_n)_t, u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt.$$

En prenant $v = u_n$ dans (4.21), on en déduit

$$\frac{1}{2}\|u_n(T)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \int_0^T\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dxdt = \int_0^T \langle f, P_n u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt,$$

et donc

$$\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega))} = \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dxdt \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \int_0^T \langle f, P_n u_n\rangle_{H^{-1},H^1_0} dt.$$

On en déduit, en remarquant que $P_n u_n = u_n$,

$$\begin{aligned}\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega))} &\leq \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \int_0^T \langle f, u_n\rangle_{H^{-1},H^1_0} dt \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}\|u_n\|_{L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega))} \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} + \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega))}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega))} \leq \|u_0\|_2^2 + \|f\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$

Ce qui donne aussi

$$\|u_n\|_{L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$

Comme $(u_n)_t = \Delta u_n + P_n^t f$ (égalité (4.21)) et que $\|P_n w\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \|w\|_{H^1_0(\Omega)}$ pour tout $w \in H^1_0(\Omega)$, on obtient aussi une borne sur $(u_n)_t$:

$$\|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} \leq \|u_n\|_{L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega))} + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}$$

et donc

$$\|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + 2\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est donc bornée dans $L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega))$ et la suite $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$.

Etape 5, passage à la limite. Grâce aux estimations obtenues à l'étape précédente, on peut supposer, après extraction éventuelle d'une sous suite, que, quand $n \to +\infty$,

$$u_n \to u \text{ faiblement dans } L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega)),$$

$$(u_n)_t \to w \text{ faiblement dans } L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$$

et les estimations sur u_n et $(u_n)_t$ donnent aussi les estimations suivantes sur u et u_t :

$$\|u\|_{L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}$$

$$\|(u)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + 2\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$

Nous allons montrer tout d'abord que $w = u_t$ (puis nous montrerons que u est solution de $u_t = \Delta u + f$ au sens demandé par (4.19)).

Par définition de u_t, on a, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$,

$$\int_0^T u_t(t)\varphi(t)dt = -\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt.$$

Pour démontrer que $u_t = w$, il suffit donc de montrer que l'on a, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$,

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)dt = -\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt. \tag{4.22}$$

On rappelle que le terme de gauche de l'égalité (4.22) est dans $H^{-1}(\Omega)$ alors que le terme de droite est dans $H_0^1(\Omega)$. Cette égalité utilise donc le fait que $H_0^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, cette inclusion étant due au fait que nous avons identifié $L^2(\Omega)'$ avec $L^2(\Omega)$.

Soit donc $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$. Nous allons montrer (4.22). Pour $\psi \in H_0^1(\Omega)$, on considère l'application S de $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$S(v) = \int_\Omega \big(- \int_0^T v(t)\varphi'(t)dt\big)\psi(x)dx \text{ pour } v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)).$$

L'application S est linéaire continue de $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ dans $\mathbb{R}$. Comme $u_n \to u$ faiblement $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$, on a donc $S(u_n) \to S(u)$ quand $n \to +\infty$. Or, pour $v = u_n$ et pour $v = u$, on a

$$S(v) = -(\int_0^T v(t)\varphi'(t)dt|\psi)_2 = -\langle \int_0^T v(t)\varphi'(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On a donc, quand $n \to +\infty$,

$$-\langle \int_0^T u_n(t)\varphi'(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1} \to -\langle \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On utilise maintenant le fait que $-\int_0^T u_n(t)\varphi'(t)dt = \int_0^T (u_n)_t(t)\varphi(t)dt$ (par définition de $(u_n)_t$). On a donc

$$\langle \int_0^T (u_n)_t(t)\varphi(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1} \to -\langle \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On considère maintenant l'application $\bar{S}$ de $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\bar{S}(v) = \langle \int_0^T v(t)\varphi(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1} \text{ pour } v \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)).$$

L'application $\bar{S}$ est linéaire continue de $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ dans $\mathbb{R}$. Comme $(u_n)_t \to w$ faiblement $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on a donc $\bar{S}((u_n)_t) \to \bar{S}(w)$ quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire

$$\langle \int_0^T (u_n)_t(t)\varphi(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1} \to \langle \int_0^T w(t)\varphi(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On en déduit que pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$-\langle \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \langle \int_0^T w(t)\varphi(t)dt, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On a donc bien montré que $-\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = \int_0^T w(t)\varphi(t)dt$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $u_t = w$.

Nous savons donc que $u_n \to u$ faiblement dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et que $(u_n)_t \to u_t$ faiblement dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$. Pour montrer que u est solution de $u_t = \Delta u + f$ au sens demandé par (4.19), il suffit maintenant de passer à la limite dans (4.21). Soit $v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, selon (4.21),

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt + \int_0^T (u_n|v)_{H_0^1}dt = \int_0^T \langle f, P_n v\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt.$$

Les deux termes de gauche de cette égalité passent à limite quand $n \to +\infty$ grâce aux convergences de u_n et $(u_n)_t$. Pour le terme de droite, on utilise l'étape liminaire. On remarque que $P_n v(t) \to v(t)$ dans $H_0^1(\Omega)$ pour presque tout t et $\|P_n v(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v(t)\|_{H_0^1(\Omega)}$ pour presque tout t. Cela permet de passer à la limite dans le terme de droite, par le théorème de convergence dominée. On obtient ainsi

$$\int_0^T \langle u_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T (u|v)_{H_0^1} dt = \int_0^T \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

Ce qui est bien le sens souhaité dans la formulation (4.19).

Etape 6, condition initiale. Comme $u \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$, on sait que $u \in C([0,T], L^2(\Omega))$ (voir la section 4.2). Pour terminer la démonstration du fait que u est solution de (4.19), il reste donc seulement à montrer que $u(0) = u_0$ p.p. (c'est-à-dire $u(0) = u_0$ dans $L^2(\Omega)$).

On sait que $u(t) \to u(0)$ dans $L^2(\Omega)$ quand $t \to 0$. On sait aussi que $u_n(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(0)} e_i \to u_0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. Pour en déduire que $u(0) = u_0$, il suffit de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est relativement compacte dans $C([0,T], H^{-1}(\Omega))$. En effet, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est relativement compacte dans $C([0,T], H^{-1}(\Omega))$, il existe $w \in C([0,T], H^{-1}(\Omega))$ et une sous suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q. $u_n(t) \to w(t)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ uniformément par rapport à $t \in [0,T]$ (et donc aussi dans $L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$). En particulier, on a donc $w(0) = u_0$. Mais, on sait déjà que $u_n \to u$ faiblement dans $L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et donc aussi faiblement dans $L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$. Par unicité de la limite, on a donc $u = w$ p.p. sur $]0,T[$ et donc $u(t) = w(t)$ pour tout $t \in [0,T]$ car u et w sont continues sur $[0,T]$. On obtient ainsi, finalement, $u(0) = w(0) = u_0$.

Il reste à montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est relativement compacte dans $C([0,T], H^{-1}(\Omega))$. Par le théorème d'Ascoli, il suffit de montrer que

1. Pour tout $t \in [0,T]$, $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$.

2. $\|u_n(t) - u_n(s)\|_{H^{-1}} \to 0$, quand $s \to t$, uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}^\star$ (et pour tout $t \in [0,T]$).

Par démontrer le deuxième item, on utilise la fait que $(u_n)_t \in L^1([0,T], H^{-1}(\Omega))$. La section 4.2 nous donne que pour tout $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 > t_2$, et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a (dans $H^{-1}(\Omega)$)

$$u_n(t_1) - u_n(t_2) = \int_{t_2}^{t_1} (u_n)_t(s) ds,$$

et donc

$$\begin{aligned}\|u_n(t_1) - u_n(t_2)\|_{H^{-1}} \leq \int_{t_2}^{t_1} \|(u_n)_t(s)\|_{H^{-1}} ds &\leq \big(\int_0^T \|(u_n)_t(s)\|_{H^{-1}}^2 ds\big)^{\frac{1}{2}} \sqrt{t_1 - t_2} \\ &\leq \|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})} \sqrt{t_1 - t_2}.\end{aligned}$$

Comme la suite $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée dans $L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$, on en déduit bien que $\|u_n(t) - u_n(s)\|_{H^{-1}} \to 0$, quand $s \to t$, uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}^\star$ (et pour tout $t \in [0,T]$).

Pour démontrer de premier item, on utilise encore la section 4.2. Comme $u_n \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et $(u_n)_t \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$, on a, pour tout $t, s \in [0,T]$,

$$\|u_n(t)\|_2^2 = \|u_n(s)\|_2^2 + 2\int_s^t \langle (u_n)_t(\xi), u_n(\xi)\rangle_{H^{-1},H_0^1} d\xi,$$

et donc

$$\|u_n(t)\|_2^2 \leq \|u_n(s)\|_2^2 + 2\int_s^t |\langle (u_n)_t(\xi), u_n(\xi)\rangle_{H^{-1},H_0^1}| d\xi \leq \|u_n(s)\|_2^2 + 2\|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})} \|u_n\|_{L^2(]0,T[,H_0^1)}.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à s sur $[0,T]$, on en déduit

$$T\|u_n(t)\|_2^2 \leq \|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,L^2(\Omega))} + 2T\|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})}\|u_n\|_{L^2(]0,T[,H_0^1)}.$$

Ceci montre que la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ pour tout $t \in [0,T]$ (et même uniformément par rapport à t). On en déduit que la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$ pour tout $t \in [0,T]$. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli et conclure, comme cela est indiqué au début de cette étape, que $u(0) = u_0$ p.p.. Ceci termine la démonstration du fait que u est solution de (4.19) et donc la démonstration de la partie "existence" du théorème 4.25.

Etape 7, unicité. On montre maintenant la partie "unicité" du théorème 4.25. Soit u_1, u_2 deux solutions de (4.19). On pose $u = u_1 - u_2$. En faisant la différence des équations satisfaites par u_1 et u_2 et en prenant, pour $t \in [0,T]$, $v = u1_{]0,t[}$ comme fonction test, on obtient

$$\int_0^t \langle u_t(s), u(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1} ds + \int_0^t \int_\Omega \nabla u(s)\cdot\nabla u(s) dx ds = 0.$$

Comme $u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on a, d'après la section 4.2,

$$\frac{1}{2}(\|u(t)\|_2^2 - (\|u(0)\|_2^2) = \int_0^t \langle u_t(s), u(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1} ds.$$

On en déduit, pour tout $t \in [0,T]$,

$$(\|u(t)\|_2^2 - (\|u(0)\|_2^2) + 2\int_0^t \int_\Omega \nabla u(s)\cdot\nabla u(s) dx ds = 0.$$

Enfin, comme $u(0) = 0$, on obtient bien, finalement, $u(t) = 0$ p.p. dans Ω, pour tout $t \in [0,T]$. Ce qui montre la partie "unicité" du théorème 4.25. ∎

Nous allons maintenant donner quelques propriétés complémentaires sur la solution de (4.19)

Proposition 4.26 (Dépendance continue)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $T > 0$. Pour $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on note $T(u_0,f)$ la solution de (4.19)*. L'opérateur T est linéaire continu de $L^2(\Omega)\times L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et dans $C([0,T],L^2(\Omega))$.*

Démonstration On note u la solution de (4.19). Il suffit de remarquer que

$$\|u\|_{L^2(]0,T[,H_0^1)} \leq \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})} + \|u_0\|_2,$$

$$\|u(t)\|_2^2 \leq \|u_0\|_2^2 + \|u_t\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1})} + \|u\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1)} \text{ pour tout } t \in [0,T],$$

et enfin que

$$\|u_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})} \leq \|u_0\|_2 + 2\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})}.$$

On en déduit bien la continuité de T dans les espaces annoncés. ∎

Proposition 4.27 (Positivité et principe du maximum)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. On note u la solution de (4.19) *avec $f = 0$.*

1. On suppose $u_0 \geq 0$ p.p.. On a alors $u(t) \geq 0$ p.p. et pour tout $t \in [0,T]$.

2. *On suppose que* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. *Soit* $A, B \in \mathbb{R}$ *t.q.* $A \leq 0 \leq B$ *et* $A \leq u_0 \leq B$ *p.p.. On a alors* $A \leq u(t) \leq B$ *p.p. et pour tout* $t \in [0,T]$.

Démonstration Pour démontrer le premier item, on montre plutôt (ce qui est équivalent) que $u_0 \leq 0$ p.p. implique $u(t) \leq 0$ p.p. pour tout $t \in [0,T]$. On suppose donc que $u_0 \leq 0$ p.p.. On utilise alors le lemme 4.28 avec $\varphi(s) = s^+$. Il donne que $u^+ \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$. Pour $t \in [0,T]$, on peut donc prendre $v = u^+ 1_{]0,t[}$ dans l'équation de (4.19) et on obtient

$$\int_0^t \langle u_t(s), u^+(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1} ds + \int_0^t \int_\Omega \nabla u(s) \cdot \nabla u^+(s) dx ds = 0.$$

En utilisant encore le lemme 4.28, on a donc

$$\frac{1}{2}\|u^+(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u^+(0)\|_2^2 + \int_0^t \|u^+(s)\|_{H_0^1}^2 ds = 0.$$

Comme $u^+(0) = u_0^+ = 0$ p.p., on en déduit bien que $\|u^+(t)\|_2 = 0$ et donc $u(t) \leq 0$ p.p..
La démonstration du deuxième item est semblable en utilisant le lemme 4.28 avec $\varphi(s) = (s-B)^+$ et $\varphi(s) = (s-A)^-$. ∎

Lemme 4.28 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* $T > 0$. *Soit* φ *une fonction lipchitzienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *t.q.* $\varphi(0) = 0$. *On définit* Φ *par*

$$\Phi(\xi) = \int_0^\xi \varphi(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}.$$

Soit $u \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ *t.q.* $u_t \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$. *On a alors* $\varphi(u) = L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$, $\Phi(u) \in C([0,T], L^1(\Omega))$ *et, pour tout* $t_1, t_2 \in [0,T]$,

$$\int_\Omega \Phi(u(t_2))dx - \int_\Omega \Phi(u(t_1))dx = \int_{t_1}^{t_2} \langle u_t(s), \varphi(u(s))\rangle_{H^{-1},H_0^1} ds.$$

On a aussi pour presque tout $t \in]0,T[$, $\varphi(u(t)) \in H_0^1(\Omega)$ *et* $\nabla\varphi(u(t)) = \varphi'(u(t))\nabla u$ *p.p., c'est-à-dire , en étant plus précis,* $\nabla\varphi(u)(x,t) = \varphi'(u(x,t))\nabla u(x,t)$ *pour presque tout* $x \in \Omega$. *Dans cette égalité, on peut prendre pour* $\varphi'(u(x,t))$ *n'importe quelle valeur si* φ *n'est pas dérivable au point* $u(x,t)$. *En particulier ceci montre que, pour tout* $a \in \mathbb{R}$, $\nabla u = 0$ *p.p. sur l'ensemble* $\{u = a\}$.

Démonstration Ce lemme est la version "parabolique" des lemmes 2.20 et 2.21 vus précédemment. La démonstration consiste à considérer d'abord (comme dans le lemme 2.20) que φ est de classe C^1 et à régulariser u. Puis à approcher φ par des fonctions de classe C^1 (au moins lorsque φ est dérivable sauf en un nombre fini de points, le cas général étant plus difficile). Cette preuve n'est pas détaillée ici. ∎

On donne maintenant l'équivalence entre la formulation faible (4.19) et une autre formulation faible, la formulation (4.23). Cette deuxième formulation est, en particulier, intéressante lorsque l'on cherche à prouver la convergence des solutions approchées obtenues par une discrétisation en espace et en temps.

Proposition 4.29 (Equivalence entre deux formulations faibles) *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, $T > 0$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ *et* $f \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$ *(on identifie, comme d'habitude* $L^2(\Omega)$ *avec* $L^2(\Omega)'$*). Alors* u *est solution de*

(4.19) *si et seulement si* u *vérifie :*.

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), \\ -\displaystyle\int_0^T\int_\Omega u\varphi_t dxdt - \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx + \int_0^T\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi dxdt \\ = \displaystyle\int_0^T < f(s),\varphi(\cdot,s) >_{H^{-1},H_0^1} ds \ \textit{pour tout}\ \varphi \in C_c^\infty([0,T[\times\Omega,\mathbb{R}). \end{array}\right. \tag{4.23}$$

Démonstration On montre tout d'abord que "u solution de (4.19) $\Rightarrow$ u est solution de (4.23)". On suppose donc que u est solution de (4.19). Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega\times[0,T[,\mathbb{R})$. Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, on pose

$$\varphi_n(x,t) = \sum_{i=0}^{n-1} 1_{]t_i,t_{i+1}[}(t)\varphi(x,t_i), \tag{4.24}$$

où $t_i = (i/n)T$. Comme φ est une fonction régulière, il est clair que $\varphi_n \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et que $\varphi_n \to \varphi$ dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ quand $n\to+\infty$. Comme $\varphi_n \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et que u est solution de (4.19), on a

$$\int_0^T \langle u_t,\varphi_n\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt + \int_0^T\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi_n dxdt = \int_0^T \langle f,\varphi_n\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt.$$

On pose $T_n = \int_0^T \langle u_t,\varphi_n\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt$. Comme $\varphi_n\to\varphi$ dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ quand $n\to+\infty$, l'égalité précédente donne

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \int_0^T \langle u_t,\varphi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt = -\int_0^T\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi dxdt + \int_0^T \langle f,\varphi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt. \tag{4.25}$$

On va maintenant calculer $\lim_{n\to+\infty} T_n$ en utilisant (4.24). On a

$$\begin{aligned} T_n = \int_0^T \langle u_t(t),\sum_{i=0}^{n-1} 1_{]t_i,t_{i+1}[}(t)\varphi(\cdot,t_i)\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle u_t(t),\varphi(\cdot,t_i)\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\langle \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_t(t)dt,\varphi(\cdot,t_i)\rangle_{H^{-1},H_0^1}. \end{aligned}$$

Comme $u, u_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ (on rappelle que $H_0^1(\Omega)\subset H^{-1}(\Omega)$ par l'identification de $L^2(\Omega)$ avec son dual), on a (d'après la section 4.2) $u\in C([0,T],H^{-1}(\Omega))$ et

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} u_t(t)dt = u(t_{i+1}) - u(t_i) \in H^{-1}(\Omega).$$

On a donc

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1}\langle u(t_{i+1}) - u(t_i),\varphi(\cdot,t_i)\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \sum_{i=0}^{n-1}\int_\Omega (u(x,t_{i+1}) - u(x,t_i))\varphi(x,t_i)dx.$$

La dernière égalité venant de la manière avec laquelle un élément de $H_0^1(\Omega)$ est considéré comme un élément de $H^{-1}(\Omega)$. Une intégration par parties discrète donne alors (en remarquant que $\varphi(\cdot,t_n)=0$)

$$T_n = -\int_\Omega u(x,0)\varphi(x,0)dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega (\varphi(x,t_{i-1}) - \varphi(x,t_i))u(x,t_i)dx.$$

Puis, comme φ est une fonction régulière,

$$\begin{aligned} T_n &= -\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_t(x,t)dt\big)u(x,t_i)dx \\ &= -\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx - \int_0^T\int_\Omega \varphi_t(x,t)\Big(\sum_{i=1}^n 1_{]t_{i-1},t_i[}u(x,t_i)\Big)dxdt \\ &= -\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx - \int_0^T\int_\Omega \varphi_t(x,t)(u(x,t)+R_n(x,t))dxdt, \end{aligned}$$

avec $R_n(x,t) = \sum_{i=1}^n 1_{]t_{i-1},t_i[}u(x,t_i) - u(x,t)$. Pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\|R_n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \max\{\|u(s_1)-u(s_2)\|_{L^2(\Omega)},\ s_1,s_2 \in [0,T],\ |s_1-s_2| \leq \frac{T}{n}\}.$$

Comme $u \in C([0,T],L^2(\Omega))$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\|R_n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ uniformément par rapport à $t \in [0,T]$ et donc que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T\int_\Omega \varphi_t(x,t)R_n(x,t)dxdt = 0.$$

En résumé, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = -\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx - \int_0^T\int_\Omega \varphi_t(x,t)u(x,t)dxdt.$$

Avec (4.25) on a donc, pour tout $\varphi \in C_c^\infty([0,T[\times\Omega,\mathbb{R})$,

$$-\int_0^T\int_\Omega \varphi_t(x,t)u(x,t)dxdt - \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx + \int_0^T\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi dxdt = \int_0^T \langle f,\varphi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt.$$

Ceci montre que u est bien solution de (4.23).

On montre maintenant que "u solution de (4.23) $\Rightarrow$ u est solution de (4.19)". On suppose donc que u est solution de (4.23). On veut montrer que u est solution de (4.19). On va raisonner en deux étapes. On va d'abord montrer que $u_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ et $u_t = \Delta u + f$ (remarquer que $\Delta u, f \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ puis que $u(0) = u_0$.

Etape 1 On montre ici que $u_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ et $u_t = \Delta u + f$. On utilise la définition de u_t. On a $u_t \in \mathcal{D}_E^\star$, avec $E = H_0^1(\Omega)$, et pour tout $\phi \in C^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$

$$\langle u_t,\phi\rangle_{\mathcal{D}_E^\star,\mathcal{D}} = -\int_0^T u(t)\phi'(t)dt \in H_0^1(\Omega).$$

Pour montrer que $u_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ et $u_t = \Delta u + f$, il s'agit donc de montrer que, pour tout $\phi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$,

$$-\int_0^T u(t)\phi'(t)dt = \int_0^T (\Delta u(t) + f(t))\phi(t)dt.$$

Noter que le membre de gauche de cette égalité est dans $H_0^1(\Omega)$ et donc dans $H^{-1}(\Omega)$ (grâce à l'identification entre $L^2(\Omega)$ et son dual) et que le membre de droite est dans $H^{-1}(\Omega)$. Pour montrer l'égalité de ces deux termes, il suffit de montrer que

$$\langle -\int_0^T u(t)\phi'(t)dt,\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \langle \int_0^T (\Delta u(t)+f(t))\phi(t)dt,\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1} \text{ pour tout } \psi \in H_0^1(\Omega),$$

c'est-à-dire que

$$-\int_0^T \langle u(t)\phi'(t),\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt = \int_0^T \langle(\Delta u(t)+f(t))\phi(t),\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt \text{ pour tout } \psi\in H_0^1(\Omega).$$

Par densité de $C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ dans $H_0^1(\Omega)$, il suffit de considérer $\psi\in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. En utilisant la manière donc $H_0^1(\Omega)$ est inclus dans $H^{-1}(\Omega)$, on a

$$-\int_0^T \langle u(t)\phi'(t),\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt = -\int_0^T\int_\Omega u(x,t)\phi'(t)\psi(x)dxdt.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle(\Delta u(t)+f(t))\phi(t),\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt &= \int_0^T \phi(t)\langle\Delta u(t)+f(t),\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt\\ &= -\int_0^T\phi(t)\int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla\psi(x)dxdt + \int_0^T\phi(t)\langle f,\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt.\end{aligned}$$

En résumé, pour terminer l'étape 1, il suffit donc de montrer que

$$\begin{aligned}-\int_0^T\int_\Omega u(x,t)\phi'(t)\psi(x)dxdt = \int_0^T\phi(t)\Big(-\int_\Omega\nabla u(x,t)\cdot\nabla\psi(x)dxdt + \langle f,\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}\Big)dt\\ \text{pour tout } \phi\in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R}) \text{ et tout } \psi\in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}).\end{aligned} \tag{4.26}$$

Comme cela a été déjà dit, ceci donnera $u_t\in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ et $u_t=\Delta u+f$.

Pour montrer (4.26), on utilise (4.23). Soit $\phi\in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$ et $\psi\in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. On choisit dans (4.23), $\varphi(x,t)=\phi(t)\psi(x)$ (ce qui est possible car on a bien $\varphi\in C_c^\infty(]0,T[\times\Omega,\mathbb{R})$. On obtient

$$-\int_0^T\int_\Omega u(x,t)\phi'(t)\psi(x)dxdt + \int_0^T\int_\Omega(\nabla u(x,t)\cdot\nabla\psi(x))\phi(t)dxdt = \int_0^T\langle f(t),\phi(t)\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt.$$

Ceci donne (4.26) et termine donc l'étape 1, c'est-à-dire $u_t\in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ et $u_t=\Delta u+f$ (ce qui l'équation demandée dans (4.19)).

Etape 2 Comme $u\in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $u_t\in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on a (d'après la section 4.2), $u\in C([0,T],L^2(\Omega))$. On montre dans cette deuxième étape que $u(0)=u_0$. Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, on choisit une fonction r_n de $C_c^\infty([0,T[,\mathbb{R})$ décroissante et t.q. $|r_n'(t)|\le 2n$ pour tout t, $r_n(0)=1$ et $r_n(t)=0$ si $t\ge 1/n$.

Soit $\psi\in C_c^\infty(\Omega)$ et $n\in\mathbb{N}^\star$ t.q. $1/n<T$. On prend $\varphi(x,t)=r_n(t)\psi(x)$ dans (4.23). On obtient

$$\begin{aligned}-\int_0^{\frac1n}\int_\Omega u(x,t)r_n'(t)\psi(x)dxdt - \int_\Omega u_0(x)\psi(x)dx + \int_0^{\frac1n}\int_\Omega\nabla u(x,t)\cdot\nabla\psi(x)r_n(t)dxdt\\ = \int_0^{\frac1n}\langle f(t),\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}r_n(t)dt,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$T_n = \int_\Omega u_0(x)\psi(x)dx - R_n + S_n, \tag{4.27}$$

avec

$$T_n = -\int_0^{\frac1n}\int_\Omega u(x,t)r_n'(t)\psi(x)dxdt,$$

$$R_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla\psi(x) r_n(t)dxdt \text{ et } S_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \langle f(t),\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1} r_n(t)dt.$$

On montre tout d'abord que R_n et S_n tendent vers 0. En effet, on a

$$\begin{aligned} |R_n| &\le \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega |\nabla u(x,t)||\nabla\psi(x)|dxdt \\ &\le \Big(\int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega |\nabla\psi(x)|^2 dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \|u\|_{L^2(]0,T[,H_0^1)} \frac{1}{\sqrt{n}} \|\psi\|_{H_0^1}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$. On a aussi $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$ car

$$|S_n| \le \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})} \frac{1}{\sqrt{n}} \|\psi\|_{H_0^1}.$$

On remarque maintenant que

$$\begin{aligned} T_n &= -\int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega u(x,0) r_n'(t)\psi(x)dxdt - \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega (u(x,t)-u(x,0)) r_n'(t)\psi(x)dxdt \\ &= \int_\Omega u(x,0)\psi(x)dx - \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega (u(x,t)-u(x,0)) r_n'(t)\psi(x)dxdt \end{aligned}$$

(On a utilisé ici $r_n(0) = 1$ et $r_n(1/n) = 0$.) On majore de dernier terme de cette égalité :

$$|\int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega (u(x,t)-u(x,0)) r_n'(t)\psi(x)dxdt| \le \frac{1}{n} 2n \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \max_{t\in[0,\frac{1}{n}]} \|u(\cdot,t)-u(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme $u \in C([0,T],L^2(\Omega))$ ce denier terme tend vers 0 quand $n \to +\infty$ et on a donc, finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \int_\Omega u(x,0)\psi(x)dx.$$

Avec (4.27), comme $\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = 0$, on en déduit

$$\int_\Omega u(x,0)\psi(x)dx = \int_\Omega u_0(x)\psi(x)dx \text{ pour tout } \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Ceci permet de conclure que $u(0) = u_0$ et termine la démonstration de la proposition 4.29. ∎

Nous donnons maintenant un théorème de compacité qui sera très utile pour la résolution de problèmes non linéaires comme ceux de la section 4.4. C'est l'équivalent parabolique des théorèmes de compacité vus pour les problèmes elliptiques. Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Pour $f \in H^{-1}(\Omega)$, on note $T(f)$ la solution faible de l'équation $-\Delta u = f$ avec $u \in H_0^1(\Omega)$. On a déjà montré que l'opérateur T était compact de $H^{-1}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. La proposition 4.30 donne l'équivalent parabolique de ce résultat.

Proposition 4.30 (Compacité)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. On identifie $L^2(\Omega)$ avec $L^2(\Omega)'$.
Pour $f \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on note $S(f)$ la solution de (4.19)*.*
L'opérateur S est compact de $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ dans $L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$.

Démonstration La proposition 4.26 donne déjà la continuité de S. Il reste donc à montrer que S transforme les parties bornées de $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ en parties relativement compactes de $L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$. Soit donc A une partie bornée de $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$. On pose $B = \{S(f),\ f \in A\}$. Les estimations vues dans le théorème 4.25 montrent que B est une partie bornée de $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et que $\{u_t,\ u \in B\}$ est une partie bornée de $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ (en effet, si $u \in B$, il existe $f \in A$ t.q. $u = S(f)$, on a donc $u_t = \Delta u + f$ au sens donné par (4.19), ce qui donne l'estimation voulue sur u). Le lemme de compacité donné ci après (lemme 4.31), dû à J. L. Lions, donne alors la relative compacité de A dans $L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$. ∎

Lemme 4.31 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$. On identifie $L^2(\Omega)$ avec $L^2(\Omega)'$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et que la suite $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$. Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$.*

Démonstration Ce lemme sera démontré plus loin dans un cadre plus général. ∎

Remarque 4.32 (Opérateurs elliptiques généraux) Les résultats de ce paragraphe, c'est-à-dire le théorème 4.25 et les propositions 4.26, 4.27, 4.29 et 4.30, sont encore vrais en remplaçant l'opérateur Δu par div$(A\nabla u)$ si la matrice A est à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. $A\xi\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^2$ p.p. et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ (exercice 4.3). Il est aussi possible de considérer le cas où les coefficients de la matrice A dépendent aussi de t. Une possibilité est alors de faire une discrétisation en temps et de remplacer sur chaque intervalle de temps la matrice A par sa moyenne sur l'intervalle considéré. On résout alors le problème sur chacun de ces intervalles temporels. Il suffit ensuite d'obtenir des estimations sur la solution approchée et de passer à la limite sur le pas de discrétisation.

4.4 Existence et unicité pour des problèmes paraboliques non linéaires

Comme dans le cas elliptique, l'existence de la solution d'un problème parabolique non linéaire peut se prouver par point fixe de Schauder ou par degré topologique.
Considérons le premier exemple suivant : soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $A : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ (où $M_N(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $N \times N$ à coefficiens réels) t.q.

$$\forall s \in \mathbb{R}, A(s) = (a_{i,j}(s))_{i,j=1,\dots,N} \text{ où } a_{i,j} \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R},\mathbb{R}), \tag{4.29}$$

$$\exists \alpha > 0; A(s)\xi\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall s \in \mathbb{R}, \tag{4.30}$$

$$f \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)) \text{ et } u_0 \in L^2(\Omega). \tag{4.31}$$

Alors on peut montrer par le théorème de Schauder qu'il existe u solution de (toujours avec $L^2(\Omega)$ identifié à $L^2(\Omega)'$) :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))(\text{ et donc } u \in C([0,T],L^2(\Omega))), \\ \displaystyle\int_0^T \langle u_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}\ \mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega A(u)\nabla u\cdot\nabla v\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_0^T \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}\ \mathrm{d}t,\ \ \forall v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), \\ u(\cdot,0) = u_0. \end{array}\right. \tag{4.32}$$

Pour utiliser le théorème de Schauder, on utilise la résolution de problèmes linéaires : soit $\bar{u} \in L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$, on définit l'opérateur T de $L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$ dans $L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$ par $T(\bar{u}) = u$ où u est **la** solution du problème (4.32) où on a remplacé $A(u)$ par $A(\bar{u})$, c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)), \\ \displaystyle\int_0^T \langle u_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \,\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega A(\bar{u})\nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ \quad = \displaystyle\int_0^T \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \,\mathrm{d}t,\ \forall v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), \\ u(\cdot,0) = u_0. \end{array}\right.$$

On montre ensuite qu'il existe $R > 0$ t.q. l'image de T est incluse dans B_R où B_R est la boule (de $L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$) de rayon R et de centre 0. On montre que T est continu et que T est compact (par le lemme 4.31). On conclut avec le théorème de Schauder. Ceci est laissé à titre d'exercice (exercice 4.4).
Notons qu'on peut aussi montrer l'unicité si A est lipschitzienne.

Considérons maintenant l'équation de convection-diffusion suivante (avec une convection éventuellement non linéaire) : $u_t + \mathrm{div}(\boldsymbol{b}f(u)) - \Delta u = 0$, avec $\boldsymbol{b} \in L^2(]0,T[,(L^2(\Omega)^N)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $\mathrm{div}\boldsymbol{b} = 0$. On suppose de plus que f est lipschitzienne et bornée. Une formulation faible du problème s'écrit (avec $L^2(\Omega)$ identifié à $L^2(\Omega)'$) :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))(\text{ et donc } u \in C([0,T],L^2(\Omega))), \\ \displaystyle\int_0^T \langle u_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \,\mathrm{d}t - \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{b}f(u)\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0,\ \forall v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), \\ u(\cdot,0) = u_0. \end{array}\right. \tag{4.33}$$

Montrons l'existence d'une solution au problème (4.33) par degré topologique. Pour cela on va montrer que le problème (4.33) peut s'écrire sous la forme $u - h(1,u) = 0$, où l'application h, définie de $[0,1]\times E$ dans E, avec $E = L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$, vérifie :

1. h est compacte,
2. il existe $R \in \mathbb{R}_+$ t.q.
$$u - h(s,u) = 0,\ s \in [0,1],\ u \in E \Rightarrow u \notin \partial B_R,$$
3. l'application définie de E dans E par $u \mapsto u - h(0,u)$ est linéaire.

(Ceci est suffisant pour obtenir l'existence d'une solution au problème (4.33) .)
Soit $s \in [0,1]$ et $u \in E$. On note $h(s,u)$ la solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} w \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), w_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)), \\ \displaystyle\int_0^T \langle w_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \,\mathrm{d}t - \int_0^T \int_\Omega s\,\boldsymbol{b}f(u)\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ + \displaystyle\int_0^T \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0,\ \forall v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), \\ w(\cdot,0) = su_0. \end{array}\right. \tag{4.34}$$

Notons que $h(s,u) = w$ est bien définie car $\boldsymbol{b}f(u) \in L^2(]0,T[,(L^2(\Omega)^N)$.
De plus, il est facile de voir que le point 3. ci-dessus est vérifié, car $h(0,u) = 0$ et donc $u - h(0,u) = u$. Il reste à montrer les points 1 et 2, c'est-à-dire que h est continue, que $\{h(s,u),\ s \in [0,1], u \in B\}$ est une partie

relativement compacte de E, si B est une partie bornée de E, et qu'il existe $R > 0$ t.q. $u - h(s,u) = 0$ n'a pas de solution avec $s \in [0,1]$ et $u \in \partial B_R$.

Montrons d'abord que h est continue. Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[0,1]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E t.q. $s_n \to s$ dans $\mathbb{R}$ et $u_n \to u$ dans E lorsque $n \to +\infty$. On pose $w_n = h(s_n, u_n)$, $w = h(s,u)$ et on veut montrer que $w_n \to w$ dans E. Les fonctions w_n vérifient :

$$\left\{\begin{array}{l} w_n \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)), (w_n)_t \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)), \\ \displaystyle\int_0^T \langle (w_n)_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \,\mathrm{d}t - \int_0^T \int_\Omega s_n \, \boldsymbol{b}f((u_n)\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ \quad \displaystyle + \int_0^T \int_\Omega \nabla w_n \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = 0, \ \forall v \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)), \\ w_n(\cdot,0) = s_n u_0. \end{array}\right. \tag{4.35}$$

En prenant $v = w_n$ dans (4.35), on montre que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et que la suite $((w_n)_t)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$. On en déduit par le lemme 4.31 que $w_n \to \tilde{w}$ dans E, après extraction éventuelle d'une sous suite. Mais les bornes sur w_n et $(w_n)_t$ donnent aussi $w_n \to \tilde{w}$ faiblement dans $L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et $(w_n)_t \to \tilde{w}_t$ faiblement dans $L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$. Enfin, on peut supposer, toujours après extraction éventuelle d'une sous suite que $u_n \to u$ p.p.. En passant à la limite dans léquation satisfaite par w_n et en passant à la limite sur la condition initiale, on montre alors que $\tilde{w} = w$ (comme cela a été fait dans la démonstration du théorème 4.25). Ceci permet de conclure (sans extraction de sous suite) que $w_n \to w$ dans E et donne donc la continuité de h.

On pose maintenant $A = \{h(s,u),\, u \in L^2(]0,T[, L^2(\Omega)),\, s \in [0,1]\}$. Il est facile de voir que A est borné dans $L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et que $\{w_t,\, w \in A\}$ est borné dans $L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))\}$. Le lemme 4.31 donne alors la relative compacité de A dans E. Enfin l'existence de $R > 0$ t.q. $u - h(s,u) = 0$ n'ait pas de solution avec $s \in [0,1]$ et $u \in \partial B_R$ vient du fait que A est borné dans $L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et donc aussi dans E.

En conclusion, on peut utiliser l'invariance par homotopie du degré. On obtient $d(Id - h(1,\cdot), B_R, 0) = d(Id - h(0,\cdot), B_R, 0) = d(Id, B_R, 0) = 1$. Donc, il existe $u \in B_R$ t.q. $u - h(1,u) = 0$, c'est-à-dire u solution de (4.33).

On montre maintenant l'unicité de la solution de (4.33). On va montrer cette unicité dans un cadre un peu plus général (pour lequel on aurait aussi pu montrer l'existence) en remplaçant Δu par $\mathrm{div}(a(u)\nabla u)$, c'est-à-dire en considérant l'équation

$$u_t + \mathrm{div}(bf(u)) - \mathrm{div}(a(u)\nabla u) = 0,$$

avec un fonction a lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifant $\alpha \le a(s) \le \beta$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et deux nombres strictement positifs α, β.

Soit u_1, u_2 deux solutions de (4.33) (avec $\mathrm{div}(a(u)\nabla u)$ au lieu de Δu). On pose $u = u_1 - u_2$ et on va montrer que $u = 0$ p.p..

Pour $\varepsilon > 0$ on définit la fonction T_ε de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $T_\varepsilon(s) = \max\{-\varepsilon, \min\{s,\varepsilon\}\}$. On note aussi ϕ_ε la primitive de T_ε s'annulant en 0. En prenant $v = T_\varepsilon(u)$ dans les formulations faibles satisfaites par u_1 et u_2, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u_t, T_\varepsilon(u)\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt - \int_0^T \int_\Omega b(f(u_1) - f(u_2))\cdot\nabla T_\varepsilon(u) dx dt + \int_0^T \int_\Omega a(u_1)\nabla u \cdot \nabla T_\varepsilon(u) dx dt \\ = \int_0^T \int_\Omega (a(u_2) - a(u_1))\nabla u_2 \cdot \nabla T_\varepsilon(u) dx dt. \end{aligned}$$

Comme $\nabla T_\varepsilon(u) = \nabla u 1_{0<|u|<\varepsilon}$ p.p., on en déduit que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \phi_\varepsilon(u(x,T))dx - \int_\Omega \phi_\varepsilon(u(x,0))dx + \alpha\int_0^T\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u 1_{0<|u|<\varepsilon}dxdt\\ &\le \int_0^T\int_\Omega |b||f(u_1)-f(u_2)||\nabla u|1_{0<|u|<\varepsilon}dxdt + \int_0^T\int_\Omega |a(u_1)-a(u_2)||\nabla u_2||\nabla u|1_{0<|u|<\varepsilon}dxdt.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Comme a et f sont des fonctions lipschitziennes, il existe L t.q.

$$|f(s_1)-f(s_2)| \le L|s_1-s_2|,\ |a(s_1)-a(s_2)| \le L|s_1-s_2|,\ \text{ pour tout } s_1,s_2\in\mathbb{R}.$$

On utilise alors le fait que $u_0 = 0$ p.p. et $\phi_\varepsilon \ge 0$ pour déduire de (4.36), avec $A_\varepsilon = \{0<|u|<\varepsilon\}$ et $y=(x,t)$,

$$\begin{aligned}\alpha\int_0^T\int_\Omega |\nabla T_\varepsilon(u)|^2dxdt &\le L\varepsilon\Big(\int_{A_\varepsilon}|b|^2dy\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^T\int_\Omega|\nabla T_\varepsilon(u)|^2dxdt\Big)^{\frac12}\\ &\quad + L\varepsilon\Big(\int_{A_\varepsilon}|\nabla u_2|^2dy\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^T\int_\Omega|\nabla T_\varepsilon(u)|^2dxdt\Big)^{\frac12}.\end{aligned}$$

On a donc $\alpha|||\,\nabla T_\varepsilon(u)\,|||_{L^2(Q)} \le a_\varepsilon\varepsilon$, avec $Q=]0,T[\times\Omega$ et

$$a_\varepsilon = L\Big(\int_{A_\varepsilon}|b|^2dy\Big)^{\frac12} + L\Big(\int_{A_\varepsilon}|\nabla u_2|^2dy\Big)^{\frac12}.$$

Comme $\cap_{\varepsilon>0}A_\varepsilon = \emptyset$ la continuité décroissante d'une mesure donne que la mesure de Lebesgue ($N+1$ dimensionnelle) de A_ε tend vers 0 quand $\varepsilon\to0$ et on a donc, comme $b,\nabla u_2 \in L^2(Q)^N$, (noter que $L^2(Q)$ peut être identifié à $L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$)

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{A_\varepsilon}|b|^2dy = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{A_\varepsilon}|\nabla u_2|^2dy = 0,$$

ce qui donne $\lim_{\varepsilon\to0}a_\varepsilon = 0$. Il nous reste maintenant à utiliser, par exemple, l'injection de $W_0^{1,1}(\Omega)$ dans $L^{1^\star}(\Omega)$. elle donne pour $t\in]0,T[$,

$$\|T_\varepsilon(u(t))\|_{L^{1^\star}(\Omega)} \le \||\nabla T_\varepsilon(u(t))|\|_{L^1(\Omega)}. \tag{4.37}$$

On désigne par "mes" le mesure de le Lebesgue dans $\mathbb{R}^N$. On remarque maintenant que pour $t\in]0,T[$

$$\varepsilon\text{mes}\{|u(t)|\ge\varepsilon\}^{\frac{1}{1^\star}} \le (\int_\Omega |T_\varepsilon(u)|^{1^\star}dx)^{\frac{1}{1^\star}}.$$

On a donc, avec (4.37),

$$\varepsilon\text{mes}\{|u(t)|\ge\varepsilon\}^{\frac{1}{1^\star}} \le |||\,\nabla T_\varepsilon(u(t))\,|||_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega|\nabla T_\varepsilon(u(x,t))|dx,$$

et, en intégrant par rapport à t, sachant que $1/1^\star = (N-1)/N$ et utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\varepsilon\int_0^T\text{mes}\{|u(t)|\ge\varepsilon\}^{\frac{N-1}{N}}dt \le \int_0^T\int_\Omega|\nabla T_\varepsilon(u(x,t))|dxdt &\le \|\,|\nabla T_\varepsilon(u)|\,\|_{L^2(Q)}(T\text{mes}(\Omega))^{\frac12}\\ &\le \frac{(T\text{mes}(\Omega))^{\frac12}}{\alpha}a_\varepsilon\varepsilon.\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_0^T \text{mes}\{|u(t)| \geq \varepsilon\}^{\frac{N-1}{N}} dt \leq \frac{(T\text{mes}(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{\alpha} a_\varepsilon.$$

quand $\varepsilon \to 0$, par convergence dominée, on en déduit (comme $\lim_{\varepsilon\to 0} a_\varepsilon = 0$)

$$\int_0^T \text{mes}\{|u(t)| > 0\}^{\frac{N-1}{N}} dt \leq 0.$$

Ce qui donne $\text{mes}\{|u(t)| > 0\} = 0$ p.p. en $t \in]0, T[$ et donc $u = 0$ p.p., ce qui termine cette preuve d'unicité.

Remarque 4.33 Voici un complément et quelques généralisations possibles (laissés en exercice) du résultat d'existence et unicité de solution que nous venons de donner dans cette section.

1. Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Il existe donc $A \leq 0$ et $B \geq 0$ t.q. $A \leq u_0 \leq B$ p.p.. Soit u la solution de (4.33). On a alors $A \leq u \leq B$ p.p.. Pour démontrer ce résultat, il suffit de prendre $v = (u - B)^+$ (pour montrer $u \leq B$ p.p.) et $v = (A - u)^+$ (pour montrer $u \geq A$ p.p.) dans (4.33).
2. On a supposé f lipschitzienne et bornée. En fait si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, et donc $A \leq u_0 \leq B$ p.p.. avec $A \leq 0 \leq B$, on peut remplacer cette hypothèse sur f par "f localement lipschitzienne" (exemple : $f(s) = s^2$). La démonstration consiste à remplacer dans (4.33) f par $\bar{f}$ où $\bar{f}$ est définie par $\bar{f}(s) = \max\{A, \min\{s, B\}\}$. La solution obtenue, u, vérifie alors $A \leq u \leq B$ p.p. (d'après l'item précédent) et est donc solution de (4.33) (avec f).
3. Pour montrer l'existence et l'unicité de solution à (4.33), on a supposé $\text{div}\boldsymbol{b} = 0$. Cette hypothèse peut être remplaçée par $\text{div}\boldsymbol{b} \in L^\infty(\Omega)$ (mais en conservant l'hypothèse f lipschitzienne et bornée). On peut toujours montrer un résultat d'existence et d'unicité de solution à (4.33).
4. Enfin si $\text{div}\boldsymbol{b} \in L^\infty(\Omega)$, $\|\text{div}\boldsymbol{b}\|_\infty = C$, f lipschitzienne de constante de Lipschitz L (mais f non nécessairement bornée) et $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\|u_0\|_\infty = M$, on peut aussi montrer un résultat d'existence et d'unicité de solution à (4.33). La solution u vérifie alors $\|u(t)\|_\infty \leq M \exp(CLt)$ pour tout $t \in [0, T]$.

4.5 Compacité en temps

Dans cette section, on démontre le lemme de compacité 4.31 comme conséquence d'un théorème plus général, le théorème 4.37, utile pour la résolution de nombreux problèmes paraboliques.

Plus précisément, la version abstraite du lemme 4.31 s'écrit dans un cadre hilbertien. On donne tout d'abord cette version abstraite. On suppose que X et H sont des espaces de Hilbert, X s'injecte compactement dans H et Xest dense dans H (dans le lemme 4.31 on a $X = H_0^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$. On identifie H avec H' (par le théorème de représentation de Riesz). On suppose maintenant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L^2(]0, T[, X)$ ($T > 0$ est donné) et que $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L^2(]0, T[, X')$. Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $L^2(]0, T[, H)$.

Ce résultat de compacité dans le cadre hilbertien (probablement dû à J.L. Lions) a ensuite été généralisé par Julius Gustave Amadeus Aubin dans un cadre d'espaces de Banach. Soit X, B, Y 3 espaces de Banach et $1 < p < +\infty$. On suppose que X s'injecte compactement dans B et que B s'injecte continûment dans Y. On suppose maintenant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L^p(]0, T[, X)$ ($T > 0$ est donné) et que $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L^p(]0, T[, Y)$. Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $L^p(]0, T[, B)$. Enfin, ce dernier résultat a ensuite été généralisé par J. Simon (en 1985) pour avoir aussi le cas $p = 1$. C'est ce dernier résultat que nous donnons dans ce paragraphe ainsi que différentes généralisations.

Nous donnons d'abord le théorème de Kolmogorov (sous deux formes légèment différentes) dont nous déduisons ensuite les théorèmes 4.37 et 4.46. En anglais, parce que vous le valez bien.

Théorème 4.34 (Kolmogorov (1)) *Let B be a Banach space, $1 \leq p < +\infty$, $T > 0$ and $A \subset L^p((0,T),B)$. The subset A is relatively compact in $L^p((0,T),B)$ if A verifies the following conditions :*

1. *For all $f \in A$, there exists $Pf \in L^p(\mathbb{R},B)$ such that $Pf = f$ a.e. in $(0,T)$ and $\|Pf\|_{L^p(\mathbb{R},B)} \leq C$, where C depends only on A.*
2. *For all $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, the family $\{\int_{\mathbb{R}}(Pf)\varphi dt,\ f \in A\}$ is relatively compact in B.*
3. *$\|Pf(\cdot+h) - Pf\|_{L^p(\mathbb{R},B)} \to 0$, as $h \to 0$, uniformly with respect to $f \in A$.*

(Indeed, the conditions 1, 2 and 3 are also necessary in order to have relative compactness of A but this is not the interesting part of this theorem.)

Proof of Theorem 4.34
Let $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ be a sequence of mollifiers, that is :

$$\begin{array}{l} \rho \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho dx = 1,\ \rho \geq 0,\ \rho(-\cdot) = \rho \\ \text{and, for } n \in \mathbb{N}^\star,\ x \in \mathbb{R},\ \rho_n(x) = n\rho(nx). \end{array} \tag{4.38}$$

We set $K = [0,T]$ and, for $n \in \mathbb{N}^\star$, $A_n = \{(Pf \star \rho_n)_{|K},\ f \in A\}$. The proof is divided in two steps. In Step 1 we prove, using Ascoli's theorem and Assumption 2 of Theorem 4.34, that, for $n \in \mathbb{N}^\star$, the set A_n is relatively compact in $C(K,B)$ endowed with its usual topology. Then, we deduce that A_n is also relatively compact in $L^p((0,T),B)$. In Step 2, we show that the first and third hypotheses of Theorem 4.34 give that $Pf \star \rho_n \to Pf$ in $L^p(\mathbb{R},B)$, as $n \to +\infty$, uniformly with respect to $f \in A$. This allows to conclude that the family A is relatively compact in $L^p((0,T),B)$.

Step 1. Let $n \in \mathbb{N}^\star$. In order to prove that A_n is relatively compact in $C(K,B)$, we use Ascoli's theorem ; hence we need to prove the following properties :

1. for all $t \in K$, the set $\{Pf \star \rho_n(t),\ f \in A\}$ is relatively compact in B,
2. the sequence $\{Pf \star \rho_n,\ f \in A\}$ is equicontinuous from K to B (that is to say that the continuity is uniform with respect to $f \in A$).

We first prove Property 1. Let $t \in K$.

$$Pf \star \rho_n(t) = \int_{\mathbb{R}} Pf(s)\rho_n(t-s)ds = \int_{\mathbb{R}} Pf(s)\varphi(s)ds.$$

Then, the second hypothesis of Theorem 4.34 gives Property 1, that is $\{Pf \star \rho_n(t),\ f \in A\}$ is relatively compact in B.

We now prove Property 2. Let $t_1, t_2 \in K$ and let $q = p/(p-1)$ by Hölder's inequality, we have

$$\begin{aligned} \|Pf \star \rho_n(t_2) - Pf \star \rho_n(t_1)\|_B &\leq \int_{\mathbb{R}} \|Pf(s)\|_B \,|\rho_n(t_2-s) - \rho_n(t_1-s)|\, ds \\ &\leq \|Pf\|_{L^p(\mathbb{R},B)} \|\rho_n(t_2-\cdot) - \rho_n(t_1-\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R},\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Since ρ_n is uniformly continuous with compact support, we easily deduce from this inequality (and with Hypothesis 1 of Theorem 4.34) and that the family A_n is uniformly equicontinuous from K to B. This gives the Property 2 and concludes the proof that A_n is relatively compact in $C(K,B)$. This relative compactness is equivalent to say that for all $\varepsilon > 0$, there exists a finite number of ball of radius ε (for the natural norm of $C(K,B)$) covering the whole set A_n. Then, since $\|\cdot\|_{L^p((0,T),B)} \leq T^{1/p}\|\cdot\|_{C(K,B)}$, we also obtain the relative compactness of A_n in $L^p((0,T),B)$.

Step 2.
Let $t \in \mathbb{R}$, we have, using $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(s)ds = 1$ and $\overline{s} = ns$,

$$Pf \star \rho_n(t) - Pf(t) = \int_{\mathbb{R}} (Pf(t-s) - Pf(t))\rho_n(s)ds = \int_{-1}^{1} (Pf(t - \frac{\overline{s}}{n}) - Pf(t))\rho(\overline{s})d\overline{s}.$$

Then, by Hölder's inequality and with $q = p/(p-1)$,

$$\|Pf \star \rho_n(t) - Pf(t)\|_B^p \leq \left(\int_{-1}^{1} \|Pf(t - \frac{s}{n}) - Pf(t))\|_B^p ds \right) \|\rho\|_{L^q}^p.$$

Integrating with respect to $t \in \mathbb{R}$ and using the Fubini-Tonelli theorem leads to

$$\|Pf \star \rho_n - Pf\|_{L^p((0,T),B)}^p \leq 2 \sup\{\|Pf(\cdot + h) - Pf\|_{L^p(\mathbb{R},B)}^p,\ |h| \leq 1\} \|\rho\|_{L^q}^p.$$

Finally, the third hypothesis of Theorem 4.34 gives the fact that $\|Pf \star \rho_n - Pf\|_{L^p((0,T),B)} \to 0$, as $n \to +\infty$, uniformly with respect to $f \in A$. As a consequence, the relative compactness of A_n in $L^p((0,T),B)$ for all $n \in \mathbb{N}$ (proven in Step 1) gives the relative compactness of A in $L^p((0,T),B)$. This concludes the proof of Theorem 4.34.

■

We now give a second form of the previous theorem which does not require the prolongment of f outside $[0,T]$.

Théorème 4.35 (Kolmogorov (2)) *Let B be a Banach space, $1 \leq p < +\infty$, $T > 0$ and $A \subset L^p((0,T),B)$. The subset A is relatively compact in $L^p((0,T),B)$ if A verifies the following conditions :*

1. *The subset A is bounded in $L^p((0,T),B)$.*
2. *For all $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, the family $\{\int_0^T f\varphi dt,\ f \in A\}$ is relatively compact in B.*
3. *There exists a nondecreasing function from $(0,T)$ to $\mathbb{R}_+$ such that $\lim_{h\to 0^+} \eta(h) = 0$ and, for all $h \in (0,T)$ and $f \in A$,*

$$\int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|_B^p dt \leq \eta(h).$$

Proof of Theorem 4.35
The proof uses Theorem 4.34 with $Pf = 0$ on $[0,T]^c$. The first and second item of the hypotheses of Theorem 4.34 are clearly satisfied. The only difficulty is to prove the third item. We prove this third item in two steps.

Step 1. In this step, we prove that $\lim_{\delta\to 0} \int_0^\delta \|f(t)\|_B^p dt \to 0$ as $\delta \to 0^+$, uniformly with respect to $f \in A$.
Let $\delta, h \in (0,T)$ such that $\delta + h \leq T$. For all $t \in (0,\delta)$ one has $\|f(t)\|_B \leq \|f(t+h)\|_B + \|f(t+h) - f(t)\|_B$ and then

$$\|f(t)\|_B^p \leq 2^p \|f(t+h)\|_B^p + 2^p \|f(t+h) - f(t)\|_B^p$$

Integrating this inequality for $t \in (0,\delta)$ gives

$$\int_0^\delta \|f(t)\|_B^p dt \leq 2^p \int_0^\delta \|f(t+h)\|_B^p dt + 2^p \int_0^\delta \|f(t+h) - f(t)\|_B^p dt. \tag{4.39}$$

Now let $h_0 \in (0,T)$ et $\delta \in (0, T - h_0)$. For all $h \in (0,h_0)$, Inequality (4.39) gives, using $\eta(h) \leq \eta(h_0)$,

$$\int_0^\delta \|f(t)\|_B^p dt \leq 2^p \int_0^\delta \|f(t+h)\|_B^p dt + 2^p \eta(h_0).$$

Integrating this inequality for $h \in (0, h_0)$ leads to

$$h_0 \int_0^\delta \|f(t)\|_B^p dt \leq 2^p \int_0^{h_0} \big(\int_0^\delta \|f(t+h)\|_B^p dt \big) dh + 2^p h_0 \eta(h_0).$$

Then, using the Fubini-Tonelli Theorem, we obtain

$$\int_0^{h_0} \big(\int_0^\delta \|f(t+h)\|_B^p dt \big) dh = \int_0^\delta \big(\int_0^{h_0} \|f(t+h)\|_B^p dh \big) dt$$
$$\leq \int_0^\delta \big(\int_0^T \|f(s)\|_B^p ds \big) \leq \delta \|f\|^p_{L^p((0,T),B)},$$

from which one deduces

$$h_0 \int_0^\delta \|f(t)\|_B^p dt \leq \delta 2^p \|f\|^p_{L^p((0,T),B)} + 2^p h_0 \eta(h_0). \tag{4.40}$$

In order to conclude this step, let $\varepsilon > 0$. First, we choose $h_0 \in (0, T)$ such that $2^p \eta(h_0) \leq \varepsilon$. Then, with $C = \sup_{f \in A} \|f\|^p_{L^p((0,T),B)}$, we take $\overline{\delta} = \min\{T - h_0, \varepsilon h_0/(2^p C)\}$. We obtain, for all $f \in A$,

$$0 \leq \delta \leq \overline{\delta} \Rightarrow \int_0^\delta \|f(t)\|_B^p \leq 2\varepsilon.$$

This gives that $\int_0^\delta \|f(t)\|_B^p dt \to 0$ as $\delta \to 0^+$, uniformly with respect to $f \in A$, and concludes Step 1.

A similar proof gives $\int_{T-\delta}^T \|f(t)\|_B^p dt \to 0$ as $\delta \to 0^+$, uniformly with respect to $f \in A$ (this can be proven using g instead of f with $g(t) = f(T - t)$).

Step 2. We now prove that the third item of the hypotheses of Theorem 4.34 is satisfied (and this conludes the proof of Theorem 4.35).
Recall that $Pf(t) = 0$ if $t \in [0, T]^c$ so that, for all $h \in (0, T)$ et $f \in A$,

$$\int_{\mathbb{R}} \|Pf(t+h) - Pf(t)\|_B^p dt \leq \int_{-h}^0 \|f(t+h)\|_B^p dt + \int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|_B^p dt + \int_{T-h}^T \|f(t)\|_B^p dt$$
$$\leq \int_0^h \|f(t)\|_B^p dt + \int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|_B^p dt + \int_{T-h}^T \|f(t)\|_B^p dt.$$

Let $\varepsilon > 0$. There exists $h_1 > 0$ such $\eta(h_1) \leq \varepsilon$. With Step 1, there exists $h_2 > 0$ such that, for all $f \in A$,

$$0 \leq h \leq h_2 \Rightarrow \int_0^h \|f(t)\|_B^p dt \leq \varepsilon \text{ and } \int_{T-h}^T \|f(t)\|_B^p dt \leq \varepsilon.$$

with $h_3 = \min\{h_1, h_2\}$, one has, for all $f \in A$,

$$0 \leq h \leq h_3 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \|Pf(t+h) - Pf(t)\|_B^p dt \leq 3\varepsilon.$$

This concludes Step 2 and the proof of Theorem 4.35. ∎

We now deduce from Theorem 4.35 a corollary which will be useful for Theorem 4.37.

Corollaire 4.36 (Time compactness) *Let B be a Banach space, $1 \leq p < +\infty$, $T > 0$ and $A \subset L^p((0,T),B)$. Let X be a Banach space compactly embedded in B. One assumes that A verifies the following conditions :*

1. *The subset A is bounded in $L^p((0,T),B)$.*
2. *The subset A is bounded in $L^1((0,T),X)$.*

Note these two assumtions are true if A is bounded in $L^p((0,T),X)$.

3. *There exists a nondecreasing function from $(0,T)$ to $\mathbb{R}_+$ such that $\lim_{h\to 0^+}\eta(h) = 0$ and, for all $h \in (0,T)$ and $f \in A$,*
$$\int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|_B^p dt \leq \eta(h).$$

Then, the subset A is relatively compact in $L^p((0,T),B)$.

Proof In order to apply Theorem 4.35, we only have to prove that, for all $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, the family $\{\int_0^T f\varphi dt,\ f \in A\}$ is relatively compact in B.
Let $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. For $f \in A$, one has, with $\|\varphi\|_u = \max_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|$,

$$\| \int_0^T f\varphi dt\|_X \leq \|\varphi\|_u \|f\|_{L^1((0,T),X)}.$$

Then, since A is bounded in $L^1((0,T),X)$, the family $\{\int_0^T f\varphi dt,\ f \in A\}$ is bounded in X and therefore relatively compact in B. ∎

We now give a Theorem, essentially due to J. P. Aubin (for $p > 1$) and J. Simon (for $p = 1$), which we used in a previous section to prove the existence of a solution for some parabolic equations.

Théorème 4.37 (Aubin-Simon) *Let $1 \leq p < +\infty$, X, B, Y be three Banach spaces such that*

(i) $X \subset B$ with compact embedding,

(ii) $X \subset Y$ and if $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence in X such that $(\|f_n\|_X)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded, $f_n \to f$ in B and $f_n \to 0$ in Y (as $n \to +\infty$), then $f = 0$ (in B).

Let $T > 0$ and $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of $L^p((0,T),X)$ such that

1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded in $L^p((0,T),X)$,*
2. *$(\frac{du_n}{dt})_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded in $L^p((0,T),Y)$.*

Then there exists $u \in L^p((0,T),B)$ such that, up to a subsequence, $u_n \to u$ in $L^p((0,T),B)$.

Remarque 4.38 Note that the hypothesis (ii) of Theorem 4.37 is weaker than the hypothesis of the original works of Aubin and Simon, which reads :

(ii)' $B \subset Y$ with continuous embedding.

Let $X \subset B$. It is also interesting to notice that the hypothesis (i) may also be written :

(i)' If $(\|w_n\|_X)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded, then, up to a subsequence, there exists $w \in B$ such that $w_n \to w$ in B.

This reformulation leads to an easy generalization which is used to prove the convergence of numerical approximations of the solution of parabolic equations : in this generalization, X is replaced by a sequence $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, see Theorem 4.46 below.

Proof of Theorem 4.37 The proof uses Corollary 4.36 with $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. The subset A is bounded in $L^p((0,T),B)$ (since X is continuously embedded in B) and then in $L^1((0,T),X)$, so that we only have to prove the third item of the hypotheses of Corollary 4.36, which is equivalent to say

$$\int_0^{T-h} \|u_n(\cdot+h) - u_n\|_B^p dt \to 0 \text{ as } h \to 0, \text{ uniformly w.r.t. } n \in \mathbb{N}. \tag{4.41}$$

Let $0 < h < T$ and $\varepsilon > 0$. For $t \in (0, T-h)$, one has, using the Lions lemma given below (lemma 4.39),

$$\begin{aligned}\|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B &\le \varepsilon\|u_n(t+h) - u_n(t)\|_X + C_\varepsilon\|u_n(t+h) - u_n(t)\|_Y \\ &\le \varepsilon\|u_n(t+h)\|_X + \varepsilon\|u_n(t)\|_X + C_\varepsilon\|u_n(t+h) - u_n(t)\|_Y,\end{aligned}$$

and then

$$\|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p \le (3\varepsilon)^p\|u_n(t+h)\|_X^p + (3\varepsilon)^p\|u_n(t)\|_X^p + (3C_\varepsilon)^p\|u_n(t+h) - u_n(t)\|_Y^p.$$

Integrating this inequality with respect to t (between 0 and $T-h$) leads to

$$\int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p dt \le 2(3\varepsilon)^p\|u_n\|_{L^p((0,T),X)}^p + (3C_\varepsilon)^p \int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_Y^p dt. \tag{4.42}$$

We now use the second item of Remark 4.41 (also given in Section 4.2). It gives that $u_n \in C([0,T],Y)$ and $u_n(t_1) - u_n(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{du_n}{dt}(s)ds$ for all $t_1, t_2 \in [0,T]$. This allows us to bound the second term of the RHS of (4.42) :

$$\begin{aligned}\int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_Y^p dt &\le \int_0^{T-h} \left(\int_t^{t+h} \|\frac{du_n}{dt}(s)\|_Y ds \right)^p dt \\ &\le \int_0^{T-h} h^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^T 1_{[t,t+h]}(s) \|\frac{du_n}{dt}(s)\|_Y^p ds \right) dt.\end{aligned}$$

Then, using $1_{[t,t+h]}(s) = 1_{[s-h,s]}(t)$ and the Fubini-Tonelli Theorem, we obtain

$$\int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_Y^p dt \le h^{2-\frac{1}{p}} \|\frac{du_n}{dt}\|_{L^p((0,T),Y)}^p. \tag{4.43}$$

Then, with (4.43), (4.42) gives

$$\int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p dt \le 2(3\varepsilon)^p\|u_n\|_{L^p((0,T),X)}^p + (3C_\varepsilon)^p h^{2-\frac{1}{p}} \|\frac{du_n}{dt}\|_{L^p((0,T),Y)}^p. \tag{4.44}$$

We can now conclude. Let $\eta > 0$. we choose $\varepsilon > 0$ in order to bound by η this first term of (4.44) (independently of $n \in \mathbb{N}$). Now, since C_ε is given, there exists $h_0 \in (0,T)$ such that the second term of the RHS of (4.44) is bounded by η (independently of $n \in \mathbb{N}$) if $0 < h < h_0$. Finally, we obtain

$$0 < h < h_0 \Rightarrow \int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p dt \le 2\eta.$$

This concludes the proof of Theorem 4.37. ∎

Lemme 4.39 *Let X, B, Y be three Banach spaces such that*

(i) $X \subset B$ *with compact embedding,*

(ii) $X \subset Y$ *and if $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence in X such that the sequence $(\|u_n\|_X)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded, $u_n \to u$ in B and $u_n \to 0$ in Y (as $n \to +\infty$), then $u = 0$ (in B).*

Then, for any $\varepsilon > 0$, there exists C_ε such that, for $w \in X$,

$$\|w\|_B \leq \varepsilon\|w\|_X + C_\varepsilon\|w\|_Y.$$

Remarque 4.40 In Lemma 4.39, as for Theorem 4.37, the hypothesis (ii) can be replaced by the stronger hypothesis

(ii)' $B \subset Y$ with continuous embedding.

Proof of Lemma 4.39 We perform the proof by contradiction. We assume that there exists $\varepsilon > 0$ and a sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ such that $u_n \in X$ and $1 = \|u_n\|_B > \varepsilon\|u_n\|_X + n\|u_n\|_Y$, for all $n \in \mathbb{N}$.
Then, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded in X and therefore relatively compact in B. Thus, we can assume (up to a subsequence) that $u_n \to u$ in B and $\|u\|_B = 1$. Furthermore $u_n \to 0$ in Y (since $\|u_n\|_Y \leq 1/n$). Then the second hypothesis of Lemma 4.39 gives $u = 0$. In contradiction with $\|u\|_B = 1$. ∎

Remarque 4.41 (On the weak derivative on u) We recall here (items 1 and 2) some results essentially given in Section 4.2 (with a different proof for the second item). Let X, Y be two Banach spaces and Z be a vectorial space such that $X, Y \subset Z$ (of course, a simple case is $Z = Y$). Let $p, q \in [1, \infty]$.

1. Assuming that $u \in L^p((0,T), X)$, the weak derivative of u, denoted as du/dt, is defined by its action on test functions, that is its action on φ for all $\varphi \in C_c^\infty((0,T))$ (note that φ takes its values in $\mathbb{R}$). Actually, if $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty((0,T))$ (and φ' is the classical derivative of φ), the function $\varphi' u$ belongs to $L^p((0,T), X)$ and therefore to $L^1((0,T), X)$ and the action of du/dt on φ is defined as

$$\langle \frac{du}{dt}, \varphi\rangle = -\int_0^T \varphi'(t)u(t)dt.$$

   Note that $\langle \frac{du}{dt}, \varphi\rangle \in X$.

   Then $du/dt \in L^q((0,T), Y)$ means that there exists $v \in L^q((0,T), Y)$ (and then v is unique) such that

$$-\int_0^T \varphi'(t)u(t)dt = \int_0^T \varphi(t)v(t)dt \text{ for all } \varphi \in C_c^\infty((0,T)). \tag{4.45}$$

   Note that $\int_0^T \varphi'(t)u(t)dt \in X \subset Z$ and $\int_0^T \varphi(t)v(t)dt \in Y \subset Z$, so the equality in (4.45) holds in Z. Finally we identify the weak derivative of u (which is a linear form on $\mathcal{C}_c^\infty((0,T))$) with the function v (which belongs to $L^q((0,T), Y)$).

2. If $u \in L^p((0,T), X)$ and $du/dt \in L^q((0,T), Y)$, it is quite easy to prove that $u \in C([0,T], Y)$ and that

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \frac{du}{dt}(s)ds, \text{ for all } t \in [0,T].$$

   Indeed, let $v = du/dt$ and define $w \in C([0,T], Y)$ by

$$w(t) = \int_0^t v(s)ds \text{ for all } t \in [0,T].$$

For $n \in \mathbb{N}^\star$, let $u_n = u \star \rho_n$ with ρ_n defined by (4.38) and setting $u = 0$ outside $[0,T]$. Since $u \in L^p(\mathbb{R}, X)$, one has $u_n \to u$ in $L^p(\mathbb{R}, X)$ and then, up to a subsequence, $u_n(t) \to u(t)$ in X (as $n \to +\infty$) for a.e. $t \in (0,T)$.
Let $t_1, t_2 \in (0,T)$ such that $0 < t_1 < t_2 < T$ and $u_n(t_i) \to u(t_i)$ in X (as $n \to +\infty$) for $i = 1, 2$. For $n \in \mathbb{N}^\star$ such that $1/n < t_1$ and $1/n < T - t_2$, one defines φ_n by

$$\varphi_n(t) = \int_{t_2}^t \rho_n(t_2 - s)ds - \int_{t_1}^t \rho_n(t_1 - s)ds.$$

One has $\varphi_n \in C_c^\infty((0,T), \mathbb{R})$ and $\varphi_n'(t) = \rho_n(t_2 - t) - \rho_n(t_1 - t)$ for $t \in (0,T)$. Then, we have

$$u_n(t_2) - u_n(t_1) = \int_0^T u(s)\varphi_n'(s)ds = -\int_0^T v(s)\varphi_n(s)ds.$$

We now remark that (using $\rho(-\cdot) = \rho$ and changing variables)

$$\varphi_n(t) = \int_{t_2}^t \rho_n(s - t_2))ds - \int_{t_1}^t \rho_n(s - t_1)ds = -\int_{t_1}^{t_2} \rho_n(t - s)ds = -1_{(t_1,t_2)} \star \rho_n(t).$$

Then, $\varphi_n \to -1_{(t_1,t_2)}$ a.e. and since $|\varphi_n| \leq 1$ a.e. (for all n), the Dominated Convergence Theorem gives

$$-\int_0^T v(s)\varphi_n(s)ds \to \int_{t_1}^{t_2} v(s)ds \text{ in } Y.$$

We then obtain, as $n \to +\infty$,

$$u(t_2) - u(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(s)ds = w(t_2) - w(t_1).$$

This proves that there exists $c \in \mathbb{R}$ such that $u = w + c$ a.e. on $(0,T)$ and then that $u \in C((0,T), Y)$ (since, as usual, we identify u with the continuous function $w + c$).

3. In Theorem 4.37, thanks to the previous item of the present remark, one has $u_n \in C([0,T], Y)$ for all $n \in \mathbb{N}$. However the limit u is not necessarily continuous. A simple counter example is obtain with $p = 1$, $X = B = Y$ and, for instance, $T = 2$. Then, it is quite easy to construct a sequence $(u_n)_n$ bounded in $W^{1,1}((0,T))$ whose the limit is the characteristic function of $[1,2]$.

Remarque 4.42 There is a classical case where Lemma 4.39 is simpler. Let B be a Hilbert space and X be a Banach space $X \subset B$. We define on X the dual norm of $\|\cdot\|_X$, with the scalar product of B, namely

$$\|u\|_Y = \sup\{(u|v)_B,\ v \in X, \|v\|_X \leq 1\}.$$

Then, for any $\varepsilon > 0$ and $u \in X$,

$$\|u\|_B \leq \varepsilon\|u\|_X + \frac{1}{\varepsilon}\|u\|_Y.$$

The proof is simple since

$$\|u\|_B = (u|u)_B^{\frac{1}{2}} \leq (\|u\|_Y\|u\|_X)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon\|u\|_X + \frac{1}{\varepsilon}\|u\|_Y.$$

Note that the compactness of X in B is not needed here (but, even in this simple case of Lemma 4.39, the compactness of X in B is needed for Theorem 4.37.)

We now give an improvement of Corollary 4.36 and Theorem 4.37, using a sequence of subspaces of B instead of X and Y.

Définition 4.43 *Let B be a Banach space and $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B. We say that the sequence $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is compactly embedded in B if all sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ such that $u_n \in X_n$ (for all $n \in \mathbb{N}$) and $(\|u_n\|_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ bounded is relatively compact in B.*

Proposition 4.44 (Time compactness with a sequence of subspaces) *$1 \le p < +\infty$, $T > 0$. Let B be a Banach space and $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces compactly embedded in B (see Definition 4.43). Let $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of $L^p((0,T),B)$ satifying the following conditions*

1. *The sequence $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded in $L^p((0,T),B)$.*
2. *The sequence $(\|f_n\|_{L^1((0,T),X_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded.*
3. *There exists a nondecreasing function from $(0,T)$ to $\mathbb{R}_+$ such that $\lim_{h\to 0^+}\eta(h) = 0$ and, for all $h \in (0,T)$ and $n \in \mathbb{N}$,*
$$\int_0^{T-h} \|f_n(t+h) - f_n(t)\|_B^p dt \le \eta(h).$$

Then, the sequence $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is relatively compact in $L^p((0,T),B)$.

Proof of Proposition 4.44 As in Corollary 4.36, in order to apply Theorem 4.35, we only have to prove that, for all $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, the sequence $\{\int_0^T f_n\varphi dt,\, n \in \mathbb{N}\}$ is relatively compact in B.
Let $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. For $n \in \mathbb{N}$, one has, with $\|\varphi\|_u = \max_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|$,

$$\|\int_0^T f_n\varphi dt\|_{X_n} \le \|\varphi\|_u \|f_n\|_{L^1((0,T),X_n)}.$$

Then, since the sequence $(\|f_n\|_{L^1((0,T),X_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded, the sequence $\{\|\int_0^T f_n\varphi dt\|_{X_n},\, n \in \mathbb{N}\}$ is also bounded. Therefore the sequence $\{\int_0^T f_n\varphi dt,\, n \in \mathbb{N}\}$ in relatively compact in B. ∎

We now give a generalization of Theorem 4.37 using a sequence of subspaces of B.

Définition 4.45 *Let B be a Banach space, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B and $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces. We say that the sequence $(X_n,Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is compact-continuous in B if the following conditions are satified*

1. *The sequence $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is compactly embedded in B (see Definition 4.43).*
2. *$X_n \subset Y_n$ (for all $n \in \mathbb{N}$) and if the sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is such that $u_n \in X_n$ (for all $n \in \mathbb{N}$), $(\|u_n\|_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ bounded and $\|u_n\|_{Y_n} \to 0$ (as $n \to +\infty$), then any subsequence converging in B converge (in B) to 0.*

Théorème 4.46 (Aubin-Simon with a sequence of subspaces) *Let $1 \le p < +\infty$. Let B be a Banach space, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B and $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces. We assume that the sequence $(X_n,Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is compact-continuous in B (see Definition 4.45).*
Let $T > 0$ and $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of $L^p((0,T),B)$ satifying the following conditions

1. *The sequence $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded in $L^p((0,T),B)$.*
2. *$f_n \in L^1((0,T),X_n)$ (for all $n \in \mathbb{N}$) and the sequence $(\|f_n\|_{L^1((0,T),X_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded.*
3. *$\frac{df_n}{dt} \in L^p((0,T),Y_n)$ (for all $n \in \mathbb{N}$) and the sequence $(\|\frac{df_n}{dt}\|_{L^p((0,T),Y_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded.*

Then there exists $f \in L^p((0,T),B)$ such that, up to a subsequence, $f_n \to f$ in $L^p((0,T),B)$.

Proof of Theorem 4.46 The proof uses Proposition 4.44. We only have to prove the third item of the hypotheses on $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of Proposition 4.44, which is equivalent to say

$$\int_0^{T-h} \|f_n(\cdot+h)-f_n\|_B^p dt \to 0 \text{ as } h\to 0, \text{ uniformly w.r.t. } n\in\mathbb{N}.$$

Indeed, for all $n\in\mathbb{N}$, since $f_n\in L^p((0,T),B)$, one has $\int_0^{T-h}\|f_n(\cdot+h)-f_n\|_B^p dt\to 0$ as $h\to 0$. The only difficulty is to prove the uniformity of this convergence with respect to $n\in\mathbb{N}$. So, we only have to prove that for all $\eta>0$ there exist $n_0\in\mathbb{N}$ and $0<h_0<T$ such that

$$n\geq n_0,\ 0<h\leq h_0 \Rightarrow \int_0^{T-h}\|f_n(\cdot+h)-f_n\|_B^p dt\leq \eta. \tag{4.46}$$

Let $\varepsilon>0$. Lemma 4.47 gives the existence of $n_0\in\mathbb{N}$ and $C_\varepsilon\in\mathbb{R}$ such that

$$n\geq n_0,\ u\in X_n \Rightarrow \|u\|_B\leq \varepsilon\|u\|_{X_n}+C_\varepsilon\|u\|_{Y_n}.$$

Then, for $n\geq n_0$, $0<h<T$ and $t\in(0,T-h)$, one has

$$\begin{aligned}\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_B &\leq \varepsilon\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_{X_n}+C_\varepsilon\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_{Y_n}\\ &\leq \varepsilon\|f_n(t+h)\|_{X_n}+\varepsilon\|f_n(t)\|_{X_n}+C_\varepsilon\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_{Y_n},\end{aligned}$$

and then

$$\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_B^p\leq (3\varepsilon)^p\|f_n(t+h)\|_{X_n}^p+(3\varepsilon)^p\|f_n(t)\|_{X_n}^p+(3C_\varepsilon)^p\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_{Y_n}^p.$$

Integrating this inequality with respect to t leads to

$$\int_0^{T-h}\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_B^p dt\leq 2(3\varepsilon)^p\|f_n\|_{L^p((0,T),X_n)}^p+(3C_\varepsilon)^p\int_0^{T-h}\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_{Y_n}^p dt. \tag{4.47}$$

We now recall (see Remark 4.41) that $f_n\in C([0,T],Y_n)$ and $f_n(t_1)-f_n(t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{df_n}{dt}(s)ds$ for all $t_1,t_2\in[0,T]$. This allows us to bound the second term of the RHS of (4.47) :

$$\begin{aligned}\int_0^{T-h}\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_{Y_n}^p dt &\leq \int_0^{T-h}\left(\int_t^{t+h}\|\frac{df_n}{dt}(s)\|_{Y_n}ds\right)^p dt\\ &\leq \int_0^{T-h}h^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^T 1_{[t,t+h]}(s)\|\frac{df_n}{dt}(s)\|_{Y_n}^p ds\right)dt.\end{aligned}$$

Then, using $1_{[t,t+h]}(s)=1_{[s-h,s]}(t)$ and the Fubini-Tonelli Theorem, we obtain

$$\int_0^{T-h}\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_{Y_n}^p dt\leq h^{2-\frac{1}{p}}\|\frac{df_n}{dt}\|_{L^p((0,T),Y_n)}^p. \tag{4.48}$$

Then, with (4.48), (4.47) gives

$$\int_0^{T-h}\|f_n(t+h)-f_n(t)\|_B^p dt\leq 2(3\varepsilon)^p\|f_n\|_{L^p((0,T),X_n)}^p+(3C_\varepsilon)^p h^{2-\frac{1}{p}}\|\frac{df_n}{dt}\|_{L^p((0,T),Y_n)}^p. \tag{4.49}$$

We can now conclude. Let $\eta > 0$. we choose $\varepsilon > 0$ in order to bound by η this first term of (4.49) (independently of $n \in \mathbb{N}$). This choice of ε gives also n_0 and C_ε. Since C_ε is given, there exists $h_0 \in (0, T)$ such that the second term of the RHS of (4.49) is bounded by η (independently of $n \in \mathbb{N}$) if $0 < h < h_0$. Finally, we obtain

$$n \geq n_0,\ 0 < h < h_0 \Rightarrow \int_0^{T-h} \|f_n(t+h) - f_n(t)\|_B^p dt \leq 2\eta.$$

This concludes the proof of Theorem 4.46. ∎

Lemme 4.47 *Let B be a Banach space, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B and $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces. We assume that the sequence $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is compact-continuous in B (see Definition 4.45).*
Then, for any $\varepsilon > 0$, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ and C_ε such that, for $n \geq n_0$ and $w \in X_n$, one has

$$\|w\|_B \leq \varepsilon \|w\|_{X_n} + C_\varepsilon \|w\|_{Y_n}.$$

Proof of Lemma 4.47 We perform the proof by contradiction. The contradiction gives that there exists $\varepsilon > 0$, an increasing fonction φ from $\mathbb{N}$ to $\mathbb{N}$ and, for all $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in X_{\varphi(n)}$ such that

$$1 = \|u_{\varphi(n)}\|_B > \varepsilon \|u_{\varphi(n)}\|_{X_n} + n \|u_{\varphi(n)}\|_{Y_n}.$$

In order to define u_n for all n, we can set $u_n = 0$ for $n \notin \mathrm{Im}(\varphi)$. The sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is such that $u_n \in X_n$ (for all $n \in \mathbb{N}$), $(\|u_n\|_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ bounded and $\|u_n\|_{Y_n} \to 0$ (as $n \to +\infty$), then the second assumption of Definition 4.45 gives that any subsequence (of the sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) converging in B converge (in B) to 0. But, since $(\|u_n\|_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded, the first assumption of Definition 4.45 gives that the subsequence $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ admits a subsequence converging in B. Then, the limit of this subsequence must be 0 and its norm in B must be equal to 1, which is impossible. This concludes the proof of Lemma 4.47. ∎

It is also possible to replace in Theorem 4.46 the time derivative by a discrete derivative. This is interesting for proving the convergence of the approximate solution of a parabolic problem using a numerical scheme. It is the purpose of Theorem 4.48

Théorème 4.48 (Aubin-Simon with a sequence of subspaces and a discrete derivative) *Let $1 \leq p < +\infty$. Let B be a Banach space, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B and $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces. We assume that the sequence $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is compact-continuous in B (see Definition 4.45).*
Let $T > 0$ and $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of $L^p((0,T), B)$ satifying the following conditions

1. *For all $n \in \mathbb{N}$, there exists $N \in \mathbb{N}^\star$ and $k_1, \ldots, k_N$ in $\mathbb{R}_+^\star$ such that $\sum_{i=1}^N k_i = T$ and $u_n(t) = v_i$ for $t \in (t_{i-1}, t_i)$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, $t_0 = 0$, $t_i = t_{i-1} + k_i$, $v_i \in X_n$. (Of course, the values N, k_i and v_i are depending on n.)*
   Furthermore, we define a.e. the function $\eth_t u_n$ by setting

$$\eth_t u_n(t) = \frac{v_i - v_{i-1}}{k_i} \text{ for } t \in (t_{i-1}, t_i).$$

2. *The sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded in $L^p((0,T), B)$.*
3. *The sequence $(\|u_n\|_{L^1((0,T),X_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded.*
4. *The sequence $(\|\eth_t u_n\|_{L^p((0,T),Y_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded.*

Then there exists $u \in L^p((0,T), B)$ such that, up to a subsequence, $u_n \to u$ in $L^p((0,T), B)$.

Proof of Theorem 4.48
We follow closely the proof of Theorem 4.46. The proof uses also Proposition 4.44 and we only have to prove the third item of the hypotheses on $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of Proposition 4.44, which is equivalent to say

$$\int_0^{T-h} \|u_n(\cdot+h)-u_n\|_B^p dt \to 0 \text{ as } h\to 0, \text{ uniformly w.r.t. } n\in\mathbb{N}.$$

Here also, for all $n\in\mathbb{N}$, since $u_n\in L^p((0,T),B)$, one has $\int_0^{T-h}\|u_n(\cdot+h)-u_n\|_B^p dt\to 0$ as $h\to 0$. The only difficulty is to prove the uniformity of this convergence with respect to $n\in\mathbb{N}$. So, we only have to prove that for all $\eta>0$ there exist $n_0\in\mathbb{N}$ and $0<h_0<T$ such that

$$n\geq n_0,\ 0<h\leq h_0 \Rightarrow \int_0^{T-h}\|u_n(\cdot+h)-u_n\|_B^p dt\leq \eta. \tag{4.50}$$

Let $\varepsilon>0$. Lemma 4.47 gives the existence of $n_0\in\mathbb{N}$ and $C_\varepsilon\in\mathbb{R}$ such that

$$n\geq n_0,\ u\in X_n \Rightarrow \|u\|_B\leq \varepsilon\|u\|_{X_n}+C_\varepsilon\|u\|_{Y_n}.$$

Then, for $n\geq n_0$, $0<h<T$ and $t\in(0,T-h)$, one has

$$\begin{aligned}\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_B &\leq \varepsilon\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_{X_n}+C_\varepsilon\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_{Y_n}\\ &\leq \varepsilon\|u_n(t+h)\|_{X_n}+\varepsilon\|u_n(t)\|_{X_n}+C_\varepsilon\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_{Y_n},\end{aligned}$$

and then

$$\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_B^p\leq (3\varepsilon)^p\|u_n(t+h)\|_{X_n}^p+(3\varepsilon)^p\|u_n(t)\|_{X_n}^p+(3C_\varepsilon)^p\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_{Y_n}^p.$$

Integrating this inequality with respect to t leads to

$$\int_0^{T-h}\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_B^p dt\leq 2(3\varepsilon)^p\|u_n\|_{L^p((0,T),X_n)}^p+(3C_\varepsilon)^p\int_0^{T-h}\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_{Y_n}^p dt. \tag{4.51}$$

The proof now differs from the proof of Theorem 4.46. We have to use the discrete derivative of u_n instead of the derivative of u_n. We remark that for a.e. $t\in(0,T-h)$ (n and h are fixed)

$$u_n(t+h)-u_n(t)=\sum_{i;\,t_i\in(t,t+h)}(v_{i+1}-v_i)=\sum_{i=1}^{N-1}(v_{i+1}-v_i)1_{(t,t+h)}(t_i)=\sum_{i=1}^{N-1}\frac{v_{i+1}-v_i}{k_{i+1}}k_{i+1}1_{(t,t+h)}(t_i),$$

where $1_{(t,t+h)}(t_i)=1$ if $t_i\in(t,t+h)$ and 0 if $t_i\notin(t,t+h)$. Then, with $q=p/(p-1)$ ($q=+\infty$ if $p=1$), Hölder Inequality leads to

$$\begin{aligned}\|u_n(t+h)-u_n(t)\|_{Y_n}^p &\leq \Big(\sum_{i=1}^{N-1}\|\frac{v_{i+1}-v_i}{k_{i+1}}\|_{Y_n}^p k_{i+1}1_{(t,t+h)}(t_i)\Big)\Big(\sum_{i=1}^{N-1}k_{i+1}1_{(t,t+h)}(t_i)\Big)^{\frac{p}{q}}\\ &\leq T^{\frac{p}{q}}\sum_{i=1}^{N-1}\|\frac{v_{i+1}-v_i}{k_{i+1}}\|_{Y_n}^p k_{i+1}1_{(t,t+h)}(t_i).\end{aligned}$$

Integrating this inequality with respect to $t \in (0, T-h)$ gives, since $1_{(t,t+h)}(t_i) = 1_{(t_i-h,t_i)}(t)$,

$$\int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_{Y_n}^p dt \leq T^{\frac{p}{q}} \sum_{i=1}^{N-1} \|\frac{v_{i+1} - v_i}{k_{i+1}}\|_{Y_n}^p k_{i+1} h = T^{\frac{p}{q}} \|u_n\|_{L^p((0,T),Y_n)}^p h.$$

Using this inequality in (4.51) we obtain

$$\int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p dt \leq 2(3\varepsilon)^p \|u_n\|_{L^p((0,T),X_n)}^p + (3C_\varepsilon)^p T^{\frac{p}{q}} \|u_n\|_{L^p((0,T),Y_n)}^p h. \tag{4.52}$$

We can now conclude as in Theorem 4.46. Let $\eta > 0$. we choose $\varepsilon > 0$ in order to bound by η this first term of (4.52) (independently of $n \in \mathbb{N}$). This choice of ε gives also n_0 and C_ε. Since C_ε is given, there exists $h_0 \in (0, T)$ such that the second term of the RHS of (4.52) is bounded by η (independently of $n \in \mathbb{N}$) if $0 < h < h_0$. Finally, we obtain

$$n \geq n_0,\ 0 < h < h_0 \Rightarrow \int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p dt \leq 2\eta.$$

This concludes the proof of Theorem 4.48. ∎

With the hypotheses of Theorem 4.46 or Theorem 4.48, another interesting question is to prove an additional regularity for u, namely that $u \in L^p((0,T), X)$ where X is some space closely related to the X_n (and included in B). In definition 4.49 we precise the meaning of the sentence "X closely related to the X_n" and we give in Theorem 4.50 a regularity result.

Définition 4.49 *Let B be a Banach space, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B and X be a Banach space included in B. We say that the sequence $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is B-limit-included in X if there exist $C \in \mathbb{R}$ such that if u is the limit in B of a subsequence of a sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifying $u_n \in X_n$ and $\|u_n\|_{X_n} \leq 1$, then $u \in X$ and $\|u\|_X \leq C$.*

Théorème 4.50 (Regularity of the limit) *Let $1 \leq p < +\infty$ and $T > 0$. Let B be a Banach space, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B and B-limit-included in X (where X is a Banach space included in B) in the sense of Definition 4.49.*
Let $T > 0$ and, for $n \in \mathbb{N}$, let $u_n \in L^p((0,T), X_n)$. We assume that the sequence $(\|u_n\|_{L^p((0,T),X_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded and that $u_n \to u$ in $L^p((0,T), B)$ as $n \to +\infty$. Then $u \in L^p((0,T), X)$.

Proof of Theorem 4.50
Since $u_n \to u$ in $L^p((0,T), B)$ as $n \to +\infty$, we can assume, up to subsequence, that $u_n \to u$ in B a.e..
Then, since the the sequence $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is B-limit-included in X, we obtain, with C given by Definition 4.49,

$$\|u\|_X \leq C \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|_{X_n} \text{ a.e..}$$

Using now Fatou lemma, we have

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \leq C^p \int_0^T \liminf_{n\to+\infty} \|u_n(t)\|_{X_n}^p dt \leq C^p \liminf_{n\to+\infty} \int_0^T \|u_n(t)\|_{X_n}^p dt.$$

Then, since $(\|u_n\|_{L^p((0,T),X_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded, we conclude that $u \in L^p((0,T), X)$. ∎

4.6 Exercices

Exercice 4.1 (Solution classique en dimension 1) *Corrigé 4.1*
Soit $u_0 \in L^2(]0,1[)$. On s'intéresse ici au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0,\ x \in]0,1[,\ t \in]0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \in]0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in [0,1]. \end{array} \right. \tag{4.53}$$

La notation u_t désigne la dérivée de u par rapport à t et u_{xx} désigne la dérivée seconde de u par rapport à x. On dit que u est une solution classique de (4.53) si u vérifie les trois conditions suivantes

(c1) u est de classe C^2 sur $]0,1[\times]0,+\infty[$ et vérifie au sens classique $u_t - u_{xx} = 0$ en tout point de $]0,1[\times]0,+\infty[$,

(c2) pour tout $t > 0$, les fonctions u, u_x et u_{xx} sont continues sur $[0,1] \times [t,+\infty[$ et $u(0,t) = u(1,t) = 0$,

(c3) $u(\cdot,t) \to u_0$ dans $L^2(]0,1[)$ quand $t \to 0$ $(t > 0)$.

1. Montrer que le problème (4.53) admet au plus une solution classique. [On pourra reprendre la méthode développée à la section 4.1.]
2. Montrer que le problème (4.53) admet une solution classique. [On pourra reprendre la méthode développée à la section 4.1 en explicitant une base hilbertienne convenable de $L^2(]0,1[)$, voir l'exercice 2.2.]

Exercice 4.2 (Dual de L^p_E) *Corrigé 4.2*
Soit (X,T,m) un espace mesuré, E un espace de Banach et $1 < p < +\infty$. On pose $p' = p/(p-1)$.

1. Soit $v \in L^{p'}_{E'}(X,T,m)$ et $u \in L^p_E(X,T,m)$. Montrer que l'application $x \mapsto \langle v(x), u(x)\rangle_{E',E}$ est m-mesurable de X dans $\mathbb{R}$ puis que $\langle v,u\rangle_{E',E} \in L^1_{\mathbb{R}}(X,T,m)$ et
$$\int |\langle v,u\rangle_{E',E}| dm \leq \|v\|_{L^{p'}_{E'}} \|u\|_{L^p_E}.$$
2. Soit $v \in L^{p'}_{E'}(X,T,m)$.
   (a) Montrer que l'application $u \mapsto \int \langle v,u\rangle_{E',E} dm$ est bien définie, linéaire et continue de $L^p_E(X,T,m)$ dans $\mathbb{R}$. On note T_v cette application (on a donc $T_v \in L^p_E(X,T,m)'$.)
   (b) Montrer que $\|T_v\|_{L^p_E(X,T,m)'} \leq \|v\|_{L^{p'}_{E'}(X,T,m)}$.
   (c) (Question plus difficile) Montrer que $\|T_v\|_{L^p_E(X,T,m)'} = \|v\|_{L^{p'}_{E'}(X,T,m)}$.

Exercice 4.3 (Diffusion non homogène et non isotrope) *Corrigé 4.3*
On reprend les hypothèses du théorème 4.25. Soit donc Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. On identifie $L^2(\Omega)$ avec son dual et on suppose que $f \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$.

On se donne aussi une application, notée A, de Ω dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices carrés à N lignes et N colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$). On suppose que les coefficients de A appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$A\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2 \text{ p.p., pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

En suivant la démonstration donnée dans ce chapitre, montrer qu'il existe un et un seul u tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(]0,T[, H^1_0(\Omega)), u_t \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)), \\ \int_0^T < u_t(s), v(s) >_{H^{-1},H^1_0} ds + \int_0^T \big(\int_\Omega A\nabla u(s).\nabla v(s) dx \big) ds = \\ \quad \int_0^T < f(s), v(s) >_{H^{-1},H^1_0} ds \text{ pour tout } v \in L^2(]0,T[, H^1_0(\Omega)), \\ u(0) = u_0 \text{ p.p.}. \end{array} \right. \tag{4.54}$$

Exercice 4.4 (Existence par le théorème de Schauder) *Corrigé 4.4*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $A : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ (où $M_N(\mathbb{R})$ désigne les matrices $N \times N$ à coefficients réels) t.q.

$$\forall s \in \mathbb{R}, A(s) = (a_{i,j}(s))_{i,j=1,\dots,N} \text{ où } a_{i,j} \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \tag{4.55}$$

$$\exists \alpha > 0; A(s)\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall s \in \mathbb{R}, \tag{4.56}$$

$$f \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)) \text{ et } u_0 \in L^2(\Omega). \tag{4.57}$$

On identifie $L^2(\Omega)$ à $L^2(\Omega)'$, comme d'habitude. On veut, dans cet exercice, montrer l'existence d'une solution au problème (4.32).

Soit $\bar{u} \in L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$, on définit l'opérateur T de $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ par $T(\bar{u}) = u$ où u est **la** solution (donnée par l'exercice 4.3) du problème

$$\begin{cases} u \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)), \\ \displaystyle\int_0^T \langle u_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \, \mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega A(\bar{u}) \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ \quad = \displaystyle\int_0^T \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \, \mathrm{d}t, \ \forall v \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)), \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

1. Montrer que T est continu de $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$.
2. Montrer que T est compact de $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$.
3. Montrer qu'il existe $R > 0$ t.q. $\|T(\bar{u})\|_{L^2(]0,T[,L^2(\Omega))} \leq R$ pour tout $u \in L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$.
4. Montrer qu'il existe u solution de (4.32).
5. On suppose maintenant de plus que $a_{i,j}$ est, pour tout i, j, une fonction lipschitzienne. Montrer que (4.32) admet une unique solution.

Exercice 4.5 (Existence par schéma numérique) *Corrigé 4.5*

On se propose, dans cet exercice, de montrer l'existence d'une solution faible au problème (4.58)-(4.60) en passant à la limite sur un solution approchée donnée par un schéma numérique.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2}(x,t) = v(x,t), \ x \in]0,1[, \ t \in]0,T[, \tag{4.58}$$

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(1,t) = 0, \ t \in]0,T[, \tag{4.59}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ x \in]0,1[, \tag{4.60}$$

où φ, v, T, u_0 sont donnés et sont t.q.

1. $T > 0$, $v \in L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$,
2. φ croissante, lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
3. $u_0 \in L^\infty(]0,1[)$ et $\varphi(u_0)$ lipschitzienne de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Un exemple important est donné par $\varphi(s) = \alpha_1 s$ si $s \leq 0$, $\varphi(s) = 0$ si $0 \leq s \leq L$ et $\varphi(s) = \alpha_2(s - L)$ si $s \geq L$, avec α_1, α_2 et L donnés dans $\mathbb{R}_+^\star$. Noter pour cet exemple que $\varphi' = 0$ sur $]0, L[$.
Les ensembles $]0, 1[$ et $]0, 1[\times]0, T[$ sont munis de leur tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue sur cette tribu.
On appelle "solution faible" de (4.58), (4.59), (4.60) une solution de

$$u \in L^\infty(]0, 1[\times]0, T[), \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^1 (u(x,t)\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) + \varphi(u(x,t))\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x,t) + v(x,t)\psi(x,t))dxdt \\ + \int_0^1 u_0(x)\psi(x,0)dx = 0, \quad \forall \psi \in C_T^{2,1}(\mathbb{R}^2),\end{aligned} \tag{4.62}$$

où $C_T^{2,1}(\mathbb{R}^2) = \{\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, 2 fois continûment dérivable par rapport à x et une fois continûment dérivable par rapport à t, t.q. $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}(1,t) = 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et $\psi(x,T) = 0$ pour tout $x \in [0,1]\}$.

1. (Question indépendante des questions suivantes.) On suppose, dans cette question seulement, que φ est de classe C^2, v est continue sur $[0,1] \times [0,T]$ et u_0 est continue sur $[0,1]$. Soit $w \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et u la restriction de w à $]0,1[\times]0,T[$. Montrer que u est solution de (4.61),(4.62) si et seulement si u vérifie (4.58), (4.59) et (4.60) au sens classique (c'est-à-dire pour tout $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$).
2. (Un résulat de compacité.) Soit $A \subset C([0,T], L^2(]0,1[))$. On munit $C([0,T], L^2(]0,1[))$ de la norme usuelle, c'est-à-dire
$$\|u\| = \sup\{\|u(t)\|_{L^2(]0,1[)},\ t \in [0,T]\}.$$
On suppose que A vérifie les 2 hypothèses suivantes
   (a) Pour tout $t \in [0,T]$, $\{u(t),\ u \in A\}$ est un borné de $L^\infty(]0,1[)$ et il existe C t.q.
   $$\int_{\mathbb{R}} |u(t)(x+\eta) - u(t)(x)|^2 dx \leq C\eta,$$
   pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^\star$ et tout $u \in A$, avec $u(t)$ prolongée par 0 hors de $[0,1]$.
   (b) Il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\|u(t) - u(s)\|_{L^2(]0,1[)} \leq C|t-s|$, pour tout $t, s \in [0,T]$ et tout $u \in A$.
Montrer que A est relativement compacte dans $C([0,T], L^2(]0,1[))$.
3. (Passage à la limite sur une non linéarité, cette question est indépendante de la question précédente.)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$. Soient $u \in L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$ et $f \in L^1(]0,1[\times]0,T[)$.
On suppose que, quand $n \to \infty$,
   (a) $u_n \to u$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$,
   (b) $\varphi(u_n) \to f$ dans $L^1(]0,1[\times]0,T[)$ et p.p..
Montrer que $\varphi(u) = f$ p.p. sur $]0,1[\times]0,T[$.
[Indication : Utiliser l'astuce de Minty...]

On cherche maintenant une solution approchée de (4.58),(4.59),(4.60).
Soient $N, M \in \mathbb{N}^\star$. On pose $h = \dfrac{1}{N}$ et $k = \dfrac{T}{M}$. On va construire une solution approchée de (4.58),(4.59),(4.60) à partir de la famille $\{u_i^n,\ i = 1, \ldots, N,\ n = 0, \ldots, M\}$ vérifiant les équations suivantes

$$u_i^0 = \frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} u_0(x)dx,\ i = 1, \dots, N, \tag{4.63}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{\varphi(u_{i-1}^{n+1}) - 2\varphi(u_i^{n+1}) + \varphi(u_{i+1}^{n+1})}{h^2} = v_i^n,\ i = 1, \dots, N,\ n = 0, \dots, M-1, \tag{4.64}$$

avec $u_0^{n+1} = u_1^{n+1}$, $u_{N+1}^{n+1} = u_N^{n+1}$, pour tout $n = 0, \dots, M-1$ et $v_i^n = \dfrac{1}{kh}\displaystyle\int_{nk}^{(n+1)k}\int_{(i-1)h}^{ih} v(x,t)dxdt$, pour tout $i = 1, \dots, N$, pour tout $n = 0, \dots, M$.

4. (Existence et unicité de la solution approchée.)
   Soit $n \in \{0, \dots, M-1\}$. On suppose connu $\{u_i^n,\ i = 1, \dots, N\}$.

   (a) On suppose que φ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\{u_i^{n+1},\ i = 1, \dots, N$. On pose $r_i = \varphi(u_i^{n+1})$ pour tout $i = 1, \dots, N\}$. Montrer que $\{u_i^{n+1},\ i = 1, \dots, N\}$ est solution de (4.64) si et seulement si $(r_i)_{i=1,\dots,N}$ est un point fixe de l'application (bien définie...) qui à $w = (w_i)_{i=1,\dots,N}$ associe $r = (r_i)_{i=1,\dots,N}$ défini (avec $w_0 = w_1$ et $w_{N+1} = w_N$) par

   $$\varphi^{-1}(r_i) + \frac{2k}{h^2}r_i = \frac{k}{h^2}(w_{i-1} + w_{i+1}) + u_i^n + kv_i^n,\ i = 1, \dots, N.$$

   Montrer que cette application est strictement contractante (de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$) pour la norme dite "du sup". En déduire qu'il existe une unique famille $\{u_i^{n+1},\ i = 1, \dots, N\}$ solution de (4.64).

   (b) (plus difficile) On ne suppose plus que φ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique famille $\{u_i^{n+1},\ i = 1, \dots, N\}$ solution de (4.64).

Les trois questions suivantes donnent des estimations sur la solution approchée dont on vient de montrer l'existence et l'unicité.

5. (Estimation $L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$ sur la solution approchée.)
   On pose $A = \|u_0\|_{L^\infty(]0,1[)}$ et $B = \|v\|_{L^\infty(]0,1[\times]0,T[)}$.
   Montrer, par récurrence sur n, que $u_i^n \in [-A - nkB, A + nkB]$ pour tout $i = 1, \dots, N$ et tout $n = 0, \dots, M$. [On pourra, par exemple, considérer (4.64) avec i t.q. $u_i^{n+1} = \min\{u_j^{n+1},\ j = 1, \dots, N\}$.]

6. (Estimation de la dérivée p.r. à x de $\varphi(u)$.) Montrer qu'il existe C_1 (ne dépendant que de T, φ, v et u_0) t.q., pour tout $n = 0, \dots, M-1$,

   $$\sum_{i=1}^{N-1}(\varphi(u_{i+1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1}))^2 \le C_1\frac{h}{k}.$$

   [indication : multiplier (4.64) par u_i^{n+1} et sommer sur i.]

7. (Estimation de la dérivée p.r. à t de $\varphi(u)$.) Montrer qu'il existe C_2 (ne dépendant que de T, φ, v et u_0) t.q.

   $$\sum_{n=0}^{M-1} h \sum_{i=0}^{N+1}(\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n))^2 \le C_2 k.$$

   [indication : multiplier (4.64) par $\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n)$ et sommer sur i et n]

L'objectif est maintenant de passer à la limite sur les paramètres de discrétisation. Pour $M \in \mathbb{N}^\star$ donné, on prend $N = M^2$ (et donc h et k sont donnés et $k = T\sqrt{h}$), on définit, avec les u_i^n trouvés dans les questions précédentes, une fonction, u_h, sur $[0,1] \times [0,T]$ en posant

$$u_h(x,t) = \frac{t-nk}{k} u_h^{(n+1)}(x) + \frac{(n+1)k-t}{k} u_h^{(n)}(x), \text{ si } t \in [nk,(n+1)k]$$

et

$$u_h^{(n)}(x) = u_i^n, \text{ si } x \in [(i-1)h, ih],\ i = 1,\dots,N,\ n = 0,\dots,M.$$

8. Soient $A_1 = \{u_h,\ M \in \mathbb{N}^\star\}$ et $A_2 = \{\varphi(u_h),\ M \in \mathbb{N}^\star\}$.
Montrer que A_1 est relativement séquentiellement compacte dans $L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$, pour la topologie faible-$\star$, et que A_2 est relativement (séquentiellement) compacte dans $C([0,T], L^2(]0,1[))$.
En déduire que l'on peut trouver une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u \in L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$ t.q., en posant $u_n = u_{h_n}$ (on rappelle que $k_n = T\sqrt{h_n}$), on ait, quand $n \to \infty$,

   (a) $h_n \to 0$ et $k_n \to 0$,

   (b) $u_n \to u$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$,

   (c) $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ dans $L^p(]0,1[\times]0,T[)$, pour tout $p \in [1,\infty[$.

9. Montrer que la fonction u trouvée à la question précédente est solution de (4.61),(4.62).

Remarque. On peut aussi montrer l'unicité de la solution de (4.61),(4.62).

Exercice 4.6 (Théorème de Kolmogorov, avec $B = \mathbb{R}$) *Corrigé 4.6* Le but de cet exercice est de refaire la démonstration du théorème 4.35 dans le cas (plus simple) $B = \mathbb{R}$ et $p = 1$.
Soit $T > 0$. On note L^1 l'espace $L^1(]0,T[,\mathbb{R})$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^1 (on a donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_1 < +\infty$).
On suppose que pour tout $h \in]0,T[$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_0^{T-h} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt \le \eta(h),$$

où η est une fonction croissante de $]0,T[$ dans $\mathbb{R}_+$ t.q. $\lim_{h\to 0^+} \eta(h) = 0$.
L'objectif de l'exercice est de démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans L^1.

1. Soit $\delta, h \in]0,T[$ t.q. $\delta + h \le T$. Montrer que

$$\int_0^\delta |u_n(t)|dt \le \int_0^\delta |u_n(t+h)|dt + \int_0^\delta |u_n(t+h) - u_n(t)|dt. \tag{4.65}$$

2. Soit $h_0 \in]0,T[$ et $\delta \in]0,T-h_0[$, montrer que

$$h_0 \int_0^\delta |u_n(t)|dt \le \delta \|u_n\|_1 + h_0\eta(h_0). \tag{4.66}$$

3. Montrer que $\int_0^\delta |u_n(t)|dt \to 0$ quand $\delta \to 0^+$, uniformément par rapport à n.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans L^1.
[Appliquer le théorème de Kolmogorov, théorème 4.34, en utilisant le prolongement de u_n par 0.]

4.7 Corrigés d'exercices

Corrigé 4.1 (Solution classique en dimension 1)

Soit $u_0 \in L^2(]0,1[)$. On s'intéresse ici au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0,\ x \in]0,1[,\ t \in]0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \in]0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in [0,1]. \end{array} \right. \tag{4.67}$$

La notation u_t désigne la dérivée de u par rapport à t et u_{xx} désigne la dérivée seconde de u par rapport à x. On dit que u est une solution classique de (4.67) si u vérifie les trois conditions suivantes

(c1) u est de classe C^2 sur $]0,1[\times]0,+\infty[$ et vérifie au sens classique $u_t - u_{xx} = 0$ en tout point de $]0,1[\times]0,+\infty[$,

(c2) pour tout $t > 0$, les fonctions u, u_x et u_{xx} sont continues sur $[0,1] \times [t,+\infty[$ et $u(0,t) = u(1,t) = 0$,

(c3) $u(\cdot,t) \to u_0$ dans $L^2(]0,1[)$ quand $t \to 0$ ($t > 0$).

1. Montrer que le problème (4.67) admet au plus une solution classique. [On pourra reprendre la méthode développée à la section 4.1.]

   Corrigé – *Si u et $\bar{u}$ sont deux solutions classiques de (4.67). La fonction $(u - \bar{u})$ est alors une solution classique de (4.67) avec $u_0 = 0$ p.p. (sur $]0,1[$). Pour montrer que $u = \bar{u}$, il suffit donc de montrer que la fonction nulle est l'unique solution de (4.67) lorsque $u_0 = 0$ p.p..*

   On suppose donc que u est une solution classique de (4.67) avec $u_0 = 0$ p.p.. On va montrer que $u(x,t) = 0$ pour tout $(x,t) \in [0,1]\times]0,+\infty[$.

   Soit $t > 0$, les hypothèses (c1) et (c2) permettent de dire que

   $$\int_0^1 u_t(x,t)u(x,t)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (u^2)_t(x,t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_0^1 u^2(x,t)dx\Big)$$

   et

   $$\int_0^1 u_{xx}(x,t)u(x,t)dx = -\int_0^1 u_x(x,t)^2 dx.$$

   Comme $u_t u - u_{xx}u = 0$ sur $]0,1[\times]0,+\infty[$, on en déduit que

   $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_0^1 u^2(x,t)dx\Big) + \int_0^1 u_x(x,t)^2 dx = 0.$$

   Soit $0 < \varepsilon < T < +\infty$. En intégrant l'équation précédente entre ε et T, on obtient

   $$\frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,T)dx + \int_0^T \int_0^1 u_x^2(x,t)dxdt = \frac{1}{2}\int_0^1 u(x,\varepsilon)dx,$$

   ce qui donne

   $$\int_0^1 u^2(x,T)dx \leq \int_0^1 u^2(x,\varepsilon)dx.$$

   Quand $\varepsilon \to 0$, le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 (par (c3)), on a donc $\int_0^1 u^2(x,T)dx = 0$, ce qui donne $u(\cdot,T) = 0$ p.p. et donc $u(x,T) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ (car $u(\cdot,T)$ est supposée être continue sur $[0,1]$). Comme $T > 0$ est arbitraire, on a bien montré que $u(x,t) = 0$ pour tout $(x,t) \in [0,1]\times]0,+\infty[$.

2. Montrer que le problème (4.1) admet une solution classique. [On pourra reprendre la méthode développée à la section 4.1 en explicitant une base hilbertienne convenable de $L^2(]0,1[)$, voir l'exercice 2.2.]

   Corrigé –

On utilise un résultat de l'exercice 2.2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $c_n = 2\int_0^1 u_0(t)\sin(n\pi t)dt$. L'exercice 2.2. donne que

$$\|u_0 - \sum_{p=1}^{n} c_p \sin(p\pi\cdot)\|_2 \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

(On rappelle que $\|\cdot\|_2$ désigne $\|\cdot\|_{L^2(]0,1[)}$. Comme $|c_n| \leq 2\|u_0\|_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée. On en déduit que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\pi^2 t} c_n \sin n\pi x$$

est convergente (dans $\mathbb{R}$) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, les séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n^2\pi^2\varepsilon}|c_n| \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^2\pi^2\varepsilon}|c_n|$$

sont convergentes. Ceci montre que la fonction

$$x, t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\pi^2 t} c_n \sin n\pi x$$

est, pour tout $\varepsilon > 0$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}\times]\varepsilon, +\infty[$ (elle est même de classe C^∞) et que la série peut être dérivée terme à terme, une fois en t et deux fois en x. On pose donc, pour $x \in]0,1[$ et $t > 0$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\pi^2 t} c_n \sin n\pi x.$$

La fonction u ainsi définie vérifie bien les conditions (c1) et (c2).

Il reste à montrer que u vérifie (c3). Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $t > 0$ et $n_0 > 0$, on a

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|_2 \leq \|\sum_{n=1}^{n_0} c_n(1 - e^{-n^2t^2})\sin(n\pi\cdot)\|_2 + 2\|u_0 - \sum_{n=1}^{n_0} c_n \sin(n\pi\cdot)\|_2.$$

On commence par choisir n_0 pour que le deuxième terme du membre de droite de cette inégalité soit inférieur à ε. Puis, comme n_0 est maintenant fixé, on remarque qu'il existe $t_0 > 0$ t.q. le premier terme du membre de droite de cette inégalité est inférieur à ε dès que $t \in]0, t_0]$. On en déduit bien que u vérifie (c3).

Corrigé 4.2 (Dual de L^p_E)

Soit (X, T, m) un espace mesuré, E un espace de Banach et $1 < p < +\infty$. On pose $p' = p/(p-1)$.

1. Soit $v \in L^{p'}_{E'}(X,T,m)$ et $u \in L^p_E(X,T,m)$. Montrer que l'application $x \mapsto \langle v(x), u(x)\rangle_{E',E}$ est m-mesurable de X dans $\mathbb{R}$ puis que $\langle v, u\rangle_{E',E} \in L^1_{\mathbb{R}}(X,T,m)$ et

$$\int |\langle v, u\rangle_{E',E}| dm \leq \|v\|_{L^{p'}_{E'}} \|u\|_{L^p_E}.$$

Corrigé – On choisit pour u et v des représentants, de sorte que $v \in \mathcal{L}^{p'}_{E'}(X,T,m)$ et $u \in \mathcal{L}^p_E(X,T,m)$. La m-mesurabilité de l'application $x \mapsto \langle u(x), v(x)\rangle_{E',E}$ (notée $\langle v, u\rangle_{E',E}$) est assez simple à montrer (et ne dépend pas des représentants choisis pour u et v). Il suffit de remarquer qu'il existe deux suites de fonctions étagées $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (v_n est une fonction de X dans E' et u_n de X dans E) t.q. $v_n \to v$ p.p. et $u_n \to u$ p.p. (quand $n \to +\infty$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\langle v_n, u_n\rangle_{E',E}$ est alors une fonction étagée de X dans $\mathbb{R}$. Quand $n \to +\infty$, elle converge p.p. vers la fonction $\langle v, u\rangle_{E',E}$ qui est donc m-mesurable.

On remarque ensuite que $|\langle v(x), u(x)\rangle_{E',E}| \leq \|v(x)\|_{E'}\|u(x)\|_E$ pour tout $x \in X$. En intégrant par rapport à la mesure m (on utilise ici la monotonie de l'intégrale pour les fonctions m-mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$ et l'inégalité de

Hölder), on obtient que $\langle v,u\rangle_{E',E} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X,T,m)$ *(et donc* $\langle v,u\rangle_{E',E} \in L^1_{\mathbb{R}}(X,T,m)$ *avec la confusion habituelle entre* $\mathcal{L}^1$ *et* L^1*) et*

$$\int |\langle v,u\rangle_{E',E}|dm \leq \int \|v\|_{E'}\|u\|_E dm \leq \|v\|_{L^{p'}_{E'}}\|u\|_{L^p_E}.$$

2. Soit $v \in L^{p'}_{E'}(X,T,m)$.

(a) Montrer que l'application $u \mapsto \int \langle v,u\rangle_{E',E}dm$ est bien définie, linéaire et continue de $L^p_E(X,T,m)$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé – *La question précédente donne bien que* $\langle v,u\rangle_{E',E} \in L^1_E(X,T,m)$ *pour tout* $u \in L^p_E(X,T,m)$*. L'application* $u \mapsto \int \langle v,u\rangle_{E',E}dm$ *est donc bien définie de* $L^p_E(X,T,m)$ *dans* $\mathbb{R}$*. Elle est trivialement linéaire. Sa continuité est une conséquence du fait que*

$$|\int \langle v,u\rangle_{E',E}dm| \leq \int |\langle v,u\rangle_{E',E}|dm \leq \|v\|_{L^{p'}_{E'}}\|u\|_{L^p_E}.$$

On note T_v cette application (on a donc $T_v \in L^p_E(X,T,m)'$.)

(b) Montrer que $\|T_v\|_{L^p_E(X,T,m)'} \leq \|v\|_{L^{p'}_{E'}(X,T,m)}$.

Corrigé – *Par définition de la norme dans le dual d'un espace de Banach, on a*

$$\|T_v\|_{(L^p_E)'} = \sup\{|T_v(u)|,\ u \in L^p_E \text{ t.q. } \|u\|_{L^p_E} = 1\}.$$

La question précédente donne que $|T_v(u)| \leq \|v\|_{L^{p'}_{E'}}$ *si* $\|u\|_{L^p_E} = 1$*, on a donc*

$$\|T_v\|_{L^p_E(X,T,m)'} \leq \|v\|_{L^{p'}_{E'}(X,T,m)}.$$

(c) (Question plus difficile) Montrer que $\|T_v\|_{L^p_E(X,T,m)'} = \|v\|_{L^{p'}_{E'}(X,T,m)}$.

Corrigé – *On pose* $q = p'$*. On raisonne ici en deux étapes. On commence par montrer l'égalité demandée si* v *est une fonction étagée. Puis, on traite le cas général.*

Etape 1

On suppose, dans cette étape, que v *est une fonction étagée non nulle. Il existe donc* $n \in \mathbb{N}^\star$*, une famille* $A_1,\dots,A_n$ *d'éléments de la tribu* T *et une famille* $b_1,\dots,b_n$ *d'éléments de* E'*, non nuls, t.q.*

$$v = \sum_{i=1}^n b_i 1_{A_i}.$$

Soit $\varepsilon > 0$*. De la définition de la norme dans* E'*, on déduit que, pour tout* $i \in \{1,\dots,n\}$*, il existe* $\bar{a}_i \in E$ *t.q.*

$$\|\bar{a}_i\|_E = 1 \text{ et } \langle b_i,\bar{a}_i\rangle_{E',E} \geq (1-\varepsilon)\|b_i\|_{E'}.$$

On pose $a_i = \|b_i\|^{q-1}_{E'}\bar{a}_i$ *pour tout* $i \in \{1,\dots,n\}$ *et*

$$u = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}.$$

La fonction u *est une fonction étagée (de* X *dans* E*) et on a*

$$\int \langle v,u\rangle_{E',E}dm = \sum_{i=1}^n m(A_i)\langle b_i,a_i\rangle_{E',E} \geq (1-\varepsilon)m(A_i)\|b_i\|^q_{E'} = (1-\varepsilon)\|v\|^q_{L^q_{E'}}.$$

D'autre part, on a (comme $p(q-1) = q$*)*

$$\|u\|^p_{L^p_E} = \sum_{i=1}^n m(A_i)\|b_i\|^{p(q-1)}_{E'} = \sum_{i=1}^n m(A_i)\|b_i\|^q_{E'} = \|v\|^q_{L^q_{E'}}.$$

On a donc

$$\frac{1}{\|u\|_{L^p_E}}\int \langle v,u\rangle_{E',E}dm \geq (1-\varepsilon)\frac{\|v\|^q_{L^q_{E'}}}{\|v\|^{\frac{q}{p}}_{L^q_{E'}}} = (1-\varepsilon)\|v\|_{L^q_{E'}}.$$

En posant $\bar{u} = \dfrac{u}{\|u\|_{L^p_E}}$, on a donc $\|\bar{u}\|_{L^p_E} = 1$ et $\int \langle v, \bar{u}\rangle_{E',E} dm \geq (1-\varepsilon)\|v\|_{L^q_{E'}}$. Ceci prouve que

$$\|T_v\|_{(L^p_E)'} \geq (1-\varepsilon)\|v\|_{L^q_{E'}}.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient donc, avec la question 2(b), $\|T_v\|_{(L^p_E)'} = \|v\|_{L^q_{E'}}$.

Etape 2

On traite maintenant le cas général. Soit $v \in L^q_{E'}$ non nulle (si $v = 0$ p.p. l'égalité demandée est triviale). Il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagée (de X dans E') t.q. $v_n \to v$ dans $L^q_{E'}$ (cette suite peut se construire comme cela a été pour la définition de L^1, c'est-à-dire en construisant v_n t.q. $\|v_n(x)\|_{E'} \leq 2\|v(x)\|_{E'}$ pour presque tout $x \in E'$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc w fonction étagée t.q. $\|w - v\|_{L^p_{E'}} \leq \varepsilon$. Par l'étape 1, il existe $u \in L^p_E$ t.q. $\|u\|_{L^p_E} = 1$ et

$$\int \langle w, u\rangle_{E',E} dm \geq \|w\|_{L^q_{E'}} - \varepsilon.$$

On a donc (avec la question 1)

$$\int \langle v, u\rangle_{E',E} dm = \int \langle w, u\rangle_{E',E} dm + \int \langle v-w, u\rangle_{E',E} dm \geq \|w\|_{L^q_{E'}} - \varepsilon - \|v-w\|_{L^q_{E'}}.$$

Comme $\|v-w\|_{L^q_{E'}} \leq \varepsilon$ et $\|w\|_{L^q_{E'}} \geq \|v\|_{L^q_{E'}} - \varepsilon$, on a donc

$$\int \langle v, u\rangle_{E',E} dm \geq \|v\|_{L^q_{E'}} - 3\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, ceci permet d'affirmer que $\|T_v\|_{(L^p_E)'} \geq \|v\|_{L^q_{E'}}$. Finalement, avec la question 2(b), on a bien $\|T_v\|_{(L^p_E)'} = \|v\|_{L^q_{E'}}$.

Corrigé 4.3 (Diffusion non homogène et non isotrope)

On reprend les hypothèses du théorème 4.25. Soit donc Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. On identifie $L^2(\Omega)$ avec son dual et on suppose que $f \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$.

On se donne aussi une application, notée A, de Ω dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices carrés à N lignes et N colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$). On suppose que les coefficients de A appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$A\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2 \text{ p.p., pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

En suivant la démonstration donnée dans ce chapitre, montrer qu'il existe un et un seul u tel que

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^2(]0,T[, H^1_0(\Omega)), u_t \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)), \\ \displaystyle\int_0^T < u_t(s), v(s) >_{H^{-1},H^1_0} ds + \int_0^T \Big(\int_\Omega A\nabla u(s).\nabla v(s) dx\Big) ds = \\ \quad \int_0^T < f(s), v(s) >_{H^{-1},H^1_0} ds \text{ pour tout } v \in L^2(]0,T[, H^1_0(\Omega)), \\ u(0) = u_0 \text{ p.p.}. \end{array}\right. \tag{4.68}$$

Corrigé – Si A est symétrique, le plus simple consiste à utiliser une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de fonctions propres de l'opérateur $u \mapsto -\mathrm{div}(A\nabla u)$ (avec condition de Dirichlet, c'est-à-dire $u = 0$ sur $\partial\Omega$). On prend donc une famille $\{e_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ t.q. e_n est (pour tout n) une solution faible de

$$\left\{\begin{array}{ll} -\mathrm{div} A\nabla e_n = \lambda_n e_n & \text{dans } \Omega, \\ e_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array}\right.$$

avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$. (On a vu dans la section 2.2 qu'une telle base existait.) La démontration de l'existence (et de l'unicité) d'une solution de (4.68) est alors très voisine de celle donnée pour le cas où A est la matrice Identité.

Le cas où A est non symétrique est plus difficile car on n'a pas nécessairement une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de fonctions propres de l'opérateur $u \mapsto -\mathrm{div}(A\nabla u)$. Il faut alors modifier légèrement la démonstration. On va faire cette démonstration ici en prenant la base hilbertienne $\{e_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ associée au Laplacien (avec condition de Dirichlet). Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction e_n est donc solution faible (non nulle) de

$$\begin{array}{l} -\Delta e_n = \lambda_n e_n \text{ dans } \Omega, \\ e_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array}$$

On rappelle que $\|e_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$, $\lambda_n > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$. On a aussi $\|e_n\|_{H^1_0(\Omega)} = \sqrt{\lambda_n}$ et la famille $\{e_n/\sqrt{\lambda_n}, n \in \mathbb{N}^\star\}$ est une base hilbertienne de $H^1_0(\Omega)$. C'était l'étape 1 de la démonstration du théorème 4.25).

Remarque 4.51 *Compte tenu de la manière dont $H^1_0(\Omega)$ s'injecte dans $H^{-1}(\Omega)$ (par l'identification de $L^2(\Omega)'$ avec $L^2(\Omega)$) et de la définition du produit scalaire dans $H^{-1}(\Omega)$ (à partir du produit scalaire dans $H^1_0(\Omega)$) , on peut aussi remarquer que*

$$\begin{array}{l} (e_n/e_m)_{H^{-1}} = 0 \text{ si } n \neq m, \\ (e_n/e_m)_{H^{-1}} = \frac{1}{\lambda_n} \text{ si } n = m. \end{array} \tag{4.69}$$

La famille $\{\sqrt{\lambda_n}e_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ est donc une famille orthonormée de $H^{-1}(\Omega)$ (c'est même une base hilbertienne de $H^{-1}(\Omega)$). Pour montrer (4.69), on rappelle tout d'abord la définition du produit scalaire dans $H^{-1}(\Omega)$. Si $u \in H^1_0(\Omega)$, on définit T_u dans $H^{-1}(\Omega)$ par

$$\langle T_u, \varphi\rangle_{H^{-1},H^1_0} = (u/\varphi)_{H^1_0} = \int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi dx.$$

L'application T est bijective de $H^1_0(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Pour $u, v \in H^1_0(\Omega)$, on définit alors le produit scalaire dans $H^{-1}(\Omega)$ par

$$(T_u/T_v)_{H^{-1}(\Omega)} = (u/v)_{H^1_0(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, compte tenu de la manière dont $H^1_0(\Omega)$ s'injecte dans $H^{-1}(\Omega)$ (par l'identification de $L^2(\Omega)'$ avec $L^2(\Omega)$), on a, pour tout $\varphi \in H^1_0(\Omega)$,

$$\lambda_n\langle e_n, \varphi\rangle_{H^{-1},H^1_0} = \lambda_n \int_\Omega e_n\varphi dx = \int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla\varphi dx,$$

ce qui montre que $T_{e_n} = \lambda_n e_n$. On a donc, pour n, $m \in \mathbb{N}^\star$,

$$\lambda_n\lambda_m(e_n/e_m)_{H^{-1}(\Omega)} = (T_{e_n}/T_{e_m})_{H^{-1}(\Omega)} = (e_n/e_m)_{H^1_0(\Omega)} = \int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla e_m dx = \lambda_n\delta_{n,m}.$$

On en déduit bien (4.69).

On construit maintenant une solution approchée (étape 2 du théorème 4.25).
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $E_n = ev\{e_p,\ p = 1, \dots n\}$. On cherche une solution approchée u_n sous la forme $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)e_i$ avec $\alpha_i \in C([0,T], \mathbb{R})$. Le calcul formel fait dans la démonstration du théorème 4.25 donne ici (en supposant que les α_i sont dérivables pour tout t), pour tout $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ et presque tout $t \in]0,T[$,

$$\begin{aligned} &\langle u_n'(t) - \mathrm{div}(A\nabla u_n(t)) - f(t), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i'(t)\int_\Omega e_i\varphi dx + \alpha_i(t)\int_\Omega A\nabla e_i \cdot \nabla\varphi dx\right) + \langle f(t), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)}. \end{aligned}$$

On souhaite alors choisir les fonctions α_i pour que $\langle u_n'(t) - \mathrm{div}(A\nabla u_n)(t) - f(t), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} = 0$ pour tout $\varphi \in E_n$.

On pose $f_i(t) = \langle f(t), e_i\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)}$ et on note $F(t)$ le vecteur donc les composantes sont les $f_i(t)$, $i = 1, \dots, n$. On définit aussi la matrice $n \times n$ (à coefficients réels) M en posant $M_{i,j} = \int_\Omega A\nabla e_j \cdot \nabla e_i dx$ ($M_{i,j}$ est le coefficient de M en ligne i et colonne j). en notant $\alpha(t)$ le vecteur donc les composantes sont les $\alpha_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, on souhaite donc avoir

$$\alpha'(t) + M\alpha(t) = F(t).$$

En tenant compte de la condition initiale et en posant $\alpha_i^{(0)} = (u_0/e_i)_2$ *et* $\alpha^{(0)}$ *le vecteur donc les composantes sont les* $\alpha_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$, *ceci suggère donc de prendre*

$$\alpha(t) = e^{-Mt}\alpha^{(0)} + \int_0^t e^{-M(t-s)}F(s)ds. \tag{4.70}$$

Les fonctions α_i *ainsi définies appartiennent à* $C([0,T], \mathbb{R})$ *et on a donc* $u_n \in C([0,T], E_n) \subset C([0,T], H_0^1(\Omega))$ *avec* $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)e_i$.

Nous avons ici raisonné à n *fixé. La matrice* M *et les fonctions* F *et* α *dépendent donc de* n.

Nous adaptons maintenant l'étape 3 du théorème 4.25. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ *et* u_n *la solution approchée donnée par l'étape précédente. On va préciser ici ce que vaut la dérivée (par transposition) de* u_n. *Cette dérivée est notée* $(u_n)_t$. *Par définition de la dérivation par transposition,* $(u_n)_t$ *est un élément de* $\mathcal{D}'_E$ *avec* $E = H_0^1(\Omega)$. *Soit* $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[, \mathbb{R})$ *on a*

$$\langle (u_n)_t, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = -\int_0^T u_n(t)\varphi'(t)dt \in E_n \subset H_0^1(\Omega).$$

Comme $u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, *on a donc*

$$\langle (u_n)_t, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = -\sum_{i=1}^n \int_0^T \alpha_i(t)e_i\varphi'(t)dt = -\sum_{i=1}^n \big(\int_0^T \alpha_i(t)\varphi'(t)dt\big)e_i.$$

On utilise maintenant (4.70),

$$\int_0^T \alpha_i(t)\varphi' dt = T_i + S_i,$$

avec

$$T_i = \int_0^T (e^{-Mt}\alpha^{(0)})_i\varphi'(t)dt = \int_0^T (Me^{-Mt}\alpha^{(0)})_i\varphi(t)dt.$$

$$S_i = \int_0^T \big(\int_0^t e^{-M(t-s)}F(s)ds\big)_i\varphi'(t)dt.$$

Pour transformer S_i *on utilise le théorème de Fubini et on obtient*

$$S_i = \int_0^T \big(\int_0^t (Me^{-M(t-s)}F(s))_i ds\big)\varphi(t)dt - \int_0^T f_i(t)\varphi(t)dt.$$

On en déduit que $T_i + S_i = \int_0^T (M\alpha(t))_i\varphi(t)dt - \int_0^T f_i(t)\varphi(t)dt$, *et donc*

$$\langle (u_n)_t, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\sum_{i=1}^n \int_0^T (M\alpha(t))_i e_i\varphi(t)dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T f_i(t)e_i\varphi(t)dt.$$

Comme φ *est arbitraire dans* $C_c^\infty(]0,T[, \mathbb{R})$, *on a donc (p.p. en* t*)*

$$(u_n)_t = -\sum_{i=1}^n (M\alpha)_i e_i + \sum_{i=1}^n f_i e_i \in L^2(]0,T[, E_n).$$

Le premier terme du membre de droite de cette égalité est même continu de $[0,T]$ *à valeurs dans* E_n. *En reprenant la définition de* M, *cette égalité donne (p.p. en* t*)*

$$(u_n)_t = -\sum_{i=1}^n \big(\int_\Omega A\nabla u_n \cdot \nabla e_i dx\big)e_i + \sum_{i=1}^n f_i e_i. \tag{4.71}$$

La situation est légérement différente de celle du théorème 4.25. Mais on a toujours

$$(u_n)_t \in L^2(]0,T[, E_n) \subset L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)).$$

Compte tenu de la manière dont $H_0^1(\Omega)$ *s'injecte dans* $H^{-1}(\Omega)$ *(par l'identification de* $L^2(\Omega)'$ *avec* $L^2(\Omega)$*) on a pour tout* $v \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$,

$$\int_0^T \langle (u_n)_t(t), v(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt = -\int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^n (M\alpha(t))_i e_i v dx dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega f_i e_i v dx dt.$$

Ceci est intéressant surtout lorsque $v \in L^2(]0,T[,E_n)$ car en reprenant la définition de M on obtient

$$\int_0^T \langle (u_n)_t(t), v(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} dt = -\int_0^T \int_\Omega A\nabla u_n \cdot \nabla v dx dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega f_i e_i v dx dt.$$

Ceci donne, en revenant à la définition de f_i, toujours pour $v \in L^2(]0,T[,E_n)$,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle (u_n)_t(t), v(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \int_\Omega A\nabla u_n \cdot \nabla v dx dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^T \langle f(t), e_i\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \big(\int_\Omega e_i v dx\big) dt = \int_0^T \langle f(t), v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} dt. \end{aligned} \tag{4.72}$$

On rapelle aussi que $u_n \in C([0,T],H_0^1(\Omega))$ et $u_n(0) = P_n u_0$ où P_n est l'opérateur de projection orthogonale dans $L^2(\Omega)$ sur le s.e.v. E_n.

On cherche maintenant (étape 4) des estimations sur la solution approchée.
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$u_n \in C([0,T],H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)) \text{ et } (u_n)_t \in L^2(]0,T[,E_n) \subset L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)).$$

D'après la section 4.2, on a donc

$$\frac{1}{2}\|u_n(T)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 = \int_0^T \langle (u_n)_t, u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

En prenant $v = u_n$ dans (4.72)*, on en déduit*

$$\frac{1}{2}\|u_n(T)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \int_0^T \int_\Omega A\nabla u_n \cdot \nabla u_n dx dt = \int_0^T \langle f, u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt,$$

et donc

$$\alpha\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} \le \int_0^T \int_\Omega A\nabla u_n \cdot \nabla u_n dx dt \le \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \int_0^T \langle f, u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \alpha\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} &\le \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \int_0^T \langle f, u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt \\ &\le \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}\|u_n\|_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} \\ &\le \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \frac{1}{2\alpha}\|f\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} + \frac{\alpha}{2}\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\alpha\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} \le \|u_0\|_2^2 + \frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$

Ce qui donne une borne sur u_n dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$.

Pour obtenir la borne sur $(u_n)_t$, on utilise (4.71). Pour presque tout t on a

$$(u_n)_t(t) = -\sum_{i=1}^n \big(\int_\Omega A\nabla u_n(t) \cdot \nabla e_i dx\big) e_i + \sum_{i=1}^n f_i(t) e_i.$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, on a $v = \sum_{i=1}^\infty (v/e_i)_{L^2} e_i$ et cette série est convergente dans $L^2(\Omega)$ et dans $H_0^1(\Omega)$. En posant $P_n(v) = \sum_{i=1}^n (v/e_i)_{L^2} e_i$ on a $\|P_n v\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$. Comme

$$\begin{aligned} \langle (u_n)_t(t), P_n v\rangle_{H^{-1},H_0^1} &= \langle (u_n)_t(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega (u_n)_t(t) v dx \\ &= -\sum_{i=1}^n \big(\int_\Omega A\nabla u_n(t) \cdot \nabla e_i dx\big)(v/e_i)_{L^2} + \sum_{i=1}^n f_i(t)(v/e_i)_{L^2}. \end{aligned} \tag{4.73}$$

on en déduit que

$$\|(u_n)_t(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\langle (u_n)_t(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1},\ v \in E_n,\ \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \le 1\}.$$

Or, pour $v \in E_n$, on obtient avec (4.73)

$$\langle (u_n)_t(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega A\nabla u_n(t)\cdot\nabla v dx + \langle f(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

En utilisant le fait que les coefficients de A sont dans $L^\infty(\Omega)$, on en déduit l'existence de β, ne dépendant que de A, t.q. pour presque tout t,

$$\|(u_n)_t(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \beta\|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée dans $L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$, la suite $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est donc bornée dans $L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$.

Il s'agit maintenant (étape 5) de passer à la limite quand $n \to +\infty$. Grâce aux estimations obtenues à l'étape précédente, on peut supposer, après extraction éventuelle d'une sous suite, que, quand $n \to +\infty$,

$$u_n \to u \text{ faiblement dans } L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)),$$
$$(u_n)_t \to w \text{ faiblement dans } L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)).$$

Comme nous l'avons dans la démonstration du théorème 4.25, on a $w = u_t$.

Soit $v \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $v_n(t) = P_n(v(t))$, de sorte que, par convergence dominée, $v_n \to v$ dans $L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$. On utilise alors (4.72) avec v_n au lieu de v . On obtient

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, v_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T\int_\Omega A\nabla u_n\cdot\nabla v_n dx dx dt = \int_0^T \langle f, v_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

Les trois termes de cette égalité passent à limite quand $n \to +\infty$ grâce aux convergences de u_n, v_n et $(u_n)_t$. On obtient ainsi

$$\int_0^T \langle u_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T A\nabla u\cdot\nabla v dx dt = \int_0^T \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

Ce qui est bien ce qui était souhaité.

Comme $u \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$, on sait que $u \in C([0,T], L^2(\Omega))$. Pour terminer la démonstration du fait que u est solution de (4.68)*, il reste donc seulement à montrer que $u(0) = u_0$ p.p. (c'est-à-dire $u(0) = u_0$ dans $L^2(\Omega)$). La démonstration de ce point est identique à celle donnée dans la démonstration du théorème 4.25. Cela termine la démonstration de l'existence d'une solution à* (4.68)*.*

On montre maintenant l'unicité de la solution de (4.68)*. La démonstration est très proche de celle donnée pour le théorème 4.25. Soit u_1, u_2 deux solutions de* (4.68)*. On pose $u = u_1 - u_2$. En faisant la différence des équations satisfaites par u_1 et u_2 et en prenant, pour $t \in [0,T]$, $v = u1_{]0,t[}$ comme fonction test, on obtient*

$$\int_0^t \langle u_t(s), u(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1} ds + \int_0^t\int_\Omega A\nabla u(s)\cdot\nabla u(s) dx ds = 0.$$

Comme $u \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$, on a, d'après la section 4.2,

$$\frac{1}{2}(\|u(t)\|_2^2 - (\|u(0)\|_2^2) = \int_0^t \langle u_t(s), u(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1} ds.$$

On en déduit, pour tout $t \in [0,T]$,

$$(\|u(t)\|_2^2 - (\|u(0)\|_2^2) + 2\int_0^t\int_\Omega A\nabla u(s)\cdot\nabla u(s) dx dt = 0.$$

Enfin, comme $u(0) = 0$ et $A\nabla u\cdot\nabla u \geq 0$ p.p., on obtient bien, finalement, $u(t) = 0$ p.p. dans Ω, pour tout $t \in [0,T]$. Ce qui termine la démonstration de l'unicité de la solution de (4.68)*.*

Corrigé 4.4 (Existence par le théorème de Schauder)

Devoir 1, exercice 1.6

Corrigé 1.6 (Laplacien d'un élément de $H_0^1(\Omega)$) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) et $u \in H_0^1(\Omega)$.

1. Montrer que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = \int u(x)\Delta\varphi(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx.$$

Corrigé – Par définition de la dérivée par transposition, on a

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \langle D_i D_i u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \int_\Omega u(x)\partial_i^2\varphi(x)dx.$$

Puis, comme $u \in H_0^1(\Omega)$, la forme linéaire (sur $C_c^\infty(\Omega)$) $D_i u$ est représentée par un élément de $L^2(\Omega)$ encore noté $D_i u$ et on a, pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$,

$$\int_\Omega u(x)\partial_i^2\varphi(x)dx = -\langle D_i u, \partial_i\varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega D_i u(x)\partial_i\varphi(x)dx.$$

Comme ∇u est lélément de $L^2(\Omega)^N$ dont les composantes sont les $D_i u$, on obtient bien

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx.$$

2. On rappelle que $H_0^1(\Omega)$ est un s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$. Muni de la norme de $H^1(\Omega)$, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est donc un espace de Hilbert. On note $H^{-1}(\Omega)$ le dual (topologique) de $H_0^1(\Omega)$. Déduire de la question précédente que $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ (c'est-à-dire que l'élément de $\mathcal{D}^\star(\Omega)$, noté Δu, se prolonge de manière unique en un élément de $H^{-1}(\Omega)$, encore notée Δu) et que

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \| \, |\nabla u| \, \|_{L^2(\Omega)}.$$

Corrigé – Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)}| \leq \int_\Omega |\nabla u(x)||\nabla\varphi(x)|dx \leq \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}\||\nabla\varphi|\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ceci montre que l'application $\varphi \mapsto \langle \Delta u, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)}$ est linéaire continue de $C_c^\infty(\Omega)$, muni de la norme $H^1(\Omega)$, dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ cette application se prolonge donc, par densité, de manière unique en une application linéaire continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire en un élément de $H^{-1}(\Omega)$). Cet élément de $H^{-1}(\Omega)$ est encore noté Δu et le prolongement par densité donne, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle \Delta u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = -\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx.$$

On a donc, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$|\langle \Delta u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| \leq \int_\Omega |\nabla u(x)||\nabla v(x)|dx \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{1.19}$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est muni de la norme $H^1(\Omega)$, ce qui donne

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{v\in H_0^1(\Omega),\, v\neq 0} \frac{\langle \Delta u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}.$$

on déduit alors de (1.19) que

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

NB. En fait, on montrera au chapitre 2 que sur $H_0^1(\Omega)$ la norme $H^1(\Omega)$ est équivalente à la norme notée $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ définie par $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \| \, |\nabla u| \, \|_{L^2(\Omega)}$. Avec ce choix de norme sur $H_0^1(\Omega)$ on obtient $\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Devoir 1, exercice 2.4

Corrigé 2.3 (Deux problèmes elliptiques emboités)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et M et N deux matrices de taille $N \times N$ à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, on a

$$M(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2 \text{ et } N(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2.$$

1. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Montrer qu'il existe un unique u t.q.

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega N(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega (M(x)+N(x))\nabla w(x) \cdot \nabla v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right. \tag{2.61}$$

avec w solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} w \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega M(x)\nabla w(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.62}$$

pour les questions suivantes, on note $T(f)$ cette unique solution de (2.61) avec w solution de (2.62).

Corrigé – Le théorème 2.6 donne l'existence et l'unicité de w solution de (2.62). Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, on pose alors

$$S(v) = \int_\Omega (M(x)+N(x))\nabla w(x) \cdot \nabla v(x)dx.$$

L'application S est linéaire continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, c'est donc un élément de $H^{-1}(\Omega)$. Le théorème 2.9 donne alors l'existence et l'unicité de u solution de (2.61). Ce qui est bien le résultat demandé.

2. Montrer que T est une application linéaire compacte de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (c'est-à-dire que T est linéaire, continue et transforme les parties bornées de $L^2(\Omega)$ en parties relativement compactes de $L^2(\Omega)$).

Corrigé – La solution w de (2.62) dépend linéairement de f. Puis, la solution u de (2.61) dépend linéairement de w. On en déduit que u dépend linéairement de f et donc que l'application T est linéaire de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et donc aussi linéaire de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Si w est la solution de (2.62), on a, en prenant $v = w$ dans (2.62),

$$\alpha\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré (Lemme 2.5), il existe C_Ω, ne dépendant que Ω, tel que $\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega\|w\|_{H_0^1(\Omega)}$. On a donc, avec $C_1 = C_\Omega/\alpha$,

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.63}$$

Comme M et N sont à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$, il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ (ne dépendant que de M et N) tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$|(M+N)\xi| \leq \beta|\xi| \text{ p.p.}.$$

On a donc, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et S définie dans la première question,

$$|S(v)| \leq \beta\|w\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Si $u = T(f)$, on en déduit, en prenant $v = u$ dans (2.61),

$$\alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \beta\|w\|_{H_0^1(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

et donc, avec (2.63) et $C_2 = \beta C_1/\alpha$,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ceci prouve que l'application $f \mapsto u$ est linéaire continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Comme l'application $u \mapsto u$ est compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (théorème 1.23), on en déduit que T est une une application linéaire compacte de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

3. On suppose dans cette question (et seulement dans cette question) qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $M = \lambda N$. Montrer qu'il existe une matrice A, ne dépendant que de M et λ, tel que, si $u = T(f)$,

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.64}$$

Donner l'expression de A en fonction de M et λ.

Corrigé – On commence par remarquer que les hypothèses sur M et N imposent $\lambda > 0$. Puis, si $u = T(f)$, (2.61) et (2.62) donnent, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega M(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega (\lambda+1)M(x)\nabla w(x)\cdot\nabla v(x)dx = (\lambda+1)\int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

Ce qui donne bien que u est solution de (2.64) avec $A = M/(\lambda+1)$.

4. On suppose dans cette question que $N = 2$ et $1 < p \leq +\infty$. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe un unique u solution de (2.61) avec w solution de (2.62).

Montrer que l'application qui à f associe u (solution de (2.61) avec w solution de (2.62)) est compacte de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < +\infty$

Corrigé – Soit $f \in L^p(\Omega)$. On note p' l'exposant conjugué de p, c'est-à-dire $p' = p/(p-1)$. Le théorème d'injection de Sobolev (théorème 1.26) donne l'existence de C_p (ne dépendant en fait que de p) tel que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a $v \in L^{p'}(\Omega)$ et

$$\|v\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C_p\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Avec l'inégalité de Hölder, on en déduit que l'application $v \mapsto \int_\Omega f(x)v(x)dx$ est un élément $H^{-1}(\Omega)$ et que

$$|\int_\Omega f(x)v(x)dx| \leq C_p\|f\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On peut alors reprendre (en les adpatant légèrement) les démonstrations des deux premières questions.
Le théorème 2.9 donne l'existence et l'unicité de w solution de (2.62) et on a $\alpha\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_p\|f\|_{L^p(\Omega)}$. Puis, le théorème 2.9 donne alors l'existence et l'unicité de u solution de (2.61) et, avec β défini à la question 2, on obtient

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\beta C_p}{\alpha^2}\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Ceci donne que l'application $f \mapsto u$ est linéaire continue de $L^p(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Puis, comme l'application $u \mapsto u$ est compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < +\infty$ (voir la remarque 1.27), on en déduit que l'application $f \mapsto u$ est une une application linéaire compacte de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < +\infty$.

5. On suppose dans cette question que $N = 3$ et $p = 6/5$. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe un unique u solution de (2.61) avec w solution de (2.62).

Montrer que l'application qui à f associe u (solution de (2.61) avec w solution de (2.62)) est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ et compacte de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < 6$.

Corrigé – La démonstration est ici très voisine de la précédente. On a ici $p = 6/5$ et donc le conjugué de p est $p' = 6 = 2^\star$. Soit $f \in L^{6/5}(\Omega)$. Le théorème d'injection de Sobolev (théorème 1.26) donne l'existence de C (ne dépendant de rien) tel que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a $v \in L^6(\Omega)$ et

$$\|v\|_{L^6(\Omega)} \leq C\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Avec l'inégalité de Hölder, on en déduit que l'application $v \mapsto \int_\Omega f(x)v(x)dx$ est un élément $H^{-1}(\Omega)$ et que

$$|\int_\Omega f(x)v(x)dx| \leq C\|f\|_{L^{6/5}(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Le théorème 2.9 donne l'existence et l'unicité de w solution de (2.62) et on a $\alpha\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^{6/5}(\Omega)}$. Puis, le théorème 2.9 donne alors l'existence et l'unicité de u solution de (2.61) et, avec β défini à la question 2, on obtient

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\beta C}{\alpha^2}\|f\|_{L^{6/5}(\Omega)}.$$

Ceci donne que l'application $f \mapsto u$ est linéaire continue de $L^{6/5}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Puis, comme l'application $u \mapsto u$ est continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ (théorème 1.26) et est compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < 6 = 2^\star$ (voir la remarque 1.27), on en déduit que l'application $f \mapsto u$ est une application linéaire continue de $L^{6/5}(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ et linéaire compacte de $L^{6/5}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < 6$.