Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

CTES
Centre de Télé-Enseignement Sciences

# MASTER 2 – Ingénierie Mathématiques et Modélisation – SMA5B0.

| Code UE | N° d'envoi de l'UE |
|---|---|
| **MMAU2T** | **5** |

***Nom de l'UE : Equations aux Dérivées Partielles (3.2)***

**- Contenu de l'envoi : Polycopié, chapitre 5**

**- Guide du travail à effectuer**

Semaine 1 :
Etudier le chapitre 4, section 4.5 (Compacité en temps)
Semaine 2 :
Etudier le chapitre 5, section 5.1 (Cas unidimensionnel)
Exercice proposé : 5.1
Semaine 3 :
Etudier le chapitre 5, section 5.2 (Cas multidimensionnel)
Exercice proposé : 5.10, questions 1-4
Semaine 4 :
Revoir l'ensemble du cours et des exercices corrigés.

**- Coordonnées des enseignants responsables de l'envoi**

T. Gallouet, R. Herbin, CMI, 39 rue Joliot Curie, 13453 marseille cedex 13.
**email :** thierry.gallouet@univ-amu.fr, raphaele.herbin@univ-amu.fr
Vous pouvez aussi consulter la page web: http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/master2.d/tele.d
et nous poser des questions par email.

# Chapitre 5

# Problèmes hyperboliques

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux équations hyperboliques scalaires, et nous allons démontrer le théorème d'existence et d'unicité de la solution entropique dû à Kruskov. Nous n'aborderons pas le cas des systèmes, pour lesquels la théorie reste pour le moment très incomplète. Nous commençons par le cas unidimensionnel.

## 5.1 Le cas unidimensionnel

Les équations de type hyperbolique interviennent principalement en mécanique des fluides (aéronautique, écoulements diphasiques, modélisation de rupture de barrage et d'avalanches). Elles sont souvent obtenues en négligeant les phénomènes de diffusion (parce qu'ils sont faibles à l'échelle considérée) dans les équations de conservation de la mécanique. L'exemple le plus classique d'équation hyperbolique linéaire est l'équation de transport (ou d'advection).

$$u_t - u_x = 0,\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

avec condition initiale :

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{5.2}$$

Dans le cas où la condition initiale $u_0$ est suffisamment régulière, il est facile de voir que la fonction :

$$u(x,t) = u_0(x+t), \tag{5.3}$$

est solution de (5.1)-(5.2). Si $u_0$ est non régulière (par exemple discontinue), nous verrons qu'il y a encore moyen de montrer que la fonction définie par (5.3) est solution en un sens que nous qualifierons de "faible".
Si l'équation est non linéaire, i.e.

$$u_t + (f(u))_x = 0,\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}, \tag{5.4}$$

avec par exemple $f(u) = u^2$, et condition initiale (5.2), on peut encore définir des solutions faibles, mais leur calcul est plus difficile.

**Remarque 5.1** Sur le plan de la simulation numérique, les équations hyperboliques sont discrétisées de manière usuelle par la méthode des volumes finis. Les discrétisations par éléments finis mènent souvent à des schémas instables (en particulier, les solutions discrètes ne vérifient pas certaines propriétés physiques souvent souhaitées).

On se donne $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et on considère maintenant l'équation hyperbolique non linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + (f(u))_x = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{array} \right. \tag{5.5}$$

Commençons par donner la définition de solution classique de ce problème même si, comme nous le verrons après, le problème (5.5) n'a pas, en général, de solution classique.

**Notations.** Soit $Q$ une partie de $\mathbb{R}^p$ ($p \geq 1$) et $k \in \mathbb{N}$. On dit que $u \in C^k(\bar{Q})$ si $u$ est la restriction à $Q$ d'une fonction de classe $C^k$ sur $\mathbb{R}^p$. (Ceci est équivalent à la définition usuelle si $k = 0$. Bien sûr, cette définition s'applique aussi si $Q$ est fermé et donc $\bar{Q} = Q$.) On utilisera aussi la notation $u \in C_c^k(Q)$ qui signifie que $u \in C^k(\bar{Q})$ et qu'il existe $K \subset Q$, $K$ compact t.q. $u = 0$ sur $K^c$. Cette notation sera utilisée par exemple pour $Q = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ou $Q = \mathbb{R} \times [0, T[$.

**Définition 5.2 (Solution classique)** *On suppose que $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors $u$ est solution classique de* (5.5) *si $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $u$ vérifie*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (u_t + (f(u))_x)(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Avant de donner un résultat de non existence d'une solution classique (proposition 5.5), nous rappelons le résultat classique d'existence et d'unicité locale de solutions pour une équation différentielle non linéaire (théorème de Cauchy-Lipschitz), avec une fonction $a$ localement lipschitzienne de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = a(x(t), t), \quad t \in \mathbb{R}_+^\star, \\ x(0) = x_0. \end{array} \right. \tag{5.6}$$

Pour tout $T > 0$, le problème (5.6) admet au plus une solution (classique) définie sur $[0, T[$. Il existe $T_{\max} > 0$ (éventuellement égal à $+\infty$) et une fonction $u$ continue sur $[0, T_{\max}[$, de classe $C^1$ sur $]0, T_{\max}[$, solution (classique) de (5.6). De plus, si $T_{\max} < +\infty$ alors $|x(t)| \to +\infty$ lorsque $t \to T_{\max}$.

Soit $u$ une solution classique de (5.5). On pose alors $a(x,t) = f'(u(x,t))$ (de sorte que $a \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$). Il est clair que la fonction $u$ est alors une solution classique du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x,t) + a(x,t) u_x(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{array} \right. \tag{5.7}$$

Nous donnons maintenant la définition des courbes caractéristiques pour l'équation (5.7), qui permet le lien entre les équations hyperboliques linéaires et les équations différentielles ordinaires.

**Définition 5.3 (Courbe caractéristique)** *$a$ localement lipschitzienne de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, On appelle courbe caractéristique du problème* (5.7) *issue de $x_0 \in \mathbb{R}$, la courbe définie par le problème de Cauchy suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = a(x(t), t) \\ \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. \tag{5.8}$$

**Proposition 5.4 (Solutions classiques et courbes caractéristiques)** *Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et $u$ une solution classique de* (5.5)*. Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $u(x_0 + f'(u_0(x_0))t, t) = u_0(x_0)$. Autrement dit, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $u$ est constante sur la droite $t \mapsto x(t) = x_0 + f'(u_0(x_0))t$. (Cette droite est la courbe caractéristique du problème* (5.7) *issue de $x_0 \in \mathbb{R}$ avec $a(x,t) = f'(u(x,t))$.)*

**Démonstration** On pose $a(x,t) = f'(u(x,t))$. Comme $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que $u \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, La fonction $a$ est bien $a$ localement lipschitzienne de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc pour le problème (5.7). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, le problème (5.7) a alors une solution maximale $x(t)$ définie sur $[0, T_{\max}[$, et $|x(t)|$ tend vers l'infini lorsque $t$ tend vers $T_{\max}$ si $T_{\max} < +\infty$. Les trois étapes de la démonstration sont les suivantes :

1. Comme $u$ est solution classique, on a $u(x(t),t) = u_0(x_0), \forall t \in [0, T_{\max}[$, et donc $u$ (solution de (5.5)) est constante sur la droite caractéristique issue de $x_0$. En effet, soit $\varphi$ définie par $\varphi(t) = u(x(t),t)$ ; en dérivant $\varphi$, on obtient : $\varphi'(t) = u_t(x(t),t) + u_x(x(t),t)x'(t)$. Comme $x$ vérifie (5.8), ceci entraîne : $\varphi'(t) = u_t(x(t),t) + f'(u(x(t),t))u_x(x(t),t)$, et donc
$$\varphi'(t) = (u_t + (f(u))_x)(x(t),t) = 0.$$
La fonction $\varphi$ est donc constante, et on a :
$$u(x(t),t) = \varphi(t) = \varphi(0) = u(x(0),0) = u(x_0,0) = u_0(x_0), \forall t \in [0, T_{\max}[.$$

2. Les courbes caractéristiques sont des droites, car $u(x(t),t) = u_0(x_0), \forall t \in [0, T_{\max}[$, et donc $x'(t) = f'(u_0(x_0))$. En intégrant, on obtient que le système (5.8) décrit la droite d'équation :
$$x(t) = f'(u_0(x_0))t + x_0. \tag{5.9}$$

3. $T_{\max} = +\infty$ et donc $u(x,t) = u_0(x_0) \quad \forall t \in [0,+\infty[$.
En effet, puisque $x$ vérifie (5.9), on a donc, si $T_{\max} < \infty$,
$$\lim_{t\to T_{\max}} |x(t)| < +\infty. \text{ On en déduit que } T_{\max} = +\infty.$$

■

**Proposition 5.5 (Non existence d'une solution classique)** *Soit $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on suppose que $f'$ n'est pas constante, alors il existe $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que* (5.5) *n'admette pas de solution classique.*

**Démonstration** Comme $f'$ est non constante, il existe $v_0, v_1$ tel que $f'(v_0) > f'(v_1)$, et on peut construire $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $u_0(x_0) = v_0$ et $u_0(x_1) = v_1$, où $x_0$ et $x_1$ sont donnés et $x_0 < x_1$, voir figure 5.1. Supposons

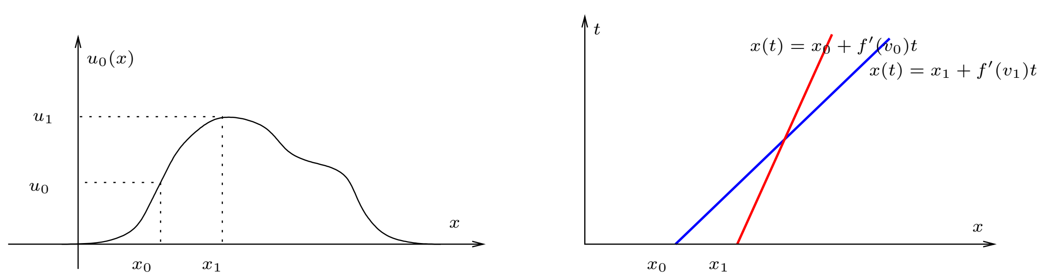


FIGURE 5.1 – Droites caractéristiques, cas non linéaire

que $u$ soit solution classique avec cette donnée initiale. Alors, par la proposition 5.4 :
$$u(x_0 + f'(u_0(x_0))t, t) = u_0(x_0) = v_0 \text{ et } u(x_1 + f'(u_0(x_1))t, t) = u_0(x_1) = v_1.$$

Soit $T$ tel que $x_0 + f'(v_0)T = x_1 + f'(v_1)T = \bar{x}$, c'est à dire

$$T = \frac{x_1 - x_0}{f'(v_0) - f'(v_1)}.$$

On a alors :

$$u(\bar{x}, T) = u_0(x_0) = v_0 = u_0(x_1) = v_1,$$

ce qui est impossible. On en conclut que (5.5) n'admet pas de solution classique pour cette donnée initiale.

■

**Définition 5.6 (Solution faible)** *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, On appelle solution faible de* (5.5) *une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ telle que*

$$\int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} [u(x,t)\varphi_t(x,t) + f(u(x,t))\varphi_x(x,t)]dxdt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x,0)dx = 0, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}). \quad (5.10)$$

Donnons maintenant les liens entre solution classique et solution faible.

**Proposition 5.7** *Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$.*

1. *Si $u$ est solution classique de* (5.5) *(et donc $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) alors $u$ est solution faible de* (5.5)*.*
2. *Si $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ est solution faible de* (5.5) *alors $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (au sens où la classe de fonctions $u_0$ admet un représentant de classe $C^1$ et est alors identifiée à ce représentant) et $u$ est solution classique de* (5.5)*.*
3. *Soit $\sigma \in \mathbb{R}$, $D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star ; x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star ; x > \sigma t\}$.*
   *(a) On suppose que $u \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star)$, que $u_{|D_i} \in C^1(\bar{D}_i, \mathbb{R})$, $i = 1, 2$, que la première équation de* (5.5) *est vérifiée pour tout $(x,t) \in D_i$ ($i = 1, 2$) et que la condition initiale (de* (5.5)*) est satisfaite p.p.. Alors $u$ est solution faible de* (5.5)*.*
   *(b) Plus généralement, on suppose que $u_{|D_i} \in C^1(\bar{D}_i, \mathbb{R})$ ($i = 1, 2$), que la première équation de* (5.5) *est vérifiée pour tout $(x,t) \in D_i$ ($i = 1, 2$) et que la condition initiale (de* (5.5)*) est satisfaite p.p.. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pose*

   $$u_+(\sigma t, t) = \lim_{x \downarrow \sigma t} u(x,t) \text{ et } u_-(\sigma t, t) = \lim_{x \uparrow \sigma t} u(x,t),$$

   $$[u](\sigma t, t) = u_+(\sigma t, t) - u_-(\sigma t, t),$$

   $$[f(u)](\sigma t, t) = f(u_+(\sigma t, t)) - f(u_-(\sigma t, t)).$$

   *Alors $u$ est solution faible de* (5.5) *si et seulement si*

   $$\sigma[u](\sigma t, t) = [f(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+. \quad (5.11)$$

   *Cette relation s'appelle "relation de Rankine-Hugoniot".*

**Démonstration**

1. Supposons que $u$ est solution classique de (5.5), c'est-à-dire de :

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Multiplions (5.5) par $\varphi$ et intégrons sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. On obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u_t(x,t)\varphi(x,t)dtdx + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (f(u))_x(x,t)\varphi(x,t)dtdx = 0.$$

L'application du théorème de Fubini et une intégration par parties donnent alors :

$$-\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\varphi(x,0)dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x,t)\varphi_t(x,t)dtdx - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} f(u)(x,t)\varphi_x(x,t)dxdt = 0,$$

(car le support de $\varphi$ est un compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$). On obtient donc bien la relation (5.10), grâce à la condition initiale $u(x,0) = u_0(x)$.

2. Soit $u$ une solution faible de (5.5), qui vérifie de plus $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,+\infty[)$. On a donc suffisamment de régularité pour intégrer par parties dans (5.10).

   Commençons par prendre $\varphi$ à support compact dans $\mathbb{R} \times ]0,+\infty[$. On a donc $\varphi(x,0) = 0$, et une intégration par parties dans (5.10) donne :

$$-\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u_t(x,t)\varphi(x,t)dtdx - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} (f(u))_x(x,t)\varphi(x,t)dxdt = 0.$$

   On a donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \left(u_t(x,t) + (f(u))_x(x,t)\right)\varphi(x,t)dtdx = 0, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times ]0,+\infty[).$$

   Comme $u_t + (f(u))_x$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$, on en déduit que $u_t + (f(u))_x = 0$. En effet, on rappelle que si $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times ]0,+\infty[)$ et $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} h(x,t))\varphi(x,t)dtdx = 0$ pour toute fonction $\varphi$ appartenant à $C_c^1(\mathbb{R} \times ]0,+\infty[)$, alors $f = 0$ p.p. ; si de plus $h$ est continue sur $\mathbb{R} \times ]0,+\infty[$, alors $f = 0$ partout sur $\mathbb{R} \times ]0,+\infty[$.

   On prend alors $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Dans ce cas, une intégration par parties dans (5.10) donne

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\varphi(x,0)dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \left(u_t(x,t) + (f(u))_x(x,t)\right)\varphi(x,t)dtdx - \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x,0)dx = 0.$$

   Mais on vient de montrer que $u_t + (f(u))_x = 0$. On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - u(x,0))\varphi(x,0)dx = 0, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times R_+).$$

   Ceci donne $u_0 = u(\cdot,0)$ p.p.. Comme $u$ est continue, on a donc $u_0$ continue (au sens où on identifie $u_0$ et $u(\cdot,0)$) et $u$ est solution classique de (5.5).

3. On montre directement l'item (b) (qui contient l'item (a)). On suppose que $u_{|D_i} \in C^1(\bar{D}_i, \mathbb{R})$ $(i = 1,2)$, que la première équation de (5.5) est vérifiée pour tout $(x,t) \in D_i$ $(i = 1,2)$ et que la condition initiale (de (5.5)) est satisfaite p.p. sur $\mathbb{R}$. Nous allons montrer que $u$ est solution faible de (5.5) si et seulement si (5.11) est vérifiée. Pour cela, on pose

$$X = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x,t)\varphi_t(x,t)dtdx + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} f(u)(x,t)\varphi_x(x,t)dxdt.$$

On a donc $X = X_1 + X_2$, avec

$$X_1 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x,t)\varphi_t(x,t)dtdx \text{ et } X_2 = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} (f(u))(x,t)\varphi_x(x,t)dxdt.$$

Calculons $X_1$. Comme $u$ n'est de classe $C^1$ que sur chacun des domaines $D_i$, on n'a pas le droit d'intégrer par parties sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ entier. On va donc décomposer l'intégrale sur $D_1$ et $D_2$ ; supposons par exemple $\sigma < 0$, voir figure 5.2. (Le cas $\sigma > 0$ se traite de façon similaire et le cas $\sigma = 0$ est plutôt plus simple). On a alors $D_1 = \{(x,t); x \in \mathbb{R}_- \text{ et } 0 < t < \frac{x}{\sigma}\}$ et $D_2 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \cup \{(x,t); x \in \mathbb{R}_- \text{ et } \frac{x}{\sigma} < t < +\infty\}$.

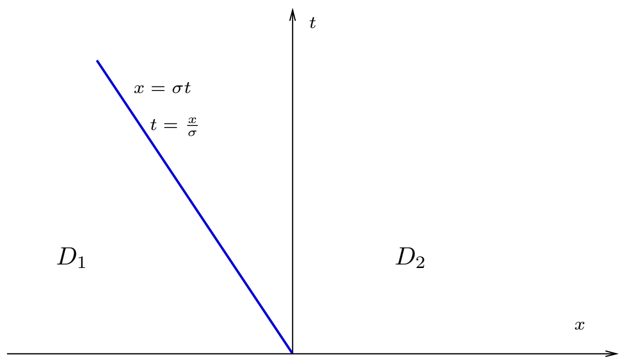


FIGURE 5.2 – Les domaines $D_1$ et $D_2$

On a donc :

$$X_1 = \int_{\mathbb{R}_-} \int_0^{x/\sigma} u(x,t)\varphi_t(x,t)dtdx + \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\frac{x}{\sigma}}^{+\infty} u(x,t)\varphi_t(x,t)dtdx + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} u(x,t)\varphi_t(x,t)dtdx.$$

Comme $u$ est de classe $C^1$ sur chacun des domaines, on peut intégrer par parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned} X_1 = &\int_{\mathbb{R}_-} u_-(x,\frac{x}{\sigma})\varphi(x,\frac{x}{\sigma})dx - \int_{\mathbb{R}_-} u(x,0)\varphi(x,0)dx - \int_{\mathbb{R}_-} \int_0^{\frac{x}{\sigma}} u_t(x,t)\varphi(x,t)dtdx \\ &- \int_{\mathbb{R}_-} u_+(x,\frac{x}{\sigma})\varphi(x,\frac{x}{\sigma})dx - \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\frac{x}{\sigma}}^{+\infty} u_t(x,t)\varphi(x,t)dtdx \\ &- \int_{\mathbb{R}_+} u(x,0)\varphi(x,0)dx - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} u_t(x,t)\varphi(x,t)dtdx. \end{aligned} \tag{5.12}$$

En regroupant, il vient :

$$\begin{aligned} X_1 = -\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\varphi(x,0)dx - \int\int_{D_1} u_t(x,t)\varphi(x,t)dtdx - \int\int_{D_2} u_t(x,t)\varphi(x,t)dtdx \\ - \int_{\mathbb{R}_-} [u](x,\frac{x}{\sigma})\varphi(x,\frac{x}{\sigma})dx. \end{aligned}$$

Dans la dernière intégrale, on effectue le changement de varaible $t = x/\sigma$. On obtient

$$X_1 = -\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\varphi(x,0)dx - \int\int_{D_1} u_t(x,t)\varphi(x,t)dtdx - \int\int_{D_2} u_t(x,t)\varphi(x,t)dtdx \\ +\sigma\int_{\mathbb{R}_+}[u](\sigma t,t)\varphi(\sigma t,t)dt.$$

On décompose de même $X_2$ sur $D_1 \cup D_2$, en remarquant maintenant que $D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\star; x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\star; x > \sigma t\}$ :

$$X_2 = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{-\infty}^{\sigma t} f(u)(x,t)\varphi_x(x,t)dxdt + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\sigma t}^{+\infty} f(u)(x,t)\varphi_x(x,t)dxdt.$$

La fonction $u$ est de classe $C^1$ sur chacun des domaines, on peut là encore intégrer par parties. Comme $\varphi$ est à support compact sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$X_2 = -\int\int_{D_1}(f(u))_x(x,t)\varphi(x,t)dxdt - \int\int_{D_2}(f(u))_x(x,t)\varphi(x,t)dxdt \\ -\int_{\mathbb{R}_+}[f(u)](\sigma t,t)\varphi(\sigma t,t)dt.$$

Comme $u_t + (f(u))_x = 0$ sur $D_1$ et $D_2$, on a donc :

$$X = X_1 + X_2 = -\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\varphi(x,0)dx + \int_{\mathbb{R}_+}(\sigma[u](\sigma t,t) - [f(u)](\sigma t,t))\varphi(\sigma t,t)dt.$$

On en déduit bien que $u$ est solution faible de (5.5) si et seulement si (5.11) est vérifiée.

■

Notons qu'il existe souvent plusieurs solutions faibles. On a donc besoin d'une notion supplémentaire pour les distinguer. C'est la notion de solution entropique, qui nous permettra d'obtenir l'unicité. Donnons tout d'abord un exemple de non-unicité de la solution faible. Pour cela on va considérer une équation modèle, appelée équation de Burgers, qui s'écrit

$$u_t + (u^2)_x = 0, \tag{5.13}$$

et des données initiales particulières, sous la forme

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g \text{ si } x < 0, \\ u_d \text{ si } x > 0, \end{cases}$$

avec $u_g, u_d \in \mathbb{R}$. Ces données initiales définissent un problème de Cauchy particulier, qu'on appelle problème de Riemann.

Nous considérons maintenant l'exemple simple obtenu avec $u_g = -1$ et $u_d = 1$. Le problème considéré est donc le problème suivant, avec $f(u) = u^2$, $u_g = -1$, $u_d = 1$ :

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, \\ u_0(x) = \begin{cases} u_g \text{ si } x < 0, \\ u_d \text{ si } x > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{5.14}$$

On cherche tout d'abord une solution faible de la forme :

$$u(x,t) = \begin{cases} u_g \text{ si } x < \sigma t, \\ u_d \text{ si } x > \sigma t. \end{cases} \tag{5.15}$$

Cette éventuelle solution est discontinue au travers de la droite d'équation $x = \sigma t$ dans le plan $(x, t)$. On remplace $u(x, t)$ par ces valeurs dans (5.10). D'après la proposition 5.7 on sait que $u$ est solution faible si la condition suivante (condition de Rankine et Hugoniot) est vérifiée :

$$\sigma(u_d - u_g) = (f(u_d) - f(u_g)), \tag{5.16}$$

ce qui avec la condition initiale particulière choisie ici, donne $2\sigma = 1^2 - (-1)^2 = 0$.
Mais on peut trouver d'autres solutions faibles. Si $u$ est solution régulière, on sait que sur les courbes caractéristiques, qui ont pour équation $x(t) = x_0 + f'(u_0(x_0))t$, la fonction $u$ est constante. Comme $f'(u) = 2u$, les courbes caractéristiques sont donc des droites de pente -2 si $x_0 < 0$, et de pente 2 si $x_0 > 0$. Construisons ces caractéristiques sur la figure 5.3 : Dans la zone du milieu, où l'on a représenté un point d'interrogation, on cherche

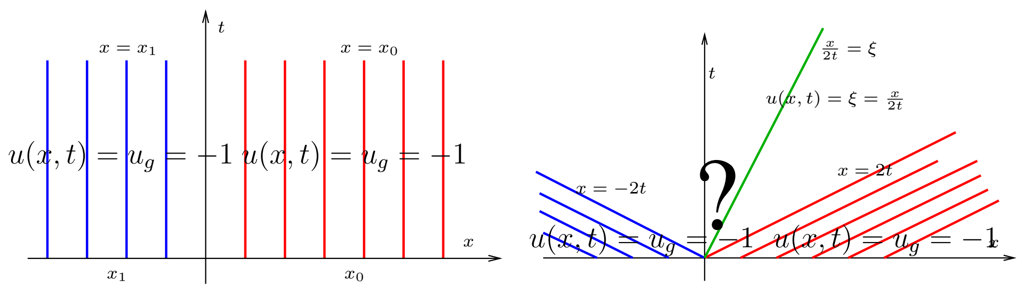


FIGURE 5.3 – Problème de Riemann pour léquation de Burgers

$u$ sous la forme $u(x, t) = \varphi\left(\frac{x}{t}\right)$ et telle que $u$ soit continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$. La fonction $u$ suivante convient :

$$u(x,t) = \begin{cases} -1 \text{ si } x < -2t, \\ \dfrac{x}{2t} \text{ si } -2t < x < 2t, \\ 1 \text{ si } x > 2t. \end{cases} \tag{5.17}$$

Comment choisir la "bonne" solution faible, entre (5.15) et(5.17) ? Comme les problèmes hyperboliques sont souvent obtenus en négligeant les termes de diffusion dans des équations paraboliques, une technique pour choisir la solution est de chercher la limite du problème de diffusion associé qui s'écrit :

$$u_t + (f(u))_x - \varepsilon u_{xx} = 0, \tag{5.18}$$

lorsque le terme de diffusion devient négligeable, c'est-à-dire lorsque $\varepsilon$ tend vers 0. Soit $u_\varepsilon$ la solution de (5.18) avec la condition initiale $u_\varepsilon(\cdot, 0) = u_0(\cdot)$ (on admet pour l'instant l'existence et l'unicité de $u_\varepsilon$). On peut montrer que $u_\varepsilon$ tend vers $u$ (en un sens convenable) lorsque $\varepsilon$ tend vers 0, où $u$ est la "solution faible entropique" de (5.18), définie comme suit.

**Définition 5.8 (Solution entropique)** *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$. Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. On dit que $u$ est solution faible entropique de (5.5) si pour toute fonction $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ convexe, appelée "entropie", et $\phi \in C^1$ telle que $\phi' = f'\eta'$, appelé "flux d'entropie", on a :*

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\eta(u)\varphi_t + \phi(u)\varphi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x))\varphi(x, 0) dx \geq 0, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+). \tag{5.19}$$

Bien sûr, si $u$ est solution faible entropique alors $u$ est solution faible (proposition 5.11).

**Remarque 5.9 (Condition initiale)** Noter que dans la définition 5.8, on prend une fois de plus $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ de manière à bien prendre en compte la condition initiale ; ceci n'est pas toujours fait de cette manière dans les travaux plus anciens sur le sujet. Si la condition initiale est prise en compte seulement dans la définition de solution faible (et n'est pas reprise dans la condition d'entropie), le choix de l'espace fonctionel dans lequel on recherche la solution devient crucial pour ne pas perdre l'unicité de la solution entropique. Un exemple est donné dans l'exercice 5.8. On peut toutefois préciser en quel sens la condition initiale est satisfaite. Si $u$ est solution entropique, alors $u \in C([0,+\infty[, L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}))$ et $u(t) \to u_0$ dans $L^1_{\rm loc}$ quand $t \to 0$.

Nous démontrerons plus loin le théorème 5.17 dans le cadre multidimensionnel (mais avec la variable spatiale dans un domaine borné plutôt que dans tout l'espace). Ce théorème affirme que si $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$ alors il existe une unique solution entropique de (5.5) au sens de la définition 5.8. Voyons maintenant les liens entre solution classique, solution faible et solution entropique.

**Proposition 5.10** *Soit $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si $u$ est solution classique de* (5.5)*, alors $u$ est solution (faible) entropique.*

**Démonstration** Soit $u$ une solution classique de (5.5). Soit $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ (la convexité de $\eta$ est inutile ici) et $\phi$ tel que $\phi' = f'\eta'$ ($\phi$ est la fonction flux associée à $\eta$). Multiplions (5.5) par $\eta'(u)$ :

$$\eta'(u)u_t + f'(u)u_x\eta'(u) = 0$$

Soit encore, puisque $\phi' = f'\eta'$,

$$(\eta(u))_t + \phi'(u)u_x = 0$$

On a donc finalement :

$$(\eta(u))_t + (\phi(u))_x = 0 \tag{5.20}$$

De plus, comme $u(x,0) = u_0(x)$, on a aussi : $\eta(u(x,0)) = \eta(u_0(x))$. Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on multiplie (5.20) par $\varphi$, on intègre sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et on obtient (5.19) (avec égalité) en intégrant par parties. Dans le cas d'une solution classique, l'inégalité d'entropie est une égalité. ■

Une solution faible entropique est solution faible :

**Proposition 5.11** *Soit $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Si $u$ est solution faible entropique de* (5.5)*, alors $u$ est solution faible de* (5.5)*.*

**Démonstration** Il suffit de prendre $\eta(u) = u$ et $\eta(u) = -u$ dans (5.19) pour se convaincre du résultat. ■

On déduit de la proposition 5.10 et du théorème 5.17 de Kruskov que si on a plusieurs solutions faibles au problème (5.5) et que l'une d'entre elles est régulière, alors cette dernière est forcément la solution entropique. La caractérisation suivante, que l'on admettra, est souvent utilisée en pratique :

**Proposition 5.12 (Entropies de Kruskov)** *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$. Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. La fonction $u$ est solution entropique de* (5.5) *(au sens de la définition 5.8) si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{R}$* (5.19) *est vérifiée avec $\eta$ définie par $\eta(s) = |s-k|$, et $\phi$, flux d'entropie associé, défini par :*

$$\phi(u) = f(\max(u,k)) - f(\min(u,k)).$$

*Notons que la fonction $\eta$, dite "entropie de Kruskov", n'est pas de classe $C^1$.*

Nous examinons maintenant le cas particulier des solutions ayant une ligne de discontinuité, comme dans la dernière partie de la proposition 5.7.

**Proposition 5.13** *Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$, $D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star; x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star; x > \sigma t\}$. On suppose que $u_{|D_i} \in C^1(\bar{D}_i, \mathbb{R})$ $(i = 1, 2)$, que la première équation de* (5.5) *est vérifiée pour tout $(x,t) \in D_i$ $(i = 1, 2)$ et que la condition initiale (de* (5.5)*) est satisfaite p.p.. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pose*

$$u_+(\sigma t, t) = \lim_{x \downarrow \sigma t} u(x,t) \text{ et } u_-(\sigma t, t) = \lim_{x \uparrow \sigma t} u(x,t),$$

$$[u](\sigma t, t) = u_+(\sigma t, t) - u_-(\sigma t, t),$$

$$[f(u)](\sigma t, t) = f(u_+(\sigma t, t)) - f(u_-(\sigma t, t)).$$

*Alors $u$ est solution faible entropique de* (5.5) *si et seulement si*

$$\sigma[u](\sigma t, t) = [f(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \tag{5.21}$$

*et, pour toute fonction $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ convexe et $\phi \in C^1$ telle que $\phi' = f'\eta'$,*

$$\sigma[\eta(u)](\sigma t, t) \geq [\phi(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+. \tag{5.22}$$

**Démonstration** La proposition 5.7 montre que $u$ est solution faible si et seulement si (5.21) est satisfaite. En reprenant la démonstration de la proposition 5.7, on montre que $u$ est solution faible entropique si et seulement si (5.21) et (5.22) sont satisfaites. Ceci fait l'objet de la première question de l'exercice 5.9. ■

Dans le cas où la fonction $f$ est strictement convexe, la proposition 5.13 peut être précisée. Ceci est fait dans la proposition 5.14, non démontrée ici.

**Proposition 5.14** *Sous les hypothèses de la proposition 5.13, on suppose que $u$ est solution faible de* (5.5)*. On suppose de plus que $f$ est strictement convexe, les trois conditions suivantes sont alors équivalentes :*

*1. $u$ est solution faible entropique,*

*2. $u_-(\sigma t, t) \geq u_+(\sigma t, t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,*

*3. il existe $\eta$ strictement convexe (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) t.q. (5.22) est vérifiée (avec $\phi$ telle que $\phi' = f'\eta'$).*

Remarquons que les solutions d'une équation hyperbolique non linéaire respectent les bornes de la solution initiale. Plus précisément, on a le résultat suivant, qu'on admettra :

**Proposition 5.15** *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et soit $A$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que $A \leq u_0 \leq B$ p.p.. Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$, alors la solution entropique $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ de* (5.5) *vérifie : $A \leq u(x) \leq B$ p.p. dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.*

Cette propriété est essentielle dans les phénomènes de transport, et il est souhaitable qu'elle soit préservée pour la solution approchée donnée par un schéma numérique.

**Remarque 5.16** Que faire si le domaine spatial est différent de $\mathbb{R}$, par exemple si le problème (5.5) est posé pour $x \in I$ où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f'$ ne change pas de signe, il est assez facile de donner une bonne définition de solution entropique et de montrer un théorème d'existence et d'unicité de la solution entropique. Dans le cas où $f'$ change de signe (et ce cas est très intéressant pour de nombreux problèmes), le problème est beaucoup plus difficile. Le premier résultat sur la question est celui de Bardos-Leroux-Nedelec (1979). Dans la thése de Otto (1996), il y a une très joli formulation pour les conditions aux limites. Un intérêt considérable de cette formulation est qu'elle est très pratique pour montrer la convergence des schémas numériques. Dans le cas multidimensionnel de la section suivante, on s'intéressera à un problème similaire à (5.5) posé dans un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $(N > 1)$ mais sans aborder vraiment ce délicat problème des conditions aux limites (car dans le théorème 5.17 on considère un champ de vecteurs $\boldsymbol{b}$ nul sur le bord du domaine considéré).

## 5.2 Cas multidimensionnel

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, et soit $\boldsymbol{b} \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])^N$. On étudie maintenant le problème suivant :

$$\begin{aligned} u_t + \operatorname{div}(\boldsymbol{b} f(u)) = 0 \text{ sur } \Omega\times]0, T[,\\ u(x, 0) = u_0(x), \text{ sur } \Omega. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Plus précisément, nous allons démontrer, avec des hypothèses convenables sur les données, le théorème d'existence et d'unicité des solutions entropiques de ce problème.

**Théorème 5.17 (Kruskov,1955)** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N > 1)$ à frontière lipschitzienne. Soit $T > 0$ et $\boldsymbol{b} \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])^N$ t.q. $\boldsymbol{b} = 0$ sur $\partial\Omega \times [0, T]$ et $\operatorname{div}\boldsymbol{b} = 0$ dans $\Omega \times [0, T]$. Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors, il existe une unique solution entropique de* (5.23), *c'est-à-dire solution de*

$$\begin{aligned} & u \in L^\infty(\Omega\times]0, T[), \\ & \int_0^T \int_\Omega (\eta(u)\varphi_t + \Phi(u)\, \boldsymbol{b} \cdot \nabla\varphi) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega \eta(u_0(x))\varphi(x, 0)\,\mathrm{d}x \geq 0, \\ & \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega \times [0, T[, \mathbb{R}_+), \forall\eta \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \textit{ convexe et } \Phi \textit{ tel que } \Phi' = \eta' f'. \end{aligned} \tag{5.24}$$

*De plus, si $A \leq 0$ et $B \geq 0$ sont t.q. $A \leq u_0 \leq B$ p.p. sur $\Omega$, on a alors $A \leq u \leq B$ p.p. sur $\Omega\times]0, T[$.*

**Démonstration**

**Etape 1 Construction d'une solution approchée.** Soit $u^{(n)}$ solution de

$$\begin{aligned} & u^{(n)} \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), \\ & -\int_0^T\!\!\int_\Omega u^{(n)}\varphi_t \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^T\!\!\int_\Omega \boldsymbol{b} f(u^{(n)}) \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n}\int\int \nabla u^{(n)} \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ & \qquad - \int_\Omega u_0(x)\varphi(x, 0)\,\mathrm{d}x = 0, \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega \times [0, +\infty[). \end{aligned} \tag{5.25}$$

On connait l'existence et l'unicite de $u^{(n)}$ par le chapitre 4. On a vu aussi au chapitre 4 que cette formulation est équivalente au problème suivant :

$$\begin{aligned} & u^{(n)} \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), u_t^{(n)} \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)), u^{(n)}(0) = u_0, \\ & \int_0^T \langle u_t^{(n)}, v\rangle_{H^{-1}, H_0^1}\,\mathrm{d}t - \int_0^T\!\!\int_\Omega \boldsymbol{b} f(u^{(n)}) \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n}\int_0^T\!\!\int_\Omega \nabla u^{(n)} \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0, \\ & \qquad \forall v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)). \end{aligned} \tag{5.26}$$

On va se servir fortement de cette équivalence.

**Etape 2 Estimations sur la solution approchée.**
Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ il existe $A$ et $B \in \mathbb{R}$, $A \leq 0 \leq B$, tels que $A \leq u_0 \leq B$ p.p. ($A$ et $B$ sont donc indépendants de $n$). On en déduit par les résultats du chapitre 4 que pour tout $t \in [0, T]$, $A \leq u^{(n)} \leq B$ p.p.. La suite$(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée dans $L^\infty(\Omega\times]0, T[)$.
On prend maintenant $v = u^{(n)}$ dans (5.26). Par des calculs vu au chapitre 4, on a :

$$\frac{1}{2}\left(\|u^{(n)}(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2\right) + \frac{1}{n}\int_0^T \int_\Omega |\nabla u^{(n)}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{n}\int_0^T \int_\Omega |\nabla u^{(n)}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} < +\infty \tag{5.27}$$

ce qui donne une estimation $L^2(\Omega\times\,]0,T[)^d$ sur $(\frac{1}{\sqrt{n}}\nabla u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Cette estimation ne donne rien pour la compacité, mais elle est utile pour passer à la limite (quand $n\to+\infty$).
Grâce à la première estimation (l'estimation de $u_n$ dans $L^\infty(\Omega\times]0,T[)$), après extraction d'une sous suite, on peut supposer que $u^{(n)}\to u$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(\Omega\times]0,T[)$.
Si $f(u)=u$, on montre assez facilement que $u$ est solution faible de (5.23) ( c'est-à-dire solution de 5.24 avec seulement $\eta(s)=s$ mais avec tout $\varphi$ dans $C_c^\infty(\Omega\times[0,T[,\mathbb{R})$ et avec $=$ au lieu de $\ge$). Puis on peut montrer (un peu moins facilement) que $u$ est solution de (5.24) et cela termine la partie "existence" du théorème 5.17. Si la fonction $f'$ est non constante, la situation est beaucoup plus difficile, même pour montrer seulement que $u$ est solution faible de (5.23), car la convergence de $u^{(n)}$ vers $u$ n'est que faible et donc on ne sait pas si $f(u^{(n)})$ tend vers $f(u)$ (et, plus généralement, on ne sait pas si $\eta(u^{(n)})$ tend vers $\eta(u)$ et $\phi(u^{(n)})$ tend vers $\phi(u)$). Pour résoudre cette difficulté, deux méthodes ont été développées.

Une premiére méthode, due à Kruskov, suppose, dans un premier temps, que la donnée initiale $u_0$ appartient à l'espace $BV(\overline{\Omega})$. Par définition,

$$|u_0|_{BV(\bar\Omega)} = \sup\{\int_\Omega u_0 \mathrm{div}\varphi\,\mathrm{d}x, \varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N), \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\le 1\}.$$

On démontre alors que la suite $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $BV(\overline{\Omega}\times[0,T])$. L'idée, pour montrer cette borne sur $u^{(n)}$ est de dériver la première équation de (5.23) par rapport à $x_i$ et de multiplier par $\mathrm{sign}(\partial_i u)$. Grâce à cette estimation sur $u^{(n)}$, on peut appliquer ensuite le théorème de Helly donné ci après.

**Théorème 5.18 (Helly)** *Soit $d\ge1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^1(Q)$ et bornée dans $BV(Q)$ où $Q$ est un compact de $\mathbb{R}^d$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans $L^1(Q)$.*

On applique donc le théorème de Helly avec $Q=\bar\Omega\times[0,T]$ (et $d=N+1$). Puisque $u^{(n)}\to u$ dans $L^1(Q)$, à une sous suite près, on a $u^{(n)}\to u$ dans $L^p(Q)$ pour tout $p<+\infty$ et on peut aussi supposer (toujours après extraction éventuelle d'une sous suite) que $u^{(n)}\to u$ p.p.. On peut alors montrer que $u$ est solution de (5.24) ( ce qu'on fera a l'étape 3 plus loin), ce qui donne l'existence d'une solution à (5.24) si $u_0\in BV(\bar\Omega)$. Si $u_0$ n'est que dans $L^\infty(\Omega)$ (et c'est probablment ici l'apport majeur de Kruskov), on peut approcher $u_0$ par une suite d'éléments de $L^\infty(\Omega)\cap BV(\bar\Omega)$ et montrer que la suite des solutions entropiques associées converge (en un sens convenable, après extraction d'une sous suite) vers une solution entropique associée à $u_0$. On peut également montrer l'unicité de la solution de (5.24) (étape 4 ci après). L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle ne semble pas marcher pour montrer la convergence des schémas numériques car même si la condition initiale est supposée être dans $BV(\bar\Omega)$, la solution approchée obtenue par un schéma numérique n'est pas bornée dans $BV(\bar\Omega\times[0,T])$ indépendamment des paramètres de discrétisation (sauf dans le cas des maillages cartésiens).
C'est pour cela qu'on peut lui préférer la deuxième méthode, qui ne passe pas par l'estimation $BV$. On prend uniquement $u_0$ dans $L^\infty(\Omega)$, et on ne cherche pas à montrer directement une compacité forte de la suite $u^{(n)}$ dans $L^1(\Omega\times]0,T[)$. Grâce à l'estimation de $u^{(n)}$ dans $L^\infty(\Omega\times]0,T[)$, on montre que (après extraction d'une sous suite) $u^{(n)}\to\tilde u$, en un sens convenable, où $\tilde u$ dépend d'une variable supplémentaire. (Il s'agit donc d'un théorème de compacité un peu inhabituel donnant une convergence que nous appelons "convergence non linéaire faible-$\star$"). Puis, on montre que $\tilde u$ est une solution du problème en un sens plus général que (5.24), que nous appelons "sens processus". Cette preuve est très voisine de celle de l'étape 3 ci après. On démontre ensuite l'unicité de la solution au sens processus et que la solution processus est solution entropique ( c'est-à-dire solution de (5.24)). Cette preuve

d'unicité est très voisine de celle donnée dans l'étape 4 ci après. Ceci termine la démonstration de l'existence d'une solution à (5.24) (directement avec $u_0$ dans $L^\infty(\Omega)$). (L'unicité est toujours donnée par l'étape 4.) Un sous produit de cette démonstration est la convergence (forte) de $u^{(n)}$ vers $u$ dans tout les espaces $L^p(\Omega\times]0,T[)$, $p<+\infty$, y compris si $f$ est linéaire (ou est linéaire sur des intervalles de $\mathbb{R}$). L'idée essentielle a donc été de remplacer le théorème de compacité (forte) de Helly par un théorème de compacité plus faible combiné avec un résulat d'unicité de la solution "au sens processus" de (5.23).

**Etape 3.** On reprend ici la méthode 1, et on va effectuer le passage à la limite, quand $n\to+\infty$, en supposant que $u_0\in BV$ et donc que $u^{(n)}\to u$ p.p. (pour une sous suite). On admet donc la partie "estimation $BV$ de $u^{(n)}$".

1. Montrons que $u$ est solution faible. Soit $\varphi\in C_c^\infty(\Omega\times[0,+\infty[)$, on a

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega (u^{(n)}\varphi_t+\boldsymbol{b}f(u^{(n)})\cdot\nabla\varphi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\int_0^T\!\!\int_\Omega \nabla u^{(n)}\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=0$$

On remarque tout d'abord que le dernier terme du membre de gauche tend vers 0, grâce à l'estimation (5.27) et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en effet

$$|\frac{1}{n}\int_0^T\!\!\int_\Omega \nabla u^{(n)}\cdot\nabla\varphi dxdt|\le\frac{1}{\sqrt{n}}\|\frac{1}{\sqrt{n}}\,|\nabla u^{(n)}|\,\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)}\|\,|\nabla\varphi|\,\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)}$$

et $\|\frac{1}{\sqrt{n}}|\nabla u^{(n)}|\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)}\le(1/\sqrt{2})\|u_0\|_{L^2(\Omega)}$ par (5.27) et donc $\frac{1}{n}\int\int\nabla u^{(n)}\cdot\nabla\varphi\to 0$ lorsque $n\to 0$. Les autres termes convergent par convergence dominée, et donc en passant à la limite, on obtient

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega (u\varphi_t+\boldsymbol{b}f(u)\cdot\nabla\varphi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x=0. \tag{5.28}$$

2. Montrons que $u$ est solution entropique. Comme $u^{(n)}$ est solution faible de

$$u_t^{(n)}+\mathrm{div}(\boldsymbol{b}f(u^{(n)}))-\frac{1}{n}\Delta u^{(n)}=0, \tag{5.29}$$

on peut montrer (on l'admettra) que $u^{(n)}\in C^2(\Omega\times]0,T[)$ (c'est ce que l'on appelle l'effet régularisant pour une équation parabolique). La fonction $u^{(n)}$ est donc solution classique de (5.29). On peut alors mutiplier cette équation par $\eta'(u^{(n)})$ avec $\eta\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ convexe. On obtient, sur $\Omega\times]0,T[$,

$$(\eta(u^{(n)}))_t+\boldsymbol{b}f'(u^{(n)})\eta'(u^{(n)})\cdot\nabla u_n-\frac{1}{n}\eta'(u^{(n)})\Delta u^{(n)}=0.$$

On en déduit :

$$(\eta(u^{(n)}))_t+\boldsymbol{b}\cdot\nabla(\Phi(u^{(n)})-\frac{1}{n}\mathrm{div}(\eta'(u^{(n)})\nabla u^{(n)})+\frac{1}{n}\eta''(u^{(n)})|\nabla u^{(n)}|^2=0.$$

Mais $\frac{1}{n}\eta''(u^{(n)})|\nabla u^{(n)}|^2\ge 0$, on a donc

$$(\eta(u^{(n)}))_t+\boldsymbol{b}\cdot\nabla(\Phi(u^{(n)})-\frac{1}{n}\mathrm{div}(\eta'(u^{(n)})\nabla u^{(n)}))\le 0.$$

En multipliant cette équation par $\varphi$, avec $\varphi\in C_c^\infty(\Omega\times[0,T[,\mathbb{R}_+)$, on obtient, toujours sur $\Omega\times]0,T[$,

$$\varphi(\eta(u^{(n)}))_t+\varphi\boldsymbol{b}\cdot\nabla(\Phi(u^{(n)})-\frac{1}{n}\varphi\mathrm{div}(\eta'(u^{(n)})\nabla u^{(n)}))\le 0$$

On intègre sur $[\varepsilon, T[\times\Omega$ avec $\varepsilon > 0$ et, après intégration par parties, on obtient :

$$-\int_\varepsilon^T\!\!\int_\Omega (\eta(u^{(n)}))\varphi_t - \int_\Omega \eta(u^{(n)}(\varepsilon))\varphi(x,\epsilon)\,\mathrm{d}x - \int_\varepsilon^T\!\!\int_\Omega \big(\boldsymbol{b}\Phi(u^{(n)})\cdot\nabla\varphi + \frac{1}{n}\eta'(u^{(n)})\nabla u^{(n)}\cdot\nabla\varphi\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le 0.$$

Mais on a, quand $\varepsilon \to 0$, $u^{(n)}(\varepsilon) \to u^{(n)}(0) = u_0$ dans $L^2(\Omega)$ et $\eta(u^{(n)}(\varepsilon)) \to \eta(u_0)$ dans $L^2(\Omega)$ et donc

$$-\int_0^T\!\!\int_\Omega (\eta(u^{(n)}))\varphi_t - \int_\Omega \eta(u_0)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x - \int_0^T\!\!\int_\Omega \big(\boldsymbol{b}\Phi(u^{(n)})\cdot\nabla\varphi + \frac{1}{n}\eta'(u^{(n)})\nabla u^{(n)}\cdot\nabla\varphi\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le 0.$$

Lorsque $n \to \infty$, on a $\eta(u^{(n)}) \to \eta(u)$ et $\Phi(u^{(n)}) \to \Phi(u)$ dans $L^2(\Omega\times]0,T[)$ et, avec $C_{\eta,A,B} = \max\{|\eta'(s)|, A \le s \le B\}$,

$$|\frac{1}{n}\int_0^T\!\!\int_\Omega \eta'(u^{(n)})\nabla u^{(n)}\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x dt| \le C_{\eta,A,B}\frac{1}{\sqrt{n}}\|\frac{1}{\sqrt{n}}|\nabla u^{(n)}|\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)}\||\nabla\varphi|\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \to 0$$

lorsque $n \to +\infty$.
On obtient ainsi, finalement,

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega (\eta(u))\varphi_t + \boldsymbol{b}\cdot\Phi(u^{(n)})\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega \eta(u_0)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x \ge 0$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega\times[0,T[,\mathbb{R}_+)$, ce qui termine la preuve de l'existence.

**Etape 4. Unicité**
Soit $u$ une solution de (5.24). On montre tout d'abord que l'on peut prendre $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\times[0,T[,\mathbb{R}_+)$ dans (5.24). C'est ici que l'hypothèse $\boldsymbol{b} = 0$ sur le bord de $\Omega$ est utile.
On constuit une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $C_c^\infty(\Omega)$ et telle que $\varphi_n = 1$ sur $K_n = \{x \in \Omega; d(x,\partial\Omega) \ge \frac{1}{n}\}$, $0 \le \varphi_n \le 1$ et $|\nabla\varphi_n| \le C_\Omega n$, où $C_\Omega$ ne dépend que $\Omega$ (la régularité lipschitzienne de $\Omega$ est importante ici). Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\times[0,T[,\mathbb{R}_+)$, On prend alors $\varphi(x,t)\varphi_n(x)$ comme fonction test dans (5.24), on obtient

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega \big(\varphi_n\eta(u)\varphi_t + \varphi_n\Phi(u)\boldsymbol{b}\cdot\nabla\varphi\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega \eta(u_0(x))\varphi_n(x)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x + \int_0^T\!\!\int_\Omega \boldsymbol{b}\Phi(u)\varphi\cdot\nabla\varphi_n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \ge 0.$$

Les premiers termes convergent par convergence dominée. Appelons $R_n$ le dernier terme. On va montrer sa convergence assez facilement grâce au fait qu'on a suppose b nul sur le bord.

$$R_n = \int_0^T\!\!\int_\Omega \boldsymbol{b}\Phi(u)\varphi\cdot\nabla\varphi_n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T\int_{C_n} \boldsymbol{b}\Phi(u)\varphi\cdot\nabla\varphi_n,$$

où $C_n = \Omega\setminus K_n$. On a donc

$$|R_n| \le T\|\boldsymbol{b}\|_{L^\infty(C_n)}C_{u,\phi}\|\varphi\|_\infty C_\Omega n\ \mathrm{mes}(C_n),$$

où $C_{u,\phi} = \max\{|\phi(s)|, s \in [-\gamma,\gamma]\}$, avec $\gamma = \|u\|_{L^\infty(\Omega\times]0,T[)}$. Comme $\boldsymbol{b} = 0$ sur $\partial\Omega\times[0,T]$ (et $\boldsymbol{b}$ continue), on a $\|\boldsymbol{b}\|_{L^\infty(C_n)} \to 0$ quand $n \to \infty$. Enfin, la suite $(n\ \mathrm{mes}(C_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On a donc $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$ et on obtient donc

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega \eta(u)\varphi_t + \boldsymbol{b}\Phi(u)\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega \eta(u_0)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x \ge 0\ \forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\times[0,T[,\mathbb{R}_+),$$

pour tout $\eta \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\eta$ convexe.
Par un procédé de régularisation, il est alors assez facile de montrer que l'hypothèse de régularité sur $\eta$ ( c'est-à-dire $\eta$ de classe $C^2$) peut être remplacée par l'hypothèse plus faible "$\eta$ localement lipschitzienne", ce qui a l'intérêt de pouvoir utiliser les entropies de Kruskov.

On peut maintenant montrer l'unicité de la solution de (5.24). Soient $u$ et $v$ deux solutions de (5.24). On va utiliser (5.24) en prenant pour $\eta$ une entropie de Kruskov et des fonctions $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T[, \mathbb{R}_+)$ (on vient de montrer que cela est possible). On reprend ici une idée de Kruskov, dite de dédoublement de variables. Elle consiste tout d'abord à choisir, dans (5.24), $k = v(y, s)$ et à prendre $\varphi(x, t) = \psi(t)\rho_n(x - y)\overline{\rho}_n(t - s)$ avec $\psi \in C_c^\infty([0, T[, \mathbb{R}_+)$, $\rho_n(x) = n^N \rho(nx)$ et $\bar{\rho}_n(t) = n\bar{\rho}(nt)$, où $\rho$ et $\bar{\rho}$ sont des noyaux régularisants, et à intégrer par rapport à $y$ et $s$. La fonction $\rho$ est à valeurs positives, est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^N$, a son support dans la boule de rayon 1 et son intégrale sur $\mathbb{R}^N$ vaut 1. De même, la fonction $\bar{\rho}$ est à valeurs positives, est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, a son support dans la boule de rayon 1 et son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1. De plus, on choisit $\bar{\rho}$ de manière à ce que son support soit dans $\mathbb{R}_-$. Avec ce choix de fonction test (et $n$ assez grand pour que la fonction test soit admissible dans (5.24)) écrit avec des éléments de $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T[, \mathbb{R})$, on obtient :

$$A_{1,n} + A_{2,n} + A_{3,n} + A_{4,n} \geq 0, \tag{5.30}$$

avec

$$A_{1,n} = \int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega |u(x, t) - v(y, s)|\psi'(t)\rho_n(x - y)\bar{\rho}_n(t - s)dxdtdyds,$$

$$A_{2,n} = \int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega |u(x, t) - v(y, s)|\psi(t)\rho_n(x - y)\bar{\rho}_n'(t - s)dxdtdyds,$$

$$A_{3,n} = \int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega (f(u(x, t)) - f(v(y, s))(sign(u(x, t) - v(y, s))\psi(t)\boldsymbol{b} \cdot \nabla\rho_n(x - y)\bar{\rho}_n(t - s)dxdtdyds,$$

$$A_{4,n} = \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega |u_0(x) - v(y, s)|\psi(0)\rho_n(x - y)\bar{\rho}_n(-s)dxdyds.$$

On passe maintenant à limite quand $n \to +\infty$ dans (5.30). Il n'est pas difficile de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} A_{1,n} = \int_0^T \int_\Omega |u(x, t) - v(x, t))|\psi'(t)dxdt.$$

On montre ensuite que $A_{2,n} + A_{3,n} \leq 0$. Pour cela, on considère la formulation entropique pour $v$, écrite avec $y$ et $s$ comme variables. On choisit l'entropie de Kruskov associée à $k = u(x, t)$ et $\varphi(y, s) = \psi(t)\rho_n(x - y)\overline{\rho}_n(t - s)$. Enfin, on intègre par rapport à $x \in \Omega$ et $t \in \mathbb{R}_+$. On obtient

$$-\int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega |v(y, s) - u(x, t)|\psi(t)\rho_n(x - y)\bar{\rho}_n'(t - s)dydsdxdt$$
$$-\int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega (f(v(y, s)) - f(u(x, t))(sign(v(y, s) - u(x, t))\psi(t)\boldsymbol{b} \cdot \nabla\rho_n(x - y)\bar{\rho}_n(t - s)dydsdxdt \geq 0.$$

Ce qui donne $A_{2,n} + A_{3,n} \leq 0$. On notera que le terme associé à la condition initiale est nul car $\bar{\rho}_n(t) = 0$ si $t \geq 0$.

Il suffit maintenant de montrer que $\lim_{n\to+\infty} A_{4,n} = 0$ pour conclure en passant à limite dans (5.30) que

$$\int_0^T \int_\Omega |u(x, t) - v(x, t)|\psi'(t)dxdt \geq 0. \tag{5.31}$$

Pour montrer que $\lim_{n\to+\infty} A_{4,n} = 0$, on reprend la formulation entropique pour $v$ écrite avec $y$ et $s$ comme variables. On choisit l'entropie de Kruskov associée à $k = u_0(x)$ et $\varphi(y,s) = \psi(0)\rho_n(x-y)\int_s^\infty \bar{\rho}_n(-\tau)d\tau$ (avec $n$ assez grand pour cette fonction test $\varphi$ soit admissible). Enfin, on intègre par rapport à $x \in \Omega$. On obtient

$$-A_{4,n} - \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega (f(v(y,s)) - f(u_0(x))(sign(v(y,s) - u_0(x))\psi(0)\boldsymbol{b}\cdot\nabla\rho_n(x-y)(\int_s^\infty \bar{\rho}_n(-\tau)d\tau)dydsdx$$
$$+\int_\Omega\int_\Omega |u_0(y) - u_0(x)|\psi(0)\rho_n(x-y)dxdy \geq 0.$$

On a donc

$$0 \leq A_{4,n} \leq A_{5,n} + A_{6,n},$$

avec

$$A_{5,n} = -\int_0^T \int_\Omega \int_\Omega (f(v(y,s)) - f(u_0(x))(sign(v(y,s) - u_0(x))\psi(0)\boldsymbol{b}\cdot\nabla\rho_n(x-y)(\int_s^\infty \bar{\rho}_n(-\tau)d\tau)dydsdx,$$

$$A_{6,n} = \int_\Omega\int_\Omega |u_0(y) - u_0(x)|\psi(0)\rho_n(x-y)dxdy.$$

Il n'est pas difficile de montrer que $\lim_{n\to+\infty} A_{5,n} = \lim_{n\to+\infty} A_{6,n} = 0$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} A_{4,n} = 0$ et, finalement, on obtient (5.31).

On peut maintenant conclure. Soit $0 < \varepsilon < T$. On peut choisir $\psi \in C_c^\infty([0,T[,\mathbb{R}_+)$ t.q. $\psi' < 0$ sur $]0, T-\varepsilon]$. L'inégalité (5.31) donne alors $u = v$ p.p. sur $\Omega\times]0,T-\varepsilon[$. Comme $\varepsilon$ est arbitrairement petit, on en conclut que $u = v$ p.p. sur $\Omega\times]0,T[$, ce qui termine la preuve de l'unicité. ■

**Remarque 5.19 (Pour le cas où $\Omega$ est non borné)** Dans la partie "unicité" (Etape 4) de la démonstration précédente, il aurait été possible de prendre un fonction $\psi$ dépendant aussi de $x$. On aurait alors obtenu

$$\int_0^T\int_\Omega |u-v|\psi_t \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_\Omega \boldsymbol{b}(f(u) - f(v)\mathrm{sign}(u-v)\cdot\nabla\psi dxdt \geq 0 \;\forall\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\times[0,T[,\mathbb{R}_+). \quad (5.32)$$

Ceci est intéressant pour montrer alors l'unicité dans le cas où l'ouvert $\Omega$ est non borné (par exemple, $\Omega = \mathbb{R}^N$) en profitant de la propriété de "propagation à vitesse finie" pour les problèmes hyperboliques. Plus précisément, on prend dans (5.32) $\psi(x,t) = r(t)\varphi_a(|x|+\omega t)$, avec $\omega = L_f\|\boldsymbol{b}\|_\infty$, où $L_f$ est un majorant de $|f'|$ sur l'intervalle $[-\gamma,\gamma]$ avec $\gamma = \max\{\|u\|_\infty, \|v\|_\infty\}$, $r(t) = (1/T)(T-t)^+$ et $\varphi_a \in C_c^\infty([0,\infty[,\mathbb{R}_+)$, $\varphi_a = 1$ sur $[0,a]$ pour $a > 0$ donné et $\varphi_a$ décroissante (on peut remarquer qu'un argument simple de régularisation autorise de prendre une telle fonction $\psi$ dans (5.32)). On obtient alors

$$-\frac{1}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} |u-v|\varphi_a(|x|+\omega t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} |u-v|r(t)\varphi_a'(|x|+\omega t)\omega\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} \boldsymbol{b}(f(u)-f(v))\mathrm{sign}(u-v)r(t)\varphi_a'(|x|+\omega t)\frac{x}{|x|}dxdt \geq 0.$$

Mais,

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} \boldsymbol{b}(f(u)-f(v)\mathrm{sign}(u-v)r(t)\varphi_a'(|x|+\omega t)\frac{x}{|x|} \leq -\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} \|\boldsymbol{b}\|L_f|u-v|r(t)\varphi_a'(|x|+\omega t)dxdt$$
$$\leq -\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} |u-v|r(t)\varphi_a'(|x|+\omega t)\omega dxdt,$$

car $\omega = L_f \|\boldsymbol{b}\|$. On a donc

$$-\frac{1}{T}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u-v|\varphi_a(|x|+\omega t)dxdt \geq 0.$$

On en déduit, avec $B_{a,t} = \{x \text{ t.q. } |x|+\omega t \leq a\}$ que $\int_0^T (\int_{B_{a,t}} |u-v|dx)dt = 0$. On fait tendre maintenant $a$ vers $+\infty$. On obtient, par convergence monotone, $\int_0^T \int_\Omega |u-v|dxdt = 0$ et donc $u = v$ p.p. sur $\Omega\times]0,T[$.

**Remarque 5.20 (hypothèses sur $\boldsymbol{b}$)**

1. On a besoin d'une régularité $C^1$ de $\boldsymbol{b}$ pour obtenir l'estimation $BV$ sur les solutions approchées. Si on n'utilise pas l'estimation BV, on a de toutes façons besoin de la régularité $C^1$ de $\boldsymbol{b}$ pour l'unicité. Actuellement, le problème $\boldsymbol{b} \notin C^1$ est un problème ouvert.
2. On a supposé $\mathrm{div}\boldsymbol{b} = 0$. On pourrait remplacer cette hypothèse par $\mathrm{div}\boldsymbol{b} \in L^\infty$ à condition de supposer que $f$ soit lipschitzienne. On a aussi supposé que $\boldsymbol{b} = 0$ sur $\partial\Omega$ (pour ne pas traiter le cas, difficile, des conditions aux limites) mais on pourrait remplacer cette condition par $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ sans grande difficulté supplémentaire. Le problème des conditions aux limites interviendrait si $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n} \neq 0$.

## 5.3 Exercices

**Exercice 5.1 (Construction d'une solution faible)** *Corrigé 5.1 page 209*

On considère dans cet exercice l'équation de Burgers avec une condition initiale :

$$\left\{\begin{array}{l} u_t + (u^2)_x = 0 \text{ dans } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\star, \\ u(\cdot,0) = u_0 \text{ dans } \mathbb{R}. \end{array}\right. \tag{5.33}$$

Construire une solution faible de (5.33) pour $u_0$ définie par :

$$u_0(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } x<0, \\ 1-x & \text{si } 0<x<1, \\ 0 & \text{si } x>1. \end{array}\right.$$

**Exercice 5.2 (Non unicité des solutions faibles)**

On considère l'équation

$$\left\{\begin{array}{l} u_t + (u^2)_x = 0 \\ u(0,x) = \left\{\begin{array}{ll} u_g & si\ x<0 \\ u_d & si\ x>0 \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{5.34}$$

avec $u_g < u_d$.

1. Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que si $\left\{\begin{array}{ll} u(t,x) = u_g & si\ x<\sigma t \\ u(t,x) = u_d & si\ x>\sigma t \end{array}\right.$ alors $u$ est solution faible de (5.34). Vérifier que $u$ n'est pas solution entropique de (5.34).
2. Montrer que $u$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{ll} u(t,x) = u_g & si\ x<2u_g t \\ u(t,x) = \frac{x}{2t} & si\ 2u_g t \leq x \leq 2u_d t \\ u(t,x) = u_d & si\ x>2u_d t \end{array}\right. \tag{5.35}$$

alors $u$ est solution faible entropique de (5.34).

**Exercice 5.3 (Construction d'une solution entropique)**

On considère dans cet exercice l'équation de Burgers avec une condition initiale :

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.36}$$

Construire une solution entropique de (5.36) pour $u_0$ définie par :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

**Exercice 5.4 (Problème de Riemann (1))**

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(s) = s^4$. Soit $u_d$ et $u_g$ des réels. Calculer la solution entropique du problème de Riemann (5.14) avec données $u_d$ et $u_g$ en fonction de $u_d$ et $u_g$.

**Exercice 5.5 (Problème de Riemann (2))**

1. Déterminer la solution entropique de (5.14) dans le cas où $f$ est strictement concave.
2. On se place dans le cas où $f$ est convexe puis concave : plus précisément, on considère $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec
   (i) $f(0) = 0,\ f'(0) = f'(1) = 0$
   (ii) $\exists a \in ]0, 1[$, tel que $f$ est strictement convexe sur$]0, a[$, $f$ est strictement concave sur $]a, 1[$.

   On supposera de plus $u_g = 1,\ u_d = 0$.

   (a) Soit $b$ l'unique élément $b \in ]a, 1[$ tel que $\frac{f(b)}{b} = f'(b)$ ; montrer que $u$ définie par :

   $$\begin{cases} u(t, x) = 1 & si\ x \leq 0 \\ u(t, x) = \xi & si\ x = f'(\xi)t,\ b < \xi < 1 \\ u(t, x) = 0 & si\ x > f'(b)t \end{cases}$$

   est la solution faible entropique de (5.14) (sous les hypothèses précédentes).

   (b) Construire la solution entropique du problème de Riemann dans le cas $f(u) = \frac{u^2}{u^2 + \frac{(1-u)^2}{4}}$ et $u_g,\ u_d \in [0, 1]$. [Compliqué. On distinguera plusieurs cas. )

**Exercice 5.6 (Solution entropique (1))**

Construire la solution entropique du problème

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } > 1 \end{cases} \end{cases}$$

Vérifier que pour tout $t > 0$ on a bien $\int_{\mathbb{R}} u(x, t)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx$.

**Exercice 5.7 (Solution entropique (2))**

Construire la solution entropique du problème

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1, \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ 2 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases} \end{cases}$$

**Exercice 5.8 (Solution non entropique)**

On s'intéresse à l'équation de Burgers.

$$u_t(t,x) + (u^2)_x(t,x) = 0,\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}, \tag{5.37}$$
$$u(0,x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{5.38}$$

1. (Question de cours…) Donner le sens de "$u$ solution faible de (5.37)-(5.38)" et "$u$ solution entropique de (5.37)-(5.38)".

   On définit $u$ de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$u(t,x) = 0,\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R},\ x < -\sqrt{t}, \tag{5.39}$$
$$u(t,x) = \frac{x}{2t},\ t \in \mathbb{R}_+^\star,\ x \in \mathbb{R},\ -\sqrt{t} < x < \sqrt{t}, \tag{5.40}$$
$$u(t,x) = 0,\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R},\ x > \sqrt{t}. \tag{5.41}$$

2. Montrer que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et $u^2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. (On rappelle qu'une fonction $v$ de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ si $v\mathbf{1}_K \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ pour tout $K \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} = [0,\infty[\times\mathbb{R}$, K compact.)
3. (Solution faible ?) Montrer que $u$ vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} (u(t,x)\varphi_t(t,x) + u^2(t,x)\varphi_x(t,x))dxdt = 0,\ \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}). \tag{5.42}$$

   La fonction $u$ est-elle solution faible de (5.37)-(5.38) ?
4. (Solution entropique ?) Soit $\eta$ une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $C^1$. On définit $\phi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\phi(s) = \int_0^s \eta'(\xi)f'(\xi)d\xi$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. Montrer que $u$ vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} (\eta(u)(t,x)\varphi_t(t,x) + \phi(u)(t,x)\varphi_x(t,x))dxdt \geq 0,\ \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+). \tag{5.43}$$

   [On pourra commencer par étudier, grâce à la convexité de $\eta$, le signe de $\phi(s) - s\eta(s)$.]

   La fonction $u$ est-elle solution entropique de (5.37)-(5.38) ?

N.B. : Dans tout l'exercice, bien distinguer $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathbb{R}_+$ (en particulier distinguer $C_c^1(\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $C_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$). Bien justifier dans les 3ème et 4ème questions que les quantités sous le signe $\int$ sont intégrables. La 4ème question montre que $\eta(u)_t + \phi(u)_x \leq 0$ au sens des dérivées par transposition dans $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$.

**Exercice 5.9 (Flux strictement convexe et entropie)** Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. On s'intéresse ici à la solution entropique du problème suivant :

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{5.44}$$

Soit $\sigma \in \mathbb{R}$, $D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star; x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star; x > \sigma t\}$. On suppose que $u_{|D_i} \in C^1(\bar{D}_i, \mathbb{R})$ $(i = 1,2)$ et que $u$ est solution faible de (5.44). En particulier, on a donc (voir la proposition 5.7)

$$\sigma[u](\sigma t, t) = [f(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+. \tag{5.45}$$

1. Montrer que $u$ est solution entropique de (5.44) si et seulement si

$$\sigma[\eta(u)](\sigma t, t) \geq [\phi(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \tag{5.46}$$

   pour toute fonction $\eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convexe et $\phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\phi' = f'\eta'$.
2. Si $f$ est strictement convexe et $u$ est solution entropique de (5.44), montrer que $u_-(\sigma t, t) \geq u_+(\sigma t, t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. [On pourra choisir $\eta = f$ dans (5.46).]

On rappelle que $u_+(\sigma t, t) = \lim_{x \downarrow \sigma t} u(x,t)$, $u_-(\sigma t, t) = \lim_{x \uparrow \sigma t} u(x,t)$, $[u](\sigma t, t) = u_+(\sigma t, t) - u_-(\sigma t, t)$ et $[g(u)](\sigma t, t) = g(u_+(\sigma t, t)) - g(u_-(\sigma t, t))$ pour $g = f, \eta$ ou $\phi$.

**Exercice 5.10 (Effet "Landau")** *Corrigé 5.2 page 209*

Soit $f$ une fonction borélienne bornée et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (pour simplifier, on peut supposer que $f$ est continue périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On s'intéresse dans cet exercice à la limite quand $t \to +\infty$ de la solution (faible) du problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) + y\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,t) = 0,\ x, y \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,y,0) = f(x),\ x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.47}$$

1. Donner explicitement en fonction de $f$ l'unique solution faible de (5.47).

   Dans la suite, on note $u$ cette solution faible.
   On remarquera que $u$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $p < \infty$.

   On note aussi $m$ la moyenne de $f$ sur une période. Enfin, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, on pose

$$F(y,r) = \frac{1}{2r}\int_{y-r}^{y+r} f(z)dz.$$

2. (Question liminaire) Montrer que $\lim_{r \to +\infty} F(y,r) = m$, uniformément par rapport à $y \in \mathbb{R}$.
3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. Montrer que

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{b-\delta}^{b+\delta} \int_{a-\delta}^{a+\delta} u(x,y,t)dxdy = 4\delta^2 m.$$

   [On pourra remarquer que $\int_{b-\delta}^{b+\delta} f(x - yt)dy = 2\delta F(x - bt, \delta t)$.]
4. Montrer que $u(.,.,t) \to m$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, quand $t \to +\infty$.

5. Montrer que le résultat de la question 4 reste vrai si on remplace dans (5.47) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}$ par $a(y)\dfrac{\partial u}{\partial x}$ où $a \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $a'(y) \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. (Plus généralement, ce résultat reste vrai sous l'hypothèse plus faible que l'ensemble des points ou $a'$ s'annule est de mesure nulle.)

**Exercice 5.11 (Principe du maximum et positivité)**

Soit $v$ une fonction lipschitzienne et de classe $C^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $u_0 \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On s'intéresse aux deux problèmes suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + v\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+^\star,\\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial vu}{\partial x}(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+^\star,\\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.49}$$

1. Soit $A, B \in \mathbb{R}$ t.q. $A \le u_0(x) \le B$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $u$ la solution (continue) de (5.48), montrer que $A \le u(x,t) \le B$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer (en donnant un exemple) que cette propriété peut être fausse si $u$ est solution de (5.49).
2. On suppose que $u_0(x) \ge 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $u$ la solution (continue) de (5.49), montrer que $u(x,t) \ge 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

## 5.4 Corrigés d'exercices

**Corrigé 5.1 (Construction d'une solution faible)**

On considère dans cet exercice l'équation de Burgers avec une condition initiale :

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star,\\ u(\cdot,0) = u_0 \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.50}$$

Construire une solution faible de (5.50) pour $u_0$ définie par :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0,\\ 1 - x & \text{si } 0 < x < 1,\\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

*Corrigé –* *Pour $0 < t < 1/2$, la solution est continue et on peut la trouver en construisant les courbes caractéristiques. Puis, en $t = 1/2$, certaines courbes caractéristiques se rencontrent (au point $x = 1$), une disontinuité apparaît et se propage à une vitesse conforme à la relation de Rankine Hugoniot. Ceci nous permet de construire la solution.*

*On pose :*
$D_1 = \{(x,t), 0 < t \le \frac{1}{2}, x < 2t\} \cup \{(x,t), t > \frac{1}{2}, x < t + \frac{1}{2}\}$,
$D_2 = \{(x,t), 0 < t < \frac{1}{2}, 2t < x < 1\}$,
$D_3 = \{(x,t), 0 < t \le \frac{1}{2}, 1 < x\} \cup \{(x,t), t > \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2} < x\}$,

*on prend $u(x,t) = 1$ si $(x,t) \in D_1$, $u(x,t) = 0$ si $(x,t) \in D_3$ et $u(x,t) = \frac{1-x}{1-2t}$ si $(x,t) \in D_2$. La fonction $u$ est bien solution faible de (5.50).*

**Corrigé 5.2 (Effet "Landau")**

Soit $f$ une fonction borélienne bornée et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (pour simplifier, on peut supposer que $f$ est continue périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On s'intéresse dans cet exercice à la limite quand $t \to +\infty$ de la solution (faible) du problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) + y\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,t) = 0,\ x,y \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,y,0) = f(x),\ x,y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.51}$$

1. Donner explicitement en fonction de $f$ l'unique solution faible de (5.51).

*Corrigé –* *La première équation de (5.51) peut s'écrire* $\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) + \frac{\partial yu}{\partial x}(x,y,t) = 0$. *La notion de solution faible pour cette équation est donc parfaitement définie.*

**Etape 1, construction d'une solution**

*Le problème (5.51) correspond à une équation de transport dans la direction* $x$*, la vitesse du transport dépendant de la variable* $y$ *(que l'on peut voir ici comme un paramètre). Le début du chapitre 5 nous suggère alors la forme de la solution faible. Pour* $(x,y,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$*, on pose*

$$u(x,y,t) = f(x-yt).$$

*La fonction* $u$ *ainsi définie appartient bien à* $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. *On montre maintenant que* $u$ *est solution faible de (5.51).*

*Soit* $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. *On va montrer que*

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(x,y,t)(\varphi_t(x,y,t) + y\varphi_x(x,y,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x,y,0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{5.52}$$

*Ceci montrera bien que* $u$ *est solution faible de (5.51). On considère de terme de gauche de (5.52) en remplaçant* $u(x,y,t)$ *par* $f(x-yt)$ *et on utilise dans l'intégrale par rapport à* $x$ *le changement de variable* $x - yt = z$ *(pour* $y$ *et* $t$ *fixés, on profite aussi ici du théorème de Fubini). On obtient*

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-yt)(\varphi_t(x,y,t) + y\varphi_x(x,y,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(z)(\varphi_t(z+yt,y,t) + y\varphi_x(z+yt,y,t))\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

*(Noter que* $\varphi_x$ *désigne toujours la dérivée de* $\varphi$ *par rapport à sa première variable et* $\varphi_t$ *désigne toujours la dérivée de* $\varphi$ *par rapport à sa troisième variable.)*

*Pour* $z, y \in \mathbb{R}$ *et* $t \in \mathbb{R}_+$*, on pose* $\psi(z,y,t) = \varphi(z+yt,y,t)$*, de sorte que* $\psi_t(z,y,t) = y\varphi_x(z+yt,y,t) + \varphi_t(z+yt,y,t)$. *On obtient ainsi*

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-yt)(\varphi_t(x,y,t) + y\varphi_x(x,y,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(z)\psi_t(z,y,t)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

*On peut maintenant intégrer le terme de droite d'abord par rapport à t (grâce au théorème de Fubini), on obtient*

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-yt)(\varphi_t(x,y,t) + y\varphi_x(x,y,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(z)\psi(z,y,0)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y.$$

*Ce qui donne*

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-yt)(\varphi_t(x,y,t) + y\varphi_x(x,y,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(z)\varphi(z,y,0)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y.$$

*On a bien montré (5.52). La fonction* $u$ *est donc bien une solution faible de (5.51).*

**Unicité de la solution faible de (5.51)**

*Grâce à la linéarité de la première équation de (5.51), il suffit de montrer que si* $u$ *est solution de (5.52) (pour tout* $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$*) avec* $f = 0$ *p.p., alors* $u = 0$ *p.p.. On suppose donc que* $u$ *appartient à* $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$ *et vérifie*

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(x,y,t)(\varphi_t(x,y,t) + y\varphi_x(x,y,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = 0 \text{ pour tout } \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}). \tag{5.53}$$

*On va montrer que $u = 0$ p.p..*
*Soit $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on pose*

$$\varphi(x,y,t) = -\int_t^{+\infty} \psi(x - y(t-s), y, s)\,\mathrm{d}s.$$

*On a aussi $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et on remarque que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$ on a*

$$\begin{aligned}\varphi_t(x,y,t) + y\varphi_x(x,y,t) = \psi(x,y,t) &+ y\int_t^{+\infty} \psi_x(x - y(t-s), y, s)\,\mathrm{d}s \\ &- y\int_t^{+\infty} \psi_x(x - y(t-s), y, s)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

*et donc*

$$\varphi_t(x,y,t) + y\varphi_x(x,y,t) = \psi(x,y,t).$$

*En prenant cette fonction $\varphi$ dans (5.53) on obtient*

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(x,y,t)\psi(x,y,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = 0 \text{ pour tout } \psi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}).$$

*On en déduit que $u = 0$ p.p..*
*N.B. La méthode que nous venons d'utiliser est une méthode classique pour obtenir l'unicité d'un problème par la résolution du problème adjoint (qui est ici $\varphi_t + y\varphi_x = \psi$ avec $\varphi = 0$ comme donnée "finale".)*

Dans la suite, on note $u$ cette solution faible.
On remarquera que $u$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $p < \infty$.

On note aussi $m$ la moyenne de $f$ sur une période. Enfin, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, on pose

$$F(y,r) = \frac{1}{2r}\int_{y-r}^{y+r} f(z)dz.$$

2. (Question liminaire) Montrer que $\lim_{r\to+\infty} F(y,r) = m$, uniformément par rapport à $y \in \mathbb{R}$.

*Corrigé –* *Soit $T > 0$ t.q. $f(z+T) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ (la fonction $f$ est donc de période $T$).*
*Soit $y \in \mathbb{R}$ et $r > T$. Il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ t.q. $(p-1)T < y - r \le pT < qT \le y + r < (q+1)T$. On a alors*

$$2rF(y,r) = \int_{y-r}^{pT} f(z)dz + \int_{pT}^{qT} f(z)dz + \int_{qT}^{y+r} f(z)dz = \int_{y-r}^{pT} f(z)dz + (q-p)mT + \int_{qT}^{y+r} f(z)dz.$$

*Ceci donne*

$$F(y,r) = m + \big(\frac{(q-p)T}{2r} - 1\big)m + \frac{1}{2r}\int_{y-r}^{pT} f(z)dz + \frac{1}{2r}\int_{qT}^{y+r} f(z)dz.$$

*Comme $0 \le 2r - (q-p)T \le 2T$ et que, avec $M = \max\{|f(z)|, z \in \mathbb{R}\}$,*

$$\Big|\int_{y-r}^{pT} f(z)dz\Big| \le \int_{y-r}^{pT} |f(z)|dz \le MT, \quad \Big|\int_{qT}^{y+r} f(z)dz\Big| \le \int_{qT}^{y+r} |f(z)|dz \le MT,$$

*on a donc*

$$|F(y,r) - m| \le \frac{(|m| + M)T}{r}.$$

*ce qui prouve bien que $\lim_{r\to+\infty} F(y,r) = m$, uniformément par rapport à $y \in \mathbb{R}$.*

3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. Montrer que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{b-\delta}^{b+\delta}\int_{a-\delta}^{a+\delta} u(x,y,t)dxdy = 4\delta^2 m.$$

[On pourra remarquer que $\int_{b-\delta}^{b+\delta} f(x - yt)dy = 2\delta F(x - bt, \delta t)$.]

*Corrigé –* *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. En utilisant le changement de variable $z = x - yt$, c'est-à-dire $y = (x - z)/t$, on obtient*

$$\int_{b-\delta}^{b+\delta} f(x-yt)dy = \int_{x-bt-\delta t}^{x-bt+\delta t} \frac{f(z)}{t} dz = 2\delta F(x-bt, \delta t).$$

*Soit maintenant $t > 0$. On sait que $u(x, y, t) = f(x - yt)$, on a donc*

$$\int_{b-\delta}^{b+\delta} \int_{a-\delta}^{a+\delta} u(x,y,t)dxdy = \int_{b-\delta}^{b+\delta} \int_{a-\delta}^{a+\delta} f(x-yt)dxdy.$$

*Avec le théorème de Fubini, on a donc*

$$\int_{b-\delta}^{b+\delta} \int_{a-\delta}^{a+\delta} u(x,y,t)dxdy = \int_{a-\delta}^{a+\delta} \Big( \int_{b-\delta}^{b+\delta} f(x-yt)dy \Big) dx = 2\delta \int_{a-\delta}^{a+\delta} F(x-bt, \delta t)dx.$$

*La deuxième question donne $\lim_{t\to\infty} F(x - bt, \delta t) = m$, uniformément par rapport à $x$, on a donc bien*

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{b-\delta}^{b+\delta} \int_{a-\delta}^{a+\delta} u(x,y,t)dxdy = 4\delta^2 m.$$

4. Montrer que $u(.,.,t) \to m$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, quand $t \to +\infty$.

*Corrigé –* *On remarque d'abord que (avec $M = \max\{|f(z)|, z \in \mathbb{R}\}$)*

$$\|u(\cdot,\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq M \text{ pour tout } t > 0.$$

*On pose*

$$\mathcal{C} = \{1_{]a-\delta,a+\delta[\times]b-\delta,d+\delta[},\ a,b \in \mathbb{R},\ \delta > 0\}.$$

*La question précédente montre que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}$ on a*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x,y,t)\varphi(x,y)dxdy = m \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y)dxdy. \tag{5.54}$$

*On note maintenant $E$ l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{C}$. Par linéarité de l'intégrale, on a alors (5.54) pour tout $\varphi \in E$.*

*L'espace vectoriel $E$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ (pour la mesure de Lebesgue). Pour montrer ceci, il suffit, par exemple, d'utiliser la densité de $C_c(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ puis de remarquer que tout élément de $C_c(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ peut être approché d'aussi près que l'on veut pour la norme de $L^1(\mathbb{R}^2)$ par un élément de $E$. On en déduit bien que $E$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. Grâce à cette densité et à la borne $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ sur $u(\cdot,\cdot,t)$, on conclut facilement que (5.54) est vrai pour tout $u \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Ceci donne bien que $u(.,.,t) \to m$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, quand $t \to +\infty$.*

5. Montrer que le résultat de la question 4 reste vrai si on remplace dans (5.47) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}$ par $a(y)\dfrac{\partial u}{\partial x}$ où $a \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a'(y) \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. (Plus généralement, ce résultat reste vrai sous l'hypothèse plus faible que l'ensemble des points ou $a'$ s'annule est de mesure nulle.)

# Bibliographie


[1] ADAMS, R.A. (1975), *Sobolev spaces* (Academic Press, Boston). Version élevtornique `http://www.heroturko.org/index.php?do=search`

[2] BREZIS, H. (1983), *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications* (Masson, Paris).

[3] GALLOUËT, T. and HERBIN, R., *Mesure, intégration, probabilités*, Ellipses, 2013.

[4] GALLOUËT, T. and HERBIN, R., *Théorie de l'intégration et de la mesure.* `http://www.cmi.univ-mrs.fr/~herbin/PUBLI/mes-int-pro.pdf`

[5] GODLEWSKI E. and P. A. RAVIART (1991), *Hyperbolic systems of conservation laws*, Ellipses.

[6] HERBIN, R., *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. http ://www.cmi.univ-mrs.fr/ herbin/PUBLI/anedp.pdf

[7] LERAY, J., *Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace*, Acta. Math. 63 (1934), no. 1, 193-248.