Centre de Télé-Enseignement Sciences
Université de Provence

LICENCE SCIENCES et TECHNOLOGIES
Mention Mathématiques et Informatique
Parcours Mathématiques

Expédition dans la semaine n°	Etape	Code UE	N° d'envoi de l'UE
7	**2L3MAT**	SMI5U1T	4

Nom de l'UE : Intégration et transformation de Fourier

- Contenu de l'envoi : Fin des exercices du chapitre 6, chapitre 7

- Guide du travail à effectuer
Semaine 1 :
Etudier le chapitre 6, sections 6.3 (Dualité dans Lp et théorème de Radon-Nikodym)
Exercices proposés (avec corrigés) : 6.41, 6.42
Semaine 2 :
Etudier le chapitre 6, section 6.4.1 (convergence faible et faible-*)
Exercices proposés (avec corrigés) : 6.45, 6.50
L'exercice 6.63 fait partie du deuxième devoir
Semaine 3 :
Etudier le chapitre 7, sections 7.1, 7.2 (mesure produit) en admettant les démonstrations et 7.3 (théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini). Exercices proposés (avec corrigés) : 7.1, 7.3, 7.6
Semaine 4 :
Etudier le chapitre 7, section 7.4, 7.5 et 7.6
(mesure de Lebesgue, convolution, changement de variable)
Exercices proposés (avec corrigés) : 7.10, 7.11, 7.15, 7.16, 7.18, 7.19, 7.23

Le deuxième devoir est à rendre à la réception du cinquième envoi (en mars).

- Coordonnées de l'enseignant responsable de l'envoi
Thierry Gallouet, LATP-CMI, 39 rue Joliot Curie, 13453 marseille cedex 13.
email : gallouet@cmi.univ-mrs.fr
Vous pouvez aussi consulter la page web: http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/tele.d
et me poser des questions par email.

est indépendante de la tribu $\sigma(X_m)$ (on utilise ici l'indépendance de $X_1,\ldots,X_m$ et la proposition 2.60), les v.a.r. $X_n 1_{\{N\geq m\}}$ et X_m sont indépendantes. Ceci donne (comme $E(X_m)=E(X_1)=0$)

$$E(X_n 1_{\{N\geq m\}}X_m)=E(X_n 1_{\{N\geq m\}})E(X_m)=0.$$

On a donc bien $E(V_nV_m)=0$.

Soit maintenant $n\in\mathbb{N}^\star$.

On sait déjà que la v.a.r. $1_{\{N\geq n\}}$ est $\sigma(X_1,\ldots,X_{n-1})$-mesurable. Les v.a.r. $1_{\{N\geq n\}}$ et X_n sont donc indépendantes, ce qui donne

$$E(V_n^2)=E(1_{\{N\geq n\}}X_n^2)=E(1_{\{N\geq n\}})E(X_n^2)=P(\{N\geq n\})E(X_n^2)=P(\{N\geq n\})E(X_1^2).$$

On a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}E(V_N^2)=E(X_1^2)\sum_{n=1}^{+\infty}P(\{N\geq n\})=E(X_1^2)\sum_{n=1}^{+\infty}nP(\{N=n\})=E(X_1^2)E(N).$$

L'exercice 6.23 donne alors que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}V_n$ converge dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$. On en déduit que S_N est de carré intégrable et que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}V_n$ converge dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ vers S_N. On a donc aussi (comme $E(V_nV_m)=0$ si $n\neq m$)

$$E(S_N^2)=\sum_{n=1}^{+\infty}E(V_n^2)=E(X_1^2)E(N)=E(N)\mathrm{Var}(X_1).$$

N.B. : Le cas $E(X_1)\neq 0$ peut aussi être traité. Il se ramène au cas $E(X_1)=0$ en considérant $Y_n=X_n-E(X_n)$.

6.5.3 Théorème de Radon-Nikodym et dualité dans L^p

Exercice 6.40 (Fonctions absolument continues) Soit $-\infty<a<b<+\infty$. On admet les 2 résultats suivant :

- Toute fonction monotone définie sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est dérivable en presque tout point de $]a,b[$.
- Soit $f\in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$. Pour $x\in[a,b]$, on pose $F(x)=\int f1_{]a,x[}d\lambda$. La fonction F est alors dérivable en presque tout point de $]a,b[$ et on a $F'=f$ p.p..

1. (Fonctions monotones.) Soit f une fonction monotone croissante définie sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $f'\in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$ et que

$$\int f'1_{]a,b[}d\lambda\leq f(b)-f(a).$$

[On pourra poser $f(x)=f(b)$ pour $x>b$, considérer $f_n(x)=n(f(x+\frac{1}{n})-f(x))$ et remarquer que $f_n\to f'$ p.p. sur $]a,b[$.]

Corrigé – On remarque tout d'abord que f est mesurable (de $]a,b[$, muni de la tribu borélienne, dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne) car l'image réciproque par f d'un intervalle de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $]a,b[$). Comme $|f|$ est bornée (par $\max(|f(b)|,|f(a)|)$), on a aussi $f\in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$.

On pose $f(x)=f(b)$ pour $x>b$ (de sorte que f est maintenant monotone croissante, et donc mesurable, de $]a,\infty[$ dans $\mathbb{R}$), et on définit pour $n\in\mathbb{N}^\star$ la fonction f_n par $f_n(x)=n(f(x+\frac{1}{n})-f(x))$ pour $x\in]a,b[$. Pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est donc mesurable (de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$) positive et (en notant que $f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$ et $f(\cdot+\frac{1}{n})\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$) on a :

$$\int_{]a,b[}f_n d\lambda=f(b)-n\int_{]a,a+\frac{1}{n}[}f\,d\lambda\leq f(b)-f(a)\tag{6.66}$$

Comme f est dérivable p.p., on a $f_n \to f'$ p.p. sur $]a,b[$, c'est-à-dire qu'il existe $A \in \mathcal{B}(]a,b[)$ t.q. $\lambda(]a,b[\setminus A) = 0$ et $f_n(x) \to f'(x)$ pour tout $x \in A$. On pose $g(x) = f'(x)$ si $x \in A$ et $g(x) = 0$ sinon. Le lemme de Fatou appliqué à la suite f_n donne (par (6.66)) que g est mesurable positive (de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}_+$) et

$$\int_{]a,b[} g d\lambda \leq f(b) - f(a).$$

On a donc $f' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$ (au sens où l'on confond f' et la classe de g car $f' = g$ p.p.) et

$$\int_{]a,b[} f' d\lambda \leq f(b) - f(a).$$

(b) Donner un exemple pour lequel l'inégalité de la question précédente est stricte. (Les courageux pourront chercher un exemple pour lequel f est continue...)

Corrigé – Un exemple facile est obtenu en prenant $f(x) = 0$ si $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$ et $f(x) = 1$ si $x \in]\frac{a+b}{2}, b]$. On a alors $f' = 0$ p.p. et $f(b) - f(a) = 1$.

On peut obtenir un exemple avec f continue en construisant f à partir de l'ensemble de Cantor (f est prise constante sur chacun des intervalles ouverts formant le complémentaire de l'ensemble de Cantor, on a ainsi $f' = 0$ p.p.).

2. (Fonctions absolument continues.)
Une fonction définie sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite *absolument continue* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles deux à deux disjoints $(]a_k, b_k[)_{1\leq k\leq n}$ dont la somme des longueurs est inférieure à δ, on a $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

(a) Montrer que l'absolue continuité implique l'uniforme continuité.

Corrigé – Il suffit de prendre $n = 1$, on remarque alors que :

$$a \leq a_1 < b_1 \leq b,\ b_1 - a_1 \leq \delta \Rightarrow |f(b_1) - f(a_1)| < \varepsilon.$$

Ce qui donne l'uniforme continuité de f.

(b) Montrer que l'ensemble des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ forme un espace vectoriel.

Corrigé – Soit f, g deux fonction absolument continues. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ [resp. $\delta_2 > 0$] t.q. pour toute famille finie d'intervalles deux à deux disjoints $(]a_k, b_k[)_{1\leq k\leq n}$ dont la somme des longueurs est inférieure à δ_1 [resp. δ_2], on a $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ [resp. $\sum_{k=1}^n |g(b_k) - g(a_k)| < \varepsilon$]. On en déduit que pour toute famille finie d'intervalles deux à deux disjoints $(]a_k, b_k[)_{1\leq k\leq n}$ dont la somme des longueurs est inférieure à $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, on a

$$\sum_{k=1}^n |(f+g)(b_k) - (f+g)(a_k)| < 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve que $f + g$ est absolument continue.

Il est facile de voir que αf est absolument continue si f est absolument continue et $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ forme donc un espace vectoriel.

3. (Fonctions absolument continues et fonctions monotones.) Une fonction f définie sur $[a,b]$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}$) est dite *à variation bornée* s'il existe C t.q. pour toute subdivision du segment $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$,

on ait $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le \mathrm{C}$. Pour une fonction f à variation bornée, on peut définir, pour $a < x \le b$, $\mathrm{V}_a^x[f]$ par :

$$\mathrm{V}_a^x[f] = \sup\{\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|,\ a = x_0 < x_1 < ... < x_n = x,\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

On pose aussi $\mathrm{V}_a^a[f] = 0$.

(a) Montrer que toute fonction absolument continue est à variation bornée.

(b) Montrer pour toute fonction f (définie sur $[a,b]$ et) absolument continue, la fonction $x \mapsto \mathrm{V}_a^x[f]$ est absolument continue sur $[a,b]$. En déduire que toute fonction absolument continue (définie sur $[a,b]$) est la différence de deux fonctions absolument continues monotones croissantes (et est donc dérivable en presque tout point de $]a,b[$).

Corrigé – La question 3 est admise.

4. Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$. Pour $x \in [a,b]$, on pose $\mathrm{F}(x) = \int f 1_{]a,x]} d\lambda$. Montrer que F absolument continue.

Corrigé – Cette question est une conséquence de la proposition 4.49 du cours. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q.

$$(\mathrm{A} \in \mathcal{B}(]a,b[),\ \lambda(\mathrm{A}) \le \delta) \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} |f| d\lambda \le \varepsilon.$$

Si $(]a_k,b_k[)_{1\le k\le n}$ est une famille finie d'intervalles deux à deux disjoints dont la somme des longueurs est inférieure à δ, on pose $\mathrm{A} = \bigcup_{k=1}^{n}]a_k,b_k[$. On a $\lambda(\mathrm{A}) = \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \le \delta$ et donc $\int_{\mathrm{A}} |f| d\lambda \le \varepsilon$. On en déduit le résultat désiré car :

$$\sum_{k=1}^{n} |\mathrm{F}(b_k) - \mathrm{F}(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \Big|\int_{]a_k,b_k[} f d\lambda\Big| \le \sum_{k=1}^{n} \int_{]a_k,b_k[} |f| d\lambda = \int_{\mathrm{A}} |f| d\lambda \le \varepsilon.$$

5. Soit F une fonction absolument continue et monotone croissante de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On prolonge cette fonction sur $\mathbb{R}$ en posant $\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(a)$ si $x < a$ et $\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(b)$ si $x > b$. Une version étendue du théorème de Carathéodory (cette version étendue est donnée par le théorème de Lebesgue-Stieltjes, théorème 2.64, pour ce résultat il suffit de F continue croissante) donne l'existence d'une (et une seule) mesure m_{F} sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $m_{\mathrm{F}}(]\alpha,\beta[) = \mathrm{F}(\beta) - \mathrm{F}(\alpha)$ pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.

(a) Montrer que m_{F} est absolument continue par rapport à λ. [Utiliser la régularité de λ et l'absolue continuité de F.]

Corrigé – Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(\mathrm{A}) = 0$. On veut montrer que $m_{\mathrm{F}}(\mathrm{A}) = 0$ (ceci donnera bien que m_{F} est absolument continue par rapport à λ).

Soit $\varepsilon > 0$. Comme F est absolument continue sur $[a,b]$, il existe $\delta > 0$ t.q. pour toute famille finie d'intervalles (de $[a,b]$) deux à deux disjoints $(]a_k,b_k[)_{1\le k\le n}$ dont la somme des longueurs est inférieure à δ, on a $\sum_{k=1}^{n} |\mathrm{F}(b_k) - \mathrm{F}(a_k)| < \varepsilon$. Comme F est constante et égale à $\mathrm{F}(a)$ sur $]-\infty,a]$ et constante et égale à $\mathrm{F}(b)$ sur $[b,+\infty[$, cette propriété est aussi vrai si les intervalles sont des intervalles de $\mathbb{R}$ non nécessairement inclus dans $[a,b]$.

Par la régularité de λ, il existe un ouvert $\mathrm{O} \supset \mathrm{A}$ t.q. $\lambda(\mathrm{O}) \le \delta$. Cet ouvert O peut s'écrire comme une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux, $\mathrm{O} = \bigcup_{k=1}^{\infty}]a_k,b_k[$ (avec éventuellement $a_k = b_k$ pour certaines valeurs de k). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \le \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) = \lambda(\mathrm{O}) \le \delta$ et donc :

$$m_{\mathrm{F}}(\bigcup_{k=1}^{n}]a_k,b_k[) = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{F}(b_k) - \mathrm{F}(a_k)) \le \varepsilon.$$

En faisant tendre n vers l'infini, la continuité croissante de m_{F} donne :

$$m_{\mathrm{F}}(\mathrm{O}) = \lim_{n\to+\infty} m_{\mathrm{F}}(\bigcup_{k=1}^{n}]a_k, b_k[) \le \varepsilon,$$

et donc $m_{\mathrm{F}}(\mathrm{A}) \le \varepsilon$ (car $\mathrm{A} \subset \mathrm{O}$). Comme $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, on en déduit bien $m_{\mathrm{F}}(\mathrm{A}) = 0$.

(b) Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $\mathrm{F}(\beta) - \mathrm{F}(\alpha) = \int g 1_{]\alpha,\beta[} d\lambda$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Montrer que $g = \mathrm{F}'$ p.p. sur $]a, b[$.

Corrigé – Comme m_{F} est absolument continue par rapport à λ, le théorème de Radon-Nikodym (théorème 6.78) donne l'existence de $g \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q. $m_{\mathrm{F}} = g\lambda$. On a donc, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $\alpha < \beta$:

$$\mathrm{F}(\beta) - \mathrm{F}(\alpha) = m_{\mathrm{F}}(]\alpha, \beta[) = \int g 1_{]\alpha,\beta[} d\lambda.$$

En faisant tendre α vers $-\infty$ et β vers $+\infty$, on en déduit $\int g d\lambda = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) < \infty$ et donc $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\lambda)$ (au sens de la confusion habituelle, c'est-à-dire où il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\lambda)$ t.q. $g = h$ p.p.).

Pour tout $x \in [a, b]$, on a $\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(a) + \int g 1_{]a,x[} d\lambda$. Le deuxième résultat admis donné au début de l'énoncé donne donc que F est dérivable p.p. sur $]a, b[$ et $\mathrm{F}' = g$ p.p. sur $]a, b[$.

6. Soit F une fonction absolument continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que F est dérivable en presque tout point de $]a, b[$, que $\mathrm{F}' \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$ et que pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a) = \int \mathrm{F}' 1_{]a,x[} d\lambda.$$

Corrigé – D'après la question 3-(b), la fonction F est la différence de deux fonctions absolument continues monotones croissantes, notées F_1 et F_2. On peut alors appliquer la question 5-(b) à F_1 et F_2, elle donne que F_1 et F_2 sont dérivables p.p. sur $]a, b[$, que $\mathrm{F}_1', \mathrm{F}_2' \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$ et que, pour tout $x \in [a, b]$:

$$\mathrm{F}_1(x) - \mathrm{F}_1(a) = \int \mathrm{F}_1' 1_{]a,x[} d\lambda,\ \mathrm{F}_2(x) - \mathrm{F}_2(a) = \int \mathrm{F}_2' 1_{]a,x[} d\lambda.$$

Comme $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 - \mathrm{F}_2$, on en déduit que F est dérivable p.p. sur $]a, b[$, que $\mathrm{F}' \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$ et que, pour tout $x \in [a, b]$:

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a) = \int \mathrm{F}' 1_{]a,x[} d\lambda.$$

Exercice 6.41 (Décomposition d'une mesure) Soit $d > 1$ et m une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $m(\mathbb{R}^d) < +\infty$. On note $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}^d$ et λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On pose

$$\alpha = \sup\{m(\mathrm{C}),\ \mathrm{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ t.q. } \lambda_d(\mathrm{C}) = 0\},$$

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\lambda_d(\mathrm{C}) = 0$ et $\alpha = m(\mathrm{C})$.

Corrigé – Soit $(\mathrm{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\lambda_d(\mathrm{C}_n) = 0$ pour tout n et

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{C}_n) = \alpha.$$

On pose $\mathrm{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{C}_n$. On a donc $\lambda_d(\mathrm{C}) = 0$ (par σ-sous additivité de λ_d) et $m(\mathrm{C}) = \alpha$ (par monotonie de m et définition de α).

Soit $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\lambda_d(C) = 0$ et $\alpha = m(C)$.
Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on pose $\nu(A) = m(A \cap C)$ et $\mu(A) = m(A \cap C^c)$.

2. Montrer que μ et ν sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et que ν est étrangère à λ_d.

Corrigé – Comme $m(\emptyset) = 0$, on a aussi $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. La σ-additivité de m donne la σ-additivité de ν et μ. Ceci prouve que μ et ν sont des mesures.

Comme $\lambda_d(C) = 0$ et $\nu(C^c) = m(C \cap C^c) = 0$, les mesures ν et λ_d sont étrangères.

3. Montrer que μ est absolument continue par rapport a λ_d. En déduire qu'il existe une fonction f borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}_+$ t.q. $m = f\lambda_d + \nu$.

Corrigé – Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\lambda_d(B) = 0$. On pose $D = C \cup (B \cap C^c)$. On a donc $0 \le \lambda_d(D) \le \lambda_d(C) + \lambda_d(B) = 0$ et donc $\alpha = m(C) \le m(D) \le \alpha$. Ce qui prouve que $m(D) = \alpha$. Comme $m(D) = m(C) + m(B \cap C^c) = \alpha + m(B \cap C^c)$, on a donc $m(B \cap C^c) = 0$, c'est-à-dire $\mu(B) = 0$ (on a utilisé ici que fait que $\alpha < +\infty$, ce qui est dû au fait que m est une mesure finie). On a ainsi montré que $\mu << \lambda_d$. On peut maintenant appliquer le théorème de Radon–Nikodym (théorème 6.78), il donne l'existence d'une fonction f borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}_+$ t.q. $\mu = f\lambda_d$.

Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on a $m(A) = m(A \cap C) + m(A \cap C^c) = \nu(A) + \mu(A)$. On a donc $m = \mu + \nu = f\lambda_d + \nu$.

N.B. Dans ce corrigé, on a essentiellement repris la démonstration de la proposition 2.31 (qui considère un cas plus général) et utilisé pour conclure le théorème de Radon-Nikodym.

Exercice 6.42 (Dualité L^1-L^∞ par Radon-Nikodym) Soit (E, T, m) un espace mesuré fini et $T \in (L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))'$. On suppose que T est positive, c'est à dire que, pour $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f \ge 0$ p.p. implique $T(f) \ge 0$.

1. Pour $A \in T$, on pose $\mu(A) = T(1_A)$. Montrer que μ est bien définie et que μ est une mesure finie sur T.

   Attention, il y a toujours cette confusion malheureuse de notations, la même lettre T désigne la tribu sur E et un élément de $(L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))'$.

   On note $L^r = L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $\mathcal{L}^r = \mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (pour $r = 1$ et $r = \infty$).

Corrigé – Soit $A \in T$ (tribu sur E), comme m est une mesure finie, on a $1_A \in \mathcal{L}^1$ (et donc $1_A \in L^1$ en confondant un élément de $\mathcal{L}^1$ avec sa classe dans L^1). On peut définir $\mu(A)$ par $T(1_A)$.

Pour montrer que μ est une mesure sur T, on remarque tout d'abord que $\mu(\emptyset) = T(1_\emptyset) = T(0) = 0$. Puis, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \ne m$. On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. En utilisant le théorème de convergence dominée, on remarque que $\sum_{n=0}^N 1_{A_n} \to 1_A$ dans L^1 quand $N \to \infty$ (en effet, on a bien une convergence p.p. et une domination par 1_E qui est intégrable). Comme $T \in (L^1)'$, on a donc $\sum_{n=0}^N T(1_{A_n}) = T(\sum_{n=0}^N 1_{A_n}) \to T(1_A)$ quand $N \to \infty$. Avec la définition de μ, on en déduit :

$$\sum_{n=0}^{N} \mu(A_n) \to \mu(A) \text{ quand } N \to \infty.$$

Ce qui montre bien que μ est une mesure sur T.

Pour montrer que μ est finie, il suffit de remarquer que $\mu(E) = T(1_E) \in \mathbb{R}$ (noter que $1_E \in \mathcal{L}^1$).

2. En utilisant le théorème de Radon-Nikodym, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $T(1_A) = \int g 1_A dm$ pour tout $A \in T$.

Corrigé – Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$. On a donc $1_A = 0$ p.p.. On en déduit que $\mu(A) = T(1_A) = 0$ (la fonction 1_A est un élément de la classe de 0 dans L^p).

La mesure μ est donc absolument continue par rapport à la mesure m. On peut appliquer le théorème de Radon-Nikodym (théorème 6.78), il donne l'existence de $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. :

$$\mathrm{T}(1_{\mathrm{A}}) = \mu(\mathrm{A}) = \int g 1_{\mathrm{A}} dm \text{ pour tout } \mathrm{A} \in \mathrm{T}. \tag{6.67}$$

3. Montrer que $g \in \mathrm{L}^{\infty}_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ (plus précisément, il existe $h \in \mathcal{L}^{\infty}_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ t.q. $h = g$ p.p.). [On pourra montrer que $\|g\|_{\infty} \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'}$ en choisissant bien A dans la formule trouvée à la question précédente.]

Corrigé – On prend $\mathrm{A} = \{g > \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'}\}$. Si $m(\mathrm{A}) > 0$, on a, avec (6.67), en remarquant que $\|1_{\mathrm{A}}\|_1 = m(\mathrm{A})$:

$$\|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'} m(\mathrm{A}) < \int g 1_{\mathrm{A}} dm = \mathrm{T}(1_{\mathrm{A}}) \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'} m(\mathrm{A}),$$

ce qui est impossible. On a donc $m(\mathrm{A}) = 0$, ce qui prouve que $g = h$ p.p. avec h définie par $h = g$ sur A^c et $h = 0$ sur A. Comme $h \in \mathcal{L}^{\infty}$, on a donc $g \in \mathrm{L}^{\infty}$ (au sens où il existe $h \in \mathcal{L}^{\infty}_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ t.q. $h = g$ p.p.).

On a aussi montré que $\|g\|_{\infty} = \|h\|_{\infty} \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'}$.

4. Montrer que $\mathrm{T}(f) = \int g f dm$ pour tout $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$.

Corrigé – Grâce à (6.67), on a, pour tout $f = 1_{\mathrm{A}}$ avec $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$:

$$\mathrm{T}(f) = \int g f dm. \tag{6.68}$$

Par linéarité de T (sur L^1) et par linéarité de l'intégrale, on en déduit que (6.68) est encore vraie si $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1$ (on confond encore f et sa classe).

Puis, si $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. Comme $f \in \mathcal{L}^1$ et $gf \in \mathcal{L}^1$, le théorème de convergence dominée donne $f_n \to f$ dans L^1 et $gf_n \to gf$ dans L^1 quand $n \to +\infty$ (noter que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par f et $(gf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par gf). En écrivant (6.68) avec $f = f_n$ et en faisant $n \to +\infty$, on en déduit (6.68). L'égalité (6.68) est donc vraie pour tout $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$.

Soit enfin $f \in \mathrm{L}^1$ (on confond f avec l'un de ses représentants). On écrit alors (6.68) pour $f = f^+ \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$ et $f = f^- \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$. En faisant la différence on en déduit (6.68).

L'égalité (6.68) est donc vraie pour tout $f \in \mathrm{L}^1$.

Exercice 6.43 (Dualité L^p-L^q pour $p < 2$) L'objet de cet exercice est de démontrer le théorème de dualité 6.70 dans le cas $p < 2$.. Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré σ−fini et $1 \le p < 2$. On pose $q = p/(p-1)$ et on note L^r l'espace $\mathrm{L}^r_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ (pour $r = p$, $r = q$ et $r = 2$). Soit $\mathrm{T} \in (\mathrm{L}^p)'$. (Attention aux notations maladroites car T représente à la fois la tribu sur E et la forme linéaire continue sur L^p..., cette confusion de notations sera corrigée dans une prochaine édition !)

1. On considère d'abord le cas où $m(\mathrm{E}) < +\infty$.

(a) Montrer que $\mathrm{L}^2 \subset \mathrm{L}^p$ et que l'injection canonique [1] de L^2 dans L^p est continue.

Corrigé – Cette question est faite dans la proposition 6.25 page 206. En particulier, l'inégalité (6.12) donne $\|f\|_p \le \mathrm{C}\|f\|_2$ pour tout $f \in \mathrm{L}^2$ avec C ne dépendant que de p et $m(\mathrm{E})$. En fait, si $m(\mathrm{E}) > 0$, le plus petit C possible dans cette inégalité est $\mathrm{C} = (m(\mathrm{E}))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$ (voir la remarque 6.27).

1. On rappelle que l'injection canonique d'un ensemble G contenu dans un ensemble F est la restriction de l'application identité à G. Pour montrer la continuité de l'injection d'un espace vectoriel G muni d'une norme $\|\cdot Vert_{\mathrm{G}}$inclus dans un espace vectoriel normé F muni d'une norme $\|\cdot Vert_{\mathrm{F}}$, il suffit donc de montrer qu'il existe $\mathrm{C} \ge 0$ tel que $\|u\|_{\mathrm{F}} \le \mathrm{C}\|u\|_{\mathrm{G}}$ pour tout $u \in \mathrm{G}$.

(b) Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{L}^2$ t.q. $\mathrm{T}(f) = \int fg\,dm$ pour tout $f \in \mathrm{L}^2$.

Corrigé – On appelle S la restriction de T a L^2. La question précédente montre que S est bien défini est que $\mathrm{S} \in (\mathrm{L}^2)'$. Comme L^2 est un espace de Hilbert, le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56) donne l'existence (et l'unicité) de $g \in \mathrm{L}^2$ t.q. $\mathrm{S}(f) = (f/g)_2 = \int fg\,dm$ pour tout $f \in \mathrm{L}^2$. Comme $\mathrm{S} = \mathrm{T}$ sur L^2, on a donc bien :

$$\mathrm{T}(f) = \int fg\,dm \text{ pour tout } f \in \mathrm{L}^2. \tag{6.69}$$

(c) Montrer que la fonction g, trouvée à la question précédente, appartient à L^q [distinguer les cas $p > 1$ et $p = 1$. Dans le cas $p > 1$, on pourra considérer les fonctions $f_n = |g|^{(q-2)} g 1_{\{|g| \le n\}}$. Dans le cas $p = 1$, prendre $f = sgn(g) 1_\mathrm{A}$ où $\mathrm{A} = \{|g| > \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'}\}$.]

Corrigé – Dans toute la suite, on posera aussi $\mathcal{L}^r = \mathcal{L}^r_\mathbb{R}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ (pour $r = p$, $r = q$ et $r = 2$).

Cas $p > 1$**.** Dans ce cas, on a $2 < q < \infty$. On confond, comme d'habitude, g avec l'un de ses représentants, de sorte que $g \in \mathcal{L}^2$. On pose alors $f_n = |g|^{(q-2)} g 1_{\{|g| \le n\}}$. La fonction f_n est mesurable (comme produit de fonctions mesurables et bornée, on a donc $f_n \in \mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^p$.

On peut donc prendre $f = f_n$ dans (6.69), on obtient $\int f_n g\,dm = \mathrm{T}(f_n)$ et donc, en notant $\mathrm{B}_n = \{|g| \le n\}$:

$$\int_{\mathrm{B}_n} |g|^q\,dm = \mathrm{T}(f_n) \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'} \|f_n\|_p.$$

Comme $\|f_n\|_p^p = \int_{\mathrm{B}_n} |g|^{p(q-1)}\,dm = \int_{\mathrm{B}_n} |g|^q\,dm$, on en déduit :

$$\left(\int_{\mathrm{B}_n} |g|^q\,dm\right)^{\frac{1}{q}} \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'}. \tag{6.70}$$

On remarque maintenant que $|g|^q 1_{\mathrm{B}_n} \uparrow |g|^q$ quand $n \to +\infty$. On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone à la suite $(|g|^q 1_{\mathrm{B}_n})_{n \in \mathbb{N}}$, l'inégalité (6.70) donne alors :

$$\left(\int |g|^q\,dm\right)^{\frac{1}{q}} \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'}.$$

On a donc $g \in \mathcal{L}^q$ (et $g \in \mathrm{L}^q$ en confondant g avec sa classe d'équivalence dans L^q) et $\|g\|_q \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'}$.

Cas $p = 1$**.** Dans ce cas, on a $q = \infty$. On confond aussi g avec l'un de ses représentants, de sorte que $g \in \mathcal{L}^2$. On pose maintenant $\mathrm{A} = \{|g| > \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'}\}$ et $f = sgn(g) 1_\mathrm{A}$. La fonction f est donc étagée et on a $f \in \mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1$.

On obtient alors, avec (6.69) :

$$\int_\mathrm{A} |g|\,dm = \int fg\,dm = \mathrm{T}(f) \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'} \|f\|_1 = \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'} (m(\mathrm{A})). \tag{6.71}$$

Or, si $m(\mathrm{A}) > 0$, on a (par la définition de A), $\int_\mathrm{A} |g|\,dm > \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'} m(\mathrm{A})$, en contradiction avec (6.71). On a donc $m(\mathrm{A}) = 0$, ce qui donne $g \in \mathcal{L}^\infty$ (et $g \in \mathrm{L}^\infty$ en confondant g avec sa classe d'équivalence dans L^∞) et $\|g\|_\infty \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'}$.

(d) Si $f \in \mathrm{L}^p$, montrer que $f_n = f 1_{\{|f| \le n\}} \in \mathrm{L}^2$. En déduire que il existe $g \in \mathrm{L}^q$ t.q. $\mathrm{T}(f) = \int fg\,dm$, pour tout $f \in \mathrm{L}^p$.

Corrigé – La fonction g recherchée est, bien sûr, celle trouvée dans les questions précédentes.

Soit $f \in \mathrm{L}^p$. On confond f avec l'un de ses représentants, de sorte que $f \in \mathcal{L}^p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = f 1_{\{|f| \le n\}}$. La fonction f_n est donc mesurable (comme produit de fonctions mesurables) et bornée, donc $f_n \in \mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^2$. On peut donc prendre $f = f_n$ dans (6.69), on obtient :

$$\mathrm{T}(f_n) = \int f_n g\,dm \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{6.72}$$

Le théorème de convergence dominée dans L^p (théorème 6.9) donne que $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to +\infty$ (la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien p.p. vers f et est dominée par $|f| \in L^p$). Comme $T \in (L^p)'$, on a donc $T(f_n) \to T(f)$ quand $n \to +\infty$. D'autre part, comme $g \in L^q$, on a $\int f_n g dm \to \int f g dm$ quand $n \to +\infty$ (en effet, l'inégalité de Hölder donne $|\int f_n g dm - \int f g dm| \le \|f_n - f\|_p \|g\|_q$). On déduit donc de (6.72), quand $n \to +\infty$, que $T(f) = \int f g dm$.

2. On considère maintenant le cas où $m(E) = +\infty$. Comme m est σ-finie, on peut écrire $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, avec $An \subset A_{n+1}$ et $m(A_n) < +\infty$. On note $T_n = \{A \in T,\ A \subset A_n\}$, $m_n = m_{|T_n}$ et $L^r(m_n) = L^r_{\mathbb{R}}(A_n, T_n, m_n)$ ($r = p$ ou q).

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $f \in L^p(m_n)$, on pose $T_n(f) = T(\tilde{f})$ avec $\tilde{f} = f$ p.p. sur A_n et $\tilde{f} = 0$ p.p. sur $(A_n)^c$. Montrer que $T_n \in (L^p(m_n))'$ et qu'il existe $g_n \in L^q(m_n)$ t.q. :

$$T_n(f) = \int f g_n dm_n,\ \forall f \in L^p(m_n).$$

Corrigé – On a déjà vu que T_n est une tribu sur A_n (tribu trace) et que m_n est une mesure sur T_n (mesure trace, voir l'exercice 2.17 par exemple).

Attention ici aussi à la confusion de notations entre T_n tribu et T_n forme linéaire sur $L^p(m_n)$.

La définition de T_n est cohérente car, si $f \in L^p(m_n)$, on confond f avec l'un de ses représentants et la fonction $\tilde{f}$ est alors p.p. égale à f prolongée par 0 hors de A_n, qui est bien un élément de $\mathcal{L}^p$. On a donc $\tilde{f} \in L^p$ (avec la confusion habituelle) et $T(\tilde{f})$ est bien défini (il ne dépend du représentant choisi dans la classe de f).

On remarque aussi que T_n est linéaire et que, pour $f \in L^p(m_n)$,

$$|T_n(f)| = |T(\tilde{f})| \le \|T\|_{(L^p)'} \|\tilde{f}\|_{L^p} = \|T\|_{(L^p)'} \|f\|_{L^p(m_n)}.$$

Donc, $T_n \in (L^p(m_n))'$ et $\|T_n\|_{(L^p(m_n))'} \le \|T\|_{(L^p)'}$. Comme $m_n(A_n) = m(A_n) < \infty$, on peut alors utiliser la première partie, elle donne qu'il existe $g_n \in L^q(m_n)$ t.q. :

$$T_n(f) = \int f g_n dm_n,\ \forall f \in L^p(m_n).$$

La première partie donne aussi :

$$\|g_n\|_{L^q(m_n)} \le \|T_n\|_{(L^p(m_n))'} \le \|T\|_{(L^p(m))'}. \tag{6.73}$$

On utilise $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les questions suivantes.

(b) Montrer que si $m \ge n$, $g_n = g_m$ p.p. sur A_n.

Corrigé – Soit $f \in \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = 0$ p.p. sur A_n^c. On note f_n la restriction de f à A_n et f_m la restriction de f à A_m. En confondant, comme d'habitude, un élément de L^p avec l'un de ses représentants, on a $f_n \in L^p(m_n)$, $f_m \in L^p(m_m)$ et $T_n(f_n) = T_m(f_m) = T(f)$. Donc,

$$\int f_n g_n dm_n = \int f_m g_m dm_m.$$

Comme $f_n = f_m = f$ sur A_n et que m_n est aussi la restriction de m_m sur A_n, on a donc :

$$\int f_n(g_n - g_m) dm_n = 0.$$

En prenant $f = \text{sign}(g_n - g_m)1_{\{g_n \ne g_m\}}$ sur A_n et $f = 0$ sur A_n^c (on a ici choisi des représentants pour g_n et g_m), on en déduit $g_n = g_m$ m_n-p.p. sur A_n, c'est-à-dire $g_n = g_m$ p.p. sur A_n, car m_n est la restriction de m sur A_n (p.p. est alors pris au sens m-p.p.).

(c) On définit $g : E \to \mathbb{R}$ par $g = g_n$ sur A_n.

i. Montrer que $g \in L^q(E)$. (Distinguer les cas $q < +\infty$ et $q = +\infty$.)

Corrigé – Plus précisément, on peut choisir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ un représentant de g_n de manière à avoir $g_n = g_m$ sur tout A_n pour $m \geq n$. On peut alors définir $g : E \to \mathbb{R}$ par $g = g_n$ sur A_n. La fonction g est mesurable de E dans $\mathbb{R}$ (car g_n est mesurable de A_n dans $\mathbb{R}$).

Cas $p > 1$**.** (c'est-à-dire $q < \infty$). Dans ce cas, on remarque que $h_n \uparrow |g|$ quand $n \to +\infty$ avec h_n défini par $h_n = |g_n|$ sur A_n et $h_n = 0$ sur A_n^c. Le théorème de convergence monotone donne alors :

$$\int |g|^q dm = \lim_{n\to+\infty} \int h_n^q dm = \lim_{n\to+\infty} \int |g_n|^q dm_n.$$

Comme $\int |g_n|^q dm_n \leq \|T\|^q_{(L^p)'}$ (d'après 6.73), on en déduit que $g \in \mathcal{L}^q$ (et $\|g\|_q \leq \|T\|_{(L^p)'}$). Donc, $g \in L^q$ (en confondant g avec sa classe).

Cas $p = 1$**.** (c'est-à-dire $q = \infty$). Dans ce cas, on a, par (6.73), $\|g_n\|_{L^\infty(m_n)} \leq \|T\|_{(L^1)'}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que $\|g\|_\infty \leq \|T\|_{(L^1)'}$ (car $\{g > \|T\|_{(L^1)'}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{g_n > \|T\|_{(L^1)'}\}$). Donc, $g \in L^\infty$ (en confondant g avec sa classe).

ii. Montrer que $T(f) = \int f g dm$, pour tout $f \in L^p$.

Corrigé – Soit $f \in L^p$, on pose $f_n = f 1_{A_n}$. D'après théorème de convergence dominé dans L^p (théorème 6.9), on a $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to +\infty$. Donc :

$$T(f_n) \to T(f) \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.74}$$

Or, $T(f_n) = T_n(h_n)$, où h_n est la restriction de f_n à A_n. On remarque alors que

$$T_n(h_n) = \int g_n h_n dm_n = \int g f_n dm.$$

Comme $g \in L^q$, l'inégalité de Hölder donne que $\int g f_n dm. \to \int g f dm$ quand $n \to +\infty$ (car $|\int g f_n dm. - \int g f dm| \leq \|g\|_q \|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$).

On a donc $T(f_n) = T_n(h_n) \to \int g f dm$ quand $n \to +\infty$, ce qui, avec (6.74) donne $T(f) = \int f g dm$.

Exercice 6.44 (Démonstration du théorème de dualité $L^p - L^q$)

Soient (E, T, m) un espace mesuré σ-fini : il existe une famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles A_n qu'on peut prendre disjoints deux à deux tels que $m(A_n) < +\infty$ et $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Soient $p \in [1, +\infty[$ et T une forme linéaire continue sur $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m) = L^p$.

Partie 1. (Rappel du cours.) On considère d'abord le cas $p = 2$, montrer qu'il existe un unique $g \in L^2$ t.q. $T(f) = \displaystyle\int f g dm, \ \forall \ f \in L^2$.

Partie 2. On s'intéresse maintenant au cas $p \in [1, 2]$

1. Soit ψ, une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $\psi \in L^r$, où $r = \dfrac{2p}{2-p}$, alors, pour toute fonction f de L^2, la fonction $f\psi$ est dans L^p.

   Montrer qu'il existe une fonction $\psi \in L^r$ de la forme : $\psi = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n 1_{A_n}, \ \alpha_n > 0$.

   Dans toute la suite, ψ désignera une fonction particulière de la forme précédente.

2. Déduire des questions précédentes l'existence d'une unique fonction $G \in L^2$ t.q., pour toute fonction f de L^p t.q. $\dfrac{f}{\psi} \in L^2$, on a $T(f) = \displaystyle\int f \frac{G}{\psi} dm$.

3. Soient $p \in]1,2[$, et q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$; on définit les fonctions f_n, de E dans $\mathbb{R}$, par :

$$f_n = |g|^{(q-2)} g 1_{\{|g| \leq n\}} 1_{B_n} \text{ où } g = \frac{G}{\psi} \text{ et } B_n = \bigcup_{p=1}^{n} A_p. \tag{6.75}$$

(a) Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f_n}{\psi} \in L^2$.

(b) En déduire que $g = \dfrac{G}{\psi} \in L^q$. [*Il est fortement conseillé d'utiliser la continuité de* T *de* L^p *dans* $\mathbb{R}$.]

4. Soient $p = 1$ et $f \in L^1$. On définit : $f_n = \mathrm{sgn}(g) 1_A 1_{B_n}$ où $A = \{|g| > \|T\|_{(L^p)'}\}$.

(a) Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f_n}{\psi} \in L^2$.

(b) En déduire que $m(A \cap B_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et que $g\ (= \dfrac{G}{\psi}) \in L^\infty$.

5. Soient $p \in [1,2[$ et $f \in L^p$, on définit $f_n = f 1_{\{|f| \leq n\}} 1_{B_n}$. Montrer que $\dfrac{f_n}{\psi} \in L^2$ et que f_n tend vers f dans L^p. En déduire que il existe $g \in L^q$ t.q. $T(f) = \displaystyle\int f g dm, \ \ \forall\ \ f \in L^p$.

Partie 3. On s'intéresse maintenant au cas $p > 2$, et on suppose ici que $T \geq 0$, *i.e.* $T(f) \geq 0$ pour toute fonction $f \geq 0$ p.p. Soit q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. On suppose dans cette question que la forme linéaire T est, de plus, continue pour la norme $\|.\|_{L^1}$.

(a) Montrer qu'il existe $g \in L^\infty$ t.q. $T(f) = \displaystyle\int f g dm$ pour toute fonction $f \in L^1 \cap L^p$.

(b) Montrer que $g \in L^q$. [*On pourra utiliser un raisonnement similaire à celui de la question 3 de la partie 2*].

(c) En déduire qu'il existe $g \in L^q$ t.q. $T(f) = \displaystyle\int f g dm$ pour toute fonction $f \in L^p$ et que $\|g\|_{L^q} = \|T\|_{(L^p)'}$. [*On pourra utiliser un raisonnement similaire à celui de la question 5 de la partie 2*].

2. On suppose ici qu'il existe une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de formes linéaires sur L^p vérifiant les quatre propriétés suivantes :

$$\forall\ \ f \in L^p; f \geq 0, \quad 0 \leq T_n(f) \leq T(f) \tag{6.76}$$

$$\forall\ \ f \in L^p; f \geq 0, \quad T_n(f) \leq T_{n+1}(f) \tag{6.77}$$

$$\forall\ \ f \in L^p; f \geq 0, \quad T_n(f) \leq n \int f dm \tag{6.78}$$

$$\forall\ \ f \in L^p; f \geq 0, \quad T_n(f) \text{ converge vers } T(f) \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty. \tag{6.79}$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n \in L^q$ tel que $T_n(f) = \displaystyle\int g_n f dm$, pour tout $f \in L^p$. Montrer que $\|g_n\|_{L^q} \leq \|T\|_{(L^p)'}$

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le g_n \le n$ p.p. et $g_n \le g_{n+1}$ p.p..

(c) Montrer qu'il existe $g \in L^q$ t.q. $T(f) = \int g f dm$, pour toute fonction $f \in L^p$.

3. Soit T_n l'application de L^p dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\text{Si } f \in L^p \text{ et } f \ge 0, \qquad T_n(f) = \inf_{\varphi \in L^p, 0 \le \varphi \le f} \Big(T(\varphi) + n \int (f - \varphi) dm \Big),$$
$$\text{si } f \in L^p \text{ est quelconque}, \quad T_n(f) = T_n(f^+) - T_n(f^-)$$

Montrer que T_n vérifie les propriétés (1) à (4).

4. Montrer que T_n est linéaire .

5. En déduire que, pour toute forme linéaire continue positive T sur L^p, il existe une fonction g de L^q t.q. $T(f) = \int f g dm$.

6. Montrer que, pour toute forme linéaire continue T sur L^p, il existe une fonction g de L^q t.q. $T(f) = \int f g dm$. [*Décomposer* T *en une partie positive et une partie négative*].

6.5.4 Convergence faible, faible-$*$, étroite, en loi…

Exercice 6.45 (Convergence faible et convergence des normes ⇒ convergence forte) Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2 = L^2(E, T, m)$ et $f \in L^2$ t.q. la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende faiblement vers f dans L^2, c'est-à-dire : $\int f_n \varphi dm \to \int f \varphi dm$ pour toute fonction $\varphi \in L^2$.

1. Montrer que $\|f\|_2 \le \liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|_2$.

Corrigé – Comme $f_n \to f$ faiblement vers f dans L^2 (quand $n \to +\infty$) et que $f \in L^2$, on a :

$$\int f_n f dm \to \int f^2 dm = \|f\|_2^2 \text{ quand } n \to +\infty.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\int f_n f dm \le \|f_n\|_2 \|f\|_2$. On en déduit, en faisant tendre n vers l'infini :

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 = \lim_{n \to +\infty} \int f_n f dm = \liminf_{n \to +\infty} \int f_n f dm &\le \liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|_2 \|f\|_2 \\ &= \|f\|_2 \liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|_2, \end{aligned}$$

et donc $\|f\|_2 \le \liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|_2$.

2. On suppose de plus que $\|f_n\|_2 \to \|f\|_2$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers f dans L^2.

Corrigé – On remarque que $\|f_n - f\|_2^2 = (f_n - f / f_n - f)_2 = \|f_n\|_2^2 + \|f\|_2^2 - 2 \int f_n f dm$. On a $\|f_n\|_2^2 \to \|f\|_2^2$ et, comme $f_n \to f$ faiblement dans L^2, on a aussi $\int f_n f dm \to \int f^2 dm = \|f\|_2^2$, quand $n \to +\infty$. On en déduit donc que $\|f_n - f\|_2 \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 6.46 (Convergence faible) Soit (E, T, m) un espace mesuré σ–fini. Pour $1 \le r \le \infty$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $1 \le p < \infty$ et $q = p/(p-1)$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p$ et $f \in L^p$.

1. Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^p quand $n \to +\infty$ (voir la définition 6.80) si et seulement si

$$\int f_n g dm \to \int f g dm, \ \forall g \in L^q. \tag{6.80}$$

Corrigé – Le cours (théorème de dualité 6.70 page 227) donne que $\{\varphi_g,\ g \in L^q\} = (L^p)'$, avec φ_g défini par $\varphi_g(f) = \int fg dm$ (pour $f \in L^p$). Ceci donne bien le résultat demandé (c'est-à-dire : $f_n \to f$ faiblement dans L^p si et seulement si $\varphi_g(f_n) \to \varphi_g(f)$ pour tout $g \in L^q$).

2. Montrer que $\|f\|_p \le \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_p$ si $f_n \to f$ faiblement dans L^p, quand $n \to +\infty$. [Utiliser (6.80) avec un choix convenable de g.]

Corrigé – Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ et $f \in L^p$ t.q. $f_n \to f$ faiblement dans L^p, quand $n \to +\infty$. On confond f avec l'un de ses représentant et on pose $g = |f|^{p-1}\mathrm{sign}(f)$. La fonction est mesurable (comme produit de fonctions mesurables). On a aussi $g \in \mathcal{L}^q$ et, comme $q(p-1) = p$, $\|g\|_q^q = \|f\|_p^p$. On en déduit, par l'inégalité de Hölder :

$$\int f_n g dm \le \|f_n\|_p \|g\|_q = \|f_n\|_p (\int |f|^p dm)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Quand $n \to +\infty$, on obtient :

$$\int |f|^p dm = \int fg dm = \lim_{n\to+\infty} \int f_n g dm \le \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_p (\int |f|^p dm)^{1-\frac{1}{p}},$$

et donc $\|f\|_p \le \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_p$.

On suppose dans les questions suivantes (questions 3 à 7) que :

$$m(E) < \infty,\ f_n \to f \text{ p.p., } \exists C \text{ t.q. } \|f_n\|_p \le C,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.81}$$

3. On suppose, dans cette question, que $p > 1$.

(a) Soit $N \in \mathbb{N}$ et $g \in L^q$ t.q. $g = 0$ p.p. sur E_N^c avec $E_N = \bigcap_{n\ge N}\{x \in E;\ |f_n(x) - f(x)| \le 1\}$. Montrer que $\int f_n g dm \to \int fg dm$, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – Pour définir E_N, on a, comme d'habitude, confondu les fonctions f_n et f avec l'un de leurs représentants.

On remarque que $g(f_n - f) \to 0$ p.p. et que, pour $n \ge N$, $|g(f_n - f)| \le |g|$ p.p.. Comme $g \in L^q \subset L^1$ (car $m(E) < \infty$), on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Il donne que $g(f_n - f) \to 0$ dans L^1 et donc :

$$\int g f_n dm \to \int g f dm, \text{ quand } n \to +\infty.$$

(b) Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^p. [Pour $g \in L^q$, introduire $g_N = g1_{E_N}$.]

Corrigé – Soit $g \in L^q$ (on confond g avec l'un de ses représentants). On pose $g_N = g1_{E_N}$ avec $E_N = \bigcap_{n\ge N}\{x \in E;\ |f_n(x) - f(x)| \le 1\}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int f_n g dm - \int fg dm = \int f_n(g - g_N)dm + \int f_n g_N dm \\ - \int f g_N dm + \int f(g_N - g)dm.\end{aligned} \tag{6.82}$$

Comme $g_N \to g$ p.p. quand $N \to \infty$ (car $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$), et que $|g_N| \le |g|$ p.p. (pour tout N), on peut appliquer le théorème de convergence dominée dans L^q (théorème 6.9) car $g \in L^q$ et $q < \infty$ (on a besoin ici de l'hypothèse $p > 1$). Il donne :

$$g_N \to g \text{ dans } L^q, \text{ quand } N \to \infty. \tag{6.83}$$

Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant l'inégalité de Hölder, l'hypothèse $\|f_n\|_p \le C$ et (6.83), on peut donc choisir N t.q. :

$$|\int f_n(g_N - g)dm| \le \|f_n\|_p \|g_N - g\|_q \le C\|g_N - g\|_q \le \varepsilon, \tag{6.84}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$|\int f(g_N - g)dm| \leq \|f\|_p \|g_N - g\|_q \leq \varepsilon, \tag{6.85}$$

Puis, N étant fixé, la question précédente nous donne, quand $n \to +\infty$,

$$\int f_n g_N dm \to \int f g_N dm.$$

Il existe donc $n(\varepsilon)$ t.q.

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |\int f_n g_N dm - \int f g_N dm| \leq \varepsilon. \tag{6.86}$$

Avec (6.84), (6.85) et (6.86), on déduit alors de (6.82) :

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |\int f_n g dm - \int f g dm| \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien la convergence faible de f_n vers f dans L^p.

(c) Donner un exemple avec $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ pour lequel $f_n \not\to f$ dans L^p.

Corrigé – On prend $f_n = n^{\frac{1}{p}} 1_{]0,\frac{1}{n}[}$. On a $\|f_n\|_p = 1$, $f_n \to 0$ p.p. et $f_n \not\to 0$ dans L^p (quand $n \to +\infty$).

4. On suppose, dans cette question, que $p = 1$. Montrer que $\|f\|_1 \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_1$. Donner un exemple avec $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ pour lequel $f_n \not\to f$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – Le fait que $\|f\|_1 \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_1$ est une conséquence immédiate du lemme de Fatou, lemme 4.19 (en choisissant des représentants pour f_n et f).

On peut prendre, comme exemple, $f_n = n1_{]0,\frac{1}{n}[}$. On a $f_n \to 0$ p.p., $\|f_n\|_1 = 1$ et $\int f_n \varphi dm \to 1 \neq 0$ si $\varphi = 1_{]0,1[}$ (donc $f_n \not\to 0$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$).

5. On suppose, dans cette question, que $p > 1$ et on prend $1 \leq r < p$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^r, quand $n \to +\infty$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de Vitali pour la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $g_n = |f_n - f|^r$.]

Corrigé – On pose $g_n = |f_n - f|^r$. On a $g_n \to 0$ p.p. et, pour tout $A \in T$, on obtient en utilisant l'inégalité de Hölder avec les fonctions g_n et 1_A et les exposants $\frac{p}{r}$ et son conjugué :

$$\begin{aligned}\int_A g_n dm = \int_A |f_n - f|^r &\leq (\int_A |f_n - f|^p dm)^{\frac{r}{p}} (m(A))^{1-\frac{r}{p}} \\ &\leq \|f_n - f\|_p^r (m(A))^{1-\frac{r}{p}}.\end{aligned}$$

On en déduit, comme $\|f_n\|_p \leq C$:

$$\int_A g_n dm \leq (C + \|f\|_p)^r (m(A))^{1-\frac{r}{p}},$$

d'où l'on déduit que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi–intégrable. Le théorème de Vitali (théorème 4.50, voir aussi l'exercice 4.29) donne alors que $g_n \to 0$ dans L^1, d'où l'on conclut que $f_n \to f$ dans L^r, quand $n \to +\infty$.

6. Pour cette question, on retire dans (6.81) l'hypothèse $m(E) < \infty$ et on suppose que $p > 1$. Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^p.

Corrigé – Il suffit ici de reprendre la même démonstration qu'à la question 3 avec E_N remplacé par $\tilde{E}_N = E_N \cap A_N$ où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ est t.q. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$, $A_{n+1} \supset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Dans cette question, on conserve l'hypothèse (6.81) mais on ne suppose plus que $f \in L^p$. Montrer que f appartient nécessairement à L^p.

Corrigé – Le fait que $f \in L^p$ est une conséquence immédiate du lemme de Fatou (appliqué à la suite $(|f_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$).

8. On prend maintenant $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ et on définit f_n, pour $n \in \mathbb{N}$ par $f_n = 1$ p.p. sur $]2k/n,(2k+1)/n[$ pour $k \in \mathbb{N}$, $(2k+1)/n \leq 1$ et $f_n = -1$ p.p. sur $]2k-1/n, 2k/n[$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, $2k/n \leq 1$. Montrer que $f_n \to 0$ faiblement dans L^p, pour tout $1 \leq p < \infty$. [On pourra, par exemple, utiliser la densité de $C([0,1],\mathbb{R})$ dans L^1.]

Corrigé – On se limite à n pair (la démonstration pour n impair est similaire). On prend d'abord $\varphi \in C([0,1],\mathbb{R})$. On a alors :

$$\int f_n \varphi d\lambda = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \int_{\frac{2k}{n}}^{\frac{2k+1}{n}} (\varphi(x) - \varphi(x+\frac{1}{n}))dx.$$

On en déduit :

$$|\int f_n \varphi d\lambda| \leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} |\varphi(x) - \varphi(x+\frac{1}{n})|dx \to 0 \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.87}$$

Soit maintenant $\varphi \in L^1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\psi \in C([0,1],\mathbb{R})$ t.q. $\|\varphi - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. On a alors :

$$|\int f_n \varphi d\lambda| \leq |\int f_n \psi d\lambda| + |\int f_n(\psi - \varphi)d\lambda| \leq |\int_0^1 f_n \psi d\lambda| + \varepsilon.$$

Comme $\psi \in C([0,1],\mathbb{R})$, on peut utiliser (6.87) (avec ψ au lieu de φ). Il existe donc $n(\varepsilon)$ t.q. $|\int_0^1 f_n \psi d\lambda| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n(\varepsilon)$, et donc :

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |\int f_n \varphi d\lambda| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui donne bien $\int f_n \varphi d\lambda \to 0$, quand $n \to +\infty$, pour tout $\varphi \in L^1$.

On en déduit bien que $f_n \to 0$ faiblement dans L^p pour tout $1 \leq p < \infty$ en utilisant la question 1 et le fait que $L^q \subset L^1$ pour tout $q \geq 1$.

Exercice 6.47 (Borne dans L^1 $\not\Rightarrow$ convergence faible) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (n - n^2x)^+$. On note λ la mesure de Lebesgue sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $]0,1[$, et $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ pour $p \in [1,+\infty]$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans L^p pour $p > 1$.
3. Y a-t'il convergence simple, convergence p.p., convergence uniforme, convergence en mesure, convergence dans L^p $(p \in [1,+\infty])$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (justifier vos réponses...) ?
4. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in C([0,1],\mathbb{R})$, on a $\int f_n \varphi d\lambda \to \varphi(0)$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement dans L^1 (utiliser le fait que la mesure de Dirac n'est pas une mesure de densité, cf exercice 5.1).

Exercice 6.48 (Convergence forte contre convergence faible) Soit (E,T,m) un espace mesuré. Pour $r \in [1,+\infty]$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

Soit $p \in [1,\infty[$ et q l'exposant conjugué de p. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$, $u \in L^p$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^q$ et $v \in L^q$.

1. On suppose que $u_n \to u$ faiblement dans L^p et $v_n \to v$ dans L^q, quand $n \to +\infty$. Montrer que $u_n v_n \to uv$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$.
2. On suppose que $p = 1$, $u_n \to u$ faiblement dans L^1, $v_n \to v$ p.p., quand $n \to +\infty$, et qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq C$ p.p.. Montrer que $u_n v_n \to uv$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$.

Exercice 6.49 (Convergence faible et non linéarité) On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$, par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(]0,1[,B(]0,1[),\lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(]0,1[,B(]0,1[),\lambda)$.

1. (Unicité de la limite faible). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $u,v \in L^1$. On suppose que $u_n \to u$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$, (c'est-à-dire que $T(u_n) \to T(u)$ pour toute application T linéaire continue de L^1 dans $\mathbb{R}$) et que $u_n \to v$ faiblement dans L^1.

(a) Montrer que $\int (u-v)\phi d\lambda = 0$, pour tout $\phi \in L^\infty$.

Corrigé – Soit $\phi \in L^\infty$. On sait que l'application $w \mapsto \int w\phi d\lambda$ est une application T linéaire continue de L^1 dans $\mathbb{R}$ (voir la section 6.3). On a donc, quand $n \to +\infty$:

$$\int u_n\phi d\lambda \to \int u\phi d\lambda \text{ et } \int u_n\phi d\lambda \to \int v\phi d\lambda.$$

On en déduit bien que $\int u\phi d\lambda = \int v\phi d\lambda$ c'est-à-dire $\int (u-v)\phi d\lambda = 0$.

(b) Montrer que $u = v$ p.p.. [Choisir convenablement ϕ dans l'égalité précédente.]

Corrigé – On choisit des représentants de u et v et on prend $\phi = \text{sign}(u-v)1\{u \neq v\}$. La fonction ϕ est mesurable (et même étagée) et bornée, donc $\phi \in \mathcal{L}^\infty$ (ou $\phi \in L^\infty$ avec la confusion habituelle). Ce choix de ϕ dans la question précédente donne alors $\|u-v\|_1 = 0$ et donc $u = v$ p.p..

2. (Convergence forte contre convergence faible) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$ et $v \in L^\infty$. On suppose qu'il existe $C > 0$ t.q. $\|v_n\|_\infty \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $v_n \to v$ p.p., quand $n \to +\infty$.

(a) Montrer que $v_n \to v$ dans L^p, quand $n \to +\infty$, pour tout $1 \leq p < \infty$.

Corrigé – Ceci est une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée dans L^p (pour $1 \leq p < \infty$, théorème 6.9). En effet, on a $v_n \to v$ p.p., $|v_n| \leq C1_{]0,1[}$ p.p. (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et la fonction $C1_{]0,1[}$ appartient à L^p.

(b) Donner un exemple pour lequel $v_n \not\to v$ dans L^∞.

Corrigé – Il suffit de prendre $v_n = 1_{]0,\frac{1}{n}[}$ (plus précisément, v_n est l'élément de L^∞ donc $1_{]0,\frac{1}{n}[}$ est l'un des représentants) et $v = 0$. On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$, $\|v_n\|_\infty = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \to 0$ p.p. et $v_n \not\to 0$ dans L^∞ (quand $n \to +\infty$),

(c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $u \in L^1$. On suppose que $\|u_n\|_\infty \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_n \to u$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$. Montrer que $\int u_n v_n d\lambda \to \int uv d\lambda$, quand $n \to +\infty$. [Écrire $v_n = v + (v_n - v)$.]

Corrigé – On remarque que

$$\int u_n v_n d\lambda = \int u_n v d\lambda + \int u_n(v_n - v) d\lambda. \tag{6.88}$$

Comme $u_n \to u$ faiblement dans L^1, on a $\int u_n v d\lambda \to \int uv d\lambda$, quand $n \to +\infty$.

Le deuxième terme de (6.88) tends vers 0 car $|\int u_n(v_n - v)d\lambda| \leq \|u_n\|_\infty \|v_n - v\|_1 \leq C\|v_n - v\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$, car on a montré précédemment que $v_n \to v$ dans L^1.

On en déduit bien que $\int u_n v_n d\lambda \to \int uv d\lambda$, quand $n \to +\infty$.

On se donne maintenant une fonction $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3. Soit $u \in \mathcal{L}^\infty$. Montrer que $\varphi \circ u \in \mathcal{L}^\infty$.

Corrigé – – Comme $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, φ est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ étant muni de la tribu de Borel). On en déduit que $\varphi \circ u$ est mesurable comme composée de fonctions mesurables.

– On note $M = \max\{|\varphi(s)|, |s| \le \|u\|_\infty\}$. On a $M < \infty$ (car φ est continue sur le compact $[-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$) et $|\varphi \circ u| \le M$ p.p. car $|u| \le \|u\|_\infty$ p.p.. On en déduit que $\varphi \circ u \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|\varphi \circ u\|_\infty \le M$.

4. Soit $u \in L^\infty$ et $v, w \in u$. Montrer que $\{h \in \mathcal{L}^\infty \,;\, h = \varphi \circ v \text{ p.p.}\} = \{h \in \mathcal{L}^\infty \,;\, h = \varphi \circ w \text{ p.p.}\}$.

Corrigé – On a $v = w$ p.p. et donc $\varphi \circ v = \varphi \circ w$ p.p., puisque, pour $x \in]0,1[$. $u(x) = v(x)$ implique $\varphi(u(x)) = \varphi(v(x))$.

Si $h :]0,1[\to \mathbb{R}$, on a donc :

$$h = \varphi \circ u \text{ p.p. } \Leftrightarrow h = \varphi \circ v \text{ p.p.}\,,$$

ce qui donne bien $\{h \in \mathcal{L}^\infty \,;\, h = \varphi \circ v \text{ p.p.}\} = \{h \in \mathcal{L}^\infty \,;\, h = \varphi \circ w \text{ p.p.}\}$.

Grâce aux 2 questions précédentes, pour $u \in L^\infty$, on pose, si $v \in u$:
$\underline{\varphi}(u) = \{h \in \mathcal{L}^\infty \,;\, h = \varphi \circ v \text{ p.p.}\}$, de sorte que $\underline{\varphi}(u) \in L^\infty$.

On se donne maintenant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$. On suppose qu'il existe $C > 0$ t.q. $\|u_n\|_\infty \le C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'il existe $u \in L^1$ et $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ t.q. :

– $u_n \to u$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$,

– $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p., quand $n \to +\infty$.

Le but de l'exercice est de comparer f et $\underline{\varphi}(u)$.

5. Montrer que $|\int u 1_A d\lambda| \le C\lambda(A)$ pour tout $A \in B(]0,1[)$. Montrer que $u \in L^\infty$ que $\|u\|_\infty \le C$.

Corrigé – Soit $A \in B(]0,1[)$. De l'hypothèse $\|u_n\|_\infty \le C$, on déduit :

$$|\int u_n 1_A d\lambda| \le \|u_n\|_\infty \|1_A\|_1 \le C\lambda(A). \tag{6.89}$$

Comme $u_n \to u$ faiblement dans L^1 quand $n \to +\infty$, on a $\int u_n 1_A d\lambda \to \int u 1_A d\lambda$ quand $n \to +\infty$. On déduit donc de (6.89), quand $n \to +\infty$:

$$|\int u 1_A d\lambda| \le C\lambda(A). \tag{6.90}$$

On choisit alors un représentant de u et on prend dans (6.90), $A = A_+ = \{u > C\}$. Si $\lambda(A_+) > 0$, on a $\int u 1_{A_+} d\lambda > C\lambda(A_+)$, en contradiction avec (6.90). Ce qui prouve que $\lambda(A_+) = 0$.

On prend ensuite $A = A_- = \{u < -C\}$. Si $\lambda(A_-) > 0$, on a

$$|\int u 1_{A_-} d\lambda| = \int (-u) 1_{A_-} d\lambda > C\lambda(A_-),$$

en contradiction avec (6.90). Ce qui prouve que $\lambda(A_-) = 0$.

On a donc $\lambda(\{|u| > C\}) = \lambda(A_+) + \lambda(A_-) = 0$. Ce qui donne $u \in L^\infty$ et $\|u\|_\infty \le C$.

6. On suppose, dans cette question, que φ est affine (c'est-à-dire qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(s) = \alpha s + \beta$ pour tout $s \in \mathbb{R}$). Montrer que $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p.. [Utiliser, en particulier, la question 1.]

Corrigé – On rappelle d'abord (voir la section 6.3) que si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $w \in L^1$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tends vers w faiblement dans L^1 (quand $n \to +\infty$) si et seulement $\int w_n \phi d\lambda \to \int w\phi d\lambda$ pour tout $\phi \in L^\infty$.

Soit $\phi \in L^\infty$, on a $\int \underline{\varphi}(u_n)\phi d\lambda = \int (\alpha u_n + \beta)\phi d\lambda = \alpha \int u_n \phi d\lambda + \beta \int \phi d\lambda$. Comme $u_n \to u$ faiblement dans L^1, on en déduit que $\int \underline{\varphi}(u_n)\phi d\lambda \to \alpha \int u\phi d\lambda + \beta \int \phi d\lambda = \int \underline{\varphi}(u)\phi d\lambda$ (quand $n \to +\infty$). Ceci montre que $\underline{\varphi}(u_n) \to \underline{\varphi}(u)$ faiblement dans L^1 quand $n \to +\infty$.

On utilise maintenant le fait que $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p.. En notant $M = \max\{|\varphi(s)|, |s| \le C\}$, on a $M < \infty$ et $|\underline{\varphi}(u_n)| \le M$ p.p. (car $|u_n| \le C$ p.p.) pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (car les fonctions constantes sont intégrables, sur $(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$). Il donne $f \in L^1$ et $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ dans L^1 quand $n \to +\infty$. On en déduit alors aussi que $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ faiblement dans L^1 quand $n \to +\infty$ (il suffit de remarquer que $|\int \underline{\varphi}(u_n)\phi d\lambda - \int f\phi d\lambda| \le \|\underline{\varphi}(u_n) - f\|_1 \|\phi\|_\infty \to 0$, quand $n \to +\infty$, pour tout $\phi \in L^\infty$).

Par la question 1 (unicité de la limite faible), on peut donc conclure que $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..

7. On suppose, dans cette question, que φ est injective. Montrer qu'il existe $v \in L^\infty$ t.q. $u_n \to v$ p.p. quand $n \to +\infty$. En déduire que $v = u$ et $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..

Corrigé – Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de u_n, encore noté u_n. Comme $|u_n| \le C$ p.p. (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $\varphi(u_n) \to f$ p.p., il existe $A \in \mathcal{B}(]0,1[)$ t.q. $\lambda(A) = 0$, $|u_n(x)| \le C$, pour tout $x \in A^c$ et tout $n \in \mathbb{N}$, et $\varphi(u_n(x)) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in A^c$.

Soit $x \in A^c$. La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est incluse dans le compact $[-C, C]$. Soit a une valeur d'adhérence de cette suite (c'est-à-dire la limite d'une sous–suite convergente). Par continuité de φ, $\varphi(a)$ est alors une valeur d'adhérence de de la suite $(\varphi(u_n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$. Or, la suite $(\varphi(u_n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Donc, $\varphi(a) = f(x)$. Comme φ est injective, ceci montre que la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence et donc qu'elle est convergente (on rappelle qu'une suite dans un compact, qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence, est convergente). On pose alors $v(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)$.

On a ainsi défini v p.p. (car $\lambda(A) = 0$), et on a $u_n \to v$ p.p.. On a aussi obtenu que $\underline{\varphi}(v) = f$ p.p. (car $\varphi(v(x)) = f(x)$ pour tout $x \in A^c$).

Comme $|u_n| \le C$ p.p. (pour tout n), le théorème de convergence dominée donne que $u_n \to v$ dans L^1 (quand $n \to +\infty$). On en déduit, comme à la question précédente, que $u_n \to v$ faiblement dans L^1. La question 1 (unicité de la limite faible) donne alors $u = v$ p.p..

Enfin, on a déjà montré que $\underline{\varphi}(v) = f$ p.p. et donc $\underline{\varphi}(u) = f$ p.p..

8. (Astuce de Minty pour passer à la limite sur les non linéarités) On suppose, dans cette question, que φ est croissante.

(a) Soit $v \in L^\infty$. Montrer que $\int (f - \underline{\varphi}(v))(u - v) d\lambda \ge 0$. [Utiliser la croissance de φ et la question 2 (c).]

Corrigé – Soit $v \in L^\infty$. Comme φ est croissante, on a $(\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v))(u_n - v) \ge 0$ p.p. et donc $\int (\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v))(u_n - v) d\lambda \ge 0$.

On remarque maintenant que :

- $(\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v)) \to (f - \underline{\varphi}(v))$ p.p. (quand $n \to +\infty$) et $\|\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v)\|_\infty \le M_1 + M_2$ (pour tout n) avec $M_1 = \max\{|\varphi(s)|, |s| \le C\}$ et $M_2 = \max\{|\varphi(s)|, |s| \le \|v\|_\infty\}$ (pour tout n).
- $(u_n - v) \to (u - v)$ faiblement dans L^1 (quand $n \to +\infty$) et $\|u_n - v\|_\infty \le C + \|v\|_\infty$.

On peut utiliser la question 2 (c) et en déduire que $\int (\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v))(u_n - v) d\lambda \to \int (f - \underline{\varphi}(v))(u - v) d\lambda$ quand $n \to +\infty$ et donc :

$$\int (f - \underline{\varphi}(v))(u - v) d\lambda \ge 0.$$

(b) Soit $w \in L^\infty$. Montrer que $\int (f - \underline{\varphi}(u)) w d\lambda \leq 0$. [Utiliser la question précédente avec $v = u + (1/n)w$.]

Corrigé – La question précédente avec $v = u + (1/n)w$ donne :

$$\int (f - \underline{\varphi}(u + \frac{1}{n} w)) w d\lambda \leq 0.$$

Comme φ est continue, on a $\underline{\varphi}(u + \frac{1}{n}w) \to \underline{\varphi}(u)$ p.p. quand $n \to +\infty$. On a aussi $|\underline{\varphi}(u + \frac{1}{n}w)| \leq M$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $M = \max\{|\underline{\varphi}(s)|, |s| \leq \|u\|_\infty + \|w\|_\infty\}$. Le théorème de convergence dominée donne alors $(f - \underline{\varphi}(u + \frac{1}{n}w)) \to (f - \underline{\varphi}(u))$ dans L^1, quand $n \to +\infty$, et donc, comme $w \in L^\infty$:

$$\int (f - \underline{\varphi}(u + \frac{1}{n} w)) w d\lambda \to \int (f - \underline{\varphi}(u)) w d\lambda.$$

On en déduit que $\int (f - \underline{\varphi}(u)) w d\lambda \leq 0$.

(c) Montrer que $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..

Corrigé – On choisit des représentants de f et $\underline{\varphi}(u)$ et on pose

$$w = \operatorname{sign}(f - \underline{\varphi}(u)) 1_{\{f \neq \underline{\varphi}(u)\}}.$$

La question précédente donne alors, avec ce choix de w, $\|f - \underline{\varphi}(u)\|_1 = 0$ et donc $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..

9. On définit u_n, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 1$ p.p. sur $]2k/2n, (2k+1)/2n[$ pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, et $u_n = -1$ p.p. sur $]2k - 1/2n, 2k/2n[$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$.

(a) Montrer que $\int u_n \phi d\lambda \to 0$, quand $n \to +\infty$, pour tout $\phi \in C([0,1], \mathbb{R})$.

Corrigé – Cette question et la suivante ont déjà faites dans l'exercice 6.46. On reprend la même démonstration.

Soit $\phi \in C([0,1], \mathbb{R})$. On a :

$$\int u_n \phi d\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n} + \frac{1}{2n}} (\phi(x) - \phi(x + \frac{1}{2n})) dx.$$

On en déduit, grâce à la continuité uniforme de ϕ :

$$|\int u_n \phi d\lambda| \leq \int_0^{1 - \frac{1}{2}n} |\phi(x) - \phi(x + \frac{1}{2n})| dx \to 0 \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.91}$$

(b) Montrer que $u_n \to 0$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$. [On pourra, par exemple, utiliser la densité de $C([0,1], \mathbb{R})$ dans L^1.] Montrer que $u_n \not\to 0$ dans L^1, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – Soit $\phi \in L^1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\psi \in C([0,1], \mathbb{R})$ t.q. $\|\phi - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. On a alors :

$$|\int u_n \phi d\lambda| \leq |\int u_n \psi d\lambda| + |\int u_n (\psi - \phi) d\lambda| \leq |\int_0^1 u_n \psi d\lambda| + \varepsilon.$$

Comme $\psi \in C([0,1], \mathbb{R})$, on peut utiliser la question précédente. Il existe donc $n(\varepsilon)$ t.q. $|\int_0^1 u_n \psi d\lambda| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n(\varepsilon)$, et donc :

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |\int u_n \phi d\lambda| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci donne que $\int u_n \phi d\lambda \to 0$, quand $n \to +\infty$, pour tout $\phi \in L^1$.

On en déduit bien que $u_n \to 0$ faiblement dans L^1 car $L^\infty \subset L^1$.

D'autre part, $u_n \not\to 0$ dans L^1, quand $n \to +\infty$, car $\|u_n\|_1 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Donner un exemple de fonction $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lequel $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p. et $f \neq \underline{\varphi}(0)$ p.p.. (et donc φ n'est pas croissante et n'est pas injective).

Corrigé – Il suffit de prendre $\varphi(s) = s^2$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On a alors $\underline{\varphi}(u_n) = 1$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p. avec $f = 1$ p.p. alors que $\underline{\varphi}(0) = 0$ p.p..

(d) Donner un exemple de fonction $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ croissante pour lequel $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p. (et donc $f = \underline{\varphi}(0)$ p.p., par la question 8, et φ est non injective, par les questions 7 et 9 (b)).

Corrigé – Il suffit de prendre $\varphi(s) = 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On a alors $\underline{\varphi}(u_n) = 0$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p. avec $f = \underline{\varphi}(0) = 0$ p.p..

Exercice 6.50 (Convergences faible et forte dans L^1**)** Soit (X, T, m) un espace mesuré fini. Pour $p \in [1,\infty]$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(X, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$, $f \in L^1$ et $C \in \mathbb{R}$. On suppose que

– $f_n \to f$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$ (c'est-à-dire que $\int f_n g dm \to \int f g dm$ pour tout $g \in L^\infty$).
– Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq C$ p.p..

1. Montrer que $f \geq C$ p.p..

Corrigé – Comme d'habitude, on choisit des représentants pour f et f_n, $n \in \mathbb{N}$. On pose $g = 1_A$ avec $A = \{f < C\}$. Comme $g \in L^\infty$, on a

$$\int f_n g dm \to \int f g dm, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.92}$$

Mais, comme $f_n \geq C$ p.p., on a $\int f_n g dm = \int_A f_n dm \geq Cm(A)$. on en déduit, grâce à (6.92),

$$\int_A f dm = \int f g \geq Cm(A) = \int_A C dm.$$

On a donc $\int (C - f)1_A dm \leq 0$. Comme $(C - f)1_A \geq 0$, on a donc nécessairement $(C - f)1_A = 0$ p.p.. Enfin, comme $f < C$ sur A, on a donc $m(A) = 0$. Ce qui donne $f \geq C$ p.p..

2. On suppose maintenant que $f = C$ p.p..
Montrer que $f_n \to f$ dans L^1 (c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$).

Corrigé – En prenant $g = 1_X$, on a $\int f_n dm \to \int f dm$, quand $n \to +\infty$. On remarque maintenant que $f_n \geq C = f$ p.p.. On a donc

$$\|f_n - f\|_1 = \int |f_n - f| dm = \int (f_n - f) dm \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Exercice 6.51 (Convergence faible = convergence forte, dans l^1**)**
On pose

$$l^\infty = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\,;\, \sup\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\} < \infty\},$$
$$l^1 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\,;\, \textstyle\sum_{n=0}^\infty |x_n| < \infty\}.$$

Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$ on pose $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\}$.
Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$ on pose $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^\infty |x_n|$.

1. Montrer que l^∞ et l^1 sont des espaces de Banach.

2. Soit $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$.
On définit $T_y : l^1 \to \mathbb{R}$ par

$$T_y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n, \ \forall x \in l^1.$$

(Remarquer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ est bien convergente, pour tout $x \in l^1$.)
Montrer que $T_y \in (l^1)'$, et que $\|T_y\|_{(l^1)'} = \|y\|_\infty$.

3. Soit $T \in (l^1)'$. Montrer qu'il existe $y \in l^\infty$ tel que $T = T_y$.
[On pourra poser $y_n = T(e^{(n)})$, avec $e^{(n)} = (\delta_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$.]

4. Soit $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset l^1$ une suite telle que
i) $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$, $x_i^{(n)} \to 0$, quand $n \to \infty$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.
ii) $\|x^{(n)}\|_1 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que l'on peut extraire de la suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite $(x^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et trouver une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ telles que :

$$\alpha_k < a_{k+1}, \sum_{i=0}^{\alpha_k} |x_i^{(n_k)}| \le \frac{1}{5}, \sum_{i=\alpha_k+1}^{\alpha_{k+1}} |x_i^{(n_k)}| \ge \frac{3}{5}, \sum_{i=\alpha_{k+1}+1}^{\infty} |x_i^{(n_k)}| \le \frac{1}{5}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

b. Montrer qu'il existe $y \in l^\infty$ telle que $T_y(x^{(n_k)}) \ge \frac{1}{5}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ ($(x^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ donnée en a.).

5. Soient $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset l^1$ et $x \in l^1$. Montrer que $x^{(n)} \to x$ faiblement dans l^1 (c'est-à-dire $T(x^{(n)}) \to T(x)$ pour tout $T \in (l^1)'$) si et seulement si $x^{(n)} \to x$ dans l^1.

Exercice 6.52 (Convergence étroite de mesures) Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (on rappelle que "m_n finie" signifie que "$m_n(\mathbb{R}) < \infty$") et m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On rappelle que $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$.
On suppose que :

$$\int g dm_n \to \int g dm, \text{ pour tout } g \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Soit $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On ne suppose pas que f est bornée, mais on suppose que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose $\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\alpha < \infty$.

Corrigé – La fonction constante et égale à 1 appartient à $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. L'hypothèse donne donc $m_n(\mathbb{R}) \to m(\mathbb{R})$, quand $n \to +\infty$. La suite $(m_n(\mathbb{R}))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée (car convergente dans $\mathbb{R}$). Ce qui donne $\alpha < \infty$.

2. On suppose, dans cette question, que :

$$\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f|^2 dm_n < \infty.$$

(a) Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à support compact et t.q. $0 \le \varphi(x) \le 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de α et β (définis ci-dessus), t.q. :

$$\int |f|\varphi dm \le C.$$

Corrigé – En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\int |f|\varphi dm_n \leq (\int f^2 dm_n)^{\frac{1}{2}} (\int \varphi^2 dm_n)^{\frac{1}{2}} \leq \beta^{\frac{1}{2}} m_n(\mathbb{R})^{\frac{1}{2}} \leq (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $|f|\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'hypothèse donne

$$\int |f|\varphi dm = \lim_{n\to+\infty} \int |f|\varphi dm_n.$$

On déduit donc de la majoration précédente que $\int |f|\varphi dm \leq (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$.

(b) Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$.

Corrigé – On définit φ_1 en posant :

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x) = 1, \text{ si } 0 \leq x \leq 1, \\ &\varphi_1(x) = 2 - x, \text{ si } 1 < x \leq 2, \\ &\varphi_1(x) = 0, \text{ si } 2 < x, \\ &\varphi_1(x) = \varphi_1(-x), \text{ si } x < 0. \end{aligned}$$

Puis, pour $p \geq 2$, $\varphi_p(x) = \varphi_1(\frac{x}{p})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

La question précédente donne $\int |f|\varphi_p dm \leq (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$ pour tout $p \geq 1$. Comme la suite $(\varphi_p)_{p\geq 1}$ converge simplement et en croissant vers la fonction constante égale à 1, le théorème de convergence monotone donne que $\int |f| dm \leq (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$ et donc que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$.

(c) Montrer que $\int f dm_n \to \int f dm$, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – On utilise encore la suite $(\varphi_p)_{p\geq 1}$ définie à la question précédente et on remarque que, pour tout $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} |\int f dm_n - \int f dm| \leq \int |f|(1-\varphi_p) dm_n + \int |f|(1-\varphi_p) dm \\ + |\int f\varphi_p dm_n - \int f\varphi_p dm|. \end{aligned} \tag{6.93}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $p \geq 1$, on a $|f|(1-\varphi_p) \leq |f|$ p.p.. Comme $(1-\varphi_p) \to 0$ p.p. et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Il donne $\int |f|(1-\varphi_p) dm \to 0$ quand $p \to \infty$. Il existe donc $p_0 \geq 1$ t.q.

$$p \geq p_0 \Rightarrow \int |f|(1-\varphi_p) dm \leq \varepsilon.$$

En utilisant encore le théorème de convergence dominée (les constantes étant intégrables pour la mesure m), il existe aussi $p_1 \geq 1$ t.q.

$$p \geq p_1 \Rightarrow \beta \int (1-\varphi_p) dm < \varepsilon^2.$$

On choisit maintenant $p = \max(p_0, p_1)$. Comme $(1-\varphi_p) \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a donc $\int (1-\varphi_p) dm_n \to \int (1-\varphi_p) dm$ quand $n \to +\infty$. Il existe donc n_0 t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \beta \int (1-\varphi_p) dm_n < \varepsilon^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $(1-\varphi_p)^2 \leq (1-\varphi_p)$, on en déduit, pour $n \geq n_0$,

$$\int |f|(1-\varphi_p) dm_n \leq \beta^{\frac{1}{2}} (\int (1-\varphi_p) dm_n)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon.$$

Enfin, comme $f\varphi_p \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a $\int f\varphi_p dm_n \to \int f\varphi_p dm$ quand $n \to +\infty$. Il existe donc n_1 t.q.

$$n \geq n_1 \Rightarrow |\int f\varphi_p dm_n - \int f\varphi_p dm| \leq \varepsilon.$$

Finalement, avec ce choix de $p = \max(p_0, p_1)$, on déduit donc de (6.93) que

$$n \geq \max(n_0, n_1) \Rightarrow |\int f dm_n - \int f dm| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci prouve bien que $\int f dm_n \to \int f dm$, quand $n \to +\infty$.

3. On ne suppose plus que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f|^2 dm_n < \infty$.

Montrer (en choisissant convenablement $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, m et f) que l'on peut avoir $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$.

Corrigé – On peut prendre, par exemple, $m_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $m_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}\delta_p$ (où δ_p est la masse de Dirac en p). On prend f définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les hypothèses sur la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et m sont bien vérifiées avec $m = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}\delta_p$.

On a bien $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m_n) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$.

Exercice 6.53 (Convergence faible et convexité) Dans cet exercice (E,T,m) est un espace mesuré et on suppose que la mesure m est σ−finie.. Pour tout $1 \leq r \leq \infty$, on note L^r l'espace $L^r(E,T,m)$ (et $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r(E,T,m)$). Soit $1 \leq p < \infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^p et $u \in L^p$ t.q. $u_n \to u$ faiblement dans L^p quand $n \to +\infty$ (on rappelle que ceci signifie $T(u_n) \to T(u)$, quand $n \to +\infty$, pour tout T dans $(L^p)'$, c'est-à-dire dans le dual topologique de L^p).

1. On pose $r = p/(p-1)$ si $p > 1$ et $r = \infty$, si $p = 1$. Montrer que, pour tout $v \in L^r$:

$$\int u_n v dm \to \int u v dm.$$

Corrigé – Soit $v \in L^r$. Pour tout $w \in L^p$, on pose $T(w) = \int wv dm$. Comme cela a été vu en cours, l'inégalité de Hölder (proposition 6.26) donne que $T \in (L^p)'$, on a donc $T(u) = \lim_{n\to+\infty} T(u_n)$.

Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que φ est strictement convexe (ce qui est équivalent à dire que φ' est strictement croissante).

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $h_a(x) = \varphi(x) - \varphi(a) - \varphi'(a)(x-a)$.

(a) Montrer que $h_a(x) > 0$ si $x \neq a$.

Corrigé – Soit $x \neq a$. Le théorème des accroissements finis donne qu'il existe $y \in]a,x[$, si $x > a$, ou $y \in]x,a[$, si $x < a$, t.q. $\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(y)(x-a)$. On a donc $h_a(x) = (\varphi'(y) - \varphi'(a))(x-a) > 0$.

(b) Montrer que h_a est décroissante sur $]-\infty,a[$ et croissante sur $]a,\infty($.

Corrigé – La fonction h_a est de classe C^1 et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h'_a(x) = \varphi'(x) - \varphi'(a)$. on a donc $h'_a(x) < 0$ si $x < a$ et $h'_a(x) > 0$ si $x > a$.

Soit $1 \leq q < \infty$. On suppose maintenant que la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^q et qu'elle converge faiblement dans L^q, quand $n \to +\infty$, vers une (classe de) fonction(s) $\overline{\varphi} \in L^q$.

Précision de notation : On choisit un représentant pour u_n. On désigne alors par $\varphi(u_n)$ la fonction (de E dans $\mathbb{R}$) $x \mapsto \varphi(u_n(x))$. Cette fonction est supposée être dans $\mathcal{L}^q$ et on l'identifie, comme d'habitude, avec l'élément de L^q qu'elle représente.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = [\varphi(u_n) - \varphi(u) - \varphi'(u)(u_n - u)]$.

Précision de notation : Ici aussi, pour définir f_n, on choisit un représentant pour u. On désigne alors par $\varphi(u)$ et $\varphi'(u)$ les fonctions $x \mapsto \varphi(u(x))$ et $x \mapsto \varphi'(u(x))$.

3. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$. On pose $A_k = \{|u| \leq k\}$ (c'est-à-dire $A_k = \{x \in E \text{ t.q. } |u(x)| \leq k\}$.

   Montrer que $\int f_n 1_{A_k} 1_B dm \to \int (\overline{\varphi} - \varphi(u))1_{A_k} 1_B dm$, quand $n \to +\infty$.

   Corrigé – la fonction φ' est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc bornée sur $[-k,k]$. On en déduit que $\varphi'(u)1_{A_k} \in L^\infty$. Comme $m(B) < \infty$, on a donc $\varphi'(u)1_{A_k}1_B \in L^r$ pour tout $r \in [1,\infty]$ en en particulier si r est le conjugué de p (c'est-à-dire $r = p/(p-1)$ si $p > 1$ et $r = \infty$, si $p = 1$). La question 1 donne donc :

   $$\int \varphi'(u)1_{A_k}1_B(u_n - u)dm \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

   Puis, comme $\varphi(u_n) \to \overline{\varphi}$ faiblement dans L^q et que $1_{A_k}1_B \in L^r$ où r est maintenant le conjugué de q, on a aussi :

   $$\int \varphi(u_n)1_{A_k}1_B dm \to \int \overline{\varphi}1_{A_k}1_B dm, \text{ quand } n \to +\infty.$$

   Enfin, on remarque que $\varphi(u)1_{A_k}1_B \in L^1$ (car $m(B) < \infty$ et φ bornée sur $[-k,k]$). Ce qui donne finalement que $f_n 1_{A_k}1_B \in L^1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\int f_n 1_{A_k}1_B dm \to \int (\overline{\varphi} - \varphi(u))1_{A_k}1_B dm$, quand $n \to +\infty$.

4. Montrer $\overline{\varphi} \geq \varphi(u)$ p.p.. [Utiliser les questions 2(a) et 3.]

   Corrigé – La question 2(a) donne que $f_n \geq 0$ p.p.. On a donc, grâce à la question 3, avec les notations de la question 3 :

   $$\int (\overline{\varphi} - \varphi(u))1_{A_k}1_B dm \geq 0, \tag{6.94}$$

   pour tout $k \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$.

   On va déduire de (6.94) que $\overline{\varphi} \geq \varphi(u)$ p.p.. Pour cela, On choisit des représentants de u et $\overline{\varphi}$ et on pose $N = \{\overline{\varphi} - \varphi(u) < 0\} = \{x \in E\,;\, \overline{\varphi}(x) - \varphi(u(x)) < 0\}$.

   Comme m est σ–finie, il existe une suite $(E_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \subset T$ t.q. $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} E_p$, $m(E_p) < \infty$ et $E_p \subset E_{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Comme u prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, on a donc aussi $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}(E_p \cap A_p)$ et finalement $N = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} N_p$, avec $N_p = N \cap E_p \cap A_p$.

   Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on prend $k = p$ et $B = E_p \cap N$ dans (6.94), de sorte que $A_k \cap B = A_p \cap E_p \cap N = N_p$. Comme $\overline{\varphi} - \varphi(u) < 0$ sur N_p, on obtient que $(\overline{\varphi} - \varphi(u))1_{N_p} = 0$ p.p. et donc $m(N_p) = 0$. Comme $N = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} N_p$, on a finalement $m(N) = 0$ et donc $\overline{\varphi} \geq \varphi(u)$ p.p..

On suppose maintenant que $\overline{\varphi} = \varphi(u)$ p.p..

5. Soit $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$, $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $A_k = \{|u| \leq k\}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous–suite convergeant p.p. vers 0 sur $A_k \cap B$.

   Corrigé – La question 2(a) donne $f_n \geq 0$ p.p. (pour tout n) et la question 3 donne que $f_n 1_{A_k \cap B} = f_n 1_{A_k}1_B \in L^1$ et $\|f_n 1_{A_k}1_B\|_1 = \int f_n 1_{A_k}1_B dm \to 0$, quand $n \to +\infty$. D'après la réciproque partielle de convergence dominée (théorème 4.48), la suite $(f_n 1_{A_k}1_B)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc une sous–suite convergeant p.p. vers 0. Autrement dit, il existe une application strictement croissante ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 sur $A_k \cap B$.

6. (Question plus difficile.) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous–suite convergeant p.p. vers 0 sur E. [Utiliser le fait que la mesure m est $\sigma-$finie et un procédé diagonal.]

Corrigé – On reprend la suite $(E_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ introduite à la question 4 (c'est-à-dire $(E_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \subset T$ t.q. $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} E_p$, $m(E_p) < \infty$ et $E_p \subset E_{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$).

La question 5 donne que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous–suite convergeant p.p. vers 0 sur $A_p \cap E_p$. Plus précisément, le raisonnement de la question 5 donne que de toute sous–suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous–suite convergeant p.p. vers 0 sur $A_p \cap E_p$. Comme $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}(A_p \cap E_p)$, le procédé diagonal va nous permettre ci après de construire une sous–suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant p.p. vers 0 sur E.

Dans une première étape, on montre par récurrence l'existence d'une suite d'applications strictement croissantes $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q., pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 sur $A_p \cap E_p$.

L'existence de ψ_1 découle de de la question 5 avec $k = 1$ et $B = E_1$. Puis, pour $p \geq 1$, en supposant $\psi_1, \ldots, \psi_p$ construits, on utilise le raisonnement de la question 5 avec la suite $(f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, $k = p+1$ et $B = E_{p+1}$. On obtient l'existence d'une application strictement croissante ψ_{p+1} de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. la suite $(f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_{p+1}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 sur $A_{p+1} \cap E_{p+1}$. Ce qui termine la récurrence.

La deuxième étape (procédé diagonal) consiste à définir ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant

$$\psi(n) = \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_n(n), \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

La fonction ψ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et on va montrer que la suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 (sur E). En effet, soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n > p$, on a :

$$\psi(n) = \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_p(\psi_{p+1} \circ \ldots \circ \psi_n(n)).$$

La suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc extraite, à partir de $n = p$, de la suite $(f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci prouve que $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 sur $A_p \cap E_p$. Comme $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}(A_p \cap E_p)$, on en déduit bien que la suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 (sur E).

7. Soit $x \in E$ t.q. $f_n(x) \to 0$, montrer que $u_n(x) \to u(x)$. [Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$, limite d'une sous–suite de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Utiliser la question 2 pour montrer que $b = u(x)$.]

Corrigé – Le point x est ici fixé. On pose $a = u(x)$. On remarque alors que $f_n(x) = h_a(u_n(x))$ (avec h_a défini à la question 2).

Si la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée, on peut supposer, après extraction éventuelle d'une sous suite, que $u_n(x) \notin [a-1, a+1]$ pour tout n (on peut même supposer que $|u_n(x)| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$). On a donc, grâce à la question 2 :

$$f_n(x) = h_a(u_n(x)) \geq \min(h_a(a+1), h_a(a-1)) > 0,$$

en contradiction avec $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

Si b est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une sous suite de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, t.q. $b = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = h_a(b)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, la question 2(a) donne $b = a$. On a ainsi montré que $u(x)$ est la seule valeur d'adhérence de la suite bornée $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui prouve que $u(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)$.

8. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous–suite convergeant p.p. vers u.

Corrigé – La question 6 montre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous–suite convergeant p.p. vers 0. Il existe donc ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. la suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0. Le raisonnement de la question 7 montre que

$$x \in E, \lim_{n\to+\infty} f_{\psi(n)}(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n(x) = u(x).$$

On en déduit que $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers u.

9. On suppose ici que $p > 1$. Montrer que $u_n 1_B \to u 1_B$ dans L^r pour tout $r \in [1, p[$ et tout $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$. [Utiliser l'exercice 6.18.]

Corrigé – On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $r \in [1, p[$ et $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$ et $u_n 1_B \not\to u 1_B$ dans L^r. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une sous–suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(u_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec g strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$), t.q.

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|u_{g(n)} 1_B - u 1_B\|_r \geq \varepsilon. \tag{6.95}$$

La suite $(u_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les mêmes propriétés que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par la question 8, on peut donc extraire de $(u_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous–suite convergeant p.p. vers u. Cette sous–suite, notée $(u_{g\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$), étant bornée dans L^p, la compacité L^p-L^q (exercice 6.18) donne que $u_{g\circ\psi(n)})1_B \to u 1_B$ dans L^r, en contradiction avec (6.95).

10. En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $\varphi(s) = s^2$, donner un exemple pour lequel $u_n \not\to u$ p.p. sur E (toutefois, d'après la question 8, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous–suite convergeant p.p. vers u).

Corrigé – Il suffit de reprendre l'exemple vu en cours pour montrer que la convergence L^1 n'entraîne pas la convergence p.p.

Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $m \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $n \in \{\frac{m(m-1)}{2}, \ldots, \frac{m(m+1)}{2} - 1\}$ et on a :

$$n = \frac{m(m-1)}{2} + k \text{ avec } k \in \{0, \ldots m-1\}.$$

On prend alors $u_n = 1_{]\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]}$.

On remarque que $\|u_n\|_p^p = \frac{1}{m}$ pour $n \in \{\frac{m(m-1)}{2}, \ldots, \frac{m(m+1)}{2} - 1\}$ et donc $u_n \to 0$ dans L^p quand $n \to +\infty$. Comme $\varphi(u_n) = u_n$, on a aussi $\varphi(u_n) \to 0$ dans L^q quand $n \to +\infty$ (et donc $\overline{\varphi} = \varphi(u)$). Enfin, pour cet exemple, $u_n \not\to 0$ p.p.

Exercice 6.54 (Produit de convergences faibles) Soit (E, T, m) un espace mesuré fini. Pour $p \in [1, \infty]$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $\alpha, \beta > 0$. Pour $a \in \mathbb{R}_+$, on définit ψ_a de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par $\psi_a(t) = (t^\alpha - a^\alpha)(t^\beta - a^\beta)$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\psi_a(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t \neq a$.

Corrigé – Les fonctions $t \mapsto t^\alpha$ et $t \mapsto t^\beta$ sont strictement croissantes de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On en déduit bien que $\psi_a(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t \neq a$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives appartenant à L^∞ et $l_\alpha, l_\beta, l_{\alpha+\beta} \in L^\infty$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^∞ et que $f_n^\gamma \to l_\gamma$ $\star$-faiblement dans L^∞, quand $n \to +\infty$, pour $\gamma = \alpha$, $\gamma = \beta$ et $\gamma = \alpha + \beta$.

On rappelle que $f_n^\gamma \to l_\gamma$ $\star$-faiblement dans L^∞ signifie que $\int f_n^\gamma \varphi dm \to \int l_\gamma \varphi dm$, quand $n \to +\infty$, pour tout $\varphi \in L^1$.

2. Soit $\varphi \in L^1$ t.q. $\varphi \geq 0$ p.p.. Montrer que $\int l_\alpha \varphi dm \geq 0$.

Corrigé – Comme $f_n \geq 0$ p.p., et $\varphi \geq 0$ p.p., on a $\int f_n^\alpha \varphi dm \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $f_n^\alpha \to l_\alpha$ $\star$-faiblement dans L^∞, on en déduit

$$\int l_\alpha \varphi dm = \lim_{n\to+\infty} \int f_n^\alpha \varphi dm \geq 0.$$

3. Montrer que $l_\alpha \geq 0$ p.p..

Corrigé – On pose $A = \{l_\alpha < 0\}$ (ceci sous entend qu'on a choisit un représentant de l_α, on a ainsi $l_\alpha \in \mathcal{L}^\infty$) et $\varphi = 1_A$ (de sorte que $\varphi \in L^1$ et $\varphi \geq 0$ p.p.). La question précédente donne alors

$$\int_A l_\alpha dm = \int l_\alpha \varphi dm \geq 0.$$

Comme $l_\alpha < 0$ sur A, on en déduit que $m(A) = 0$ et donc $l_\alpha \geq 0$ p.p..

(Le même raisonnement donne, bien sûr, $l_\beta \geq 0$ p.p. et $l_{\alpha+\beta} \geq 0$ p.p..)

4. Montrer que $l_{\alpha+\beta} \geq l_\alpha l_\beta$ p.p.. [On pourra utiliser $\psi_a(t) \geq 0$ avec $t = f_n(x)$ et $a = (l_\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha}}$.]

Corrigé – Grâce à la question précédente, on peut choisir un représentant de l_α de sorte que $l_\alpha(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$. On peut aussi supposer que $f_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$. En prenant $t = f_n(x)$ et $a = (l_\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha}}$, on obtient comme $\psi(t) \geq 0$, pour tout $x \in E$,

$$(f_n^\alpha(x) - l_\alpha(x))(f_n^\beta(x) - l_\alpha^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)) \geq 0.$$

Ce qui peut s'écrire

$$f_n^{\alpha+\beta}(x) + l_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}(x) \geq l_\alpha(x) f_n^\beta(x) + f_n^\alpha(x) l_\alpha^{\frac{\beta}{\alpha}}(x).$$

Soit $\varphi \in L^1$, $\varphi \geq 0$ p.p.. L'inégalité précédente nous donne

$$\int f_n^{\alpha+\beta} \varphi dm + \int l_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} \varphi dm \geq \int f_n^\beta l_\alpha \varphi dm + \int f_n^\alpha l_\alpha^{\frac{\beta}{\alpha}} \varphi dm.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient donc

$$\int l_{\alpha+\beta} \varphi dm + \int l_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} \varphi dm \geq \int l_\beta l_\alpha \varphi dm + \int l_\alpha l_\alpha^{\frac{\beta}{\alpha}} \varphi dm,$$

et donc

$$\int (l_{\alpha+\beta} - l_\beta l_\alpha) \varphi dm \geq 0.$$

En prenant $\varphi = 1_A$ avec $A = \{l_{\alpha+\beta} - l_\beta l_\alpha < 0\}$ on en déduit que $m(A) = 0$ et donc $l_{\alpha+\beta} - l_\beta l_\alpha \geq 0$ p.p..

5. On suppose maintenant que $l_{\alpha+\beta} = l_\alpha l_\beta$ p.p.. On pose $f = l_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}$ et $g_n = (f_n^\alpha - f^\alpha)(f_n^\beta - f^\beta)$.

(a) Montrer que $g_n \to 0$ dans L^1, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – On remarque que

$$0 \leq \int g_n dm = \int f_n^{\alpha+\beta} dm + \int f^\alpha f^\beta dm - \int f_n^\beta f^\alpha dm - \int f_n^\alpha f^\beta dm.$$

Quand $n \to +\infty$, le terme de droite de cette égalité tend vers I avec

$$I = \int l_{\alpha+\beta} dm + \int f^\alpha f^\beta dm - \int l_\beta f^\alpha dm - \int l_\alpha f^\beta dm.$$

Comme $f = l_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}$ et $l_{\alpha+\beta} = l_\alpha l_\beta$ p.p., on a $I = 0$. On en déduit bien que

$$\lim_{n\to+\infty} \int g_n dm = 0$$

et donc (comme $g_n \geq 0$ p.p.) que $g_n \to 0$ dans L^1.

(b) Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante t.q. $g_{\varphi(n)} \to 0$ p.p., quand $n \to +\infty$. Montrer que $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p., quand $n \to +\infty$. [Utiliser la question 1.]

Corrigé – Comme $g_n \to 0$ dans L^1, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous–suite qui converge p.p. vers 0. Il existe donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante t.q. $g_{\varphi(n)} \to 0$ p.p., quand $n \to +\infty$. En choisissant des représentants des fonctions composant g_n, il existe donc $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} g_{\varphi(n)}(x) = 0$ pour tout $x \in A^c$.

Soit $x \in A^c$, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} (f^{\alpha}_{\varphi(n)}(x) - f^{\alpha}(x))(f^{\beta}_{\varphi(n)}(x) - f^{\beta}(x)) = 0. \tag{6.96}$$

On en déduit tout d'abord que la suite $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Puis, si η est une valeur d'adhérence de la suite $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$, on doit avoir, grâce à (6.96),

$$\psi_{f(x)}(\eta) = (\eta^{\alpha} - f^{\alpha}(x))(\eta^{\beta} - f^{\beta}(x)) = 0,$$

ce qui n'est possible que si $\eta = f(x)$ (d'après la question 1). On en déduit que $f(x)$ est la seule valeur d'adhérence de la suite bornée $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et donc que

$$\lim_{n\to+\infty} f_{\varphi(n)}(x) = f(x).$$

Ce qui donne bien $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p..

(Noter que, de cette convergence p.p., on déduit, par convergence dominée, une convergence de $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vers f dans L^q pour tout $q \in [1, +\infty[$.)

(c) Montrer que $f_n \to f$ dans L^q, quand $n \to +\infty$, pour tout $q \in [1, \infty[$.

Corrigé – Soit $q \in [1, +\infty[$. Si $f_n \not\to f$ dans L^q, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous–suite, encore notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (pour ne pas alourdir la rédaction), t.q.

$$\|f_n - f\|_q \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{6.97}$$

En utilisant le raisonnement de la question précédente, on peut alors extraire de cette sous–suite une nouvelle sous–suite, toujours notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $f_n \to f$ p.p.. Par convergence dominée, on en déduit alors que $f_n \to f$ dans L^q, en contradiction avec (6.97).

Exercice 6.55 (Produit de convergences faibles et non–linéarité) Soit (X, T, m) un espace mesuré fini (c'est-à-dire $m(X) < +\infty$). On note L^2 l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(X, T, m)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites bornées de L^2 et $u, v \in L^2$. On suppose que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent faiblement dans L^2 vers u et v. On rappelle que ceci signifie que

$$\lim_{n\to+\infty} \int u_n w \, dm = \int u w \, dm \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int v_n w \, dm = \int v w \, dm \text{ pour tout } w \in L^2.$$

1. On suppose, dans cette question seulement, que $v_n = u_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et donc $u = v$ p.p.). Montrer que $u_n \to u$ dans L^2 (quand $n \to +\infty$) si et seulement si $\int u_n^2 dm \to \int u^2 dm$ (quand $n \to +\infty$).

Corrigé – On remarque que

$$\|u_n - u\|_2^2 = \int u_n^2 dm + \int u^2 dm - 2 \int u_n u \, dm. \tag{6.98}$$

Comme $u_n \to u$ faiblement dans L^2, on a $\lim_{n\to+\infty} \int u_n u \, dm = \int u^2 dm$. On déduit alors facilement de (6.98) que $u_n \to u$ dans L^2 si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \int u_n^2 dm = \int u^2 dm$.

On suppose pour toute la suite de l'exercice que $\int u_n v_n \, dm \to \int u v \, dm$ (quand $n \to +\infty$) et qu'il existe une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q.

– φ continue et il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(s) \leq C + C|s|$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

– $v_n = \varphi(u_n)$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $w \in L^2$, montrer que, quand $n \to +\infty$,

$$\int (\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w)\, dm \to \int (v - \varphi(w))(u - w)\, dm. \tag{6.99}$$

Corrigé – On commence par remarquer que $\varphi(w) \in L^2$ (grâce aux hypothèses sur φ et $m(X) < +\infty$). On a alors

$$\int (\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w) = \int (v_n u_n - v_n w - \varphi(w) u_n + \varphi(w) w) dm.$$

Les convergences faibles de u_n et v_n vers u et v donnent

$$\lim_{n\to+\infty} \int u_n \varphi(w) dm = \int u\varphi(w) dm \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int v_n w dm = \int v w dm.$$

Enfin on a, par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} \int u_n v_n dm = \int u v dm$. On en déduit que bien que

$$\lim_{n\to+\infty} (\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w) dm = \int (v - \varphi(w))(u - w) dm.$$

3. On suppose que φ est croissante.

(a) Soit $\bar{w} \in L^2$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int (v - \varphi(u + t\bar{w}))t\bar{w}\, dm \leq 0.$$

[Utiliser (6.99).] En déduire que $\int (v - \varphi(u))\bar{w}\, dm = 0$.

Corrigé – On utilise ici (6.99) avec $w = u + t\bar{w}$. On obtient, quand $n \to +\infty$,

$$\int (\varphi(u_n) - \varphi(u + t\bar{w}))(u_n - u - t\bar{w})\, dm \to -\int (v - \varphi(u + t\bar{w}))t\bar{w}\, dm.$$

Comme φ est croissante, on a $(\varphi(u_n) - \varphi(u + t\bar{w}))(u_n - u - t\bar{w}) \geq 0$ p.p. et donc $\int (\varphi(u_n) - \varphi(u + t\bar{w}))(u_n - u - t\bar{w}) dm \geq 0$. On en déduit, quand $n \to +\infty$, $\int (v - \varphi(u + t\bar{w}))t\bar{w}\, dm \leq 0$.

En prenant $t = \frac{1}{m}$ ($m \in \mathbb{N}^*$), on a donc $\int (v - \varphi(u + \frac{\bar{w}}{m}))\bar{w} \leq 0$. En appliquant le théorème de convergence dominée (remarquer que $|(v - \varphi(u + \frac{\bar{w}}{m}))\bar{w}| \leq F$ p.p. avec $F = (|v| + C + C|u| + C|\bar{w}|)|\bar{w}| \in L^1$), on obtient, quand $m \to \infty$,

$$\int (v - \varphi(u))\bar{w} dm \leq 0.$$

De même, en prenant $t = -\frac{1}{m}$, on montre $\int (v - \varphi(u))\bar{w} dm \geq 0$. On a donc $\int (v - \varphi(u))\bar{w} dm = 0$.

(b) Montrer que $v = \varphi(u)$ p.p..

Corrigé – On choisit $\bar{w} = 1_A - 1_{A^c}$, avec $A = \{v - \varphi(u) \geq 0\}$. La question précédente donne alors $\int |v - \varphi(u)| dm = 0$ et donc $v = \varphi(u)$ p.p..

4. On suppose que φ strictement croissante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $G_n = (\varphi(u_n) - \varphi(u))(u_n - u)$.

(a) Montrer que $G_n \to 0$ dans L^1 quand $n \to +\infty$ (utiliser (6.99)).

Corrigé – En prenant $w = u$ dans (6.99), on obtient $\lim_{n\to+\infty} \int G_n dm = 0$. Comme φ est croissante, on a $G_n \geq 0$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\|G_n\|_1 = \int G_n dm$. On en déduit bien que $G_n \to 0$ dans L^1.

(b) Montrer qu'il existe une sous–suite de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(G_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) t.q. $G_{\psi(n)} \to 0$ p.p.. En déduire que $u_{\psi(n)} \to u$ p.p. (utiliser la croissance stricte de φ).

Corrigé – Comme $G_n \to 0$ dans L^1, il existe une sous–suite de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(G_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) t.q. $G_{\psi(n)} \to 0$ p.p. (c'est la réciproque partielle du théorème de convergence dominée). Il existe donc $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $G_{\psi(n)}(x) \to 0$ (quand $n \to +\infty$) si $x \in A^c$.

Soit $x \in A^c$. On pose $a = u(s)$. Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $f(s) = (\varphi(s) - \varphi(a))|s - a|$. Comme φ est strictement croissante continue, la fonction f est aussi strictement croissante continue. Elle admet donc une fonction réciproque, notée g, qui est continue. Comme $|f(u_{\psi(n)}(x)| = G_{\psi(n)}(x) \to 0$, on a $f(u_{\psi(n)}(x)) \to 0$ et donc $u_{\psi(n)}(x) = g(f(u_{\psi(n)}(x)) \to g(0) = a$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} u_{\psi(n)}(x) = u(x)$ pour tout $x \in A^c$. Ce qui prouve bien que $u_{\psi(n)} \to u$ p.p..

(c) Montrer que $u_n \to u$ dans L^p pour tout $p \in [1, 2[$.

Corrigé – On montre que $u_n \to u$ dans L^p pour tout $p \in [1, 2[$ en raisonnant pas l'absurde. On suppose qu'il existe $p \in [1, 2[$ t.q. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge par vers u dans L^p. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une sous–suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui reste en dehors de la boule (de L^p) de centre u et de rayon ε. Par le raisonnement de la question précédente, de cette sous–suite, un peut extraire une sous–suite, notée $(u_n)_{\psi(n)}$ qui converge p.p. vers u. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^2, on peut alors montrer que cette sous–suite converge dans L^p vers u (c'est une conséquence, vue en exercice, du théorème de Vitali). En contradiction avec le fait que cette sous–suite reste en dehors de la boule (de L^p) de centre u et de rayon ε. On a ainsi montré que $u_n \to u$ dans L^p pour tout $p \in [1, 2[$.

Exercice 6.56 (Convergence faible contre convergence forte) Soit (E, T, m) un espace mesuré. On suppose que m est σ-finie. Pour $r \in [1, \infty]$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (et L^r est muni de sa norme usuelle). Soit $p, q \in [1, \infty]$ t.q. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^p et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^q.

1. On suppose ici que $p \in [1, \infty[$ (et donc $q \in]1, \infty]$), $\varphi_n \to \varphi$ dans L^q, quand $n \to +\infty$, et $f_n \to f$ faiblement dans L^p, quand $n \to +\infty$ (c'est-à-dire que $T(f_n) \to T(f)$ pour toute application linéaire continue T de L^p dans $\mathbb{R}$).
   (a) Montrer que $\int f_n \psi dm \to \int f \psi dm$, pour tout $\psi \in L^q$.
   (b) Montrer que $\int f_n \varphi_n dm \to \int f \varphi dm$.
2. On suppose ici que $p = \infty$ (et donc $q = 1$), $\varphi_n \to \varphi$ dans L^1, quand $n \to +\infty$, et $f_n \to f$ $\star$–faiblement dans L^∞, quand $n \to +\infty$ (c'est-à-dire que $\int f_n \psi dm \to \int f \psi dm$ pour tout $\psi \in L^1$). Montrer que $\int f_n \varphi_n dm \to \int f \varphi dm$.

On suppose pour la suite de l'exercice que $p = 1$ (et donc $q = \infty$) et $m(E) < \infty$.

3. Montrer que $\varphi_n \to \varphi$ dans L^∞, quand $n \to +\infty$, implique :
   (p1) $\varphi_n \to \varphi$ p.p. quand $n \to +\infty$.
4. Montrer, en prenant (par exemple) $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$ que (p1) n'implique pas $\varphi_n \to \varphi$ dans L^∞ quand $n \to +\infty$. [Il faut donc trouver une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée de L^∞ et $\varphi \in L^\infty$ t.q. $\varphi_n \to \varphi$ p.p., quand $n \to +\infty$, et $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \not\to 0$, quand $n \to +\infty$.]

On suppose maintenant que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (p1) et que :

(p2) $f_n \to f$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$,

5. Montrer que $\varphi \in L^\infty$ (au sens "il existe $\bar{\varphi} \in \mathcal{L}^\infty(E, T, m)$ t.q. $\varphi = \bar{\varphi}$ p.p."). [On rappelle que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est, par hypothèse, bornée dans L^∞.]
6. On admet que (p2) implique l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ t.q. } A \in T,\ m(A) \le \delta,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \varepsilon.$$

   Montrer que $\int f_n \varphi_n dm \to \int f \varphi dm$. [On pourra utiliser le théorème d'Egorov.]

Exercice 6.62 (Convergence en loi versus convergence en probabilité)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, X une v.a. réelle et $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles.

1. On suppose, dans cette question, que $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ en probabilité, quand $n \to +\infty$. Montrer que :

$$\mathrm{X}_n \to \mathrm{X} \text{ en loi, quand } n \to +\infty.$$

[Remarquer qu'il suffit de démontrer une convergence vague de $\mathrm{P}_{\mathrm{X}_n}$ vers P_X.]

Corrigé – Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Nous allons montrer que

$$\int_\Omega \varphi(\mathrm{X}_n)d\mathrm{P} \to \int_\Omega \varphi(\mathrm{X})d\mathrm{P},$$

quand $n \to +\infty$ (ce qui prouve la convergence vague de $\mathrm{P}_{\mathrm{X}_n}$ vers P_X, quand $n \to +\infty$, voir la définition 6.86).

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, φ est uniformément continue (ceci serait faux si on prenant φ arbitrairement dans $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$). Il existe donc $\eta > 0$ t.q. :

$$x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| \le \eta \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(y) \le \varepsilon.$$

On en déduit que

$$|\int_\Omega \varphi(\mathrm{X}_n) - \varphi(\mathrm{X})d\mathrm{P}| \le \int_{|\mathrm{X}_n-\mathrm{X}|\le\eta} |\varphi(\mathrm{X}_n) - \varphi(\mathrm{X})|d\mathrm{P}$$
$$+ \int_{|\mathrm{X}_n-\mathrm{X}|>\eta} |\varphi(\mathrm{X}_n) - \varphi(\mathrm{X})|d\mathrm{P} \le \varepsilon + 2\|\varphi\|_u \mathrm{P}(|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| > \eta),$$

avec $\|\varphi\|_u = \max\{|\varphi(s)|, s \in \mathbb{R}\} < \infty$. Comme $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ en probabilité, quand $n \to +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. :

$$n \ge n_0 \Rightarrow 2\|\varphi\|_u \mathrm{P}(|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| > \eta) \le \varepsilon.$$

On a donc finalement

$$n \ge n_0 \Rightarrow |\int_\Omega \varphi(\mathrm{X}_n) - \varphi(\mathrm{X})d\mathrm{P}| \le 2\varepsilon,$$

ce qui prouve bien que $\int_\Omega \varphi(\mathrm{X}_n)d\mathrm{P} \to \int_\Omega \varphi(\mathrm{X})d\mathrm{P}$, quand $n \to +\infty$.

Pour conclure, on utilise la proposition 6.87 (qui donne que si $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et m sont des probabilités sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, la convergence étroite de m_n vers m, quand $n \to +\infty$, est équivalente à la convergence vague de m_n vers m). On obtient ainsi la convergence étroite de $\mathrm{P}_{\mathrm{X}_n}$ vers P_X c'est-à-dire la convergence en loi de X_n vers X, quand $n \to +\infty$.

2. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $\mathrm{X} = a$ p.s.. On suppose aussi que $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ en loi, quand $n \to +\infty$. Montrer que :

$$\mathrm{X}_n \to \mathrm{X} \text{ en probabilité, quand } n \to +\infty.$$

Corrigé – Soit $\eta > 0$, on va montrer que $\mathrm{P}(|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| > \eta) \to 0$, quand $n \to +\infty$. Pour cela, on choisit une fonction φ continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et t.q. $\varphi(x) = 1$ si $|x-a| \ge \eta$, $\varphi(a) = 0$ et $0 \le \varphi(x) \le 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (Une telle fonction est facile à construire, il suffit de la prendre affine par morceaux). Comme $\varphi \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a $\int_\Omega \varphi(\mathrm{X}_n)d\mathrm{P} \to \int_\Omega \varphi(\mathrm{X})d\mathrm{P}$, quand $n \to +\infty$. Comme $\mathrm{X} = a$ p.s. et $\varphi(a) = 0$, on a $\int_\Omega \varphi(\mathrm{X})d\mathrm{P} = 0$. Enfin, comme $\varphi(x) = 1$ si $|x-a| \ge \eta$ et $\varphi \ge 0$, on a $\int_\Omega \varphi(\mathrm{X}_n)d\mathrm{P} \ge \mathrm{P}(|\mathrm{X}_n-\mathrm{X}| > \eta)$. On en déduit finalement que $\mathrm{P}(|\mathrm{X}_n-\mathrm{X}| > \eta) \to 0$ quand $n \to +\infty$ et donc que $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ en probabilité quand $n \to +\infty$.

Exercice 6.63 (Convergence L^∞-faible, p.p. et L^1)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$. On note L^p l'espace $\mathrm{L}^p_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda)$.
Pour $x \in \Omega$ et $h > 0$, on pose $\mathrm{B}(x,h) = \{y \in \Omega \text{ t.q. } |x-y| < h\}$ et on désigne par $|\mathrm{B}(x,h)|$ la mesure de Lebesgue de $\mathrm{B}(x,h)$. Pour $f \in \mathrm{L}^1$, $x \in \Omega$ et $h > 0$, on pose

$$f_h(x) = \frac{1}{|\mathrm{B}(x,h)|}\int_{\mathrm{B}(x,h)} f(y)dy.$$

On dit que x est un point de Lebesgue de f si $f_h(x)$ a une limite dans $\mathbb{R}$ quand $h \to 0$.
Si $x \in \Omega$, on pose $\mathrm{F}_x = \{f \in \mathrm{L}^\infty$ t.q. x est un point de Lebesgue de $f\}$.

1. Soit $x \in \Omega$. Pour $f \in \mathrm{F}_x$ on pose $\mathrm{T}_x(f) = \lim_{h\to 0} f_h(x)$. Montrer que F_x est un sous espace vectoriel de L^∞ et que T_x est une application linéaire continue de F_x, muni de la norme de L^∞, dans $\mathbb{R}$. En déduire qu'il existe $\bar{\mathrm{T}}_x \in (\mathrm{L}^\infty)'$ t.q. $\bar{\mathrm{T}}_x(f) = \mathrm{T}_x(f)$ pour tout $f \in \mathrm{F}_x$. [On pourra utiliser la conséquence du théorème de Hahn-Banach, rappelée dans la remarque 5.13.]

   Pour la suite de cet exercice, on rappelle que, si $f \in \mathrm{L}^1$, presque tout point x de Ω est un point de Lebesgue de f et on a, pour presque tout $x \in \Omega$, $\lim_{h\to 0} f_h(x) = f(x)$ (ceci est démontré dans l'exercice 5.13).

   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^∞ et $f \in \mathrm{L}^\infty$. On suppose que $f_n \to f$ faiblement dans L^∞, quand $n \to +\infty$.

2. Montrer que $f_n \to f$ p.p..
3. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1.
4. Soit $1 < p < \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^p.

N.B. : Le même exercice peut se faire avec un ouvert borné de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ ($\mathrm{N} > 1$), noté Ω, et $f \in \mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_\mathrm{N})$ où λ_N est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de Ω. Cette mesure λ_N sera définie au chapitre 7.

Chapitre 7

Produits d'espaces mesurés

7.1 Motivation

Au chapitre 1, on a introduit la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ (notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$), ce qui nous a permis d'exprimer la notion de longueur d'une partie (borélienne) de $\mathbb{R}$. On peut se poser la question de savoir s'il existe une mesure sur une tribu convenable de $\mathbb{R}^2$ qui exprimerait la notion de surface (et une mesure sur une tribu convenable de $\mathbb{R}^3$ qui exprimerait la notion de volume...).

La question est donc : existe-t-il une mesure λ_2 sur une tribu de $\mathbb{R}^2$ contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, vérifiant :

$$\lambda_2(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \lambda(\mathrm{A})\lambda(\mathrm{B}), \ \forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ ? \tag{7.1}$$

La tribu T_2, sur laquelle on veut définir λ_2, doit donc contenir $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque tout d'abord que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \{\mathrm{A} \times \mathrm{B}, \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ n'est pas une tribu. En effet, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ n'est pas stable par passage au complémentaire ni par union (par contre, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est stable par intersection dénombrable). On définit alors T_2 comme la tribu engendrée par $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, qu'on note $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On cherche alors une mesure $\lambda_2 : \mathrm{T}_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $\lambda_2(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \lambda(\mathrm{A})\lambda(\mathrm{B})$ pour tout $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On peut montrer l'existence et l'unicité de la mesure λ_2 (voir le théorème 7.3). On peut aussi montrer que la tribu T_2 est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^2$ (voir la proposition 7.2).

Une autre question qu'on abordera dans ce chapitre concerne l'intégration des fonctions à plusieurs variables. Considérons par exemple une fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Sous quelles hypothèses (faciles à vérifier...) peut-on écrire :

$$\int \Big(\int f(x,y)dy \Big) dx = \int \Big(\int f(x,y)dx \Big) dy \ ? \tag{7.2}$$

Une réponse à cette question est apportée par le théorème de Fubini, que nous verrons dans ce chapitre.

On introduira aussi le produit de convolution de deux fonctions, qui sera utile, par exemple, pour démontrer des théorèmes de densité. Mais la convolution est un notion utile pour beaucoup d'autres raisons (elle est utile, par exemple, en théorie du signal).

7.2 Mesure produit

On rappelle ici qu'un espace mesuré $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ est σ-fini (on dit aussi que m est σ-finie) si il existe une famille $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ t.q. $\mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$ et $m(\mathrm{A}_n) < +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est σ-fini (prendre, par exemple, $A_n = [-n, n]$). Il existe, par contre, des mesures non finies. L'exemple le plus simple sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ consiste à prendre $m(A) = \infty$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $A \neq \emptyset$. Un exemple plus intéressant (intervenant pour certains problèmes) consiste à se donner un borélien non vide B de $\mathbb{R}$ (B peut être, par exemple, réduit à un point) et à définir m_B par $m_B(A) = \infty$ si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \cap B \neq \emptyset$ et $m_B(A) = 0$ si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \cap B = \emptyset$.

Définition 7.1 (Tribu produit) *Soient* (E_1, T_1) *et* (E_2, T_2) *des espaces mesurables. On pose* $E = E_1 \times E_2$. *On appelle tribu produit la tribu sur* E *engendrée par* $T_1 \times T_2 = \{A_1 \times A_2,\ A_1 \in T_1,\ A_2 \in T_2\}$. *Cette tribu produit est notée* $T_1 \otimes T_2$.

Un exemple fondamental est $(E_1, T_1) = (E_2, T_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On va montrer que, dans ce cas, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Proposition 7.2 (Tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$)
Pour tout $N \geq 2$, *on a* $\mathcal{B}(R^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(R^N)$.

DÉMONSTRATION – La démonstration est faite pour $N = 2$ dans l'exercice 2.6). Elle s'adapte facilement pour traiter aussi le cas $N > 2$ (exercice 7.1). ∎

Théorème 7.3 (Mesure produit) *Soient* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2) *deux espaces mesurés σ-finis,* $E = E_1 \times E_2$ *et* $T = T_1 \otimes T_2$. *Alors, il existe une et une seule mesure m sur* T *vérifiant :*

$$m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1) m_2(A_2), \tag{7.3}$$

pour tout $A_1 \in T_1$ *et* $A_2 \in T_2$ *t.q.* $m_1(A_1) < \infty$ *et* $m(A_2) < \infty$. *Cette mesure est notée* $m = m_1 \otimes m_2$. *De plus, m est σ-finie.*

DÉMONSTRATION –
Existence de m. On va construire une mesure m sur T vérifiant (7.3).

Soit $A \in T$. On va montrer, à l'étape 1, que, pour tout $x_1 \in E_1$, on a $1_A(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$. On pourra donc poser $f_A(x_1) = \int 1_A(x_1, \cdot) dm_2$, pour tout $x_1 \in E_1$. L'application f_A sera donc une application de E_1 dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On va montrer, à l'étape 2, que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$. On posera alors $m(A) = \int f_A dm_1$. Enfin, il restera à l'étape 3 à montrer que m est bien une mesure vérifiant (7.3) et que m est σ-finie.

Etape 1. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ et $x_1 \in E_1$, on note $S(x_1, A) = \{x_2 \in E_2\ ;\ (x_1, x_2) \in A\} \subset E_2$, de sorte que $1_A(x_1, \cdot) = 1_{S(x_1, A)}$.

Soit $x_1 \in E_1$. On pose $\Theta = \{A \in \mathcal{P}(E)\ ;\ S(x_1, A) \in T_2\}$.

On remarque tout d'abord que $\Theta \supset T_1 \times T_2$. En effet, si $A = A_1 \times A_2$ avec $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$, on a $S(x_1, A) = A_2 \in T_2$ si $x_1 \in A_1$ et $S(x_1, A) = \emptyset \in T_2$ si $x_1 \notin A_1$.

On remarque ensuite que Θ est une tribu. En effet :

- $\emptyset \in \Theta$ car $S(x_1, \emptyset) = \emptyset \in T_2$,
- Θ est stable par passage au complémentaire. En effet :
  $S(x_1, A^c) = (S(x_1, A))^c$ (c'est-à-dire $S(x_1, E \setminus A) = E_2 \setminus S(x_1, A)$). On a donc $S(x_1, A^c) \in T_2$ si $A \in \Theta$, ce qui prouve que $A^c \in \Theta$.
- Θ est stable par union dénombrable. Il suffit de remarquer que :
  $S(x_1, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)}) \in T_2$ si $(A^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \Theta$.

Θ est donc une tribu contenant $T_1 \times T_2$, ceci prouve que Θ contient $\mathcal{T}_1 \otimes T_2 = T$. On a donc $S(x_1, A) \in T_2$ pour tout $A \in T$.

Pour tout $A \in T$, on peut donc définir une application f_A de E_1 dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ en posant, pour $x_1 \in E_1$,

$$f_A(x_1) = m_2(S(x_1, A)) = \int 1_{S(x_1, A)} dm_2 = \int 1_A(x_1, \cdot) dm_2 \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{7.4}$$

Etape 2. Dans cette étape, on démontre que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $A \in T$. Cette étape est plus difficile que la précédente.

On note $\Sigma = \{A \in T \,;\, f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)\}$ et on va montrer que $\Sigma \supset T$ et donc que $\Sigma = T$.

On suppose d'abord que m_2 est finie.

Il est facile de voir que Σ contient $T_1 \times T_2$. En effet, si $A = A_1 \times A_2$ avec $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$, on a alors $f_A = m_2(A_2) 1_{A_1} \in \mathcal{E}_+(E_1, T_1) \subset \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$.

On note maintenant $\mathcal{A}$ l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $T_1 \times T_2$ ($\mathcal{A}$ s'appelle l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$, voir l'exercice 7.2). Si $A \in \mathcal{A}$, il existe donc $(A^{(p)})_{p=1,\ldots,n} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \bigcup_{p=1}^n A^{(p)}$. On a alors $f_A(x_1) = m_2(S(x_1, A)) = \sum_{p=1}^n m_2(S(x_1, A^{(p)})) = \sum_{p=1}^n f_{A^{(p)}} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ car $A^{(p)} \in T_1 \times T_2 \subset \Sigma$. On a donc $\mathcal{A} \subset \Sigma$.

On montre maintenant que Σ est une classe monotone, c'est-à-dire que :

$$(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ A^{(n)} \subset A^{(n+1)}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma \tag{7.5}$$

et

$$(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ A^{(n)} \supset A^{(n+1)}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma. \tag{7.6}$$

Pour montrer (7.5), soit $(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ t.q. $A^{(n)} \subset A^{(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}$. Soit $x_1 \in E_1$. On a alors $(S(x_1, A^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ (par l'étape 1, car $\Sigma \subset T$), $S(x_1, A^{(n)}) \subset S(x_1, A^{(n+1)})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $S(x_1, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)})$. On en déduit, par continuité croissante de m_2, que $m_2(S(x_1, A)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_2(S(x_1, A^{(n)}))$ et donc que $f_A = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_{A^{(n)}}$. Ce qui prouve que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ car $f_{A^{(n)}} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma$.

La démonstration de (7.6) est similaire, il faut utiliser la continuité décroissante de m_2 au lieu de la continuité croissante. C'est pour utiliser la continuité décroissante de m_2 qu'on a besoin de m_2 finie.

On a ainsi montré que Σ est une classe monotone contenant l'algèbre $\mathcal{A}$. On peut en déduire (cela fait l'objet de l'exercice 2.13) que Σ contient la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et donc aussi la tribu engendrée par $T_1 \times T_2$ (car $T_1 \times T_2 \subset \mathcal{A}$), c'est-à-dire que Σ contient $T = T_1 \otimes T_2$. On a bien montré, finalement, que $\Sigma = T$.

Il reste maintenant à montrer que $\Sigma = T$ sans l'hypothèse m_2 finie. Comme m_2 est σ-finie, on peut construire une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $F_n \subset F_{n+1}$ et $m_2(F_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit alors la mesure $m_2^{(n)}$ par $m_2^{(n)}(A_2) = m_2(A_2 \cap F_n)$ pour tout $A_2 \in T_2$. La mesure $m_2^{(n)}$ est finie, l'étape 1 et la première partie de l'étape 2 donne donc que, pour tout $A \in T$, $f_A^{(n)} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ où $f_A^{(n)}$ est définie par 7.4 avec $m_2^{(n)}$ au lieu de m_2 (c'est-à-dire $f_A^{(n)}(x_1) = m_2^{(n)}(S(x_1, A))$ pour tout $x_1 \in E_1$). On conclut alors en remarquant que $f_A^{(n)} \uparrow f_A$ quand $n \to +\infty$, ce qui donne que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$.

On a donc montré que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $A \in T$. Ceci nous permet de définir $m : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$m(A) = \int f_A \, dm_1, \text{ pour tout } A \in T. \tag{7.7}$$

Etape 3. Dans cette étape, on montre que m, définie par (7.7), est une mesure sur T et que m vérifie (7.3) et est σ-finie.

On montre d'abord que m est bien une mesure sur T :

1. $m(\emptyset) = 0$ car $f_\emptyset(x_1) = m_2(S(x_1, \emptyset)) = m_2(\emptyset) = 0$.
2. (σ-additivité de m) Soit $(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A^{(n)} \cap A^{(m)} = \emptyset$ si $n \neq m$. On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}$. Pour $x_1 \in E_1$, on a :
$$S(x_1, A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)}) \text{ et } S(x_1, A^{(n)}) \cap S(x_1, A^{(m)}) = \emptyset \text{ si } n \neq m.$$

La σ-additivité de m_2 donne alors $m_2(S(x_1, A)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_2(S(x_1, A^{(n)}))$, c'est-à-dire

$$f_A(x_1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_{A^{(n)}}(x_1).$$

Le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.18) donne alors :

$$m(A) = \int f_A dm_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_{A^{(n)}} dm_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A^{(n)}),$$

ce qui donne la σ-additivité de m.

On montre maintenant que m vérifie (7.3). Soient $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ t.q. $m_1(A_1) < \infty$ et $m(A_2) < \infty$. On pose $A = A_1 \times A_2$. On a alors $f_A = m_2(A_2)1_{A_1}$ et donc $m(A) = \int f_A dm_1 = m_2(A_2)m_1(A_1)$.

Il reste à vérifier que m est σ-finie. Comme m_1 et m_2 sont σ-finies, il existe $(B_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ et $(B_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $E_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_1^{(n)}$, $E_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_2^{(n)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_1(B_1^{(n)}) < \infty$ et $m_2(B_2^{(n)}) < \infty$. Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on pose $C_{n,m} = B_1^{(n)} \times B_2^{(m)}$, de sorte que $E = \bigcup_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} C_{n,m}$ et $m(C_{n,m}) = m_1(B_1^{(n)}) \times m_2(B_2^{(m)}) < \infty$. Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, on en déduit que m est σ-finie.

Unicité de m.

La partie existence de la démonstration donne une mesure m sur T vérifiant (7.3). La partie unicité du théorème peut se montrer avec la proposition 2.32, nous développons cette méthode ci-après, ou avec le lemme des classes monotones (exercice 2.13) comme cela est expliqué dans la remarque 7.4.

Soit m et μ deux mesures sur T vérifiant (7.3). Pour montrer que $m = \mu$, on va appliquer la proposition 2.32. On pose :

$$\mathcal{C} = \{A_1 \times A_2,\ A_1 \in T_1,\ A_2 \in T_2,\ m_1(A_1) < \infty,\ m_2(A_2) < \infty\}.$$

Comme m_1 et m_2 sont σ−finies, il est facile de montrer que tout élément de $T_1 \times T_2$ est une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$. On en déduit que $\mathcal{C}$ engendre T. Il est clair que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et, par (7.3), on a $m = \mu$ sur $\mathcal{C}$. Puis, comme m_1 et m_2 sont σ−finies, il existe deux suites $(E_{1,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ et $(E_{2,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ d'éléments de T_1 et T_2, disjoints deux à deux et t.q. $E_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{1,n}$, $E_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{2,n}$ et $m_i(E_{i,n}) < \infty$ pour tout $i \in \{1, 2\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on pose $F_{n,m} = E_{1,n} \times E_{2,m}$. La famille $(F_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, disjoints deux à deux et t.q. $E = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} F_{n,m}$ et $m(F_{n,m}) = m_1(E_{1,n})m_2(E_{1,m}) < \infty$. On peut alors utiliser la Proposition 2.32. Elle donne $m = \mu$ sur T et termine la démonstration du théorème. ■

Remarque 7.4 Comme cela a été dit, un autre moyen de montrer la partie unicité du théorème précédent est d'utiliser le lemme des classes monotones (exercice 2.13). Supposons tout d'abord que m_1 et m_2 sont finies. On a alors (par (7.3)) :

$$m(E) = \mu(E) = m_1(E_1)m_2(E_2) < \infty.$$

La condition (7.3) donne également que $m = \mu$ sur $T_1 \times T_2$. On a alors aussi $m = \mu$ sur l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$, notée $\mathcal{A}$ (cette algèbre a été définie dans la partie existence de la démonstration). En effet, si $A \in \mathcal{A}$, il existe $(A^{(p)})_{p=1,\ldots,n} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \bigcup_{p=1}^{n} A^{(p)}$. On a alors, par additivité de m et μ, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A^{(n)}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A^{(n)}) = \mu(A)$.

On pose maintenant $\Sigma = \{A \in T\,;\, m(A) = \mu(A)\}$. On vient de montrer que $\Sigma \supset \mathcal{A}$. Il est d'autre part facile de voir que Σ est une classe monotone. En effet, les propriétés de continuité croissante et de continuité décroissante appliquées à m et μ permettent facilement de vérifier (7.5) et (7.6) (on utilise ici, pour montrer (7.6), que m et μ sont des mesures finies). Comme dans la partie existence de la démonstration, l'exercice 2.13 donne alors que Σ contient la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et donc que Σ contient $T = T_1 \otimes T_2$. Ce qui donne $\Sigma = T$ et donc $m = \mu$.

Dans le cas où m_1 et m_2 ne sont pas finies, mais σ-finies, il existe $(B_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ et $(B_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $E_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_1^{(n)}$, $E_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_2^{(n)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_1(B_1^{(n)}) < \infty$ et $m_2(B_2^{(n)}) < \infty$. On peut également supposer que

$B_1^{(n)} \subset B_1^{(n+1)}$ et $B_2^{(n)} \subset B_2^{(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (il suffit, par exemple, de remplacer $B_i^{(n)}$ par $\bigcup_{p=0}^{n} B_i^{(p)}$). Par un raisonnement analogue à celui fait dans le cas où m_1 et m_2 sont finies, on peut montrer que $m = \mu$ sur $\{A \in T\,;\, A \subset B_1^{(n)} \times B_2^{(n)}\}$. On conclut alors, en utilisant la propriété de continuité croissante, que $m = \mu$ sur T.

Remarque 7.5 Dans le théorème précédente (théorème 7.3), on peut aussi remarquer que :

1. $m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2) = \infty$ si $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ avec $m_1(A_1) \neq 0$ et $m(A_2) = \infty$ (ou avec $m_1(A_1) = \infty$ et $m_2(A_2) \neq 0$),
2. $m(A_1 \times A_2) = 0$ si $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ avec $m_1(A_1) = 0$ et $m(A_2) = \infty$ (ou avec $m_1(A_1) = \infty$ et $m_2(A_2) = 0$).

En effet, on suppose par exemple que $m_1(A_1) = 0$ et $m(A_2) = \infty$. Comme m_2 est σ-finie, on peut construire une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $F_n \subset F_{n+1}$ et $m_2(F_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors, par continuité croissante de m, $m(A_1 \times A_2) = \lim_{n\to+\infty} m(A_1 \times (A_2 \cap F_n)) = \lim_{n\to+\infty} m_1(A_1)m_2(A_2 \cap F_n) = 0$ (on a d'ailleurs aussi $m_2(A_2 \cap F_n) \uparrow \infty$, ce qui permet de conclure si $0 < m_1(A_1) < \infty$ que $m(A_1 \times A_2) = \infty$). Les autres cas se traitent de manière analogue.

Définition 7.6 (Espace produit)
L'espace (E, T, m)*, construit dans le théorème 7.3, s'appelle l'espace (mesuré) produit des espaces* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2).

Un exemple fondamental d'espace produit est l'espace $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ pour $N \geq 2$ que nous verrons dans la section 7.4.

7.3 Théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini

Théorème 7.7 (Fubini-Tonelli) *Soient* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2) *des espaces mesurés σ-finis. On note* (E, T, m) *l'espace produit (donc,* $T = T_1 \otimes T_2$ *et* $m = m_1 \otimes m_2$*). Soit* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *une fonction mesurable positive (i.e. T-mesurable positive). Alors :*

1. $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ *pour tout* $x_1 \in E_1$,

on pose

$$\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, \cdot)dm_2 = \int f(x_1, x_2)dm_2(x_2) \text{ pour tout } x_1 \in E_1,$$

de sorte que $\varphi_f : E_1 \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

2. $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$,

3. $\int f dm = \int \varphi_f dm_1 = \int \Big(\int f(x_1, x_2)dm_2(x_2)\Big)dm_1(x_1)$,

4. les mêmes résultats sont vrais en inversant les rôles de m_1 *et* m_2*, de sorte que :*

$$\int \Big(\int f(x_1, x_2)dm_2(x_2)\Big)dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1, x_2)dm_1(x_1)\Big)dm_2(x_2).$$

DÉMONSTRATION – la démonstration se fait en plusieurs étapes.

Etape 1. Soit $f = 1_A$, $A \in T$. La partie existence de m de la démonstration du théorème 7.3 donne alors que $\int f dm = m(A) = \int \varphi_f dm_1$.

Plus précisément, on a, pour tout $x_1 \in E_1$, $f(x_1, \cdot) = 1_A(x_1, \cdot) = 1_{S(x_1,A)}$, avec

$$S(x_1, A) = \{x_2 \in E_2 \text{ t.q. } (x_1, x_2) \in A\} \subset E_2$$

(comme dans la démonstration du théorème 7.3). L'étape 1 de la démonstration (de la partie existence) du théorème 7.3 donne que $S(x_1, A) \in T_2$ pour tout $x_1 \in E_1$, et donc $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$. Ceci donne le premier item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.7.

On pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, \cdot) dm_2 = m_2(S(x_1, A))$ pour tout $x_1 \in E_1$. (Cette fonction φ_f était notée f_A dans la démonstration du théorème 7.3). L'étape 2 de la démonstration du théorème 7.3 donne que $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$. Ceci donne le deuxième item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.7.

On a alors posé, dans la démonstration du théorème 7.3, $m(A) = \int \varphi_f dm_1$ et l'étape 3 a montré que m était une mesure sur T vérifiant (7.3) (et la seule mesure sur T vérifiant (7.3), d'après la partie unicité de la démonstration du théorème 7.3). Ceci donne le troisième item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.7.

Pour avoir le quatrième item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.7, il suffit de remarquer que l'on peut inverser les rôles de m_1 et m_2 dans la démonstration du théorème 7.7. On obtient ainsi que $f(\cdot, x_2) \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $x_2 \in E_2$. On pose alors $\psi_f(x_2) = \int f(\cdot, x_2) dm_1$. On obtient que $\psi_f \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$. Enfin, on pose $\tilde{m}(A) = \int \psi_f dm_2$ et on obtient que $\tilde{m}$ est une mesure sur T vérifiant (7.3). La partie unicité de la démonstration du théorème 7.3 donne alors que $m = \tilde{m}$, ce qui est exactement le quatrième item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.7.

Etape 2. On prend maintenant $f \in \mathcal{E}_+(E, T)$.
Il existe donc $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $A_1, \ldots, A_n \in T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$.

On a alors, pour tout $x_1 \in E_1$, $f(x_1, \cdot) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ car l'étape 1 donne $1_{A_i}(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ pour tout i. Ce qui donne le premier item de la conclusion du théorème 7.7.

On pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, \cdot) dm_2$ pour tout $x_1 \in E_1$. On a $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ car $\varphi_f = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{1_{A_i}}$ et que $\varphi_{1_{A_i}} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout i (d'après l'étape 1). Ce qui donne le deuxième item de la conclusion du théorème 7.7.

Enfin, on utilise la linéarité de l'intégrale et l'étape 1 pour $f = 1_{A_i}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i \int \varphi_{1_{A_i}} dm_1 = \int (\sum_{i=1}^n a_i \varphi_{1_{A_i}}) dm_1 \\ = \int \Big(\sum_{i=1}^n a_i \int 1_{A_i}(x_1, \cdot) dm_2 \Big) dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1, \cdot) dm_2 \Big) dm_1(x_1) \\ = \int \varphi_f dm_1.\end{aligned}$$

Ce qui donne le troisième item de la conclusion du théorème 7.7.

Pour avoir le quatrième item de la conclusion du théorème 7.7, il suffit de changer les rôles de m_1 et m_2.

Etape 3. On peut enfin prendre $f \in \mathcal{M}_+(E, T)$. Il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+(E, T)$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$.

On a donc, pour tout $x_1 \in E_1$, $f_n(x_1, \cdot) \uparrow f(x_1, \cdot)$ quand $n \to +\infty$. On en déduit que $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ car (d'après l'étape 2) $f_n(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ce qui donne le premier item).

Le théorème de convergence monotone (pour m_2) donne que

$$\varphi_{f_n}(x_1) = \int f_n(x_1, \cdot) dm_2 \uparrow \int f(x_1, \cdot) dm_2 = \varphi_f(x_1)$$

pour tout $x_1 \in E_1$. Donc, $\varphi_{f_n} \uparrow \varphi_f$. Comme $\varphi_{f_n} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ (d'après l'étape 2), on en déduit que $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ (ce qui donne le deuxième item).

On applique maintenant le théorème de convergence monotone pour m_1 et pour m, ils donnent :

$$\int \varphi_{f_n} dm_1 \uparrow \int \varphi_f dm_1 \text{ et } \int f_n dm \uparrow \int f dm \text{ quand } n \to +\infty.$$

L'étape 2 donne $\int f_n dm = \int \varphi_{f_n} dm_1$, on en déduit donc que $\int f dm = \int \varphi_f dm_1$. Ce qui donne le troisième item de la conclusion du théorème 7.7.

Enfin, ici encore, pour avoir le quatrième item de la conclusion du théorème 7.7, il suffit de changer les rôles de m_1 et m_2. ■

Corollaire 7.8 *Soient* (E_1,T_1,m_1) *et* (E_2,T_2,m_2) *des espaces mesurés σ-finis. On note* (E,T,m) *l'espace produit. Soit* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction* T*-mesurable. Alors :*

$$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m) \Leftrightarrow \int\Big(\int |f| dm_2\Big)dm_1 < +\infty \Leftrightarrow \int\Big(\int |f| dm_1\Big)dm_2 < +\infty. \tag{7.8}$$

DÉMONSTRATION – Le corollaire découle immédiatement du théorème 7.7 appliqué à la fonction $|f|$ qui appartient à $\mathcal{M}_+(E,T)$. Dans (7.8), la notation $(\int |f| dm_2)dm_1$ signifie :

$$\Big(\int |f(x_1,x_2)| dm_2(x_2)\Big)dm_1(x_1).$$

La notation est similaire en inversant les rôles de m_1 et m_2. ■

Voici une conséquence immédiate du théorème 7.7 pour la mesurabilité :

Proposition 7.9 *Soient* (E_1,T_1) *et* (E_2,T_2) *deux espaces mesurables. On pose* $E = E_1 \times E_2$ *et* $T = T_1 \otimes T_2$*. Soit* $f \in \mathcal{M}(E,T)$ *(c'est-à-dire* $f : E \to \mathbb{R}$*,* T*-mesurable). Alors :*

1. $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}(E_2,T_2)$*, pour tout* $x_1 \in E_1$*,*

2. $f(\cdot,x_2) \in \mathcal{M}(E_1,T_1)$*, pour tout* $x_2 \in E_2$*.*

DÉMONSTRATION – La démonstration est facile, il suffit de remarquer que $f = f^+ - f^-$ et que $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+(E, T)$. Le premier item de la conclusion du théorème 7.7 donne alors, pour tout $x_1 \in E_1$, $f^+(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ et $f^-(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$. Comme $f(x_1,\cdot) = f^+(x_1,\cdot) - f^-(x_1,\cdot)$, on en déduit que $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$. En changeant les rôles de (E_1, T_1) et (E_2, T_2), on montre aussi que $f(\cdot,x_2) \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$, pour tout $x_2 \in E_2$. ■

Remarque 7.10 La réciproque de la proposition précédente est fausse. Soient (E_1,T_1) et (E_2,T_2) deux espaces mesurables, $E = E_1 \times E_2$ et $T = T_1 \otimes T_2$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ t.q.

1. $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}(E_2,T_2)$, pour tout $x_1 \in E_1$,
2. $f(\cdot,x_2) \in \mathcal{M}(E_1,T_1)$, pour tout $x_2 \in E_2$.

Alors, f n'est pas forcément T-mesurable. Un exemple est donné dans l'exercice 7.4. Un cas particulier intéressant pour laquelle cette réciproque est vraie est donné par la proposition 7.11.

Proposition 7.11 *Soient* (E_1,T_1) *et* (E_2,T_2) *deux espaces mesurables. On pose* $E = E_1 \times E_2$ *et* $T = T_1 \otimes T_2$*. Soient* $F_1 \in \mathcal{M}(E_1,T_1)$ *et* $F_2 \in \mathcal{M}(E_2,T_2)$*. On définit* $f : E \to \mathbb{R}$ *par* $f(x_1,x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)$ *pour tout* $(x_1,x_2) \in E$*. Alors* f *est* T*-mesurable (c'est-à-dire* $f \in \mathcal{M}(E,T)$*).*

DÉMONSTRATION – On procède en 3 étapes.

Etape 1. On prend d'abord $F_1 = 1_{A_1}$ et $F_2 = 1_{A_2}$ avec $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$. On a alors $f = 1_{A_1 \times A_2} \in \mathcal{M}(E,T)$ car $A_1 \times A_2 \in T_1 \times T_2 \subset T_1 \otimes T_2 = T$.

Etape 2. On prend maintenant $F_1 \in \mathcal{E}(E_1,T_1)$ et $F_2 \in \mathcal{E}(E_2,T_2)$.

Il existe alors $a_1^{(1)},\ldots,a_n^{(1)} \in \mathbb{R}$, $A_1^{(1)},\ldots,A_n^{(1)} \in T_1$, $a_1^{(2)},\ldots,a_m^{(2)} \in \mathbb{R}$ et $A_1^{(2)},\ldots,A_m^{(2)} \in T_2$ t.q. :

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} A_i^{(1)} \text{ et } A_i^{(1)} \cap A_k^{(1)} = \emptyset \text{ si } i \neq k,$$

$$F_2 = \sum_{j=1}^{m} a_j^{(2)} A_j^{(2)} \text{ et } A_j^{(2)} \cap A_k^{(1)} = \emptyset \text{ si } j \neq k.$$

On a alors $f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i^{(1)} a_j^{(2)} 1_{A_i^{(1)} \times A_j^{(2)}} \in \mathcal{E}(E,T) \subset \mathcal{M}(E,T)$.

Etape 3. On prend enfin $F_1 \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$ et $F_2 \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$. Il existe $(F_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{E}(E_1, T_1)$ et $(F_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{E}(E_2, T_2)$ t.q. $F_n^{(1)}(x_1) \to F_1(x_1)$ pour tout $x_1 \in E_1$ et $F_n^{(2)}(x_2) \to F_2(x_2)$ pour tout $x_2 \in E_2$. On en déduit que $f_n(x_1, x_2) = F_n^{(1)}(x_1)F_n^{(2)}(x_2) \to f(x_1, x_2)$ pour tout $(x_1, x_2) \in E$ et donc que $f \in \mathcal{M}(E, T)$ car $f_n \in \mathcal{M}(E, T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (étape 2). ■

Théorème 7.12 (Fubini) *Soient* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2) *des espaces mesurés σ-finis. On note* (E, T, m) *l'espace produit. Soit* f *une fonction* T*-mesurable de* E *dans* $\mathbb{R}$ *(c'est-à-dire* $f \in \mathcal{M}(E,T)$*) et intégrable pour la mesure m, c'est-à-dire* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. *Alors :*

1. $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2, T_2, m_2)$ *pour presque tout* $x_1 \in E_1$,

on pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1,\cdot)dm_2$ *pour* $x_1 \in E_1$ *t.q.* $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2, T_2, m_2)$*. La fonction* φ_f *est donc définie p.p. sur* E_1 *(et à valeurs dans* $\mathbb{R}$*).*

2. $\varphi_f \in L^1_{\mathbb{R}}(E_1, T_1, m_1)$ *(au sens : il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_1, T_1, m_1)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.).*

3. $\int f dm = \int \varphi_f dm_1 = \int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1)$,

4. les mêmes résultats sont vrais en inversant les rôles de m_1 *et* m_2*, de sorte que :*

$$\int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_1(x_1) \Big) dm_2(x_2).$$

DÉMONSTRATION – Comme $f \in \mathcal{M}(E,T)$, on a $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+(E,T)$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) à f^+ et f^-. Il donne :

1. $f^+(x_1,\cdot), f^-(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$, pour tout $x_1 \in E_1$,
2. $\varphi_{f^+}, \varphi_{f^-} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ avec $\varphi_{f^\pm}(x_1) = \int f^\pm(x_1,\cdot)dm_2$ pour tout $x_1 \in E_1$.
3. $\int f^\pm dm = \int \varphi_{f^\pm} dm_1$.

Le premier item donne que $f(x_1,\cdot) = f^+(x_1,\cdot) - f^-(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$ (noter que f, f^+ et f^- sont à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Comme $\int f^+ dm < \infty$ et $\int f^- dm < \infty$ (car $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$), le troisième item donne que $\varphi_{f^+} < \infty$ p.p. (sur E_1) et que $\varphi_{f^-} < \infty$ p.p. (sur E_1). On a donc $f^+(x_1,\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2, T_2, m_2)$ et $f^-(x_1,\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2, T_2, m_2)$ pour presque tout $x_1 \in E_1$. On en déduit donc que $f(x_1,\cdot) = f^+(x_1,\cdot) - f^-(x_1,\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2, T_2, m_2)$ pour presque tout $x_1 \in E_1$. Ce qui donne le premier item de la conclusion.

La fonction φ_f est donc définie p.p. sur E_1 et on a $\varphi_f = \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}$ p.p. (on a $\varphi_f(x_1) = \varphi_{f^+}(x_1) - \varphi_{f^-}(x_1)$ en tout point x_1 t.q. $\varphi_{f^+}(x_1) < \infty$ et $\varphi_{f^-}(x_1) < \infty$). Comme $\varphi_{f^+} < \infty$ et $\varphi_{f^-} < \infty$ p.p, on peut trouver $A \in T_1$ t.q. $m_1(A) = 0$ et $\varphi_{f^+} < \infty$ et $\varphi_{f^-} < \infty$ sur $A^c = E_1 \setminus A$. En posant $g = \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}$ sur A^c et $g = 0$ sur A, on a donc $g \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$, $g = \varphi_f$ p.p. et $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_1, T_1, m_1)$ car $\int |g| dm_1 \leq \int \varphi_{f^+} dm_1 + \int \varphi_{f^-} dm_1 < \infty$. Ceci donne le deuxième item de la conclusion (le fait que φ_f appartienne à $L^1_{\mathbb{R}}(E_1, T_1, m_1)$) et donne aussi le troisième item car :

$$\begin{aligned}\int \varphi_f dm_1 = \int g dm_1 &= \int \varphi_{f^+} dm_1 - \int \varphi_{f^-} dm_1 \\ &= \int f^+ dm - \int f^- dm = \int f dm.\end{aligned}$$

Enfin, comme pour le théorème de Fubini-Tonelli, le quatrième item de la conclusion s'obtient en changeant les rôles de m_1 et m_2. ■

Le théorème de Fubini est souvent utilisé sous la forme du corollaire suivant :

Corollaire 7.13 *Soit* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2) *des espaces mesurés σ-finis,* (E, T, m) *l'espace produit et* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction* T*-mesurable t.q. :*

$$\int\Big(\int |f(x_1,x_2)|dm_2(x_2)\Big)dm_1(x_1) < +\infty$$

ou

$$\int\Big(\int |f(x_1,x_2)|dm_1(x_1)\Big)dm_2(x_2) < +\infty.$$

Alors :

$$\int\Big(\int f(x_1,x_2)dm_2(x_2)\Big)dm_1(x_1) = \int\Big(\int f(x_1,x_2)dm_1(x_1)\Big)dm_2(x_2). \tag{7.9}$$

(Toutes les intégrales ayant bien un sens.)

DÉMONSTRATION – Le corollaire est une conséquence immédiate du théorème 7.12 et de l'équivalence (7.8). ■

Remarque 7.14 (Contre-exemple lié au théorème de Fubini) On cherche ici à construire une fonction pour laquelle la conclusion du théorème de Fubini n'est pas vérifiée. Soit a une fonction (continue) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = a(x)$ si $x \geq 0$ et $x \leq y < 2x$, $f(x,y) = -a(x)$ si $x \geq 0$ et $2x \leq y < 3x$, $f(x,y) = 0$ si $x < 0$ ou $x \geq 0$ et $y \notin [x,3x]$. On pose $b(x) = x\,a(x)$. On peut montrer que les hypothèses du théorème de Fubini ne sont vérifiées que si $b \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. En prenant par exemple $a(x) = 1/(1+x)^2$, on montre que $\int(\int f(x,y)dy)dx \neq \int(\int f(x,y)dx)dy$ (voir l'exercice 7.5).

7.4 Mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^N$

On a déjà vu que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $N \geq 1$ (exercice 2.6 pour $N = 2$ et exercice 7.1). Le paragraphe précédent permet alors de définir la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$ (c'est-à-dire sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^N$) pour tout $N \geq 1$.

Définition 7.15 (Mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$)

1. *La mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *est la mesure* $\lambda \otimes \lambda$*, on la note* λ_2.
2. *Par récurrence sur* N*, la mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*,* $N \geq 3$*, est la mesure* $\lambda_{N-1} \otimes \lambda$*, on la note* λ_N.

On note $L^1(\mathbb{R}^N)$ l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$, et pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on note

$$\int f(x)d\lambda_N(x) = \int f(x)dx.$$

On donne maintenant quelques propriétés de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Il s'agit de propriétés élémentaires ou de généralisations simples de propriétés vues pour la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Les démonstrations seront proposées en exercices.

Proposition 7.16 (Propriétés élémentaires de λ_N)
Soit $N \geq 2$. *On rappelle que* λ_N *est la mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

1. La mesure λ_N *est* σ*-finie.*

2. Soit $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Alors,* $\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *et*

$$\lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i).$$

3. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ *et* $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$ *t.q.* $\alpha_i < \beta_i$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, N\}$. *Alors :*

$$\lambda_N(\prod_{i=1}^N]\alpha_i, \beta_i[) = \prod_{i=1}^N \lambda(]\alpha_i, \beta_i[) = \prod_{i=1}^N (\beta_i - \alpha_i).$$

4. Soit K *un compact de* $\mathbb{R}^N$ *(noter que* $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*). Alors,* $\lambda_N(K) < +\infty$.

5. Soit O *un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^N$. *Alors,* $\lambda_N(O) > 0$.

6. Soit $f, g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. *Alors* $f = g$ *p.p. (c'est-à-dire* λ_N*-p.p.) implique* $f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$.

7. $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. *(En confondant* f *avec sa classe, on écrira donc souvent* $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N)$.*)*

DÉMONSTRATION – Comme λ_N est une mesure produit, le fait que λ_N est σ-finie est (par récurrence sur N) une conséquence du théorème donnant l'existence (et l'unicité) de la mesure produit (théorème 7.3) car ce théorème donne que le produit de mesures σ-finies est σ-finie.

La démonstration des autres propriétés fait l'objet de l'exercice 7.11. ■

Une propriété très importante de λ_N est sa régularité, c'est-à-dire que pour tout élément A de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert de $\mathbb{R}^N$ et F fermé de $\mathbb{R}^N$ tels que

$$F \subset A \subset O \text{ et } \lambda_N(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$

Cette propriété est une conséquence du fait que toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts, est régulière (proposition 7.17).

Proposition 7.17 (Régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts) *Soit* m *une mesure sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *t.q.* $m(K) < \infty$ *pour tout compact* K *de* $\mathbb{R}^N$. *(Noter que ceci est vrai pour* $m = \lambda_N$.*) Alors :*

1. Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* O *ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* F *fermé de* $\mathbb{R}^N$ *tels que :*

$$F \subset A \subset O \text{ et } m(O \setminus F) \leq \varepsilon. \tag{7.10}$$

2. Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, *on a* $m(A) = \inf\{m(O),\ O \text{ ouvert t.q. } A \subset O\}$.

DÉMONSTRATION – Cette proposition fait l'objet de l'exercice 7.12. ■

On donne maintenant des généralisations au cas de λ_N de propriétés déjà vues pour λ.

Proposition 7.18 (Densité de C_c dans $L^1(\mathbb{R}^N)$) *Pour tout* $N \geq 1$, *l'espace* $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ *est dense dans* $L^1(\mathbb{R}^N)$ *(c'est-à-dire que, pour tout* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ *t.q.* $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$*).*

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 7.13, elle découle essentiellement de la régularité de λ_N. Cette démonstration est très voisine de celle faite pour le cas $N = 1$, théorème 5.20. ■

Comme cela a déjà été dit après le théorème 5.20, le résultat de densité que nous venons d'énoncer n'est pas limité à la mesure de Lebesgue. Il est vrai pour toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts. Il est aussi vrai en remplaçant C_c par C_c^∞. On obtient donc le théorème suivant :

Théorème 7.19 (Densité de C_c^∞ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$) *Soit $N \geq 1$ et μ sur une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts. Alors, l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mu)$ (c'est-à-dire que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mu)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$).*

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 7.14. ■

Proposition 7.20 (Invariance par translation) *Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$, on pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ (noter que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$). Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on a alors $\varphi(A) = \{\varphi(x), x \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \lambda_N(A)$.*

Pour $\alpha_i = 1$ pour tout i, cette propriété s'appelle invariance par translation de λ_N.

DÉMONSTRATION – Cette proposition a déjà été vue pour $N = 1$, proposition 2.49. La démonstration de la proposition 2.49 utilisait , par exemple, le fait que tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2 (et la régularité de λ). La démonstration proposée ici pour $N \geq 1$ utilise une récurrence sur N et la partie unicité du théorème 7.3 sur la mesure produit. Elle fait l'objet de l'exercice 7.15.

On peut aussi noter que la partie unicité du théorème 7.3 peut être faite (voir la remarque 7.4) avec le lemme des classes monotones (exercice 2.13). Ce lemme pourrait aussi être utilisé pour démontrer la proposition 2.49 (au lieu du théorème de régularité et du fait que tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2). ■

Proposition 7.21 (Changement de variables simple)
Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$.
Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$, on pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ (de sorte que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$). Alors :

1. Pour tout $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, on a $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$ et :

$$\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N.$$

2. Pour tout $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, on a $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1$ et :

$$\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration est une conséquence simple de la proposition 7.20. Elle fait l'objet de l'exercice 7.16.

Noter aussi que $\prod_{i=1}^N |\alpha_i|$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de φ au point x. Cette matrice est notée $D\varphi(x)$, elle ne dépend pas de x pour les applications considérées dans cette proposition. Cette proposition sera généralisée au théorème 7.29. ■

7.5 Convolution

On rappelle que $L^1(\mathbb{R}^N) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et que, pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\int f d\lambda_N = \int f(x) d\lambda_N(x) = \int f(x) dx$ (c'est-à-dire que dx signifie toujours $d\lambda_N(x)$).

On note aussi $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On souhaite définir la fonction convoluée de f et g, c'est-à-dire définir $f * g$ par :

$$f * g(x) = \int f(t) g(x-t) dt. \tag{7.11}$$

La définition de cette fonction nécessite les deux conditions suivantes :

1. Il faut que la définition ne dépende pas des représentants choisis pour f et g.
2. Il faut que, ayant choisi des représentants pour f et g, encore notés f et g, la fonction $g(x-\cdot)f(\cdot)$ appartienne à $L^1(\mathbb{R}^N)$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ t.q. $g(x-\cdot)f(\cdot) = h$ p.p."). Ceci n'est pas immédiat car, en général, le produit deux fonctions intégrables n'est pas une fonction intégrable.

La condition 1 est satisfaite, car, pour $x \in \mathbb{R}^N$, si f, f_1, g et g_1 sont des fonctions de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$f = f_1 \text{ p.p., } g = g_1 \text{ p.p. } \Rightarrow f(\cdot)g(x-\cdot) = f_1(\cdot)g_1(x-\cdot) \text{ p.p..} \tag{7.12}$$

(p.p. signifiant ici λ_N-p.p..) En effet, il suffit de remarquer que si $f = f_1$ p.p. et $g = g_1$ p.p., il existe $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\lambda_N(A) = \lambda_N(B) = 0$, $f = f_1$ sur A^c et $g = g_1$ sur B^c. Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on a alors $f(\cdot)g(x-\cdot) = f_1(\cdot)g_1(x-\cdot)$ sur $A^c \cap B_x^c = (A \cup B_x)^c$ avec $B_x = \{x - z, z \in B\}$. On en déduit bien $f(\cdot)g(x-\cdot) = f_1(\cdot)g_1(x-\cdot)$ p.p. car $\lambda_N(A \cup B_x) \le \lambda_N(A) + \lambda_N(B_x) = \lambda_N(A) + \lambda_N(B) = 0$ (on utilise ici la propriété d'invariance par translation donnée dans la proposition 7.20).

On en déduit que, si Si f et f_1 [resp. g et g_1] sont des représentants d'un même élément de $L^1(\mathbb{R}^N)$, on a $f(.)g(x-.) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si $f_1(.)g_1(x-.) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et, si $f(.)g(x-.) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on a $\int f(t)g(x-t)dt = \int f_1(t)g_1(x-t)dt$.

On montre dans la proposition suivante que la condition 2 est satisfaite pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Proposition 7.22 (Convolution) *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (que l'on confond avec l'un de leurs représentants). Alors :*

- *Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $g(x-\cdot)f(\cdot)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ (en la confondant avec sa classe). On pose donc : $f * g(x) = \int f(t)g(x-t)dt$. La fonction $f * g$ est donc définie p.p. sur $\mathbb{R}^N$.*
- *$f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ t.q. $f * g = h$ p.p.").*
- *$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$.*

DÉMONSTRATION – On donne la démonstration pour $N = 1$ (le cas $N > 1$ est similaire, en ayant d'abord montré que $\lambda_{2N} = \lambda_N \otimes \lambda_N$).

On choisit des représentants de f et g, de sorte que $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On souhaite appliquer le théorème de Fubini (théorème 7.12) à $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $H(x, y) = f(y)g(x-y)$, avec les espaces mesurés $(E_i, T_i, m_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $i = 1, 2$.

Comme λ est σ-finie, pour appliquer le théorème de Fubini, il suffit de vérifier que H est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable et que $\int(\int |H(x, y)| dx) dy < \infty$.

On montre d'abord que H est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable. On a $H = H_1 \circ \psi$ avec :

$$H_1 : (x,y) \mapsto f(x)g(y), \ \ \psi : (x,y) \mapsto (y, x-y).$$

La fonction H_1 est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (car f et g sont mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on applique ici la proposition 7.11) et ψ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ car continue ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont toujours munis de leur tribu borélienne). La fonction H est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions mesurables. On peut maintenant calculer l'intégrale de $|H|$:

$$\int (\int |H(x,y)|dx)dy = \int (\int |f(y)g(x-y)|dx)dy = \int |f(y)|(\int |g(x-y)|dx)dy.$$

La proposition 7.21 donne $\int |g(x-y)|dx = \int |g(x)|dx = \|g\|_1$, Donc :

$$\int (\int |H(x,y)|dx)dy = \|g\|_1 \int |f(y)|dy = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.$$

Le théorème de Fubini peut donc s'appliquer. Il donne que $H(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, $g(x-\cdot)f(\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci montre bien que $f * g$ est définie p.p.. Le théorème de Fubini donne alors aussi que $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ t.q. $f * g = h$ p.p.").

Enfin pour montrer que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, il suffit de remarquer que :

$$\|f * g\|_1 = \int |\int f(y)g(x-y)dy|dx \leq \int (\int |H(x,y)|dx)dy = \|g\|_1 \|f\|_1.$$

■

Remarque 7.23 On a vu précédemment que $L^1(\mathbb{R}^N)$ muni de l'addition (loi de composition interne), de la multiplication par un scalaire (loi de composition externe) et de la norme $\|\cdot\|_1$ est un espace de Banach. L'ajout de la convolution (loi de composition interne) confère à $L^1(\mathbb{R}^N)$ la structure d'algèbre de Banach.

On sait aussi que $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni de l'addition, de la multiplication interne, de la multiplication par un scalaire et de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_u$ est aussi une algèbre de Banach. En fait, nous montrerons par la suite qu'il existe un isomorphisme d'algèbre, appelé transformation de Fourier, entre $L^1(\mathbb{R}^N)$ et son image (par cette transformation) dans $C_b(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$.

Remarque 7.24 On donne ici quelques propriétés supplémentaires de la convolution.

Soit $N \geq 1$. Pour $p \in [1,\infty]$, on pose $L^p(\mathbb{R}^N) = L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda)$.

1. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On a alors $f * g = g * f$ p.p.. Ceci découle de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue (propositions 7.20 et 7.21) et est démontré dans l'exercice 7.18.
2. Soit$1 < p < \infty$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors, $f * g$ est définie p.p. sur $\mathbb{R}^N$, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$. Cette propriété fait l'objet de l'exercice 7.20.
3. Soit $p, q \in [1,\infty]$ t.q. $(1/p) + (1/q) = 1$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Alors, $f * g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^N$ et $f * g \in C_b(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, voir l'exercice 8.6.
4. Soit $p \in [1,\infty]$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$. Alors, $f * g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^N$ et $f * g \in C_\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, voir l'exercice 7.19.
5. (Régularisation par convolution) Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. On dit que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ si $f 1_K \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout compact K de R^N. On suppose que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $g \in C_c^k(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$. Alors, $f * g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^N$ et $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ (voir l'exercice 7.19, noter que $L^p(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$).
6. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On suppose que f et g sont à support compact (f à support compact signifie qu'il existe K, compact de $\mathbb{R}^N$ t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c). Alors, la fonction $f * g$ est aussi à support compact. Ceci fait partie de l'exercice 7.18.

La convolution est un outil très utile pour “régulariser” des fonctions. Elle est à la base de résultats de densité fondamentaux que nous verrons dans le chapitre suivant (densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour $p<\infty$, par exemple).

Il est aussi intéressant de généraliser la convolution de fonctions en convolution de mesures. On commence par remarquer qu'une fonction f dans $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$ (voir la remarque 7.24) est entièrement déterminée par la mesure qu'elle induit sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire par la mesure m définie par $m=f\lambda_N$. Ceci est précisé dans le lemme suivant (en remarquant que $\int\varphi dm=\int\varphi f d\lambda_N$ pour tout $\varphi\in C_c(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$).

Lemme 7.25 *Soit* $N\geq 1$ *et* $f,g\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$ *t.q.* $\int f\varphi d\lambda_N=\int g\varphi d\lambda_N$, *pour tout* $\varphi\in C_c(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$. *Alors,* $f=g$ *p.p..*

DÉMONSTRATION – Soit $M\in\mathbb{N}^\star$. On note B_M la boule (fermée) de centre 0 et rayon M dans $\mathbb{R}^N$ et h_M la fonction définie par :

$$h_M(x)=\begin{cases} f(x)-g(x) & \text{si } x\in B_M \text{ et } |f(x)-g(x)|\leq M,\\ \\ 0 & \text{si } x\notin B_M \text{ ou } |f(x)-g(x)|>M,\end{cases}$$

On a $h_M\in L^1(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$ (car B_M est un compact de $\mathbb{R}^N$). Comme $C_c(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$ (théorème 5.20 pour $d=1$ et théorème 7.18 pour $N\geq 1$), il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\varphi_n\to h_M$ dans $L^1(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$ quand $n\to+\infty$. On peut aussi supposer (quitte à extraire une sous–suite) que $\varphi_n\to h_M$ p.p. (théorème 6.11). Enfin, en remplaçant φ_n par $\max(\min(\varphi_n,M),-M)$ on obtient :

$$\begin{aligned}&\varphi_n\in C_c(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N},\\ &\varphi_n\to h_M \text{ p.p.},\\ &|\varphi_n|\leq M \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Comme $\varphi_n\in C_c(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, on a $\int(f-g)\varphi_n d\lambda_N=0$. Le théorème de convergence dominée (la domination est par $M1_{B_M}|f-g|$) donne alors $\int h_M(f-g)d\lambda_N=0$. En faisant maintenant tendre M vers l'infini, le théorème de convergence monotone donne $\int|f-g|d\lambda_N=0$, et donc $f=g$ p.p. ■

Pour que la convolution de mesures soit une généralisation de la convolution de fonctions, on souhaite que $m*\mu=(f*g)\lambda_N$, lorsque $m=f\lambda_N$ et $g=g\lambda_N$ avec $f,g\in L^1(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$ (et donc $f*g\in L^1(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$). Noter que m, μ et $m*\mu$ sont des mesures signées. Soient $f,g\in L^1(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$. On pose $m=f\lambda_N$ et $g=g\lambda_N$. Pour toute fonction φ borélienne bornée de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ (par exemple, $\varphi\in C_b(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$),

$$\int(f*g)\varphi d\lambda_N=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)dy\right)\varphi(x)dx.$$

(On rappelle que dx désigne $d\lambda_N(x)$). En utilisant le théorème de Fubini, qui s'applique bien ici car

$$\int\int|f(x-y)g(y)\varphi(x)|dxdy\leq\|\varphi\|_\infty\|f\|_1\|g\|_1,$$

et avec le changement de variable $z=x-y$ (pour y fixé), on obtient :

$$\begin{aligned}\int(f*g)\varphi d\lambda_N&=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)\varphi(x)dx\right)g(y)dy\\ &=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}f(z)\varphi(z+y)dz\right)g(y)dy.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\int (f*g)\varphi d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(z+y)dm(z)\right)d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^{2N}}\varphi(y+z)d(m\otimes\mu)(z,y), \tag{7.13}$$

où la dernière égalité découle de la définition de $m\otimes\mu$. Plus précisément, si m et μ sont des mesures finies (c'est-à-dire des applications σ-additives de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathbb{R}^+$), la dernière égalité de 7.13 est donnée par le troisième item du théorème de Fubini (théorème 7.12). Si m et μ sont des mesures signées, on se ramène au cas précédent avec la décomposition de Hahn (proposition 2.34) qui donne $m = m^+ - m^-$ et $\mu = \mu^+ - \mu^-$. La mesure $m\otimes\mu$ est alors définie à partir de $m^\pm \otimes \mu^\pm$.

On est ainsi amené naturellement à définir $m*\mu$ en utilisant le deuxième membre de (7.13) pour définir $\int \varphi d(m*\mu)$.

Définition 7.26 (Convolution de mesures) *Soit* $N \geq 1$ *et* m, μ *des mesures signées sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*. On définit la mesure signée* $\mu*\nu$ *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *par :*

$$m*\mu(A) = \int_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2N})} 1_A(x+y)d(m\otimes\mu)(x,y) \text{ pour tout } A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

où $m\otimes\nu = m^+\otimes\mu^+ + m^-\otimes\mu^- - m^-\otimes\mu^+ - m^+\otimes\mu^-$ *et* $m^\pm$ $\mu^\pm$ *sont données par la décomposition de Hahn de* m *et* μ *(proposition 2.34).*

Le fait que $m*\mu$ est une mesure signée sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est facile (la σ-additivité de $m*\mu$ découle, par exemple, du théorème de convergence dominée). On déduit de cette définition la proposition suivante.

Proposition 7.27 *Soit* $N \geq 1$ *et* m, μ *des mesures signées sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

1. On a alors, pour tout φ *borélienne bornée de* $\mathbb{R}^N$ *dans* $\mathbb{R}$ *(par exemple,* $\varphi\in C_b(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$*) :*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\varphi d(m*\mu) = \int_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2N})}\varphi(x+y)d(m\otimes\mu)(x,y).$$

2. Si m *et* μ *sont des probabilités, la mesure* $m*\mu$ *est aussi une probabilité.*

3. Si $f,g\in L^1(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$*,* $m = f\lambda_N$ *et* $\mu = g\lambda_N$*, on a* $m*\mu = (f*g)\lambda_N$.

DÉMONSTRATION – Le premier item se démontre, comme souvent, en considérant des fonctions étagées, puis en écrivant φ comme limite de fonctions étagées (bornées par la borne supérieure de $|\varphi|$, exercice 7.22). Le deuxième item est immédiat en remarquant que $m*\mu(A)\geq 0$ si m et μ sont des mesures (positives) et $m*\mu(\mathbb{R}^N) = m(\mathbb{R}^N)\mu(\mathbb{R}^N)$. Enfin, le troisième item a été vu avant la proposition 7.27. ■

Remarque 7.28 Il aurait aussi été possible de définir $m*\mu$ grâce au théorème de Riesz dans $C_0(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ (théorème 5.16 pour $N\geq 1$). Si m, μ sont des mesures signées sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (ou, directement, des formes linéaires continues sur $C_0(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$). On définit, l'application L de $C_0(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$L(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x+y)dm(x)d\mu(y), \forall\varphi\in C_0(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}). \tag{7.14}$$

L'application L est une forme linéaire continue sur $C_0(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$. Par le théorème de Riesz, il existe donc une unique mesure de Radon, notée τ (c'est la mesure convoluée de m et μ) t.q. :

$$L(\varphi) = \int\varphi(s)d\tau(s). \tag{7.15}$$

7.6 Formules de changement de variable

La proposition 7.21 donne un résultat sur les changements de variables "simples". On donne maintenant une généralisation dans le cas où les intégrales portent sur des ouverts bornés de $\mathbb{R}^N$.

Théorème 7.29 (Formules de changement de variable) *Soit* $N \geq 1$, U *et* V *des ouverts bornés de* $\mathbb{R}^N$ *et* φ *un* C^1*-difféomorphisme de* U *dans* V *(i.e.* φ *est une bijection de* U *dans* V, $\varphi \in C^1(U,V)$ *et* $\varphi^{-1} \in C^1(V,U)$*). On note* $D\varphi(y)$ *la matrice jacobienne de* φ *en* y *et* $Det(D\varphi)$ *la fonction* $y \mapsto Det(D\varphi(y))$.

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$. *Alors,*

$$(f \circ \varphi)|Det(D\varphi)|1_U \in \mathcal{M}_+ \text{ et } \int_V f(x)dx = \int_U f(\varphi(y))|Det(D\varphi(y))|dy.$$

2. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ *t.q.* $f1_V \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$. *Alors,*

$$(f \circ \varphi)|Det(D\varphi)|1_U \in \mathcal{L}^1 \text{ et } \int_V f(x)dx = \int_U f(\varphi(y))|Det(D\varphi(y))|dy.$$

DÉMONSTRATION – Comme φ est de classe C^1, la fonction $(f \circ \varphi)|Det(D\varphi)|1_U$ est mesurable si f est mesurable. Il est plus difficile de montrer l'égalité donnée dans l'item 1 du théorème. Cette démonstration n'est pas faite ici. Elle consiste à se ramener par un procédé de localisation au cas de changements de variable affines.

Le deuxième item du théorème est une conséquence facile du premier. En effet, soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ t.q. $f1_V \in \mathcal{L}^1$. En appliquant le premier item à la fonction $|f| \in \mathcal{M}_+$, on obtient que $(f \circ \varphi)|Det(D\varphi)|1_U \in \mathcal{L}^1$. Puis en appliquant le premier item à f^+ et f^- et en faisant la différence, on obtient bien que $\int_V f(x)dx = \int_U f(\varphi(y))|Det(D\varphi(y))|dy$.

■

Un exemple de changement de variable On conclut cette section en donnant l'exemple des coordonnées polaires pour $N = 2$. Soit $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (ou $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$). On veut calculer (par exemple) $\int_{B_1} f(x)dx$, où B_1 est la boule unité (ouverte) de $\mathbb{R}^2$, en passant en coordonnée polaires.

On a donc $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 ; |x| < 1\}$, où $|\cdot|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$ si $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$.

On pose $L = \{(x_1, 0)^t, x_1 \in [0,1[\}$ et on remarque que $\lambda_2(L) = \lambda([0,1[) \times \lambda(\{0\}) = 0$. Donc, en posant $V = B_1 \setminus L$, on a :

$$\int_{B_1} f(x)dx = \int_{B_1 \setminus L} f(x)dx = \int_V f(x)dx (= \int_V f d\lambda_2).$$

On pose aussi $U =]0,1[\times]0,2\pi[$, de sorte que U et V sont de ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$. L'application $\varphi : (r,\theta)^t \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)^t$ est alors une bijection de U dans V. Elle est de classe C^1 et son inverse est de classe C^1 (φ et φ^{-1} sont même de classe C^∞). On peut calculer la matrice jacobienne de φ et son déterminant :

$$D\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \ |Det(D\varphi(r,\theta))| = r.$$

On peut donc appliquer le théorème 7.29, il donne :

$$\int_{B_1} f(x)dx = \int_V f(x)dx = \int_U f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\lambda_2(r,\theta) = \int_{]0,1[\times]0,2\pi[} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\lambda_2(r,\theta)$$

En appliquant maintenant le théorème de Fubini-Tonelli pour évaluer la dernière intégrale (si $f \in \mathcal{L}^1$ au lieu de $f \in \mathcal{M}_+$, on raisonne d'abord sur $|f|$ puis on utilise le théorème de Fubini), on obtient :

$$\int_{B_1} f(x)dx = \int_0^{2\pi} (\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr) d\theta.$$

Si $f(x)$ ne dépend que de $|x|$, c'est-à-dire si il existe ψ t.q. $f(x) = \psi(|x|)$, on obtient alors :

$$\int_{B_1} f(x)dx = 2\pi \int_0^1 \psi(r) r dr.$$

En particulier, on voit que $f 1_{B_1} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, avec g définie par $g(r) = r\psi(r)$ pour $r \in]0,1[$.

Prenons toujours $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (ou bien $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$). Le raisonnement que nous venons de faire pour B_1 peut être fait pour $B_a = \{x \in \mathbb{R}^2 ; |x| < a\}$ avec $a > 0$. On obtient alors, pour tout $a > 0$:

$$\int_{B_a} f(x)dx = \int_0^{2\pi} (\int_0^a f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr) d\theta. \tag{7.16}$$

En prenant $a = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, dans (7.16), on obtient aussi, quand $n \to +\infty$ (avec le théorème de convergence monotone si $f \in \mathcal{M}_+$ et en raisonnement avec $f^\pm$ si $f \in \mathcal{L}^1$) :

$$\int f(x)dx = \int_0^{2\pi} (\int_0^\infty f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr) d\theta. \tag{7.17}$$

7.7 Exercices

7.7.1 Mesure produit

Exercice 7.1 (Mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. [S'inspirer de la démonstration faite pour $n = 2$ dans l'exercice 2.6.]

Corrigé – On note $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la tribu (sur $\mathbb{R}^n$) engendrée par $\{A \times B ; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On veut montrer que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Etape 1, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset T$.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On va montrer que $O \in T$. On suppose $O \neq \emptyset$ (on sait déjà que $\emptyset \in T$). Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in O$, il existe $r > 0$ t.q. $\prod_{i=1}^n]x_i - r, x_i + r[\subset O$. Comme les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$, on peut trouver, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $y_i \in \mathbb{Q} \cap]x_i - r, x_i[$ et $z_i \in \mathbb{Q} \cap]x_i, x_i + r[$. On a donc $x \in \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[\subset O$.

On note alors $I = \{(y,z) \in \mathbb{Q}^{2n} ; \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[\subset O\}$ (avec $y = (y_1, \ldots, y_n)^t$ et $z = (z_1, \ldots, z_n)^t$). Pour tout $x \in O$, il existe donc $(y,z) \in I$ t.q. $x \in \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[$. On en déduit que $O = \bigcup_{(y,z) \in I} \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[$.

L'ensemble $\prod_{i=1}^{n-1}]y_i, z_i[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$, il appartient donc à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ (qui est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^{n-1}$). L'ensemble $]y_n, z_n[$ appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Donc, $\prod_{i=1}^n]y_i, z_i[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme I est au plus dénombrable (car $\mathbb{Q}^{2n}$ est dénombrable), on en déduit que $O \in T$. On a ainsi montré que T est une tribu contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^n$, et donc contenant la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$). Donc, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset T$.

Etape 2, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \supset T$**.**

On reprend ici aussi le même démarche que dans l'exercice 2.6.

1. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $T_1 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$. On montre d'abord que T_1 est une tribu (sur $\mathbb{R}$)
   - $\emptyset \in T_1$ car $A \times \emptyset = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
   - On montre ici que T_1 est stable par passage au complémentaire. Soit $B \in T_1$, on a donc $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \times B^c = A\times(\mathbb{R}\setminus B) = (A\times\mathbb{R})\setminus(A\times B)$. Or, $(A\times\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (car A est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$), on a donc $(A\times\mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. D'autre part, $(A\times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (car $B \in T_1$). Donc, $A\times B^c = (A\times\mathbb{R})\setminus(A\times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Ce qui prouve que $B^c \in T_1$ et donc que T_1 est stable par passage au complémentaire.
   - Enfin, T_1 est stable par union dénombrable. En effet, si $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset T_1$, on a $A \times (\bigcup_{p\in\mathbb{N}} B_p) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} A \times B_p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (car $A \times B_p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$). Donc, $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} B_p \in T_1$.

   On a donc montré que T_1 est une tribu.

   On montre maintenant que T_1 contient les ouverts de $\mathbb{R}$.

   Soit B un ouvert de $\mathbb{R}$. On a donc $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et, comme $A \times B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on a $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. On a donc $B \in T_1$.

   T_1 est donc une tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}$, donc contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Donc, $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   La conséquence de ce résultat est :
   $$\text{A ouvert de } \mathbb{R}^{n-1} \text{ et } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \tag{7.18}$$
2. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $T_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}); A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$. On va montrer que $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$.

   On commence par remarquer que (7.18) donne que T_2 contient les ouverts de $\mathbb{R}^{n-1}$. En effet, soit A un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$, la propriété (7.18) donne que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, et donc $A \in T_2$.

   On montre maintenant que T_2 est une tribu (on en déduira que $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$).
   - $\emptyset \in T_2$ car $\emptyset \times B = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
   - On montre ici que T_1 est stable par passage au complémentaire. Soit $A \in T_2$, on a $A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ et $A^c \times B = (\mathbb{R}^{n-1} \times B) \setminus (A \times B)$. La propriété (7.18) donne $(\mathbb{R}^{n-1} \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ car $\mathbb{R}^{n-1}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$. D'autre part, $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (car $A \in T_2$). Donc, $A^c \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Ce qui prouve que $A^c \in T_2$ et donc que T_2 est stable par passage au complémentaire.
   - Enfin, T_2 est stable par union dénombrable. En effet, si $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset T_2$, on a $(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p) \times B = \bigcup_{p\in\mathbb{N}}(A_p \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (car $A_p \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$). Donc, $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p \in T_2$.

   T_2 est donc une tribu (sur $\mathbb{R}^{n-1}$) contenant les ouverts de $\mathbb{R}^{n-1}$, ce qui prouve que $T_2 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ et donc, finalement, $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$.

   On a donc obtenu le résultat suivant :
   $$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \tag{7.19}$$
3. On montre maintenant que $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (et donc que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$).

   Grâce à (7.19), on a $\{A \times B; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. On en déduit que $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. On a donc bien, avec l'étape 1, $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 7.2 (Algèbre engendrée par un produit de tribus) Soient E_1, E_2 deux ensembles, T_1 une tribu sur E_1 et T_2 une tribu sur E_2. On note $E = E_1 \times E_2$ et on rappelle que $T_1 \times T_2 = \{A_1 \times A_2,\ A_1 \in T_1,\ A_2 \in T_2\}$.

Montrer que l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ est égale à l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $T_1 \times T_2$ c'est-à-dire que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, A appartient à l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ si et seulement si il existe $(A^{(p)})_{p=1,\dots,n} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \bigcup_{p=1}^{n} A^{(p)}$.

Corrigé – On note $\mathcal{A}$ l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $T_1 \times T_2$.

Comme $\mathcal{A}$ contient $T_1 \times T_2$ et que $\mathcal{A}$ est stable par union finie, il est immédiat que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Pour montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, il suffit alors de montrer que que $\mathcal{B}$ est une algèbre (puisque $\mathcal{A}$ est la plus petite algèbre contenant $T_1 \times T_2$ et que $\mathcal{B}$ contient $T_1 \times T_2$).

Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre, on montre d'abord (étape 1) que $T_1 \times T_2$ est stable par intersection finie et que le complémentaire d'un élément de $T_1 \times T_2$ est la réunion de 2 éléments disjoints de $T_1 \times T_2$ (en fait, pour montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre, il suffirait de savoir que le complémentaire d'un élément de $T_1 \times T_2$ est une union finie disjointe d'éléments de $T_1 \times T_2$). Puis, on en déduit (étape 2) que $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés (a) et (b) de la question 1 de l'exercice 2.9, ce qui donne que $\mathcal{B}$ est bien une algèbre.

Etape 1. Propriétés de $T_1 \times T_2$.

- Soient $A_1, B_1 \in T_1$ et $A_2, B_2 \in T_2$. On a clairement $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$. Comme T_1 et T_2 sont stables par intersection finie, on en déduit que $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) \in T_1 \times T_2$ et donc que $T_1 \times T_2$ est stable par intersection finie.
- Soient $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$. On remarque que $(A_1 \times A_2)^c = (E_1 \times A_2^c) \cup (A_1^c \times A_2)$. Comme $(E_1 \times A_2^c) \in T_1 \times T_2$, $(A_1^c \times A_2) \in T_1 \times T_2$ et que $(E_1 \times A_2^c) \cap (A_1^c \times A_2) = \emptyset$, on a bien montré que le complémentaire d'un élément de $T_1 \times T_2$ est la réunion de 2 éléments disjoints $T_1 \times T_2$.

Etape 2. On montre maintenant que $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés (a) et (b) de la question 1 de l'exercice 2.9. La propriété (a) est immédiate car $E = E_1 \times E_2 \in T_1 \times T_2 \subset \mathcal{B}$. Pour montrer (b), on montre d'abord que $\mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire.

Soit $B \in \mathcal{B}$. Il existe $(B^{(q)})_{q=1,\ldots,m} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $B^{(p)} \cap B^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $B = \bigcup_{q=1}^m B^{(q)}$. On a alors $B^c = \bigcap_{q=1}^m (B^{(q)})^c$. Le complémentaire d'un élément de $T_1 \times T_2$ est la réunion de 2 éléments disjoints de $T_1 \times T_2$. Pour tout q, il existe donc $C_{q,1}, C_{q,2} \in T_1 \times T_2$ t.q. $(B^{(q)})^c = C_{q,1} \cup C_{q,2}$ et $C_{q,1} \cap C_{q,2} = \emptyset$. On a donc $B^c = \bigcap_{q=1}^m (C_{q,1} \cup C_{q,2}) = \bigcup_{\varphi \in I} (\bigcap_{q=1}^m C_{q,\varphi(q)})$ où I désigne l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, m\}$ dans $\{1, 2\}$. Ceci prouve que $B^c \in \mathcal{B}$. En effet, on remarque d'abord que, pour tout $\varphi \in I$, on a $\bigcap_{q=1}^m C_{q,\varphi(q)} \in T_1 \times T_2$ car $T_1 \times T_2$ est stable par intersection finie. Puis, pour $\varphi, \psi \in I$ $\varphi \neq \psi$, il existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ t.q. $\varphi(k) \neq \psi(k)$. On a donc $(\bigcap_{q=1}^m C_{q,\varphi(q)}) \cap (\bigcap_{q=1}^m C_{q,\psi(q)}) = \emptyset$ car $\bigcap_{q=1}^m C_{q,\varphi(q)} \subset C_{k,\varphi(k)}$, $\bigcap_{q=1}^m C_{q,\psi(q)} \subset C_{k,\psi(k)}$ et $C_{k,\varphi(k)} \cap C_{k,\psi(k)} = \emptyset$. On a donc bien montré que B^c est une union finie disjointe d'éléments de $T_1 \times T_2$, c'est-à-dire que $B^c \in \mathcal{B}$.

On montre maintenant que $\mathcal{B}$ vérifie la propriété (b) de la question 1 de l'exercice 2.9. Soit $A, B \in \mathcal{B}$. Comme on vient de voir que $B^c \in \mathcal{B}$, Il existe $(A^{(p)})_{p=1,\ldots,n} \subset T_1 \times T_2$ et $(C^{(q)})_{q=1,\ldots,m} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$, $C^{(p)} \cap C^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$, $A = \bigcup_{p=1}^n A^{(p)}$ et $B^c = \bigcup_{q=1}^m C^{(q)}$. On a alors $A \setminus B = A \cap B^c = (\bigcup_{p=1}^n A^{(p)}) \cap (\bigcup_{q=1}^m C^{(q)}) = \bigcup_{p=1}^n \bigcup_{q=1}^m (A^{(p)} \cap C^{(q)})$. On en déduit que $A \setminus B \in \mathcal{B}$. En effet, $A^{(p)} \cap C^{(q)} \in T_1 \times T_2$ pour tout p et tout q (car $T_1 \times T_2$ est stable par intersection finie) et $(A^{(p_1)} \cap C^{(q_1)}) \cap (A^{(p_2)} \cap C^{(q_2)}) = \emptyset$ si $(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$ (car $A^{(p_1)} \cap A^{(p_2)} = \emptyset$ si $p_1 \neq p_2$ et $C^{(q_1)} \cap C^{(q_2)} = \emptyset$ si $q_1 \neq q_2$).

On a donc montré que $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés (a) et (b) de la question 1 de l'exercice 2.9, ce qui donne que $\mathcal{B}$ est bien une algèbre et donc que $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Exercice 7.3 (Exemple de mesure produit) Soit m_1 et m_2 des mesures $\sigma-$finies, non nulles, sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et t.q. $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = 0$, où $D = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$. Montrer qu'il existe a, α, $\beta \in \mathbb{R}$ t.q. $m_1 = \alpha\delta_a$ et $m_2 = \beta\delta_a$, où δ_a est la mesure de Dirac en a.

Corrigé – On remarque d'abord que $\mathbb{R}^2 \setminus D$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, donc appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. la quantité $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ est donc bien définie.

La construction de la mesure $m_1 \otimes m_2$ donne (voir la démonstration du théorème 7.3) :

$$m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}) = \int m_2(\mathbb{R} \setminus \{x\}) dm_1(x).$$

Cette égalité est aussi une conclusion du théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) avec $f = 1_{\mathrm{A}}$, $\mathrm{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}$.

De l'hypothèse $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}) = 0$, on déduit donc que $m_2(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = 0$ m_1-p.p.. Comme $m_1(\mathbb{R}) \neq 0$, il existe donc $a \in \mathbb{R}$ t.q. $m_2(\mathbb{R} \setminus \{a\}) = 0$. Ceci donne que $m_2 = \alpha\delta_a$ avec $\alpha = m_2(\{a\})$. Comme $m_2 \neq 0$, on a $\alpha > 0$.

Dans la construction de la mesure $m_1 \otimes m_2$ (démonstration du théorème 7.3), on aurait pu inverser les rôles de m_1 et m_2. On aurait obtenu la même mesure $m_1 \otimes m_2$ (grâce à la partie unicité du théorème 7.3). On a donc aussi :

$$m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}) = \int m_1(\mathbb{R} \setminus \{x\}) dm_2(x).$$

(Cette égalité est aussi une conclusion du théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) avec $f = 1_{\mathrm{A}}$, $\mathrm{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}$.)

Comme $m_2 = \alpha\delta_a$, on a donc $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}) = \alpha m_1(\mathbb{R} \setminus \{a\})$. De l'hypothèse $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}) = 0$, on déduit donc $m_1(\mathbb{R} \setminus \{a\}) = 0$, ce qui donne $m_1 = \beta\delta_a$ avec $\beta = m_1(\{a\})$. (On peut aussi remarquer que, comme $m_1 \neq 0$, on a $\beta > 0$.)

Exercice 7.4 (Fonction dont les traces sont boréliennes) Pour $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^2$, on note $t(\mathrm{B})$ l'ensemble des $x_1 \in \mathbb{R}$ t.q. $(x_1, 0) \in \mathrm{B}$. On pose $\mathrm{T} = \{\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^2;\, t(\mathrm{B}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.
Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(x) = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)^t$.

1. Montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Corrigé – On montre assez facilement que T est une tribu sur $\mathbb{R}^2$. En effet, on peut remarquer, par exemple, que $\mathbb{R}^2 \in \mathrm{T}$ (car $t(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$), T est stable par union dénombrable (si $\mathrm{B}_n \in \mathrm{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} t(\mathrm{B}_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par stabilité de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par union dénombrable) et T est stable par passage au complémentaire (si $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$, on a $t(\mathrm{B}^c) = t(\mathrm{B})^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par stabilité de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par passage au complémentaire).

Pour montrer que $\mathrm{T} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, on pose

$$\mathcal{C} = \{\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

On sait que $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On remarque maintenant que $\mathcal{C} \subset \mathrm{T}$ (car si $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $t(\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2) = \mathrm{A}_1$ ou $\emptyset$ selon que $0 \in \mathrm{A}_2$ ou $0 \notin \mathrm{A}_2$). La tribu T contenant $\mathcal{C}$, elle contient nécessairement la tribu engendrée par $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

2. Soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ t.q. $\mathrm{A} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $\mathrm{B} = \mathrm{A} \times \{0\}$.

(a) Montrer que $\mathrm{B} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Corrigé – Comme $t(\mathrm{B}) = \mathrm{A} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{B} \notin \mathrm{T}$ et donc $\mathrm{B} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ car $\mathrm{T} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

(b) On pose $f = 1_{\mathrm{B}} \circ g$. Montrer que la fonction f n'est pas une fonction borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ mais que les fonctions $f(x_1, \cdot)$ et $f(\cdot, x_2)$ sont boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Corrigé – La fonction g est linéaire bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On note h sa fonction réciproque. La fonction h est donc aussi linéaire. La fonction h est donc borélienne (car continue) et on a $1_{\mathrm{B}} = f \circ h$. Comme $\mathrm{B} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, la fonction 1_{B} n'est pas borélienne. On en déduit que f n'est pas borélienne (si f était borélienne, on aurait 1_{B} borélienne car composée de fonctions boréliennes).

Soit $x_1 \in \mathbb{R}$. On va montrer que la fonction $f(x_1, \cdot)$ est borélienne. On pose $x_2 = -x_1 \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. On distingue alors deux cas possibles :

Premier cas. On suppose que $x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \notin \mathrm{A}$. La fonction $f(x_1, \cdot)$ est alors la fonction nulle (c'est-à-dire que $f(x_1, x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). La fonction $f(x_1, \cdot)$ est donc borélienne.

Second cas. On suppose que $x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \in A$. La fonction $f(x_1, \cdot)$ est alors la fonction nulle partout sauf au point x_2 où elle vaut 1 (c'est-à-dire que $f(x_1, x) = 1_{\{x_2\}}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). La fonction $f(x_1, \cdot)$ est donc borélienne.

De manière analogue on peut montrer que $f(\cdot, x_2)$ est borélienne pour tout $x_2 \in \mathbb{R}$.

7.7.2 Fubini–Tonelli et Fubini

Exercice 7.5 (Contre-exemple au théorème de Fubini) Soit $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } x < y \leq 2x \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } 2x < y \leq 3x \\ 0 & \text{si } x > 0 \text{ et } y \notin]x, 3x[\\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \tag{7.20}$$

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$- mesurable.

Corrigé – On pose $A = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, x < y \leq 2x\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, x < y < 2x + \frac{1}{n}\}$. A_n est, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, il appartient donc à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On en déduit que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

De même, en posant $B = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, 2x < y \leq 3x\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, 2x < y < 3x + \frac{1}{n}\}$, on montre que $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

On pose maintenant $g(x,y) = \frac{1}{(|x|+1)^2}$ pour $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$. La fonction g est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc mesurable ($\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ étant munis de la tribu borélienne).

On remarque maintenant que $f = g1_A - g1_B$. On en déduit que f est mesurable (car f est une somme de produits de fonctions mesurables).

2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(.,y) \in L^1$; on pose $\phi(y) = \int f(x,y) d\lambda(x)$. Montrer que $\phi \in L^1$.

Corrigé – On note $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. La fonction $f(\cdot, y)$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (voir la proposition 7.9). Elle appartient aussi à $\mathcal{L}^1$ (et donc à L^1 en confondant $f(\cdot, y)$ avec sa classe dans L^1) car $\int |f(.,y)| d\lambda = 0$ si $y \leq 0$ et $\int |f(.,y)| d\lambda \leq y$ si $y > 0$ car $f(x,y) = 0$ si $x \notin [0,y]$ et $|f(x,y)| \leq 1$ pour tout x, y. On peut définir $\phi(y)$.

Pour $y \leq 0$, on a $\phi(y) = 0$ et pour $y > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \phi(y) = \int f(\cdot,y) d\lambda = -\int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} \frac{1}{(x+1)^2} dx + \int_{\frac{y}{2}}^{y} \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ = -\frac{3}{y+3} + \frac{4}{y+2} - \frac{1}{y+1} \\ = \frac{2y}{(y+3)(y+2)(y+1)}. \end{aligned}$$

La fonction ϕ est continue donc mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on peut donc calculer son intégrale sur $\mathbb{R}$:

$$\int \phi d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(-\frac{3}{y+3} + \frac{4}{y+2} - \frac{1}{y+1}\right) dy = -3\ln 3 + 4\ln(2).$$

Ceci donne bien, en particulier, $\phi \in L^1$ (en confondant ϕ avec sa classe dans L^1).

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,.) \in L^1$; on pose $\psi(x) = \int f(x,y) d\lambda(y)$. Montrer que $\psi \in L^1$.

Corrigé – Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f(x,\cdot)$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (voir la proposition 7.9). Elle appartient aussi à $\mathcal{L}^1$ (et donc à L^1 en confondant $f(x,\cdot)$ avec sa classe dans L^1) car $\int |f(x,\cdot)| d\lambda = 0$ si $x \leq 0$ et $\int |f(x,\cdot)| d\lambda \leq 3x$ si $x > 0$ car $f(x,y) = 0$ si $y \notin [0,3x]$ et $|f(x,y)| \leq 1$ pour tout x, y. On peut donc définir $\psi(x)$.

Pour $x \leq 0$, on a $\psi(x) = 0$ et pour $x > 0$, on a :

$$\psi(x) = \int f(x,\cdot) d\lambda = \int_x^{2x} \frac{1}{(x+1)^2} dy - \int_{2x}^{3x} \frac{1}{(x+1)^2} dy = 0$$

On a donc $\psi \in L^1$ et $\int \psi(x) dx = 0$.

4. Montrer que $\int \phi d\lambda \neq \int \psi d\lambda$ (ϕ et ψ sont définies dans les questions précédentes).

Corrigé – On a déjà montré que $\int \phi d\lambda = -3\ln 3 + 4\ln(2) \neq 0 = \int \psi d\lambda$.

5. Pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique-t-il pas ici ?

Corrigé – Le théorème de Fubini ne s'applique pas ici car la fonction f n'est pas intégrale pour la mesure produit, c'est-à-dire la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, notée λ_2. On peut d'ailleurs le vérifier en remarquant (par le théorème de Fubini-Tonelli) que :

$$\int |f| d\lambda_2 = \int (\int |f(x,y)| d\lambda(y)) d\lambda(x) = \int_0^\infty \frac{2x}{(x+1)^2} dx = \infty.$$

Exercice 7.6 (Intégrale d'une fonction positive) Soit (E, T, m) un espace mesuré σ-fini, et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une application mesurable. On pose $F = 1_A$ avec $A = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times E;\ 0 < t < f(x)\}$.

1. Montrer que F est $T \otimes T$- mesurable

Corrigé – Comme $f \in \mathcal{M}_+$, il existe $(f_n) \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. On a alors $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ avec $A_n = \{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R};\ 0 < t < f_n(x)\}$. Pour montrer que F est mesurable (c'est-à-dire que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$), il suffit donc de montrer que $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit donc $n \in \mathbb{N}$. Il existe $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}_+^*$ et $B_1, \ldots, B_p \in T$ t.q. $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $f_n = \sum_{i=1}^p a_i 1_{B_i}$. On a donc $A_n = \bigcup_{i=1}^p]0, a_i[\times B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$ car $]0, a_i[\times B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$ pour tout i.

2. Montrer que $\int f dm = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E; f(x) > t\}) dt$ et que $\int f dm = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E; f(x) \geq t\}) dt$. [Utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.]

Corrigé – On peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) à la fonction F, il donne :

$$\int (\int F(t,x) d\lambda(t)) dm(x) = \int (\int F(t,x) dm(x)) d\lambda(t). \tag{7.21}$$

Pour $x \in E$, $\int F(t,x) d\lambda(t) = \lambda(]0, f(x)[) = f(x)$.

Pour $t \in \mathbb{R}$. Si $t \leq 0$, on a $F(t,\cdot) = 0$. Donc, $\int F(t,x) dm(x) = 0$. Si $t > 0$, on a $F(t,\cdot) = 1_{\{f>t\}}$. Donc, $\int F(t,x) dm(x) = m(\{f > t\})$.

On déduit donc de (7.21) :

$$\int f(x) dm(x) = \int_{\mathbb{R}_+} m(\{f > t\}) d\lambda(t) = \int_0^\infty m(\{x \in E;\ f(x) > t\}) dt.$$

Pour avoir l'égalité avec $m(\{f \geq t\})$ au lieu de $m(\{f > t\})$, on reprend le même raisonnement en remplaçant F par $G = 1_B$ avec $B = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times E;\ 0 < t \leq f(x)\}$. On remarque d'abord que B est $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$-mesurable. En effet, on a $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$ avec $B_n = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times E;\ 0 < t < f_n(x)\}$ et $f_n = f + \frac{1}{n}$. Comme $f_n \in \mathcal{M}_+$, la première question donne

$B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$. On en déduit que $B \in B(\mathbb{R}) \otimes T$. On peut maintenant appliquer le théorème de Fubini-Tonelli à la fonction G, il donne :

$$\int (\int G(t,x) d\lambda(t)) dm(x) = \int (\int G(t,x) dm(x)) d\lambda(t). \tag{7.22}$$

Pour $x \in E$, $\int G(t,x) d\lambda(t) = \lambda(]0, f(x)]) = f(x)$.

Pour $t \in \mathbb{R}$. Si $t \leq 0$, on a $G(t,\cdot) = 0$. Donc, $\int G(t,x) dm(x) = 0$. Si $t > 0$, on a $G(t,\cdot) = 1_{\{f \geq t\}}$. Donc, $\int G(t,x) dm(x) = m(\{f \geq t\})$.

On déduit donc de (7.22) :

$$\int f(x) dm(x) = \int_0^\infty m(\{x \in E;\ f(x) \geq t\}) dt.$$

Exercice 7.7 (Une caractérisation de L^p) On munit $\mathbb{R}$ [resp. $\mathbb{R}^2$] de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$]. Soit f une application mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on pose $A_y = \{x \in \mathbb{R};\ |f(x)| > y\}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_-^*$, on pose $A_y = \emptyset$.

1. Montrer que l'application $(x,y)^t \mapsto 1_{A_y}(x)$ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. [On pourra commencer par montrer que $\{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2;\ |f(x)| > y\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$.]

Corrigé – On pose $B = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2;\ |f(x)| > y\}$, de sorte que

$$B = (F - G)^{-1}(]0,\infty[)$$

où F et G sont définies par :

$$F(x,y) = |f(x)|,\ G(x,y) = y,\ (x,y)^t \in \mathbb{R}^2.$$

La fonction $x \mapsto |f(x)|$ est mesurable (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ainsi que l'application $y \mapsto 1$(application constante). La proposition 7.11 nous donne alors que F est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (puisque $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$). La fonction G est aussi mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (il suffit de remarquer qu'elle est continue, ou d'utiliser une nouvelle fois la proposition 7.11). La fonction $F - G$ est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, ce qui prouve que $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. La fonction 1_B est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

On remarque maintenant que $1_B(x,y) 1_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+}(x,y) = 1_{A_y}(x)$ pour tout $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$. L'application $(x,y)^t \mapsto 1_{A_y}(x)$ est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ car elle est égale à un produit de fonctions mesurables.

Soit $p \in [1,\infty[$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $g_p(y) = |y|^{p-1} \lambda(A_y)$ (en convenant que $g_p(0) = 0$ si $\lambda(A_0) = \infty$).

2.(a) Montrer que l'application $(x,y)^t \mapsto |y|^{p-1} 1_{A_y}(x)$ est mesurable positive de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé – L'application $(x,y)^t \mapsto |y|^{p-1} 1_{A_y}(x)$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables. Cette application est, bien sûr, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Elle est donc mesurable positive de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que g_p est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.]

Corrigé – On pose $H(x,y) = |y|^{p-1} 1_{A_y}(x)$ pour $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$. La question précédente donne que $H \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) à la fonction H, il donne :

$$\int (\int H(x,y) d\lambda(x)) d\lambda(y) = \int (\int H(x,y) d\lambda(y)) d\lambda(x). \tag{7.23}$$

Pour $y \in \mathbb{R}$, on a $\int H(x,y) d\lambda(x) = |y|^{p-1} \lambda(A_y) = g_p(y)$ (en convenant que $g_p(0) = 0$ si $\lambda(A_0) = \infty$). Ceci donne, en particulier, que g_p est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (car l'une des conclusions du théorème 7.7 est que $y \mapsto \int H(x,y) d\lambda(x)$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$).

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int \mathrm{H}(x,y)d\lambda(y) = \int |y|^{p-1}1_{[0,|f(x)|[}(y)d\lambda(y) = \int_0^{|f(x)|} |y|^{p-1}dy = \frac{1}{p}|f(x)|^p.$$

L'égalité (7.23) donne alors :

$$\int g_p d\lambda = \frac{1}{p}\int |f|^p d\lambda. \tag{7.24}$$

Si $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, on remarque d'abord que g_p prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ car

$$\lambda(\mathrm{A}_y) \le \frac{1}{|y|^p}\int |f|^p d\lambda < \infty \text{ pour tout } y > 0.$$

La fonction g_p est donc mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et (7.24) donne alors que $g_p \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

Réciproquement, si $g_p \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, (7.24) donne que $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

On a donc bien montré :

$$g_p \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda) \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda).$$

Exercice 7.8 (Mesure de boules de $\mathbb{R}^2$)
On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\lambda_2)$. Montrer que $\lambda_2(\{x \in \mathbb{R}^2; |x| < \mathrm{R}\}) = \pi\mathrm{R}^2$ pour tout $\mathrm{R} > 0$.

Exercice 7.9 (À propos de Fubini) Soit, pour $n \ge 1$, $\mathrm{I}_n = [1-1/n, 1-1/(n+1)[$; on pose $\varphi_n = n(n+1)\chi_{\mathrm{I}_n}$ et $f(x,y) = \sum_{n\ge1}(\varphi_n(x)-\varphi_{n+1}(x))\varphi_n(y)$.

1. Montrer que $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ est bien définie et mesurable,
2. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $[0,1]$et que, pour tout $y \in [0,1]$, $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $[0,1]$,
3. Montrer que $\mathrm{F} : x \mapsto \int_{[0,1]} f(x,y)dy$ et $\mathrm{G} : y \mapsto \int_{[0,1]} f(x,y)dx$ sont intégrables sur $[0,1]$. Calculer alors $\int_{[0,1]} \mathrm{F}(x)dx$ et $\int_{[0,1]} \mathrm{G}(y)dy$. Peut on appliquer à f le théorème de Fubini ?

Exercice 7.10 (Intégrale de Dirichlet)

1. Vérifier que si $n \ge 1$,, $\displaystyle\int_0^n \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^n (\int_0^\infty e^{-xt}dt)\sin x dx.$

   Corrigé – Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue que $[0,n]$ en posant $\frac{\sin x}{x} = 1$ pour $x = 0$, elle est donc bien intégrable pour l'espace mesuré $([0,n],\mathcal{B}([0,n]),\lambda)$.

   Pour tout $x > 0$, on a $e^{x\cdot} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$. Pour calculer $\int_0^\infty e^{-xt}dt$, on remarque que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\int_0^p e^{-xt}dt = [\frac{-e^{-xt}}{x}]_0^p = \frac{1}{x} - \frac{e^{-xp}}{x}$. Quand $p \to \infty$, on en déduit, avec le théorème de convergence monotone, que $\int_0^\infty e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$. On obtient bien :

   $$\int_0^n \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^n (\int_0^\infty e^{-xt}dt)\sin x dx.$$

2. Calculer $\mathrm{F}_n(t) = \displaystyle\int_0^n e^{-xt}\sin x dx$ $(t \ge 0)$.

Corrigé – Pour $t = 0$, on a $\int_0^n e^{-xt} \sin x dx = \int_0^n \sin x dx = 1 - \cos n$. On a donc $F_n(0) = 1 - \cos n$.

Soit maintenant $t > 0$. Comme les fonctions $x \mapsto e^{-xt}$ et $x \mapsto \sin x$ sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, on peut calculer $\int_0^n e^{-xt} \sin x dx$ en intégrant deux fois par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^n e^{-xt} \sin x dx &= -\int_0^n t e^{-xt} \cos x dx - [e^{-xt} \cos x]_0^n \\ &= -\int_0^n t^2 e^{-xt} \sin x dx - [t e^{-xt} \sin x]_0^n - [e^{-xt} \cos x]_0^n.\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$(t^2+1)\int_0^n e^{-xt} \sin x dx = 1 - t e^{-nt} \sin n - e^{-nt} \cos n.$$

et donc :

$$F_n(t) = \int_0^n e^{-xt} \sin x dx = \frac{1 - t e^{-nt} \sin n - e^{-nt} \cos n}{t^2+1}.$$

3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty F_n(t) dt$. ($F_n$ est définie à la question précédente.)

Corrigé – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc mesurable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \geq 0$, $t e^{-nt} \leq t e^{-t} \leq 1/e$. On en déduit :

$$|F_n(t)| \leq (2 + \frac{1}{e})\frac{1}{t^2+1} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}+ \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(en fait, on a même $0 \leq F_n(t) \leq \frac{1}{t^2+1}$.) Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}_+$, ceci donne $F_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Enfin comme $F_n(t) \to \frac{1}{t^2+1}$ quand $n \to +\infty$, pour tout $t > 0$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il donne :

$$\int_0^\infty F_n(t) dt \to \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{\pi}{2}, \text{ quand } n \to +\infty.$$

4. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Corrigé – Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit H de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$H(x,t) = e^{-xt} \sin x 1_{[0,n]}(x) 1_{[0,\infty]}(t).$$

La fonction H est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable et elle appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ car, par le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\int |H(x,t)| d\lambda_2(x,t) \leq \int_0^n |\sin x| (\int_0^\infty e^{-xt} dt) dx = \int_0^n \frac{|\sin x|}{x} dx < \infty,$$

car la fonction $x \mapsto \frac{|\sin x|}{x}$ est continue que $[0,n]$ en posant $\frac{|\sin x|}{x} = 1$ pour $x = 0$, elle est donc bien intégrable pour l'espace mesuré $([0,n], \mathcal{B}([0,n]), \lambda)$.

On peut donc appliquer le théorème de Fubini à la fonction H, il donne, avec la première question :

$$\begin{aligned}\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^n (\int_0^\infty e^{-xt} dt) \sin x dx &= \int_0^\infty (\int_0^n e^{-xt} \sin x dx) dt \\ &= \int_0^\infty F_n(t) dt.\end{aligned}$$

La question 3 donne alors $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty F_n(t) dt = \frac{\pi}{2}$.

7.7.3 Mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

Exercice 7.11 (Propriétés élémentaires de λ_N) Soit $N \geq 2$. On rappelle que λ_N est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

1. Soit $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i)$.

   Corrigé – On va démontrer cette question en supposant tout d'abord que $\lambda(A_i) < \infty$ pour tout i. Le cas général s'obtient alors en utilisant $A_i \cap [-p, p]$ au lieu de A_i et en faisant ensuite tendre p vers l'infini. On obtient bien la propriété voulue (en convenant que $0 \times \infty = 0$). Cette méthode est décrite dans la remarque 7.5.

   On démontre donc, par récurrence sur N, la propriété suivante :

$$\begin{aligned} &A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(A_i) < \infty \text{ pour tout } i \Rightarrow \\ &\textstyle\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \text{ et } \lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i). \end{aligned} \tag{7.25}$$

   La propriété (7.25) est vraie pour $N = 2$. En effet, on sait que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (proposition 7.2) et que $\lambda_2 = \lambda \otimes \lambda$ (définition 7.15). On a donc bien (avec la définition d'une mesure produit, théorème 7.3) :

$$\begin{aligned} &A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(A_1) < \infty,\ \lambda(A_2) < \infty \\ &\Rightarrow A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \text{ et } \lambda_2(A_1 \times A_2) = \lambda(A_1)\lambda(A_2). \end{aligned}$$

   On suppose maintenant que la propriété (7.25) est vraie pour un certain $N \geq 2$, et on la démontre pour $N + 1$.

   Soit donc $A_1, \ldots, A_{N+1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(A_i) < \infty$ pour tout i.
   Par (7.25), on a $\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i)$. On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N+1}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (proposition 7.2) et que $\lambda_{N+1} = \lambda_N \otimes \lambda$ (définition 7.15).
   On en déduit que $\prod_{i=1}^{N+1} A_i = (\prod_{i=1}^N A_i) \times A_{N+1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N+1})$ et

$$\lambda_{N+1}(\prod_{i=1}^{N+1} A_i) = \lambda_N(\prod_{i=1}^{N} A_i)\lambda(A_{N+1}) = \prod_{i=1}^{N+1} \lambda(A_i).$$

   ce qui donne bien (7.25) avec $N + 1$ au lieu de N et termine donc la démonstration par récurrence.

2. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha_i < \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Montrer que

$$\lambda_N(\prod_{i=1}^N]\alpha_i, \beta_i[) = \prod_{i=1}^N \lambda(]\alpha_i, \beta_i[).$$

   Corrigé – Cette question est une conséquence immédiate de la précédente en prenant $A_i =]\alpha_i, \beta_i[$.

3. Soit K est un compact de $\mathbb{R}^N$ (noter que $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$). Montrer que $\lambda_N(K) < +\infty$.

   Corrigé – Comme K est compact, il est borné. Il existe donc $a \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $K \subset \prod_{i=1}^N]-a, a[$. On en déduit que $\lambda_N(K) \leq \lambda_N(\prod_{i=1}^N]-a, a[) = \prod_{i=1}^N \lambda(]-a, a[) = (2a)^N < \infty$.

4. Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$. Montrer que $\lambda_N(O) > 0$.

   Corrigé – Soit $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in O$. Comme O est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $\prod_{i=1}^N]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\subset O$. On a donc $\lambda_N(O) \geq \lambda_N(\prod_{i=1}^N]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[) = \prod_{i=1}^N \lambda(]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[) = (2\varepsilon)^N > 0$.

5. Soit $f, g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer que $f = g$ p.p. (c'est-à-dire λ_N-p.p.) implique $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Corrigé – Soit $O = \{f \neq g\} = \{x \in \mathbb{R}^N ; f(x) \neq g(x)\}$. Comme f et g sont continues, O est ouvert. Comme $f = g$ p.p., on a nécessairement $\lambda_N(O) = 0$. Enfin, la question précédente donne alors que $O = \emptyset$ et donc que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

6. Montrer que $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

Corrigé – Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Comme f est continue, on a f mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}$ étant munis de leur tribu borélienne, on dit aussi que f est borélienne). Comme f est à support compact, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $f = 0$ sur K^c avec $K = \prod_{i=1}^N [-a, a]$. Enfin, f est bornée, il existe donc M t.q. $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. On en déduit que $\int |f| d\lambda_N \leq M(2a)^N < \infty$ et donc que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

Exercice 7.12 (Régularité de λ_N) Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $m(K) < \infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$. (noter que ceci est vrai pour $m = \lambda_N$.)

1. SoientA $\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe O ouvert de $\mathbb{R}^N$ et F fermé de $\mathbb{R}^N$ tels que :

$$F \subset A \subset O \text{ et } m(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$

Corrigé – On reprend ici la démonstration de la régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts (théorème 2.44).

On appelle T l'ensemble des $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé vérifiant $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. On va montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{C} = \{\prod_{i=1}^N]a_i, b_i[, -\infty < a_i < b_i < \infty$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}\}$. Comme $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (voir l'exercice 2.7) il est même démontré qu'on peut, dans la définition de $\mathcal{C}$, se limiter au cas où les a_i et b_i sont dans $\mathbb{Q}$), ceci donnera $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

On démontre tout d'abord que $\mathcal{C} \subset T$. Soit $-\infty < a_i < b_i < \infty$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $A = \prod_{i=1}^N]a_i, b_i[$. Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $(2/n_0) < b_i - a_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Pour $n \geq n_0$, on pose $F_n = \prod_{i=1}^N [a_i + (1/n), b_i - (1/n)]$ et $O = A$. On a bien F_n fermé, O ouvert et $F_n \subset A \subset O$. On remarque ensuite que $O \setminus F_n \subset C_n$ avec :

$$C_n = \bigcup_{q=1}^N C_{n,q}, \;\; C_{n,q} = \prod_{i=1}^N I_{i,q}^{(n)},$$
$$I_{i,q}^{(n)} =]a_i, b_i[\text{ si } i \neq q, \; I_{q,q}^{(n)} =]a_q, a_q + \frac{1}{n}[\cup]b_q - \frac{1}{n}, b_q[.$$

Soit $q \in \{1, \ldots, N\}$. On a $C_{n+1,q} \subset C_{n,q}$ (pour tout $n \geq n_0$), $\bigcap_{n \geq n_0} C_{n,q} = \emptyset$ et, comme m est finie sur les compacts,

$$m(C_{n,q}) \leq m(\prod_{i=1}^N [a_i, b_i]) < \infty.$$

On peut donc utiliser la propriété de continuité décroissante d'une mesure. On obtient $m(C_{n,q}) \to 0$ quand $n \to +\infty$. On a alors aussi $m(C_n) \leq \sum_{q=1}^N m(C_{n,q}) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Il existe donc n t.q. $m(C_n) < \varepsilon$. On prenant $F = F_n$, on a bien alors O ouvert, F fermé et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. Ce qui montre que $A \in T$ et donc que $\mathcal{C} \subset T$.

On montre maintenant que T est une tribu. On remarque tout d'abord que $\emptyset \in T$ (il suffit de prendre $F = O = \emptyset$) et que T est stable par passage au complémentaire (car, si $F \subset A \subset O$, on a $O^c \subset A^c \subset F^c$ et $F^c \setminus O^c = O \setminus F$). Il reste à montrer que T est stable par union dénombrable.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ et $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. On veut montrer que $A \in T$. On va commencer par traiter le cas (simple) où $m(A) < \infty$ puis le cas (plus difficile) où $m(A) = \infty$.

Premier cas. On suppose que $m(A) < \infty$. La démonstration est ici identique à celle faite pour $N = 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe O_n ouvert et F_n fermé t.q. $F_n \subset A_n \subset O_n$ et $m(O_n \setminus F_n) \leq (\varepsilon/2^n)$. On pose $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$

et $\tilde{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. On a $\tilde{F} \subset A \subset O$, $m(O \setminus \tilde{F}) \leq 2\varepsilon$, car $(O \setminus \tilde{F}) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(O_n \setminus F_n)$, et O ouvert mais $\tilde{F}$ n'est pas nécessairement fermé...

Cependant, puisque $m(A) < \infty$, on a aussi $m(\tilde{F}) < \infty$. Par continuité croissante de m on a $m(\bigcup_{p=0}^{n} F_n) \to m(\tilde{F})$, quand $n \to \infty$, d'où (puisque $m(\tilde{F}) < \infty$) $m(\tilde{F}) - m(\bigcup_{p=0}^{n} F_n) \to 0$. On prend alors $F = \bigcup_{p=0}^{n} F_n$ avec n assez grand pour que $m(\tilde{F}) - m(F) \leq \varepsilon$. On a bien $F \subset A \subset O$, O ouvert, F fermé et $m(O \setminus F) \leq 3\varepsilon$. Ceci prouve que $A \in T$.

Deuxième cas. On suppose maintenant que $m(A) = \infty$ (et le raisonnement précédent n'est plus correct si $m(\tilde{F}) = \infty$). On raisonne en 3 étapes, en adaptant la démonstration faite pour $N = 1$:

(a) Soit $p = (p_1,\ldots,p_N) \in \mathbb{Z}^N$. On remarque d'abord que $A_n \cap \prod_{i=1}^{N}[p_i, p_i + 1[\in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A_n \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$\begin{aligned} F_k = F \cap \prod_{i=1}^{N}[p_i, p_i + 1 - \frac{1}{k}] \subset A_n \cap \prod_{i=1}^{N}[p_i, p_i + 1[\subset O_k \\ = O \cap \prod_{i=1}^{N}]p_i - \frac{1}{k}, p_i + 1[. \end{aligned}$$

On a F_k fermé, O_k ouvert et $(O_k \setminus F_k) \subset (O \setminus F) \cup D_k$, avec :

$$\begin{aligned} &D_k = \bigcup_{q=1}^{N} D_{k,q},\ \ D_{k,q} = \prod_{i=1}^{N} J_{i,q}^{(k)}, \\ &J_{i,q}^{(k)} =]p_i - \frac{1}{k}, p_i + 1[\text{ si } i \neq p, \\ &J_{q,q}^{(k)} =]p_q - \frac{1}{k}, p_q[\cup]p_q + 1 - \frac{1}{k}, p_q + 1[. \end{aligned}$$

En utilisant la continuité décroissante de m et le fait que m est finie sur les compacts (ce qui donne $m(D_k) \leq m(\prod_{i=1}^{N}[p_i - 1, p_i + 1]) < \infty$), on démontre (comme pour les C_n précédemment) que $m(D_k) \to 0$ quand $k \to \infty$. Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ t.q. $m(D_k) \leq \varepsilon$ et donc $m(O_k \setminus F_k) \leq m(O \setminus F) + m(D_k) \leq 2\varepsilon$. Ce qui donne bien que $A_n \cap \prod_{i=1}^{N}[p_i, p_i + 1[\in T$.

(b) Soit $p = (p_1,\ldots,p_N) \in \mathbb{Z}^N$. Comme $m(A \cap \prod_{i=1}^{N}[p_i, p_i + 1[) < \infty$, on peut maintenant utiliser le premier cas avec $A \cap \prod_{i=1}^{N}[p_i, p_i+1[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap \prod_{i=1}^{N}[p_i, p_i+1[)$. Il donne que $A \cap \prod_{i=1}^{N}[p_i, p_i+1[\in T$ pour tout $p = (p_1,\ldots,p_N) \in \mathbb{Z}^N$.

(c) On montre enfin que $A \in T$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $p = (p_1,\ldots,p_N) \in \mathbb{Z}^N$, il existe un ouvert O_p et un fermé F_p t.q. $F_p \subset A \cap \prod_{i=1}^{N}[p_i, p_i + 1[\subset O_p$ et $m(O_p \setminus F_p) \leq \varepsilon/(2^{|p|})$, en posant $|p| = \sum_{i=1}^{N}|p_i|$. On prend $O = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}^N} O_p$ et $F = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}^N} F_p$. On obtient $F \subset A \subset O$, $m(O \setminus F) \leq 3^N\varepsilon$ et O est ouvert. Il reste à montrer que F est fermé.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ t.q. $x_n \to x$ (dans $\mathbb{R}^N$) quand $n \to +\infty$. On veut montrer que $x \in F$. Il existe $p = (p_1,\ldots,p_N) \in \mathbb{Z}^N$ t.q. $x \in \prod_{i=1}^{N}]p_i - 1, p_i + 1[$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n \in \prod_{i=1}^{N}]p_i - 1, p_i + 1[$ pour tout $n \geq n_0$. Comme $x_n \in \bigcup_{q\in\mathbb{Z}^N} F_q$ et que $F_q \subset \prod_{i=1}^{N}[q_i, q_i + 1[$ pour tout $q = (q_1,\ldots,q_N)^t \in Z^N$, on a donc $x_n \in \bigcup_{q\in E_p} F_q$, pour tout $n \geq n_0$, où $E_q = \{q = (q_1,\ldots,q_N)^t \in \mathbb{Z}^N\ ;\ q_i \in \{p_i, p_i - 1\}$ pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}\}$. Comme E_q est de cardinal fini et que F_q est fermé pour tout q, l'ensemble $\bigcup_{q\in E_p} F_q$ est donc aussi fermé, on en déduit que $x \in \bigcup_{q\in E_p} F_q \subset F$ et donc que F est fermé.

Ceci montre bien que $A \in T$ et termine la démonstration du fait que T est une tribu. Comme cela a déjà été dit, on en déduit que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

2. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Déduire de la question précédente que $m(A) = \inf\{m(O),$ O ouvert t.q. $A \subset O\}$.

Corrigé – Par monotonie de m on a $m(A) \leq m(O)$ si $A \subset O$, donc $m(A) \leq \inf\{m(O),$ O ouvert t.q. $A \subset O\}$. Il reste donc à montrer que $m(A) \geq \inf\{m(O),$ O ouvert t.q. $A \subset O\}$.

Soit $\varepsilon > 0$, d'après la question précédente, il existe O ouvert et F fermé t.q $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. On a donc aussi $m(O \setminus A) \leq \varepsilon$ et donc $m(O) = m(A) + m(O \setminus A) \leq m(A) + \varepsilon$. Ceci montre bien que $\inf\{m(O), O \text{ ouvert t.q. } A \subset O\} \leq m(A)$.

Exercice 7.13 (Densité de C_c dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ pour la mesure de Lebesgue)
Montrer que l'espace $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ ($N \geq 1$) est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (c'est-à-dire que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$). [S'inspirer de la démonstration faite pour le cas $N = 1$, théorème 5.20.]

Exercice 7.14 (Densité de C_c et C_c^∞ dans L^1 pour une mesure finie sur les compacts) Soit $d \geq 1$ et μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que μ vérifie les deux propriétés suivantes :

(p1) μ est est finie sur les compacts de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire que $\mu(K) < +\infty$ si K est un compact de $\mathbb{R}^d$,

(p2) μ est régulière, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

En fait, la propriété (p1) entraîne la propriété (p2) (voir la proposition 7.17) mais cette démonstration n'est pas demandée ici.

On note $\mathcal{L}^1_\mu$ l'espace $\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$. Pour $f \in \mathcal{L}^1_\mu$, on note $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $|x|$ la norme euclidienne de x.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire φ continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact). Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}^1_\mu$.
2. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\eta > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $\varphi(x) = \frac{(\eta - d(x,K))^+}{\eta}$ avec $d(x, K) = \inf\{|x - y|, y \in K\}$. Montrer que $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et que $\varphi(x) = 1$ si $x \in K$.
3. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\mu(A) < +\infty$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe O ouvert et K compact t.q. $K \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus K) \leq \varepsilon$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|\varphi - 1_A\|_1 \leq \varepsilon$.
4. Soit f une fonction borélienne positive de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \in \mathcal{L}^1_\mu$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra approcher f par une fonction étagée.]
5. (Densité.) Soit $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$.
   (b) Montrer qu'il existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra montrer que, si $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a $\|\varphi - \varphi_n\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$, avec $\varphi_n = \varphi * \rho_n$ et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille régularisante, voir la définition 8.9.]
6. (Continuité en moyenne ?)
   (a) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.
   (b) Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement f et μ) qu'on peut avoir $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \not\to 0$ quand $h \to 0$.
7. On suppose maintenant que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et que μ est une mesure sur les boréliens de Ω, finie sur les sous ensembles compacts de Ω. Indiquer brièvement comment on peut montrer la densité de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ et $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$.

Exercice 7.15 (Invariance par translation de λ_N) Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$, on pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$, de sorte que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$.

1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, montrer que $\varphi(A) = \{\varphi(x), x \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Corrigé – On pose $T = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \text{ t.q. } \varphi(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\}$.

Comme φ est bijective, il est facile de montrer que T est une tribu. En effet, il suffit de remarquer que $\varphi(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$, $\varphi(A^c) = (\varphi(A))^c$ et $\varphi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(A_n)$.

Comme φ est continue, φ transforme les compacts en compacts. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^N$, on a donc $\mathcal{C} \subset T$ (on rappelle que les compacts sont des boréliens). Comme l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^N$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (noter que tout ouvert peut s'écrire comme une réunion dénombrable de compacts), on a donc $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Ce qui donne bien $\varphi(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

2. Montrer que $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \lambda_N(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. [On pourra faire une récurrence sur N : La proposition 2.49 donne le résultat pour la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée λ. On suppose que le résultat est vrai pour λ_{N-1} (et pour toute famille $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R}^*$, $\beta_1, \ldots, \beta_{N-1} \in \mathbb{R}$). On le démontre alors pour λ_N en posant $m(A) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A))$ et en montrant que m est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ égale à λ_N sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On utilise pour conclure la partie unicité du théorème 7.3 sur la mesure produit.]

Corrigé – On procède par récurrence sur N. La proposition 2.49 donne le résultat pour la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire pour $N = 1$ en posant $\lambda_1 = \lambda$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour $N - 1$ avec un certain $N \geq 2$, c'est-à-dire que $\lambda_{N-1}(\psi(B)) = \prod_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \lambda_{N-1}(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R}^*$, $\beta_1, \ldots, \beta_{N-1} \in \mathbb{R}$ et ψ définie par $\psi(y) = (\alpha_1 y_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_{N-1} y_{N-1} + \beta_{N-1})^t$ pour tout $y = (y_1, \ldots, y_{N-1})^t \in \mathbb{R}^{N-1}$, et on démontre le résultat pour N.

Soit donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$, $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$ et φ définie par

$$\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$$

pour tout $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$.

Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on pose $m(A) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A))$.

On montre tout d'abord que m est une mesure. On a bien $m(\emptyset) = 0$ car $\varphi(\emptyset) = \emptyset$. Puis, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ avec $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On a $\varphi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(A_n)$ avec $\varphi(A_n) \cap \varphi(A_m) = \emptyset$ si $n \neq m$ (car φ est bijective). Donc, $\lambda_N(\varphi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_N(\varphi(A_n))$ et donc $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$. Ce qui prouve la σ-additivité de m et donc le fait que m est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

On montre maintenant que $m(A_1 \times A_2) = \lambda_{N-1}(A_1)\lambda(A_2)$ pour tout $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$ et pour tout $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ et $\lambda(A_2) < \infty$.
Soit donc $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$ et $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ et $\lambda(A_2) < \infty$.
On a $m(A_1 \times A_2) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A_1 \times A_2))$.

On pose $\psi(y) = (\alpha_1 y_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_{N-1} y_{N-1} + \beta_{N-1})^t$, pour tout $y = (y_1, \ldots, y_{N-1})^t \in \mathbb{R}^{N-1}$, et $\tau(z) = \alpha_N z + \beta_N$, pour tout $z \in \mathbb{R}$. On a donc $\varphi(A_1 \times A_2) = \psi(A_1) \times \tau(A_2)$. L'hypothèse de récurrence et la proposition 2.49 donne que $\lambda_{N-1}(\psi(A_1)) = \prod_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ et que $\lambda(\tau(A_2)) = \alpha_N \lambda(A_2) < \infty$. Comme $\lambda_N = \lambda_{N-1} \otimes \lambda$ (car c'est la définition de λ_N) on en déduit :

$$\lambda_N(\varphi(A_1 \times A_2)) = \lambda_{N-1}(\psi(A_1))\lambda(\tau(A_2)) = \prod_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \lambda_{N-1}(A_1) \alpha_N \lambda(A_2),$$

et donc :

$$m(A_1 \times A_2) = (\prod_{i=1}^{N} |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A_1 \times A_2)) = \lambda_{N-1}(A_1)\lambda(A_2).$$

On peut maintenant conclure. Comme m est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$vérifiant $m(A_1 \times A_2) = \lambda_{N-1}(A_1)\lambda(A_2)$ pour tout $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$ et pour tout $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ et $\lambda(A_2) < \infty$, la partie unicité du théorème 7.3 donne que $m = \lambda_{N-1} \otimes \lambda$, c'est-à-dire $m = \lambda_N$. On a donc bien $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \lambda_N(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 7.16 (Changement de variable simple) Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$. On pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ (de sorte que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$).

1. Soit $f \in \mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{E}_+$ et que

$$\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N.$$

[Utiliser l'exercice 7.15.]

Corrigé – Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $f = 1_A$. On a alors $f \circ \varphi = 1_B$ avec $B = \varphi^{-1}(A)$. En appliquant l'exercice 7.15à l'inverse de φ, noté ψ, on a donc $\lambda_N(B) = \lambda_N(\psi(A)) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(A)$, c'est-à-dire :

$$\int f d\lambda_N = \lambda_N(A) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \lambda_N(B) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f \circ \varphi d\lambda_N.$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{E}_+ \setminus \{0\}$. Il existe donc $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i f_i$, avec $f_i = 1_{A_i}$. On a alors, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int f d\lambda_N &= \sum_{i=1}^n a_i \int f_i d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \sum_{i=1}^n a_i \int f_i \circ \varphi d\lambda_N \\ &= (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int \sum_{i=1}^n a_i f_i \circ \varphi d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f \circ \varphi d\lambda_N.\end{aligned}$$

(Ce qui est, bien sûr, aussi vrai si $f = 0$.)

2. Soit $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$ et que $\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N$.

Corrigé – Il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. On a donc aussi $(f_n \circ \varphi)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ et $f_n \circ \varphi \uparrow f \circ \varphi$ quand $n \to +\infty$ (ce qui donne, en particulier que $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$). La question précédente donne :

$$\int f_n d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f_n \circ \varphi d\lambda_N.$$

La définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors, quand $n \to +\infty$:

$$\int f d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f \circ \varphi d\lambda_N.$$

3. Soit $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1$ et que $\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N$.

Corrigé – Comme f est mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ et φ est mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ ($\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}$ étant munis de leur tribu borélienne), on a bien $f \circ \varphi$ mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.

En appliquant la question précédente à la fonction $|f|$ on obtient que $\int |f| \circ \varphi d\lambda_N = \int |f \circ \varphi| d\lambda_N < \infty$ car $\int |f| d\lambda_N < \infty$. On a donc $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1$.

Enfin, en remarquant que $(f \circ \varphi)^+ = f^+ \circ \varphi$ et $(f \circ \varphi)^- = f^- \circ \varphi$ et en utilisant la question précédente avec f^+ et f^-, on obtient :

$$\int f^+ d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f^+ \circ \varphi d\lambda_N,$$

$$\int f^- d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f^- \circ \varphi d\lambda_N.$$

En faisant la différence, on en déduit :

$$\int f d\lambda_N = (\prod_{i=1}^{N} |\alpha_i|) \int f \circ \varphi d\lambda_N.$$

Exercice 7.17 (Primitives de fonctions L^p)
Soit $p \in [1,\infty[$. On note $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$. Soit $f, g \in L^p$. On définit F et G de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par, pour $x \in [0,1]$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \ \ (= \int_{]0,x[} f d\lambda), \quad G(x) = \int_0^x g(t)dt \ \ (= \int_{]0,x[} g d\lambda).$$

1. Montrer que F et G sont des fonctions continues et qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|F(y) - F(x)| \le C|y - x|^{1-\frac{1}{p}}$ et $|G(y) - G(x)| \le C|y - x|^{1-\frac{1}{p}}$, pour tous $x, y \in [0,1]$, $x < y$.

Corrigé – On note $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$. F (et G) sont bien définies partout sur $[0,1]$ car $f1_{[0,x]} \in L^1$ (et $g1_{[0,x]} \in L^1$) pour tout $x \in [0,1]$ (on confond, comme d'habitude, un élément de L^1 ou L^p avec l'un de ses représentants).

Soit $x, y \in [0,1]$, $x < y$. En utilisant l'inégalité de Hölder avec f et $1_{[x,y]}$, on obtient, avec $q = p/(p-1)$:

$$|F(y) - F(x)| = |\int f1_{[x,y]} d\lambda| \le \|f\|_p \|1_{[x,y]}\|_q \le \|f\|_p |y - x|^{1-\frac{1}{p}}. \tag{7.26}$$

On a de même :

$$|G(y) - G(x)| \le \|g\|_p |y - x|^{1-\frac{1}{p}}. \tag{7.27}$$

Ce qui donne les inégalités demandées en prenant $C = \max(\|f\|_p, \|g\|_p)$.

Les inégalités (7.26) et (7.27) donnent aussi la continuité (uniforme) de F et G lorsque $p > 1$ (et donc $1 - (1/p) > 0$), mais pas pour $p = 1$.

Pour $p = 1$, on montre la continuité de F (et de G par un raisonnement semblable) en remarquant que, pour $x, y \in [0,1]$, $x < y$:

$$|F(y) - F(x)| \le \int |f| 1_{[x,y]} d\lambda \to 0, \text{ quand } \lambda([x,y]) = y - x \to 0,$$

ceci découle de l'exercice 4.14 et donne même la continuité uniforme de F comme cela a été démontré dans l'exercice 5.5.

2. On suppose $p > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Montrer que, pour tout $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a $(F(x), G(x)) \in A_{n,k} \times B_{n,k}$, où $A_{n,k}$ et $B_{n,k}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$ (indépendants de x) dont les longueurs tendent vers 0 quand $n \to +\infty$. [Utiliser la question 1.]

Corrigé – On pose toujours $C = \max(\|f\|_p, \|g\|_p)$. Pour $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a, avec $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} > 0$:

$$|F(x) - F(\frac{k}{n})| \le C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}, \ |G(x) - G(\frac{k}{n})| \le C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}.$$

On en déduit que $(F(x), G(x)) \in A_{n,k} \times B_{n,k}$ avec :

$$A_{n,k} = [F(\frac{k}{n}) - C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}, F(\frac{k}{n}) + C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}],$$

$$B_{n,k} = [G(\frac{k}{n}) - C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}, G(\frac{k}{n}) + C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}].$$

On a bien $\lambda(A_{n,k}) = \lambda(B_{n,k}) = 2C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

3. On suppose $p > 2$. Montrer que $\mathrm{E} = \{(\mathrm{F}(x), \mathrm{G}(x));\ x \in [0,1]\}$ est une partie négligeable de $\mathbb{R}^2$ (muni de la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$). [En utilisant une majoration convenable des longueurs de $\mathrm{A}_{n,k}$ et $\mathrm{B}_{n,k}$, inclure E (pour tout $n \in \mathbb{N}$) dans une partie de $\mathbb{R}^2$ dont la mesure de Lebesgue tend vers 0 quand $n \to +\infty$.]

Corrigé – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{H}_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} \mathrm{A}_{n,k} \times \mathrm{B}_{n,k} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La question précédente donne $\mathrm{E} \subset \mathrm{H}_n$. On en déduit que $\mathrm{E} \subset \mathrm{H}$ avec $\mathrm{H} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{H}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

On utilise maintenant l'hypothèse $p > 2$ pour montrer que $\lambda_2(\mathrm{H}) = 0$ (et donc que E est négligeable). En effet, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lambda_2(\mathrm{H}) \le \lambda_2(\mathrm{H}_n) \le \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_2(\mathrm{A}_{n,k} \times \mathrm{B}_{n,k}) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(\mathrm{A}_{n,k})\lambda(\mathrm{B}_{n,k})$$
$$\le n4\mathrm{C}^2\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{q}} = 4\mathrm{C}^2 n^{1-\frac{2}{q}},$$

avec $\mathrm{C} = \max(\|f\|_p, \|g\|_p)$ et $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. Comme $p > 2$, on a $q < 2$ et donc $n^{1-\frac{2}{q}} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Ceci donne que $\lambda_2(\mathrm{H}_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$ et donc que $\lambda_2(\mathrm{H}) = 0$.

7.7.4 Convolution

Exercice 7.18 (Propriétés élémentaires de la convolution) Soit $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N}) = \mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$.

1. Montrer que $f * g = g * f$ p.p.. [Utiliser l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue et sa conséquence pour les changements de variable simples (propositions 7.20 et 7.21).]

Corrigé – On confond, comme d'habitude f (et g) avec l'un de ses représentants, et on choisit comme représentant de $f * g$ (qui est définie comme un élément de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$) la fonction définie par $f * g(x) = \int f(y)g(x-y)d\lambda_\mathrm{N}(y)$ si $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. On sait que cette fonction est définie p.p. car $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$. On choisit de manière analogue comme représentant de $g * f$ la fonction définie par $g * f(x) = \int g(y)f(x-y)d\lambda_\mathrm{N}(y)$ si $g(\cdot)f(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$.

Soit $x \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$ un point pour lequel $f * g$ est définie. On a donc $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. On pose $h(\cdot) = f(\cdot)g(x-\cdot)$. On utilise alors la proposition 7.21 (changement de variable simple) avec φ définie par $\varphi(y) = -y + x$ pour tout $y \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$. Elle donne $h \circ \varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et :

$$\int h(\varphi(y))d\lambda_\mathrm{N}(y) = \int h(y)d\lambda_\mathrm{N}(y).$$

Comme $h(\varphi(y)) = f(\varphi(y))g(x - \varphi(y)) = f(x-y)g(y)$, on en déduit que $g * f$ est définie au point x et que $g * f(x) = f * g(x)$. Ceci montre bien que $f * g = g * f$ p.p..

2. On suppose que f et g sont à support compact (f à support compact signifie qu'il existe K, compact de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$, t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c). Montrer que la fonction $f * g$ est alors aussi à support compact. [On désigne par $\mathrm{B}(0,\alpha)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon α. Comme f et g sont à support compact, il existe a et $b \in \mathbb{R}_+$ tels que $f = 0$ p.p. sur $\mathrm{B}(0,a)^c$ et $g = 0$ p.p. sur $\mathrm{B}(0,b)^c$. Montrer que $f * g = 0$ p.p. sur $\mathrm{B}(0,a+b)^c$.]

Corrigé – Comme pour la question précédente, on confond f (et g) avec l'un de ses représentants, et on choisit comme représentant de $f * g$ la fonction définie par $f * g(x) = \int f(y)g(x-y)d\lambda_\mathrm{N}(y)$ si $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ t.q. $f = 0$ p.p. sur $\mathrm{B}(0,a)^c$ et $g = 0$ p.p. sur $\mathrm{B}(0,b)^c$. ($\mathbb{R}^\mathrm{N}$ est muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$.) Soit $x \in \mathrm{B}(0,a+b)^c$. On va montrer que $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ p.p. (et donc que $f * g(x) = 0$, noter aussi que $f(\cdot)g(x-\cdot)$ est mesurable car f et g le sont).

Comme $f = 0$ p.p. sur $\mathrm{B}(0,a)^c$, on a aussi $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ p.p. sur $\mathrm{B}(0,a)^c$. Comme $g = 0$ p.p. sur $\mathrm{B}(0,b)^c$, on a $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ p.p. sur $\mathrm{B}(x,b)^c$ (car $y \in \mathrm{B}(x,b)^c \iff (x-y) \in \mathrm{B}(0,b)^c$). On a donc :

$$f(\cdot)g(x-\cdot) = 0 \text{ p.p. sur } \mathrm{B}(0,a)^c \cup \mathrm{B}(x,b)^c. \tag{7.28}$$

Or $B(0,a)\cap B(x,b)=\emptyset$ car $y\in B(0,a)\cap B(x,b)$ implique $\|y\|<a$ et $\|x-y\|<b$ et donc $\|x\|=\|x-y+y\|<a+b$, ce qui contredit $x\in B(0,a+b)^c$. On a donc $B(0,a)^c\cup B(x,b)^c=(B(0,a)\cap B(x,b))^c=\mathbb{R}^N$ et (7.28) donne alors $f(\cdot)g(x-\cdot)=0$ p.p. et donc $f*g$ est définie au point x et $f*g(x)=0$.

On a bien montré que $f*g=0$ p.p. sur $B(0,a+b)^c$ et donc que $f*g$ est à support compact.

Exercice 7.19 (Convolution $L^p-C_c^\infty$)
Soit $1\le p\le\infty$. Soit $f\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)=\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N,B(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$ (ou $f\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$) et $\rho\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$. On pourra se limiter au cas $N=1$.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^N$, la fonction $f(\cdot)\rho(x-\cdot)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On pose alors

$$f*\rho(x)=\int f(\cdot)\rho(x-\cdot)d\lambda_N.$$

Corrigé – On rappelle que $f\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ si $f\in\mathcal{M}=\mathcal{M}(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ et $f1_K\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$. On a donc $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)\subset\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ (pour tout $1\le p\le\infty$) car si $f\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$, on a bien $f\in\mathcal{M}$ et, grâce à l'inégalité de Hölder, $f1_K\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ (et $\|f1_K\|_1\le\|f\|_p\|1_K\|_q<\infty$,avec $q=p/(p-1)$).

On suppose donc dans la suite de ce corrigé que $f\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ car cette hypothèse est plus générale que $f\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$. Pour simplifier la rédaction, on se limite au cas $N=1$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $f(\cdot)\rho(x-\cdot)$ est mesurable (c'est-à-dire ici borélienne car $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu de Borel) car f est mesurable et $\rho(x-\cdot)$ est mesurable (car continue). Comme ρ est à support compact, il existe $a\in\mathbb{R}_+$ t.q. $\rho=0$ sur $[-a,a]^c$. On a donc $\rho(x-\cdot)=0$ sur K_x^c avec $K_x=[x-a,x+a]$, ce qui permet de montrer que $f(\cdot)\rho(x-\cdot)\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ car $|f(\cdot)\rho(x-\cdot)|\le|f1_{K_x}|\|\rho\|_u$, avec $\|\rho\|_u=\max\{|\rho(z)|,\ z\in\mathbb{R}\}<\infty$, et $f1_{K_x}\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

La fonction $f*\rho$ est donc définie sur tout $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $f*\rho\in C^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$.

Corrigé – Comme dans la question précédente, on va utiliser $a\in\mathbb{R}_+$ t.q. $\rho=0$ sur $[-a,a]^c$ et $\|\rho\|_u=\max\{|\rho(z)|,\ z\in\mathbb{R}\}$ (on va aussi utiliser les normes des dérivées de ρ, $\|\rho^{(k)}\|_u$). On raisonne maintenant en 3 étapes.

Etape 1. On commence par montrer que $f*\rho$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$. Soit $x_0\in\mathbb{R}$. La continuité de $f*\rho$ en x_0 découle du théorème de continuité sous le signe $\int$, théorème 4.51. En effet, on pose, pour $x,y\in\mathbb{R}$:

$$F(x,y)=f(y)\rho(x-y).$$

On a $F(x,\cdot)\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $f*\rho(x)=\int F(x,\cdot)d\lambda$. La fonction F vérifie alors les 2 hypothèses suivantes :

(a) $x\mapsto F(x,y)$ est continue en x_0, pour tout $y\in\mathbb{R}$,

(b) $|F(x,y)|\le G(y)$ pour tout $x\in]x_0-1,x_0+1[$ et pour tout $y\in\mathbb{R}$, en prenant $G=|f1_K|\|\rho\|_u$ avec $K=[x_0-1-a,x_0+1+a]$.

Comme K est compact, on a $G\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et le théorème 4.51 donne bien la continuité de $f*\rho$ en x_0.

Etape 2. On montre maintenant que $f*\rho$ est dérivable en tout point et que $(f*\rho)'=f*\rho'$. Soit $x_0\in\mathbb{R}$. Pour montrer la dérivabilité de $f*\rho$ en x_0, on utilise le théorème de dérivabilité sous le signe $\int$, théorème 4.52. On reprend la même fonction F que dans l'étape 1, elle vérifie les 2 hypothèses suivantes :

(a) $x\mapsto F(x,y)$ est dérivable pour tout $x\in]x_0-1,x_0+1[$ et pour tout $y\in\mathbb{R}$,

(b) $|\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)|=|f(y)\rho'(x-y)|\le H(y)$ pour tout $x\in]x_0-1,x_0+1[$ et pour tout $y\in\mathbb{R}$, en prenant $H=|f1_K|\|\rho'\|_u$ avec $K=[x_0-1-a,x_0+1+a]$.

Comme K est compact, on a $H \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et le théorème 4.52 donne bien la dérivabilité de $f * \rho$ en x_0 et le fait que $(f * \rho)'(x_0) = f * \rho'(x_0)$.

Etape 3. On montre enfin que $f * \rho \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour cela, on va montrer, par récurrence sur k, que $f * \rho \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(f * \rho)^{(k)} = f * \rho^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (ce qui donne bien $f * \rho \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

L'étape 1 montre que $f * \rho \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (et on a bien $(f * \rho)^{(0)} = f * \rho = f * \rho^{(0)}$). On suppose maintenant que $f * \rho \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(f * \rho)^{(k)} = f * \rho^{(k)}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. L'étape 2 appliquée à $\rho^{(k)}$ (qui appartient aussi à $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) au lieu de ρ donne alors que $f * \rho^{(k)}$ est dérivable et que sa dérivée est $f * \rho^{(k+1)}$. L'étape 1 appliquée à $\rho^{(k+1)}$ donne que $f * \rho^{(k+1)} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a donc bien finalement montré que $f * \rho \in C^{k+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(f * \rho)^{(k+1)} = f * \rho^{(k+1)}$. Ce qui termine la récurrence.

3. On suppose maintenant que f est à support compact, c'est à dire qu'il existe un compact de $\mathbb{R}$, noté K, t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c, montrer que $f * \rho$ est aussi à support compact.

Corrigé – Comme f et ρ sont à support compact, on démontre que $f * \rho$ est aussi à support compact, comme cela a été fait dans l'exercice 7.18. Plus précisément, si $f = 0$ p.p. sur $B(0, a)^c$ et $\rho = 0$ sur $B(o, b)^c$, on a $f * \rho = 0$ sur $B(0, a + b)^c$ (voir l'exercice 7.18).

Exercice 7.20 (Inégalité de Young)
Soient $1 < p < +\infty$, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $g \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. Montrer que $f * g$ est définie p.p., que $f * g \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et que $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$. [Écrire

$$\int (\int |f(x-y)g(y)| dy)^p dx = \int (\int |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| dy)^p dx,$$

avec $q = p/(p-1)$. Appliquer l'inégalité de Hölder puis le théorème de Fubini-Tonelli.]

Corrigé – Pour simplifier les notations, on ne traite ici que le cas $N = 1$. On suppose aussi que f et g ne sont pas nulles p.p. (sinon, il est immédiat que $f * g$ est définie partout et $f * g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

On confond f et g avec l'un de leurs représentants.

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $H(x, y) = g(y) f(x-y)$. La première partie de la démonstration de la proposition sur la convolution (proposition 7.22) montre que H, et donc $|H|$, est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable. On peut alors utiliser les deux premières conclusions du théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) pour affirmer que $|g(\cdot) f(x - \cdot)| \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $\varphi \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avec φ définie par $\varphi(x) = \int |g(\cdot) f(x - \cdot)| d\lambda$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par composition de fonctions mesurables, on a donc aussi $\varphi^p \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $|f(x - \cdot)|^{\frac{1}{q}}$ et $|f(x - \cdot)|^{\frac{1}{p}} |g(\cdot)|$ sont aussi mesurables. On peut alors utiliser l'inégalité de Hölder avec $q = p/(p-1)$. elle donne :

$$\begin{aligned}
(\varphi(x))^p &= (\int |f(x - \cdot)|^{\frac{1}{q}} |f(x - \cdot)|^{\frac{1}{p}} |g(\cdot)| d\lambda)^p \\
&\leq (\int |f(x - \cdot)| d\lambda)^{\frac{p}{q}} (\int |f(x - \cdot)| |g(\cdot)|^p d\lambda) \qquad (7.29)\\
&\leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}} (\int |f(x - \cdot)| |g(\cdot)|^p d\lambda).
\end{aligned}$$

Noter que (7.29) est vraie si $|f(x - \cdot)| |g(\cdot)|^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et si $|f(x - \cdot)| |g(\cdot)|^p \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Dans ce dernier cas on obtient seulement $\varphi(x)^p \leq \infty$. On a aussi utilisé la proposition 7.21 pour dire que $\int |f(x - \cdot)| d\lambda = \int |f| d\lambda = \|f\|_1$.

On peut maintenant utiliser le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) avec les fonctions $|f|$ et $|g|^p$. Il donne :

$$\begin{aligned}\int \varphi(x)^p d\lambda(x) &\leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int (\int |f(x-\cdot)||g(\cdot)|^p d\lambda)d\lambda(x)\\ &\leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int (\int |f(x-y)||g(y)|^p d\lambda(x))d\lambda(y) \qquad (7.30)\\ &\leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \|f\|_1 \|g\|_p^p = \|f\|_1^p \|g\|_p^p.\end{aligned}$$

Ceci donne que $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et, en particulier que $\varphi(x) < \infty$ p.p., c'est-à-dire $\lambda(\mathrm{A}) = 0$ avec $\mathrm{A} = \{\varphi = \infty\}$ (noter que $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ puisque $\varphi \in \mathcal{M}_+$). Pour tout $x \in \mathrm{A}^c$, on a donc $g(\cdot)f(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et on peut définir $g * f(x)$ par $g * f(x) = \int g(y)f(x-y)d\lambda(y)$.

La fonction $g * f$ est donc définie p.p.. On remarque maintenant qu'elle est égale p.p. à une fonction mesurable. En effet, les fonctions H^+ et H^- sont $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurables (d'après la première partie de la démonstration de la proposition 7.22, on rappelle que $\mathrm{H}(x,y) = g(y)f(x-y)$). Les deux premières conclusions du théorème 7.7) donnent alors $(g(\cdot)f(x-\cdot)^{\pm} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avec φ_1 et φ_2 définies par, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_1(x) = \int (g(\cdot)f(x-\cdot))^+ d\lambda,\ \ \varphi_2(x) = \int (g(\cdot)f(x-\cdot))^- d\lambda.$$

On pose alors $h = \varphi_1 - \varphi_2$ sur A^c et $h = 0$ sur A. On a bien que h est mesurable (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et $h = g * f$ p.p..

On remarque enfin que $h \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ car $|h| \leq \varphi$ p.p. et $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. On en déduit bien que $g * f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ (avec la confusion habituelle entre $g * f$ et la classe de h dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$).

Le fait que $\|g * f\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ est conséquence immédiate de (7.30) puisque $g * f \leq \varphi$ p.p..

Enfin, le raisonnement fait dans la première question de l'exercice (7.18) montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ si et seulement $f(x-\cdot)g(\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et que ces deux fonctions ont alors même intégrale. Ceci permet de montrer que $f * g$ est aussi définie p.p. et que $f * g = g * f$ p.p.

Exercice 7.21 (Itérations de convolution) Soient $\mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et $f \in \mathrm{L}^1$ t.q. $f = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, f^{*n} par : $f^{*1} = f$ et $f^{*n} = f^{*(n-1)} * f$ pour $n \geq 1$. Pour $\lambda \geq 0$, on pose : $g(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}|f(t)|dt$.

1.(a) Montrer que f^{*n} est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et que $f^{*n} = 0$ sur $\mathbb{R}_-$.

(b) Montrer, par récurrence sur n, que $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}|f^{*n}(t)|dt \leq (g(\alpha))^n$, pour tout $\alpha \geq 0$ et tout $n \geq 1$.

(c) En déduire que $\int_0^x |f^{*n}(t)|dt \leq e^{\alpha x}(g(\alpha))^n$, pour tout $\alpha \geq 0$ tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$.

2. Soit $h \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $h * f(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $h * f \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Remarquer de même que $h * f^{*n} \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose maintenant que, $h = 0$ sur $\mathbb{R}_-$; montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h * f^{*n}(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 7.22 Soient μ et ν des mesures sur l'espace mesurable $(\mathbb{R},\mathrm{T})$. On rappelle que $\mu * \nu$ est défini par : $\mu * \nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_\mathrm{A}(x+y)d\mu(x)d\nu(y)$.

1. Montrer que $\mu * \nu$ est une mesure.
2. Montrer que si μ et ν sont des probabilités, alors $\mu * \nu$ est une probabilité.
3. Montrer que si μ et ν sont des mesures de densités respectives f et g (par rapport à Lebesgue), alors $\mu * \nu$ est une mesure de densité $f * g$.

7.7.5 Changement de variable

Exercice 7.23 (Coordonnées polaires)

1. Calculer $\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ (on rappelle que $dx\,dy$ désigne $d\lambda_2(x,y)$).
[On pourra utiliser le passage en coordonnées polaires.]

Corrigé – Pour $x,y\in\mathbb{R}$, on pose $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}1_{\mathbb{R}_+}(x)1_{\mathbb{R}_+}(y)$. On a $f\in\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (noter que f est le produit de fonctions mesurables). On peut donc lui appliquer la formule (7.17) :

$$\int f(x,y)d\lambda_2(x,y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\infty} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr\right)d\theta.$$

On a donc :

$$\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)}d\lambda_2(x,y)=\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-r^2}r\,dr.$$

Puis, comme $\int_0^n e^{-r^2}r\,dr=\frac{1}{2}(1-e^{-n^2})$ et que, par le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-r^2}r\,dr=\int_0^{\infty} e^{-r^2}r\,dr,$$

on en déduit $\int_0^{\infty} e^{-r^2}r\,dr=\frac{1}{2}$ et donc

$$\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)}d\lambda_2(x,y)=\frac{\pi}{4}.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2}dx$.

Corrigé – On applique le théorème de Fubini–Tonelli (théorème 7.7) à la fonction f définie à la question précédente. Il donne :

$$\int f(x,y)d\lambda_2(x,y)=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy\right)dx,$$

et donc

$$\frac{\pi}{4}=\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)}d\lambda_2(x,y)=\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy\right)e^{-x^2}dx$$
$$=\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2.$$

On en déduit que $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 7.24 (Cordonnées polaires dans $\mathbb{R}^N$) On note S^{N-1} la sphère de centre 0 et rayon 1 dans $\mathbb{R}^N$ (*i.e.* $S^{N-1}=\{x\in\mathbb{R}^N \mid |x|=1\}$, où $|.|$ désigne la norme euclidienne usuelle). Pour $A\subset S^{N-1}$, on pose $\widetilde{A}=\{tx,\ t\in[0,1],\ x\in A\}$.
Montrer que si A est un borélien de S^{N-1}, alors $\widetilde{A}$ est un borélien de $\mathbb{R}^N$.
On définit alors, quand A est un borélien de S^{N-1}, $\sigma(A)=N\lambda_N(\widetilde{A})$. Montrer que σ définit une mesure sur les borélien de S^{N-1}.
Montrer que, pour tout $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ mesurable positive ou intégrable on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx=\int_0^{\infty}\left(\int_{S^{N-1}} f(\rho\xi)\,d\sigma(\xi)\right)\rho^{N-1}\,d\rho.$$

Trouver alors les $\alpha\in\mathbb{R}$ tels que $x\to|x|^{\alpha}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^N\setminus B_1$ ou sur B_1, avec $B_1=\{x\in\mathbb{R}^N\ ;\ |x|\le 1\}$.

Corrigé – Pour $R\in\mathbb{R}_+$, on note $B_R=\{x\in\mathbb{R}^N\ ;\ |x|\le R\}$.

1. On montre tout d'abord que $\widetilde{A}$ est un borélien de $\mathbb{R}^N$ si A est un borélien de S^{N-1}. Pour cela, on pose $T = \{A \in \mathcal{B}(S^{N-1})\,;\, \widetilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\}$.

   On montre que T est une tribu. En effet, $\widetilde{A} = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ si $A = \emptyset$ et donc $\emptyset \in T$. Puis, on remarque que T est stable par complémentaire car, pour $A \in T$, $\widetilde{S^{N-1} \setminus A} = B_1 \setminus \widetilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, ce qui montre que $S^{N-1} \setminus A \in T$. Enfin, il est facile de voir que T est stable par union dénombrable car, pour $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, on a $\widetilde{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{A_n} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$. On a bien montré que T est une tribu.

   Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fermés de S^{N-1}. Si $A \in \mathcal{C}$, on voit que $\widetilde{A}$ est un fermé de $\mathbb{R}^N$. En effet, si $(t_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]\times A$ est t.q. $t_n x_n \to y$ dans $\mathbb{R}^N$, on peut supposer, par compacité de $[0,1]$ et de S^{N-1}, après extraction d'une sous–suite encore notée $(t_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que $t_n \to t \in [0,1]$ et $x_n \to x \in S^{N-1}$ quand $n \to +\infty$. On en déduit que $y = tx \in \widetilde{A}$, ce qui prouve que $\widetilde{A}$ est fermé. Comme les fermés sont des boréliens, on a donc $\mathcal{C} \subset T$.

   Pour conclure, il suffit de remarquer que la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ (sur S^{N-1}) est $\mathcal{B}(S^{N-1})$. On en déduit bien que $\mathcal{B}(S^{N-1}) = T$.

2. Il est facile de montrer que σ est une mesure. Il suffit en effet de remarquer que $\widetilde{\emptyset} = \emptyset$ (et donc $\sigma(\emptyset) = 0$) et que, pour $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$, on a, avec $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\widetilde{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{A_n}$ et $\widetilde{A_n} \cap \widetilde{A_m} = \emptyset$ si $n \neq m$. On déduit alors la σ-additivité de σ de la σ-additivité de λ_N.

3. On va montrer maintenant :
$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_{S^{N-1}} f(\rho\xi)\,d\sigma(\xi)\right)\rho^{N-1}\,d\rho, \tag{7.31}$$
   pour tout $f = 1_E$ avec $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Cette démonstration est difficile (le reste de la démonstration sera plus facile). On raisonne en 3 étapes.

   Etape 1. Pour $A \in \mathcal{B}(S^{N-1})$ et pour $0 \le r < R < \infty$, on pose $A_{r,R} = \{\rho\xi,\ \rho \in [r,R[,\ \xi \in A\}$. Dans cette étape, on prend $f = 1_E$ avec $E = A_{r,R}$ et on montre alors que les deux membres de (7.31) sont bien définis et sont égaux.

   Pour montrer que $A_{r,R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, il suffit de remarquer que $A_{r,R} = A_R \setminus A_r$ avec $A_a = \bigcup_{t\in\mathbb{Q}_a} t\widetilde{A}$, $\mathbb{Q}_a = \{t \in \mathbb{Q}_+^*,\ t < a\}$ si $a > 0$ (et $A_0 = \emptyset$). Comme $\widetilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on a $t\widetilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $t > 0$ (voir la proposition 7.20) et donc $A_a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $a \ge 0$. On en déduit que $A_{r,R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

   On calcule maintenant $\lambda_N(A_{r,R})$ (qui est le membre de gauche de (7.31)). D'après la proposition 7.21, on a $\lambda_N(t\widetilde{A}) = t^N\lambda_N(\widetilde{A})$ pour tout $t > 0$. la continuité croissante d'une mesure donne alors $\lambda_N(A_a) = a^N\lambda_N(\widetilde{A})$ pour tout $a > 0$ et donc :
$$\begin{aligned}\lambda_N(A_{r,R}) = \lambda_N(A_R \setminus A_r) = \lambda_N(A_R) - \lambda_N(A_r) &= (R^N - r^N)\lambda_N(\widetilde{A})\\ &= \frac{R^N - r^N}{N}\sigma(A).\end{aligned}$$

   Soit $\rho > 0$. Si $\rho \notin [r,R[$, on a $f(r\xi) = 0$ pour tout $\xi \in S^{N-1}$. On a donc
$$f(\rho\cdot) = 1_\emptyset \in \mathcal{M}_+(S^{N-1}, \mathcal{B}(S^{N-1}))$$
   et $\int f(\rho\cdot)d\sigma = 0$. Si $\rho \in [r,R[$, on a $f(r\xi) = 1$ pour tout $\xi \in A$ et $f(r\xi) = 0$ pour tout $\xi \in S^{N-1} \setminus A$. Donc, $f(\rho\cdot) = 1_A \in \mathcal{M}_+(S^{N-1}, \mathcal{B}(S^{N-1}))$ et $\int f(\rho\cdot)d\sigma = \sigma(A)$. On en déduit que la fonction $\rho \mapsto \int f(\rho\cdot)d\sigma$ est égale à $\sigma(A)1_{[r,R[}$, elle appartient donc à $\mathcal{M}_+(R_+^*, \mathcal{B}(R_+^*), \lambda)$ et on a :
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\int_{S^{N-1}} f(\rho\xi)\,d\sigma(\xi)\right)\rho^{N-1}\,d\rho &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \sigma(A)1_{[r,R[}(\rho)\rho^{N-1}\,d\rho\\ &= \sigma(A)\int_r^R \rho^{N-1}\,d\rho = \sigma(A)\frac{R^N - r^N}{N}.\end{aligned}$$

   On a bien montré que les deux membres de (7.31) étaient bien définis et étaient égaux.

   Etape 2. On pose $\mathcal{D} = \{A_{r,R},\ 0 \le r < R < \infty,\ A \in \mathcal{B}(S^{N-1})\}$. On montre ici que $\mathcal{D}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

   On a déjà vu que $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Donc, $T(\mathcal{D}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Pour montrer l'inclusion inverse, on va montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^N$ peut s'écrire comme une union au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{D}$.

On commence par remarquer qu'il existe une partie dénombrable de S^{N-1}, dense dans S^{N-1} (ceci découle de la séparabilité de $\mathbb{R}^N$). Soit S une telle partie. On peut alors démontrer (on ne détaille pas ici cette démonstration, assez simple) que si $x \in O$, O ouvert de $\mathbb{R}^N$, il existe une boule ouverte de S^{N-1} dont le centre est dans S et donc le rayon est rationnel, on note A cette boule, et il existe $r, R \in \mathbb{Q}$ t.q. $x \in A_{r,R} \subset O$. On en déduit facilement que O est une union au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{D}$ (voir l'exercice 2.7 pour des résultats semblables). Ce résultat montre que les ouverts de $\mathbb{R}^N$ sont dans $T(\mathcal{D})$ et donc que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset T(\mathcal{D})$.

On a bien finalement $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = T(\mathcal{D})$.

Etape 3. On montre dans cette étape que (7.31) est vraie pour tout $f = 1_E$ avec $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

En admettant que le deuxième membre de (7.31) est bien défini pour tout $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on peut définir une mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ en posant

$$m(E) = \int_0^\infty \left(\int_{S^{N-1}} 1_E(\rho\xi)\, d\sigma(\xi) \right) \rho^{N-1}\, d\rho.$$

On a montré que $m = \lambda_N$ sur $\mathcal{D}$ (Etape 1) et que $\mathcal{D}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (Etape 2). Le fait que deux mesures sur une tribu T soient égales sur une famille engendrant T est insuffisant pour dire qu'elles sont égales sur T (voir exercice 2.21), mais cela est suffisant si cette famille est une semi–algèbre (une famille $\mathcal{C}$ est une semi–algèbre si $\emptyset, \emptyset^c \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie, et le complémentaire de tout élément de $\mathcal{C}$ est une réunion finie disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$), et si les mesures sont finies. C'est ainsi que nous allons montrer que (7.31) est vraie pour tout $f = 1_E$ avec $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Soit $R > 0$. On note $\mathcal{D}_R = \{E \in \mathcal{D}\,;\, E \subset B_R\}$ et $\mathcal{B}_R = \mathcal{B}(B_R) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\,;\, A \subset B_R\}$. L'étape 2 donne que la tribu engendrée (sur B_R) par $\mathcal{D}_R$, notée $T(\mathcal{D}_R)$, est égale à $\mathcal{B}_R$.

On remarque tout d'abord que si $C \in \mathcal{D}_R$, $(B_R \setminus C)$ est la réunion disjointe d'au plus 3 éléments de $\mathcal{D}_R$. On en déduit, comme dans l'exercice 7.2, que l'algèbre engendrée par $\mathcal{D}_R$ sur B_R (voir la définition 2.5 pour la définition d'une algèbre), notée $\mathcal{A}_R$, est l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $\mathcal{D}_R$. Soit $E \in \mathcal{A}_R$. Il est alors facile de montrer (par linéarité de l'intégrale et avec l'étape 1) que les deux membres de (7.31) sont bien définis et égaux si $f = 1_E$.

On note M_R l'ensemble des éléments $E \in \mathcal{B}(B_R)$ t.q. les deux membres de (7.31) soient bien définis et égaux si $f = 1_E$. Une application facile du théorème de convergence monotone donne que M_R est une classe monotone. (en fait, si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M_R$ est une suite décroissante, on applique le théorème de convergence monotone à la suite $1_{B_R} - 1_{E_n}$ alors que si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M_R$ est une suite croissante, on applique le théorème de convergence monotone à la suite 1_{E_n}). M_R est donc une classe monotone qui contient $\mathcal{A}_R$, M_R contient donc la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}_R$, or, le lemme sur les classes monotones (exercice 2.13) montre que cette classe monotone est égale à la tribu engendrée par $\mathcal{A}_R$, elle même égale à la tribu engendrée par $\mathcal{D}_R$. Ceci montre que $M_R = \mathcal{B}(B_R)$ et donc que les deux membres de (7.31) sont bien définis et égaux si $f = 1_E$ avec $E \in \mathcal{B}(B_R)$.

En appliquant une nouvelle fois le théorème de convergence monotone, il est alors facile de conclure que les deux membres de (7.31) sont bien définis et égaux si $f = 1_E$ avec $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

4. La fin de la démonstration est maintenant facile (elle utilise un raisonnement souvent utilisé dans des exercices précédents). Par linéarité de l'intégrale, on montre que les deux membres de (7.31) sont bien définis et égaux si $f \in \mathcal{E}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, puis, par convergence monotone, si $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$. Enfin, on traite le cas $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ en décomposant $f = f^+ - f^-$.
5. Comme application simple de (7.31) pour $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, on trouve que $x \to |x|^\alpha$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N \setminus B_1$ si et seulement si $\alpha + N - 1 < -1$ et est intégrable sur B_1 si et seulement si $\alpha + N - 1 > -1$.

Exercice 7.25 (Changement de variable $W^{1,1}$ croissant) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $f > 0$ p.p.. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. (On rappelle que, pour $a < b$, $\int_a^b f(t)dt$ désigne $\int 1_{]a,b[} f\, d\lambda$.)

1. Montrer que $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que φ est strictement croissante.

Corrigé – Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, on a $\varphi(y) - \varphi(x) = \int_x^y f(t)dt$. On en déduit que φ est continue (sur $\mathbb{R}$) et même uniformément continue en utilisant la proposition 4.49. On en déduit aussi que φ est strictement croissante car $f > 0$ p.p..

On note I_m l'image de φ (I_m est donc un intervalle dont les bornes sont 0 et $\int f d\lambda$) et on note $\psi : \mathrm{I}_m \to \mathbb{R}$ la fonction réciproque de φ. La fonction ψ est donc continue de I_m dans $\mathbb{R}$ et on a $\varphi(\psi(s)) = s$ pour tout $s \in \mathrm{I}_m$ et $\psi(\varphi(s)) = s$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

On rappelle que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}(\mathrm{I})$ est sa tribu borélienne, on a $\mathcal{B}(\mathrm{I}) = \mathcal{P}(\mathrm{I}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$, on note $\varphi(\mathrm{A}) = \{\varphi(x),\ x \in \mathrm{A}\}$. Pour $\mathrm{A} \subset \mathrm{I}_m$, on note $\psi(\mathrm{A}) = \{\psi(x),\ x \in \mathrm{A}\}$.

2. Montrer que $\{\varphi(\mathrm{A}),\ \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \mathcal{B}(\mathrm{I}_m)$ et que $\{\psi(\mathrm{A}),\ \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{I}_m)\} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Corrigé – Les fonctions φ et ψ sont continues, elles sont donc boréliennes (c'est-à-dire que l'image réciproque, par φ ou ψ, d'un borélien est un borélien).

   Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, Comme $\varphi(\mathrm{A}) = \psi^{-1}(\mathrm{A})$ et que ψ est borélienne, on a donc $\varphi(\mathrm{A}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Puis, comme $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{I}_m$ on a $\varphi(\mathrm{A}) \subset \mathrm{I}_m$ et donc $\varphi(\mathrm{A}) \in \mathcal{B}(\mathrm{I}_m)$. Réciproquement, si $\mathrm{C} \in \mathcal{B}(\mathrm{I}_m)$, on a $\mathrm{C} = \varphi(\varphi^{-1}(\mathrm{C}))$ et donc $\mathrm{C} = \varphi(\mathrm{A})$ avec $\mathrm{A} = \varphi^{-1}(\mathrm{C})$. Comme φ est borélienne, on a $\mathrm{A} = \varphi^{-1}(\mathrm{C}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $\mathrm{C} \in \{\varphi(\mathrm{A}),\ \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On a bien montré que $\{\varphi(\mathrm{A}),\ \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \mathcal{B}(\mathrm{I}_m)$.

   De manière semblable on montre que $\{\psi(\mathrm{A}),\ \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{I}_m)\} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(\varphi(\mathrm{I})) = \int_{\mathrm{I}} f d\lambda$.

   Corrigé – Soit a, b les bornes de I, avec $a \le b$. L'ensemble $\varphi(\mathrm{I})$ est alors un intervalle dont les bornes sont $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. On a donc, en utilisant aussi la définition de φ,

$$\lambda(\varphi(\mathrm{I})) = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f d\lambda = \int_{\mathrm{I}} f d\lambda.$$

4. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(\varphi(\mathrm{O})) = \int_{\mathrm{O}} f d\lambda$. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q. :

$$\mathrm{O} \text{ ouvert, } \lambda(\mathrm{O}) \le \delta \Rightarrow \lambda(\varphi(\mathrm{O})) \le \varepsilon.$$

   Corrigé – L'ouvert O est une union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2 (lemme 2.45). Il existe donc une suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2 t.q. $\mathrm{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n$ (noter que certains intervalles ouverts peuvent être vides). On a alors $\varphi(\mathrm{O}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(\mathrm{I}_n)$ et les $\varphi(\mathrm{I}_n)$ sont aussi disjoints 2 à 2 (par injectivité de φ). On a donc, par σ-additivité de λ et par la question précédente,

$$\lambda(\varphi(\mathrm{O})) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(\varphi(\mathrm{I}_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathrm{I}_n} f d\lambda = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n} f d\lambda = \int_{\mathrm{O}} f d\lambda.$$

   On utilise maintenant la proposition 4.49. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q.

$$\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(\mathrm{A}) \le \delta \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} f d\lambda \le \varepsilon \tag{7.32}$$

   On en déduit, en particulier, que si O est un ouvert et que $\lambda(\mathrm{O}) \le \delta$, on a alors $\int_{\mathrm{O}} f d\lambda \le \varepsilon$ et donc $\lambda(\varphi(\mathrm{O})) \le \varepsilon$.

5. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $\lambda(\varphi(\mathrm{A})) = \int_{\mathrm{A}} f d\lambda$. [On pourra, par exemple, utiliser la régularité de λ et la question précédente.]

Corrigé – On commence par remarquer que $\varphi(\mathrm{A}) \subset \mathrm{I}_m$ et donc $\lambda(\varphi(\mathrm{A}) \leq \lambda(\mathrm{I}_m) = \int f d\lambda < +\infty$. On a aussi $0 \leq \int_{\mathrm{A}} f d\lambda \leq \int f d\lambda < +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer que $|\lambda(\varphi(\mathrm{A})) - \int_{\mathrm{A}} f d\lambda| \leq 2\varepsilon$. Pour cela, on utilise δ donné par (7.32). La régularité de λ donne l'existence de O ouvert contenant A et F fermé inclus dans A t.q. $\lambda(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) \leq \delta$. On en déduit, grâce à (7.32), en remarquant que $\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}$ est un ouvert,

$$0 \leq \lambda(\varphi(\mathrm{O})) - \lambda(\varphi(\mathrm{A})) = \lambda(\varphi(\mathrm{O} \setminus \mathrm{A})) \leq \lambda(\varphi(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F})) = \int_{\mathrm{O}\setminus\mathrm{F}} f d\lambda \leq \varepsilon.$$

On a aussi, toujours, grâce à (7.32),

$$0 \leq \int_{\mathrm{O}} f d\lambda - \int_{\mathrm{A}} f d\lambda = \int_{\mathrm{O}\setminus\mathrm{A}} f d\lambda \leq \varepsilon.$$

Comme la question précédente donne $\lambda(\varphi(\mathrm{O})) = \int_{\mathrm{O}} f d\lambda$, on en déduit que

$$|\lambda(\varphi(\mathrm{A})) - \int_{\mathrm{A}} f d\lambda| \leq 2\varepsilon.$$

Il reste à remarquer que $\varepsilon > 0$ est arbitraire pour conclure que $\lambda(\varphi(\mathrm{A})) - \int_{\mathrm{A}} f d\lambda$.

6. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$.

(a) Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $g = 1_{\mathrm{B}}$. Montrer que :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt = \int_a^b g(\varphi(s))f(s)ds. \tag{7.33}$$

[Prendre $\mathrm{A} = \psi(\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m) \cap]a, b[$ et utiliser la question précédente.]

Corrigé – Puisque $g = 1_{\mathrm{B}}$, on a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt = \int_{\mathrm{B}\cap]\varphi(a),\varphi(b)[} d\lambda = \lambda(\mathrm{B}\cap]\varphi(a), \varphi(b)[).$$

Comme $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{I}_m$, on a $\mathrm{B}\cap]\varphi(a), \varphi(b)[) = (\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m)\cap]\varphi(a), \varphi(b)[$. Puis, comme $\varphi \circ \psi$ est l'identité sur I_m on en déduit, avec $\mathrm{A} = \psi(\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m)\cap]a, b[$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m)\cap]\varphi(a), \varphi(b)[&= \varphi(\psi((\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m)\cap]\varphi(a), \varphi(b)[)) \\ &= \varphi(\psi(\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m) \cap \psi(]\varphi(a), \varphi(b)[)) = \varphi(\mathrm{A}).\end{aligned}$$

On a donc, avec la question précédente et la définition de A,

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt = \lambda(\varphi(\mathrm{A})) = \int_{\mathrm{A}} f d\lambda &= \int_{\psi(\mathrm{B}\cap\mathrm{I}_m)\cap]a,b[} f d\lambda \\ &= \int_a^b 1_{\psi(\mathrm{B}\cap\mathrm{I}_m)}(s)f(s)ds.\end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à remarquer que $s \in \psi(\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m)$ si et seulement si $\varphi(s) \in \mathrm{B}$. On obtient bien ainsi

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt = \int_a^b 1_{\mathrm{B}}(\varphi(s))f(s)ds = \int_a^b g(\varphi(s))f(s)ds.$$

(b) Montrer que (7.33) est encore vraie si g appartient à $\mathcal{E}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, puis si g appartient à $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Corrigé – Si $g \in \mathcal{E}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{B}_1, \ldots \mathrm{B}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q.

$$g = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{B}_i}.$$

Pour chaque i, la question précédente donne

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g_i(t)dt = \int_a^b g_i(\varphi(s))f(s)ds.$$

On multiplie les termes de cette égalité par a_i, on somme sur i et on obtient bien (7.33).

Soit maintenant $g \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q. $g_n \uparrow g$ (convergence simple en croissant). Par convergence monotone on peut passer à la limite quand $n \to +\infty$ dans (7.33) écrit avec g_n au lieu de g. On obtient bien ainsi (7.33).

(c) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable. On suppose que $g1_{]\varphi(a),\varphi(b)[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer $g \circ \varphi f 1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et que (7.33) est vraie.

Corrigé – On applique la question précédente à g^+ et g^- (parties positive et négative de g), c'est-à-dire qu'on écrit (7.33) avec g^+ et g^-. On en déduit que les fonctions $g^{\pm}1_{]\varphi(a),\varphi(b)[}f$ sont intégrables et donc que leur différence est intégrable. Ceci donne que $g1_{]\varphi(a),\varphi(b)[}f$ est intégrable (pour λ). Puis en faisant la différence de (7.33) avec g^+ avec (7.33) avec g^-, on obtient bien (7.33) avec g.

N.B. On peut montrer que φ est dérivable p.p. et que $\varphi' = f$ p.p.. La formule (7.33) est alors la formule habituelle de changement de variable. Noter aussi que la fonction φ, restreinte à l'intervalle $]a, b[$, appartient à un espace appelé $W^{1,1}(]a, b[)$ (ce qui explique le titre de l'exercice).