Devoir 1 exercice 1.4

Exercice 1.4 (Discontinuités d'une fonction croissante) Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f a une limite à droite et une limite à gauche en tout point. On note $f(x_+)$ et $f(x_-)$ ces limites au point x.

   Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\{f(y),\ y < x\}$ est majoré par $f(x)$ (car f est croissante). Cet ensemble admet donc une borne supérieure (dans $\mathbb{R}$) que l'on note $f(x_-)$ (et on a $f(x_-) \le f(x)$). Comme $f(x_-)$ est un majorant de l'ensemble $\{f(y),\ y < x\}$, on a $f(y) \le f(x_-)$ pour tout $y < x$. Puis, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y < x$ t.q $f(x_-) - \varepsilon < f(y) \le f(x_-)$ car $f(x_-)$ est le plus petit majorant de l'ensemble $\{f(y),\ y < x\}$. On a donc, comme f est croissante*
   $$y \le z < x \Rightarrow f(x_-) - \varepsilon < f(z) \le f(x_-).$$
   Ceci prouve que $f(x_-) = \lim_{y \to x_-} f(y)$. (On rappelle que $y \to x_-$ signifie $y \to x$ avec $y < x$.) On a ainsi montré que f admet une limite à gauche en x et cette limite notée $f(x_-)$ vérifie $f(x_-) \le f(x)$.

   De manière analogue on montre que f admet une limite à droite en x et cette limite notée $f(x_+)$ vérifie $f(x) \le f(x_+)$. Le nombre réel $f(x_+)$ est la borne inférieure de l'ensemble $\{f(y),\ y > x\}$ (cet ensemble est minoré par $f(x)$).

2. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable. [On pourra considérer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les ensembles $\mathrm{A}_n = \{x \in [0,1], f(x_+) - f(x_-) \ge (f(1_+) - f(0_-))/n\}$.]

   Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x_-) \le f(x) \le f(x_+)$. On remarque donc que le point x est un point de discontinuité de f si et seulement si $f(x_+) - f(x_-) > 0$. On note D l'ensemble des points de discontinuité de f, on a donc*
   $$\mathrm{D} = \{x \in \mathbb{R},\ f(x_+) - f(x_-) > 0\}.$$
   Pour montrer que D est au plus dénombrable (c'est-à-dire fini ou dénombrable, ce qui est équivalent à dire qu'il existe une injection de D dans $\mathbb{N}$), on va utiliser le fait qu'une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. (Une démonstration de ce résultat est donnée à la fin de la preuve de cette question.)

   On note $\mathrm{D}_{[0,1]}$ l'ensemble des points de discontinuité de f inclus dans $[0,1]$ et on va montrer que $\mathrm{D}_{[0,1]}$ est au plus dénombrable. Si $f(1_+) = f(0_-)$, la fonction f est constante sur $[0,1]$ et $\mathrm{D}_{[0,1]} = \emptyset$. On s'intéresse donc au cas $f(1_+) > f(0_-)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A}_n = \{x \in [0,1], f(x_+) - f(x_-) \ge (f(1_+) - f(0_-))/n\}$.

   On suppose $\mathrm{A}_n \ne \emptyset$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_p \in \mathrm{A}_n$ avec $x_i < x_{i+1}$ si $i \in \{1, \ldots, p-1\}$. Comme f est croissante, on a $f((x_i)_+) \le f((x_{i+1})_-)$ et
   $$f(1_+) - f(0_-) \ge \sum_{i=1}^{p} (f((x_i)_+) - f((x_i)_-) \ge \frac{p(f(1_+) - f(0_-))}{n}.$$
   On a donc $p \le n$ ce qui prouve que A_n est de cardinal fini.

On remarque maintenant que $D_{[0,1]} = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star} A_n$. *Comme, pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$, A_n *est fini, on en déduit que* $D_{[0,1]}$ *est au plus dénombrable.*
La raisonnement que nous venons de faire peut se faire aussi en remplaçant $[0,1]$ *par* $[-k,k]$ *avec* $k \in \mathbb{N}^\star$. *En notant* $D_{[-k,k]}$ *l'ensemble des points de discontinuité de* f *inclus dans* $[-k,k]$ *on montre ainsi que* $D_{[-k,k]}$ *est au plus dénombrable. Finalement, comme* $D = \cup_{k\in\mathbb{N}^\star} D_{[-k,k]}$, *on obtient bien que* D *est au plus dénombrable.*

Pour conclure on donne maintenant une démonstration du fait qu'une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
Soit E *un ensemble et* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de parties de* E. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on suppose que l'ensemble* B_n *est au plus dénombrable. On pose* $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. *Comme* B_n *est au plus dénombrable, il existe une application injective* φ_n *de* B_n *dans* $\mathbb{N}$. *Pour* $x \in B$, *on définit* $\varphi(x) \in \mathbb{N}$ *en posant*

$$n_x = \min\{n,\, x \in B_n\} \text{ et } \varphi(x) = 2^{n_x} 3^{\varphi_{n_x}(x)}.$$

Il est facile de voir de φ *est injective (car* 2 *et* 3 *sont des nombres premiers et donc* $\varphi(x) = \varphi(y)$ *implique* $n_x = n_y$, *on en déduit que* $x = y$ *car* φ_{n_x} *est injective). L'application* φ *est donc injective de* B *dans* $\mathbb{N}$, *ce qui prouve que* B *est au plus dénombrable.*

Devoir 1, exercice 3.2

Exercice 3.2 (Mesurabilité pour f à valeurs dans $\mathbb{R}$) Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F}$ une σ-algèbre sur Ω. Soit f une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne.

1. Montrer que f est mesurable si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega, f(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$.

   Corrigé – *On pose $\mathcal{C} = \{]-\infty, x[, x \in \mathbb{R}\}$. Compte tenu de la proposition 3.16 (voir aussi l'exercice 3.1), il suffit de montrer que $\mathrm{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

   Comme les éléments de $\mathcal{C}$ sont des ouverts, on a, bien sûr, $\mathrm{T}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Pour montrer l'inclusion inverse, on commence par remarquer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on a (grâce aux propriétés de stabilité d'une tribu) $[a, b[=]-\infty, b[\setminus]-\infty, a[\in \mathrm{T}(\mathcal{C})$, puis $]a, b[= \cup_{n\in\mathbb{N}^*}[a + (1/n), b[\in \mathrm{T}(\mathcal{C})$. Puis, comme tout ouvert est une union au plus dénombrable d'intrevalles ouverts bornés (voir le lemme 2.11), on en déduit que $\mathrm{T}(\mathcal{C})$ contient tous les ouverts et donc $\mathrm{T}(\mathcal{C}) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Finalement, on a bien $\mathrm{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Montrer que f est mesurable si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega, f(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$.

   Corrigé – *On pose ici $\mathcal{D} = \{]-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$. Compte tenu de proposition 3.16, il suffit de montrer que $\mathrm{T}(\mathcal{D}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

   Comme les éléments de $\mathcal{D}$ sont des fermés, on a, bien sûr, $\mathrm{T}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Pour montrer l'inclusion inverse, on remarque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $]-\infty, x[= \cup_{n\in\mathbb{N}^*}]-\infty, x - (1/n)]$ et donc $\mathcal{C} \subset \mathrm{T}(\mathcal{D})$ (où $\mathcal{C}$ est l'ensemble défini à la question précédente). On a donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathrm{T}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{T}(\mathcal{D})$. Finalement, on a donc bien $\mathrm{T}(\mathcal{D}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Devoir 1, exercice 3.32

Exercice 3.34 (Mesurabilité de l'ensemble des points de convergence) Soit (E, T) un espace mesurable. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ (on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, comme toujours). On note A l'ensemble des points $x \in E$ tels que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas de Cauchy. Montrer que $A \in T$.

Corrigé – *Soit* $x \in E$. *On a* $x \in A$ *si et seulement si il existe* $p \in \mathbb{N}^\star$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *il existe* i, j *avec* $j > i \geq n$ *tels que* $|f_j(x) - f_i(x)| > (1/p)$. *Ceci montre que*

$$A = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^\star} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=n}^{+\infty} \bigcup_{j=i+1}^{+\infty} |f_j - f_i|^{-1}(]\frac{1}{p}, +\infty[).$$

Comme $|f_j - f_i|^{-1}(]\frac{1}{p}, +\infty[) \in T$ *(car les* f_k *sont mesurables), les propriétés de stabilité de* T *par union et intersection dénombrable donnent que* $A \in T$.