Faculté des Sciences
Aix Marseille Université

CTES
Centre de Télé-Enseignement Sciences

LICENCE 3 MATHEMATIQUES – INFORMATIQUE. MATHEMATIQUES GENERALES. L3MiMG.

Expédition dans la semaine n°	Etape	Code UE	N° d'envoi de l'UE
50	**2L3MAT**	**SMI5U1T**	**3**

Nom de l'UE : Intégration et transformée de Fourier (UE 5-3)

- Contenu de l'envoi : Polycopié, chapitres 5 et 6. Corrigés des exercices des chapitres 5 et 6.

- Guide du travail à effectuer
Semaine 1 :
Etudier le chapitre 4, sections 4.6 (Espace L1) et 4.7 (convergence dans L1)
Exercices proposés (avec corrigés) : 4.22, 4.24, 4.27
L'exercice 4.25 fait partie du deuxième devoir.
Semaine 2 :
Etudier le chapitre 4, sections 4.8 et 4.10 (petits compléments) et le chapitre 5, sections 5.1 (comparaison Riemann-Lebesgue) et 5.3 (changement de variable, densité, continuité)
Exercices proposés (avec corrigés) : 4.30, 4.33, 4.34, 5.5, 5.6, 5.10
Semaine 3 :
Etudier le chapitre 6, sections 6.1 (espaces Lp).
Exercices proposés (avec corrigés) : 6.7, 6.17, 6.22
Semaine 4 :
Etudier le chapitre 6, section 6.2 (espace L2, analyse hilbertienne)
Exercices proposés (avec corrigés) : 6.27, 6.32, 6.34
L'exercice 6.25 fait partie du deuxième devoir.

Le deuxième devoir est à rendre à la réception du cinquième envoi (en mars).

-Coordonnées de l'enseignant responsable de l'envoi
T. Gallouet, LATP-CMI, 39 rue Joliot Curie, 13453 marseille cedex 13.
email : thierry.gallouet@univ-amu.fr
Vous pouvez aussi consulter la page web: http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/tele.d/int
et me poser des questions par email.

Chapitre 5

Intégrale sur les boréliens de $\mathbb{R}$

5.1 Intégrale de Lebesgue et intégrale des fonctions continues

Nous commençons par comparer l'intégrale de Lebesgue (définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$) à l'intégrale classique des fonctions continues (et plus généralement des fonctions réglées).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non). On rappelle que $\mathcal{B}(\mathrm{I}) = \{\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mathrm{A} \subset \mathrm{I}\}$. On peut donc considérer la restriction à $\mathcal{B}(\mathrm{I})$ de la mesure de Lebesgue définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On notera en général (un peu incorrectement) aussi λ cette mesure sur $\mathcal{B}(\mathrm{I})$.

Proposition 5.1
Soit $-\infty < a < b < +\infty$. Soit $f \in \mathrm{C}([a,b], \mathbb{R})$. Alors, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda))$ et $\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$ (cette dernière intégrale est à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues vue au Chapitre 1).

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 4.5 page 152. En fait l'exercice 4.5 s'intéresse au cas $[0,1]$ mais s'adapte facilement pour le cas général $[a,b]$. ■

Remarque 5.2

1. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ dont les bornes sont $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (I peut être fermé ou ouvert en a et b) et si $f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I}, \mathcal{B}(\mathrm{I}), \lambda)$ ou $\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathcal{B}(\mathrm{I}), \lambda)$, on notera souvent :

$$\int f d\lambda = \int f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(x)dx.$$

   Cette notation est justifiée par la proposition précédente (proposition 5.1) car, si I est compact, l'intégrale de Lebesgue contient l'intégrale des fonctions continues (et aussi l'intégrale des fonctions réglées et aussi l'intégrale de Riemann, voir l'exercice 5.2).

2. Soient $-\infty < a < b < +\infty$ et $f \in \mathrm{C}([a,b], \mathbb{R})$.

   La proposition 5.1 donne que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b],\ \mathcal{B}([a,b]),\ \lambda))$. En fait, on écrira souvent que $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b],\ \mathcal{B}([a,b]),\ \lambda))$, c'est-à-dire qu'on confondra f avec sa classe dans $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)$, qui est l'ensemble $\{g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b],\ \mathcal{B}([a,b]),\ \lambda)\ ;\ g = f$ p.p.$\}$. On peut d'ailleurs noter que f est alors le seul élément continu de $\{g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)\ ;\ g = f$ p.p.$\}$ comme le montre la proposition suivante (proposition 5.3).

Proposition 5.3 *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *de longueur strictement positive et* $f, g \in C(I, \mathbb{R})$. *On suppose que* $f = g$ λ*-p.p.. On a alors* $f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in I$.

Cette proposition est démontrée à l'exercice (corrigé) 3.11 page 101 pour $I = \mathbb{R}$. La démonstration pour I quelconque est similaire.

Proposition 5.4 *Soit* $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *(c'est-à-dire que* f *est une fonction continue à support compact). Alors* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. *(Ici aussi, on écrira souvent* $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.*)*

De plus, si $a, b \in \mathbb{R}$ *sont t.q.* $a < b$ *et* $f = 0$ *sur* $[a,b]^c$ *(de tels* a *et* b *existent). Alors,* $\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$ *(cette dernière intégrale étant à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues vue au Chapitre 1).*

DÉMONSTRATION – On remarque d'abord que f est borélienne car continue. Puis, pour montrer que f est intégrable, on utilise la proposition 5.1. Comme f est à support compact, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$ et $f = 0$ sur $[a,b]^c$. On a alors, par la proposition 5.1,

$$f_{|[a,b]} \in C([a,b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda).$$

On a donc

$$\int |f| d\lambda = \int |f_{|[a,b]}| d\lambda < \infty$$

et donc $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Enfin, la proposition 5.1 donne aussi :

$$\int f_{|[a,b]} d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

D'où l'on conclut bien que $\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$. ■

Le résultat précédent se généralise à l'intégrale de Riemann des fonctions Riemann-intégrables (construite à partir des sommes de Darboux). Ceci fait l'objet de l'exercice 5.2.

5.2 Mesures abstraites et mesures de Radon

Remarque 5.5 Les propositions 5.1 et 5.4 donnent les résultats suivants :

1. Pour $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f d\lambda$. L'application L est une application linéaire (de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive, c'est-à-dire que $f \geq 0 \Rightarrow L(f) \geq 0$. (On rappelle que $f \geq 0$ signifie que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.)

   Plus généralement, soit m une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, finie sur les compacts. Il est facile de voir que $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ (en toute rigueur, on a plutôt $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$). Pour $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f dm$. L'application L est une application linéaire (de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive (ou encore une forme linéaire positive).

   On peut montrer une réciproque de ce résultat (théorème 5.6).

2. Soit $-\infty < a < b < \infty$. Pour $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f d\lambda$. L'application L est une application linéaire (de $C([a,b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive.

   Ici aussi, plus généralement, soit m une mesure finie sur $([a,b], \mathcal{B}([a,b]))$. Il est facile de voir que $C([a,b], \mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), m)$ (ou plutôt $C([a,b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), m)$). Pour $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f dm$. L'application L est une application linéaire (de $C([a,b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive (ou encore une forme linéaire positive).

   Ici aussi, on peut montrer une réciproque de ce résultat (voir la remarque 5.15).

On énonce maintenant des résultats, dus à F. Riesz, qui font le lien entre les applications linéaires (continues ou positives) sur des espaces de fonctions continues (applications que nous appellerons mesures de Radon) et les mesures abstraites sur $\mathcal{B}(\mathrm{R})$ (c'est-à-dire les applications σ−additives sur les boréliens de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$, non identiquement égales à $+\infty$). Le théorème 5.6 donné ci après est parfois appelé "Théorème de représentation de Riesz en théorie de la mesure". Dans ce livre, nous réservons l'appellation "Théorème de représentation de Riesz" pour le théorème 6.56 de représentation de Riesz dans les espaces de Hilbert.

Théorème 5.6 (Riesz) *Soit* L *une forme linéaire positive sur* $\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, c'est-à-dire une application linéaire positive de* $\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$*. Alors il existe une unique mesure* m *sur* $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *t.q. :*

$$\forall\ f \in \mathrm{C}_c,\ \ \mathrm{L}(f) = \int f\,dm.$$

De plus, m *est finie sur les compacts (c'est-à-dire* $m(\mathrm{K}) < +\infty$ *pour tout compact* K *de* $\mathbb{R}$*.)*

DÉMONSTRATION – La partie unicité de cette démonstration est assez facile et est donnée dans la proposition 5.8. La partie existence est plus difficile, on en donne seulement le schéma général, sous forme d'exercice détaillé.

Soit L une forme linéaire positive sur $\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Montrer que L est continue au sens suivant : pour tout compact K de $\mathbb{R}$, il existe $\mathrm{C}_\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ t.q. pour toute fonction continue à support dans K, $|\mathrm{L}(f)| \le \mathrm{C}_\mathrm{K}\|f\|_\infty$.
   [Considérer une fonction $\psi_\mathrm{K} \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\psi_\mathrm{K}(x) = 1$ si $x \in \mathrm{K}$ et $\psi_\mathrm{K}(x) \ge 0$ pour tout x.]
2. Montrer le lemme suivant :

   Lemme 5.7 (Dini) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $f_n \uparrow f$ ou $f_n \downarrow f$ lorsque $n \to +\infty$. Alors f_n converge uniformément vers f.
3. Déduire des deux étapes précédentes que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $f_n \uparrow f$ ou $f_n \downarrow f$ lorsque $n \to +\infty$, alors $\mathrm{L}(f_n) \to \mathrm{L}(f)$.
4. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des suites telles que $f_n \uparrow f$ et $g_n \uparrow g$ (ou $f_n \downarrow f$ et $g_n \downarrow g$), où f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que si $f \le g$ alors $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}(f_n) \le \lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}(g_n)$ (et dans le cas particulier où $f = g$, $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}(f_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}(g_n)$).
   [On pourra, par exemple, considérer, pour n fixé, $h_p = \inf(g_p, f_n)$ et remarquer que $h_p \uparrow f_n$.]
5. On définit :

$$\mathrm{A}_+ \quad = \quad \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \uparrow f \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}(f_n) < +\infty\}, \tag{5.1}$$

$$\mathrm{A}_- \quad = \quad \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \downarrow f \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}(f_n) > -\infty\}, \tag{5.2}$$

   Si $f \in \mathrm{A}^+$, on pose $\mathrm{L}(f) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}(f_n)$, où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \uparrow f$.
   Si $f \in \mathrm{A}^-$, on pose $\mathrm{L}(f) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}(f_n)$, où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \downarrow f$.
   Vérifier que ces définitions sont cohérentes (c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas des suites choisies et que si $f \in \mathrm{A}^+ \cap \mathrm{A}^-$, les deux définitions coincïdent). Montrer les propriétés suivantes :
   (a) Si $f \in \mathrm{A}^+$ (resp. A^-) alors $-f \in \mathrm{A}^-$ (resp. A^+)et $\mathrm{L}(-f) = -\mathrm{L}(f)$.
   (b) Si $f, g \in \mathrm{A}^+$ (resp. A^-) alors $f + g \in \mathrm{A}^+$ (resp. A^-) et $\mathrm{L}(f + g) = \mathrm{L}(f) + \mathrm{L}(g)$.
   (c) Si $f \in \mathrm{A}^+$ (resp. A^-) et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ alors $\alpha f \in \mathrm{A}^+$ (resp. A^-) et $\mathrm{L}(\alpha f) = \alpha\mathrm{L}(f)$.
   (d) Si $f \in \mathrm{A}^+$ (resp. A^-) et $g \in \mathrm{A}^+$ alors $\sup(f, g) \in \mathrm{A}^+$ et $\inf(f, g) \in \mathrm{A}^+$.
   (e) Si $f, g \in \mathrm{A}^+$ (resp. A^-) et $f \ge g$, alors $\mathrm{L}(f) \ge \mathrm{L}(g)$.
   (f) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{A}_+$ (resp. A^-) et $f_n \uparrow f \in \mathrm{A}^+$ (resp. $f_n \downarrow f \in \mathrm{A}^-$), alors $\mathrm{L}(f_n) \ge \mathrm{L}(f)$.

(g) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_+$ (resp. A^-) t.q. $f_n \uparrow f$ (resp. $f_n \downarrow f$), où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Si $\lim_{n\to+\infty} L(f_n) < +\infty$, alors $f \in A^+$.

Remarquer aussi que A^+ contient toutes les fonctions caractéristiques des ouverts bornés et que A^- contient toutes les fonctions caractéristiques des compacts.

6. On pose :
$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \forall \varepsilon > 0, \exists g \in A^+ \text{ et } h \in A^-; h \le f \le g \text{ et } L(g) - L(h) \le \varepsilon\}$$
et pour $f \in E$, on définit :
$$L(f) = \sup_{h\in A^-, h\le f} L(h) = \inf_{g\in A^-, g\ge f} L(g).$$
Montrer que cette définition a bien un sens, c'est-à-dire que d'une part :
$$\sup_{h\in A^-, h\le f} L(h) = \inf_{g\in A^-, g\ge f} L(g),$$
et d'autre part la définition de L sur E est compatible avec la définition sur A^+ et A^- (après avoir remarqué que $A^+ \subset E$ et $A^- \subset E$). Montrer les propriétés suivantes sur E :
(a) E est un espace vectoriel et L une forme linéaire positive sur E.
(b) E est stable par passage à la limite croissante ou décroissante.
(c) E est stable par inf et sup, *i.e.* si $f \in E$ et $g \in E$, alors $\sup(f,g) \in E$ et $\inf(f,g) \in E$.
7. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c$ t.q. $0 \le \varphi_n \le 1$ et $\varphi_n \uparrow 1$. On pose $T = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); 1_A\varphi_n \in E \forall n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $T \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
8. Pour $A \in T$, on pose : $m(A) = \lim_{n\to+\infty} L(1_A\varphi_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Montrer que m est une mesure σ-finie.
9. Montrer que $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, T, m) = E$ et que $\int f dm = L(f), \forall f \in E$.

■

Proposition 5.8 *Soit $d \ge 1$, m et μ deux mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, finies sur les compacts. On suppose que $\int f dm = \int f d\mu$, pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Alors $m = \mu$.*

La démonstration de cette proposition peut se faire en utilisant la proposition 2.31. Elle est faite pour $d = 1$ au chapitre 4 (proposition 4.60). Sa généralisation au cas $d > 1$ est laissée en exercice.

Remarque 5.9 Le théorème 5.6 donne un autre moyen de construire la mesure de Lebesgue que celui vu au chapitre 2 :

Pour $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int_a^b f(x)dx$, où $a, b \in \mathbb{R}$ sont choisis pour que $f = 0$ sur $[a,b]^c$ (on utilise ici l'intégrale des fonctions continues sur un compact de $\mathbb{R}$). L'application L est clairement linéaire positive de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème 5.6 donne donc l'existence d'une mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\int f dm = L(f)$ pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cette mesure est justement la mesure de Lebesgue (elle vérifie bien $m(]a,b[) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

Définition 5.10 *On définit les espaces de fonctions continues (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) suivants :*
$$C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < +\infty\},$$
$$C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(x) \to 0 \textit{ quand } |x| \to +\infty\},$$
$$C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \exists K \subset \mathbb{R}, K \textit{ compact, } f = 0 \textit{ sur } K^c\}.$$
Pour $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $\|f\|_u = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. La norme $\|\cdot\|_u$ s'appelle norme de la convergence uniforme (elle est aussi parfois appelée norme infinie.)

Il est clair que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on rappelle que $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont des espaces de Banach (e.v.n. complet) avec la norme $\|\cdot\|_u$. Ces espaces seront parfois notés, en abrégé, C_c, C_0 et C_b.

Remarque 5.11 Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$ (en toute rigueur, on a plutôt $C_b \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$). Pour $f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f\,dm$. L'application L est alors une application linéaire sur $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On munit $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme, L'application L est alors continue (car $L(f) \le m(\mathbb{R})\|f\|_u$ pour tout $f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$). L'application L est aussi positive, c'est-à-dire que $f \ge 0 \Rightarrow L(f) \ge 0$. On donne ci-après des réciproques partielles de ces résultats.

Théorème 5.12 (Riesz) *Soit* L *une application linéaire positive de* $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$*, alors il existe une unique mesure m finie sur* $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *t.q. :*

$$\forall\ f \in C_0,\ \ L(f) = \int f\,dm.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration consiste d'abord à montrer que L est continue (quand $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est muni de sa norme naturelle, c'est-à-dire de la norme $\|\cdot\|_u$). C'est la première étape ci-dessous. Puis à appliquer le théorème 5.6, c'est le deuxième étape.

Étape 1

On montre, dans cette étape, que L est continue.

On raisonne par l'absurde. Si L n'est pas continue, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite de $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $L(f_n) \ge n$ et $\|f_n\|_u = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $g_n = |f_n|/(n^2)$, on a $g_n \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et en utilisant la linéarité et la positivité de L, on obtient

$$L(g_n) = \frac{1}{n^2}L(|f_n|) \ge \frac{1}{n^2}L(f_n) \ge \frac{1}{n} \text{ et } \|g_n\|_u = \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est absolument convergente dans $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, elle est donc convergente (car $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace de Banach). On note g la somme de cette série. On a donc $g \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et comme les fonctions g_n sont positives,

$$L(g) \ge \sum_{p=1}^{n} L(g_p) \ge \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient $L(g) = +\infty$, ce qui est absurde.

On a donc bien montré que L est continue. Il existe donc M t.q. $L(f) \le M\|f\|_u$ pour tout $f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Etape 2

La restriction de L à $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est linéaire positive. Le théorème 5.6 donne l'existence d'une mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q.

$$L(f) = \int f\,dm \text{ pour tout } f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \tag{5.3}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$\varphi_n = 1_{[-n,n]} + (x+n+1)1_{[-(n+1),-n]} + (n+1-x)1_{[n,n+1]},$$

et on prend $f = \varphi_n$ dans (5.3). On obtient $m([-n,n]) \le L(\varphi_n) \le M\|\varphi_n\|_u = M$. On a donc, en faisant $n \to +\infty$, $m(\mathbb{R}) \le M$, ce qui prouve que m est une mesure finie.

Enfin, si $f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on pose $f_n = f\varphi_n$. On remarque que f_n tend vers f dans $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et est dominée par $|f|$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} L(f_n) = L(f)$ car L est continue et $\lim_{n\to+\infty}\int f_n\,dm = \int f\,dm$ par convergence dominée. Comme $L(f_n) = \int f_n\,dm$ (car $f_n \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$), on obtient finalement $L(f) = \int f\,dm$. ■

Le résultat du théorème 5.12 est faux si on remplace C_0 par C_b. On peut, par exemple, construire une application linéaire continue positive sur C_b, non identiquement nulle sur C_b et nulle sur C_0. Si on note L une telle application (nulle sur C_0 mais non identiquement nulle sur C_b) et si m est une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q. $L(f) = \int f dm$ pour $f \in C_b$, on montre facilement (en utilisant $\int f dm = 0$ pour tout $f \in C_0$) que $m = 0$ et donc $L(f) = 0$ pour tout $f \in C_b$, en contradiction avec le fait que L n'est pas identiquement nulle sur C_b.

Pour construire une application linéaire continue positive sur C_b, non identiquement nulle et nulle sur C_0, on peut procéder de la manière décrite ci après. On note F le sous espace vectoriel de C_b formé des éléments de C_b ayant une limite en $+\infty$. On a donc $f \in F$ si $f \in C_b$ et s'il existe $l \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) \to l$ quand $x \to +\infty$. Pour $f \in F$ on pose $\tilde{L}(f) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. On a ainsi défini une forme linéaire positive sur F (car, pour $f \in F$, $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ implique bien $\tilde{L}(f) \geq 0$). En utilisant le théorème 5.14 donné ci après, il existe donc L, forme linéaire positive sur C_b, t.q. $L = \tilde{L}$ sur F. L'application L est donc linéaire continue positive sur C_b (pour la continuité, on remarque que $|L(f)| \leq \|f\|_u$), elle est bien nulle sur C_0 (car $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ si $f \in C_0 \subset F$) et non identiquement nulle sur C_b car $L(f) = 1$ si f est la fonction constante, égale à 1 en tout point.

Remarque 5.13 Soit E un espace de Banach réel, F un s.e.v. de E et T une application linéaire continue de F (muni de la norme de E) dans $\mathbb{R}$. Le théorème de Hahn-Banach [1] donne alors l'existence d'une application linéaire continue $\bar{T}$ de E dans $\mathbb{R}$ (*i.e.* $\bar{T} \in E'$) t.q. $\tilde{T} = T$ sur F. (Si F est dense dans E, le théorème de Hahn-Banach est inutile et on peut montrer aussi l'unicité de $\bar{T}$. Si F n'est pas dense dans E, $\tilde{T}$ n'est pas unique.) L'objectif du théorème 5.14 est de remplacer l'hypothèse de continuité de T par une propriété de positivité.

Théorème 5.14 (Hahn-Banach positif) *Soit* F *un sous espace vectoriel de* $C_b = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < +\infty\}$ *et* T *une application linéaire de* F *dans* $\mathbb{R}$. *On suppose que* F *contient les fonctions constantes et que* T *est positive (c'est-à-dire que, pour* $f \in F$, $f(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *implique* $T(f) \geq 0$*). Il existe alors* $\overline{T}$*, application linéaire positive sur* C_b*, t.q.* $\overline{T} = T$ *sur* F.

DÉMONSTRATION – La démonstration n'est pas détaillée ici. Elle peut se faire en utilisant une technique très similaire à celle donnant la démonstration du théorème de Hahn-Banach (qui permet aussi de montrer le théorème de prolongement d'une application linéaire continue définie sur un sous espace vectoriel d'un espace de Banach). Elle peut aussi se faire en se ramenant à la version du théorème de Hahn-Banach donné, par exemple, dans le livre d'analyse fonctionnelle de H. Brezis [1].

Il est intéressant de noter que le résultat du théorème peut être faux si on retire l'hypothèse F contient les fonctions constantes. ■

On peut maintenant faire la remarque suivante :

Remarque 5.15 Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}$. On note $C(K, \mathbb{R}) = \{f_{|K}, f \in C_b\}$. Si m est une mesure finie sur $(K, \mathcal{B}(K))$ l'espace fonctionnel $C(K, \mathbb{R})$ est inclus dans $L^1_{\mathbb{R}}(K, \mathcal{B}(K), m)$, et l'application qui à $f \in C(K, \mathbb{R})$ associe $\int f dm$ est linéaire positive (et continue, si $C(K, \mathbb{R})$ est muni de la norme de la convergence uniforme). Réciproquement, soit L une application linéaire positive de $C(K, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème précédent permet de montrer qu'il existe une unique mesure finie, notée m, sur $(K, \mathcal{B}(K))$ t.q. :

$$L(f) = \int f dm, \quad \forall f \in C(K, \mathbb{R}).$$

Considérons maintenant le cas des mesures signées : si m est une mesure signée sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (ou sur $(K, \mathcal{B}(K))$), l'application qui à $f \in C_0$ (ou $\in C(K)$, K étant une partie compacte de $\mathbb{R}$) associe $\int f dm$ est linéaire continue (pour la norme de la convergence uniforme). Réciproquement, on a aussi existence et unicité d'une mesure (signée) définie à partir d'une application linéaire continue de C_0 (ou de $C(K)$) dans $\mathbb{R}$:

Théorème 5.16 (Riesz, mesures signées) *Soit* L *une application linéaire continue de* $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$ *(ou de* $C(K, \mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$*, où* K *est un compact de* $\mathbb{R}$*). Alors il existe une unique mesure signée, notée m, sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(ou sur* $\mathcal{B}(K)$*) t.q. :*

$$L(f) = \int f dm, \ \ \forall f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})(\textit{ ou } C(K, \mathbb{R})).$$

Les éléments de $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}))'$ *(ou* $(C(K, \mathbb{R}))'$*) sont appelés mesures de Radon sur* $\mathbb{R}$ *(ou* K*). On rappelle que, pour un espace de Banach (réel)* E*, on note* E′ *son dual topologique, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires continues de* E *dans* $\mathbb{R}$*.*

DÉMONSTRATION – Elle consiste à se ramener au théorème de Riesz pour des formes linéaires positives. Elle n'est pas détaillée ici. On rappelle seulement que si m est une mesure signée sur T (tribu sur un ensemble E). il existe deux mesures finies m^+ et m^- sur T, étrangères (c'est-à-dire qu'il existe $A \in T$ t.q. $m^+(A) = m^-(A^c) = 0$) et t.q. $m = m^+ - m^-$. On a alors (par définition)

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m^+) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m^-),$$

et, si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$,

$$\int f dm = \int f dm^+ - \int f dm^-.$$

■

Définition 5.17 (Mesure de Radon) *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}$*, alors on appelle mesure de Radon sur* $\overline{\Omega}$ *un élément de* $(C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}))'$*, c'est-à-dire une application linéaire continue (pour la norme infinie) de* $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

Remarque 5.18 Soit T une forme linéaire sur $C_c(\Omega, \mathbb{R})$.

1. Si T est continue pour la norme $\|.\|_\infty$, on peut montrer qu'il existe une et une seule mesure signée, notée μ, sur les boréliens de Ω telle que

$$T(f) = \int f d\mu \text{ pour tout } f \in C_c(\Omega, \mathbb{R}).$$

   Pour montrer l'existence de μ, on peut commencer par se ramener au théorème 5.16 en prolongeant T (de manière non unique) en une application linéaire continue sur $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ (ceci est possible par le théorème de Hahn-Banach). Le théorème 5.16 donne alors une (unique) mesure sur $\mathcal{B}(\overline{\Omega})$ correspondant à ce prolongement de T. La restriction de cette mesure à $\mathcal{B}(\Omega)$ est la mesure μ recherchée. Il est intéressant de remarquer que cette mesure μ est unique, sans que celle donnée par le théorème 5.16 soit unique (car cette dernière dépend du prolongement choisi de T à $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$).
2. Si T est continue pour la topologie naturelle de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$, (c'est-à-dire que, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C_K \in \mathbb{R}$ tel que $T(f) \le C_K \|f\|_\infty$, pour tout $f \in C_c(\Omega, \mathbb{R})$ avec $f = 0$ sur le complémentaire de K) alors le résultat donné dans le premier item (c'est-à-dire l'existence de μ) peut être faux ; par contre on peut montrer qu'il existe deux mesures (positives) μ_1 et μ_2 sur les boréliens de Ω telles que

$$T(f) = \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2, \ \forall f \in C_c(\Omega, \mathbb{R});$$

   on peut noter que μ_1 et μ_2 peuvent prendre toutes les deux la valeur $+\infty$ (exemple : $N = 1$, $\Omega =]-1, 1[$, $T(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n f(1 - \frac{1}{n}) - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n f(-1 + \frac{1}{n})$), et donc que $(\mu_1 - \mu_2)(\Omega)$ n'a pas toujours un sens.

Soit maintenant T une forme linéaire sur $C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$, continue pour la norme $\|\cdot\|_u$, alors il existe une et une seule mesure signée, notée μ, sur les boréliens de Ω telle que

$$\mathrm{T}(f) = \int f d\mu, \forall f \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}).$$

5.3 Changement de variable, densité et continuité

On montre dans cette section quelques propriétés importantes de l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (et éventuellement de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ si μ est finie sur les compacts).

Proposition 5.19 (Changement de variable affine) *Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. On définit*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ par } g(x) = f(\alpha x + \beta) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Alors, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et

$$\int g d\lambda = \frac{1}{|\alpha|}\int f d\lambda.$$

Le même résultat reste vrai en remplaçant $\mathcal{L}^1$ par L^1.

DÉMONSTRATION – 1. On pose $\varphi(x) = \alpha x + \beta$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, de sorte que $g = f \circ \varphi$. Comme f et φ sont boréliennes (noter que φ est même continue), g est aussi borélienne, c'est-à-dire $g \in \mathcal{M}$.

2. Pour montrer que $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et

$$\int g d\lambda = \frac{1}{|\alpha|}\int f d\lambda, \tag{5.4}$$

on raisonne en plusieurs étapes :

(a) On suppose que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) < +\infty$. On a alors $g = 1_{\frac{1}{\alpha}A-\frac{\beta}{\alpha}}$ (avec $\frac{1}{\alpha}A - \frac{\beta}{\alpha} = \{\frac{1}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha}, x \in A\}$). On a donc $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et (5.4) est vraie (car on a déjà vu que $\lambda(\frac{1}{\alpha}A - \frac{\beta}{\alpha}) = \frac{1}{|\alpha|}\lambda(A)$, dans la proposition 2.48).

(b) On suppose que $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.
Il existe donc $a_1,\ldots,a_n > 0$ et $A_1,\ldots,A_n \in T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. Comme $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, on a aussi $\lambda(A_i) < +\infty$ pour tout i. On conclut alors que $g = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\frac{1}{\alpha}A_i-\frac{\beta}{\alpha}}$, ce qui donne que $g \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et que (5.4) est vraie.

(c) On suppose que $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. On a donc $\int f_n d\lambda \uparrow \int f d\lambda$ quand $n \to +\infty$. On définit g_n par $g_n(x) = \alpha x + \beta$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors

$$g_n \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda),\ g_n \uparrow g \text{ et } \int g_n d\lambda \uparrow \int g d\lambda \text{ quand } n \to +\infty.$$

Comme (5.4) est vraie pour $f = f_n$ et $g = g_n$, on en déduit que $g \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et (5.4) est vraie.

(d) On suppose enfin seulement que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Comme

$$f = f^+ - f^-, \text{ avec } f^\pm \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda),$$

on peut utiliser l'étape précédente avec $f^\pm$ et on obtient que $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et que (5.4) est vraie.

3. Le résultat obtenu est encore vrai pour L^1 au lieu de $\mathcal{L}^1$. Il suffit de remarquer que

$$f_1 = f_2 \text{ p.p. } \Rightarrow g_1 = g_2 \text{ p.p. , avec } g_i(\cdot) = f_i(\alpha\cdot+\beta),\ i = 1, 2.$$

En fait, lorsque f décrit un élément de L^1 (qui est un ensemble d'éléments de $\mathcal{L}^1$), la fonction $g(\alpha\cdot+\beta)$ décrit alors un élément de L^1.

■

Le résultat de densité que nous énonçons à présent permet d'approcher une fonction de $L^1_R(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ aussi près que l'on veut par une fonction continue à support compact. Ce résultat est souvent utilisé pour démontrer certaines propriétés des fonctions de L^1 : on montre la propriété pour les fonctions continues, ce qui s'avère en général plus facile, et on passe à la limite.

Théorème 5.20 (Densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$) *On note $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. L'ensemble $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et à supports compacts, est dense dans L^1, c'est-à-dire :*

$$\forall f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R});\ \|f-\varphi\|_1 < \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION – On a déjà vu que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1$. En toute rigueur, on a plutôt $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. L'objectif est donc de montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}^1$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\|f-\varphi\|_1 \leq \varepsilon$. On va raisonner une nouvelle fois en plusieurs étapes (fonctions caractéristiques, $\mathcal{E}_+$, $\mathcal{M}_+$ et enfin $\mathcal{L}^1$).

Etape 1. On suppose ici que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(A) < +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme λ est une mesure régulière (proposition 2.43), il existe un ouvert O et un fermé F tels que $F \subset A \subset O$ et $\lambda(O \setminus F) \leq \varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n = F \cap [-n,n]$, de sorte que F_n est compact (pour tout n) et $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. La continuité croissante de λ donne alors $\lambda(F_n) \uparrow \lambda(F)$, quand $n \to +\infty$. Comme $\lambda(F) \leq \lambda(A) < +\infty$, on a aussi $\lambda(F \setminus F_n) = \lambda(F) - \lambda(F_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Il existe donc n_0 tel que $\lambda(F \setminus F_{n_0}) \leq \varepsilon$.

On pose $K = F_{n_0}$ et on obtient donc $K \subset F \subset A \subset O$, ce qui donne

$$\lambda(O \setminus K) \leq \lambda(O \setminus F) + \lambda(F \setminus K) \leq 2\varepsilon.$$

On a donc trouvé un compact K et un ouvert O tels que $K \subset A \subset O$ et $\lambda(O \setminus K) \leq 2\varepsilon$. Ceci va nous permettre de construire $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\|f-\varphi\|_1 \leq 2\varepsilon$.

On pose

$$d = d(K, O^c) = \inf\{d(x,y), x \in K, y \in O^c\}.$$

On remarque que $d > 0$. En effet, il existe des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset O^c$ telles que

$$d(x_n,y_n) = |x_n - y_n| \to d \text{ quand } n \to +\infty.$$

Par compacité de K, on peut supposer (après extraction éventuelle d'une sous-suite) que $x_n \to x$, quand $n \to +\infty$. Si $d = 0$, on a alors aussi $y_n \to x$ quand $n \to +\infty$ et donc $x \in O^c \cap K$ (car K et O^c sont fermés), ce qui est impossible car $O^c \cap K = \emptyset$. On a donc bien montré $d > 0$.

On définit maintenant la fonction φ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{d}(d - d(x,K))^+ \text{ avec } d(x,K) = \inf\{d(x,y),\ y \in K\}.$$

La fonction φ est continue car $x \mapsto d(x,K)$ est continue (cette fonction est même lipschitzienne, on peut montrer que $|d(x,K) - d(y,K)| \leq |x-y|$). Elle est à support compact car il existe $A > 0$ tel que $K \subset [-A,A]$ et on remarque alors que $\varphi = 0$ sur $[-A-d, A+d]^c$. On a donc $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Enfin, on remarque que $\varphi = 1$ sur K, $\varphi = 0$ sur O^c et $0 \leq \varphi \leq 1$ (partout). On en déduit que $f - \varphi = 0$ sur $K \cup O^c$ et $0 \leq |f-\varphi| \leq 1$, ce qui donne

$$\|f-\varphi\|_1 \leq \lambda(O \setminus K) \leq 2\varepsilon,$$

et termine donc la première (et principale) étape.

Etape 2. On suppose ici que $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1$. Il existe donc $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $A_1, \ldots, A_n \in T$ tels que $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. Comme $f \in \mathcal{L}^1$, on a aussi $\lambda(A_i) < +\infty$ pour tout i.

Soit $\varepsilon > 0$, l'étape 1 donne, pour tout i, l'existence de $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\|1_{A_i} - \varphi_i\|_1 \leq \varepsilon$. On pose

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

et on obtient

$$\|f-\varphi\|_1 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i)\varepsilon$$

(ce qui est bien arbitrairement petit).

Etape 3. On suppose ici que $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de l'intégrale dans $\mathcal{M}_+$ (lemme 4.9), il existe $g \in \mathcal{E}_+$ telle que $g \leq f$ et

$$\int f d\lambda - \varepsilon \leq \int g dm \leq \int f dm,$$

de sorte que

$$\|g-f\|_1 = \int (f-g)d\lambda \leq \varepsilon,$$

L'étape 2 donne alors l'existence de $\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\|g-\varphi\|_1 \leq \varepsilon$. D'où l'on déduit

$$\|f-\varphi\|_1 \leq 2\varepsilon,$$

ce qui termine l'étape 3.

Etape 4. On suppose enfin que $f \in \mathcal{L}^1$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f^{\pm} \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$, l'étape 3 donne qu'il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$\|f^+ - \varphi_1\|_1 \leq \varepsilon \text{ et } \|f^- - \varphi_2\|_1 \leq \varepsilon.$$

On pose alors $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. On a $\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\|f-\varphi\|_1 \leq 2\varepsilon$, ce qui prouve bien la densité de $\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans L^1. ■

Le résultat de densité que nous venons de démontrer n'est pas limité à la mesure de Lebesgue. Il est vrai pour toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts. Il est aussi vrai en remplaçant C_c par C_c^∞. Enfin, il n'est pas limité à $\mathbb{R}$, il est également vrai dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Tout ceci est montré dans l'exercice 7.15. Par contre, le résultat de continuité en moyenne que nous montrons maintenant n'est pas vrai pour toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts (voir l'exercice 7.15).

Théorème 5.21 (Continuité en moyenne) *Soient $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$. On définit f_h (translatée de f) par : $f_h(x) = f(x+h)$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\|f_h - f\|_1 = \int |f(x+h) - f(x)|dx \to 0 \text{ lorsque } h \to 0. \tag{5.5}$$

DÉMONSTRATION – Soient $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$. On remarque que $f_h = f(\cdot + h) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (d'après la proposition 5.19). D'autre part $f = g$ p.p. implique $f_h = g_h$ p.p.. On peut donc définir f_h comme élément de $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ si $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

La démonstration de (5.5) fait l'objet de l'exercice 5.10. ■

5.4 Intégrales impropres des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On considère ici des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et l'espace mesuré $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

Définition 5.22 (Intégrabilité à gauche) *Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}, a>\alpha$; on suppose que $\forall\ \beta\in]\alpha,a[,\ f1_{]\alpha,\beta[}\in L^1(=L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda))$. On dit que f est intégrable à gauche en a (ou encore que $\int^a$ existe) si $\int f1_{]\alpha,\beta[}d\lambda$ a une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $\beta\to a$. Cette limite est notée $\int_\alpha^a f(t)dt$.*

Remarque 5.23 Ceci ne veut pas dire que $f1_{]\alpha,a[}\in L^1$. Il suffit pour s'en convaincre de prendre $a=+\infty$, $\alpha=0$, considérer la fonction f définie par $f(0)=1$ et, pour $x>0$, $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

Par contre, dès que la fonction f considérée est de signe constant, on a équivalence entre les deux notions :

Proposition 5.24 *Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, $\alpha\in\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}, a>\alpha$; on suppose que $\forall\ \beta\in]\alpha,a[,\ f1_{]\alpha,\beta[}\in L^1(=L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda))$. Alors f est intégrable à gauche en a si et seulement si $f1_{]\alpha,a[}\in L^1$.*

DÉMONSTRATION – Ce résultat se déduit du théorème de convergence monotone en remarquant que $f1_{]\alpha,\beta[}\uparrow f1_{]\alpha,a[}$ quand $\beta\uparrow a$. ■

5.5 Exercices

Exercice 5.1 (La mesure de Dirac n'est pas une fonction...) Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi_n(x)=(1-n|x|)^+$. On note λ la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $]-1,1[$, et $L^1=L^1_{\mathbb{R}}(]-1,1[,\mathcal{B}(]-1,1[),\lambda)$. Soit T l'application de $C([-1,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $T(\varphi)=\varphi(0)$.

1. Montrer que $T\in\Big(C([-1,1],\mathbb{R})\Big)'$ (on rappelle que $\Big(C([-1,1],\mathbb{R})\Big)'$ est le dual de $C([-1,1],\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $C([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme).
2. Soit $\varphi\in C([-1,1],\mathbb{R})$. Montrer que $\varphi\in L^1_{\mathbb{R}}(]-1,1[,\mathcal{B}(]-1,1[),\delta_0)$, où δ_0 est la mesure de Dirac en 0, et que $T(\varphi)=\int\varphi d\delta_0$.
3. Soient $g\in L^1$. Montrer que $\int g\varphi_n d\lambda\to 0$ lorsque $n\to+\infty$.

   En déduire qu'il n'existe pas de fonction $g\in L^1$ telle qu'on ait, pour toute fonction $\varphi\in C([-1,1],\mathbb{R})$, $T(\varphi)=\int g\varphi d\lambda$ (et donc que δ_0 n'est pas une mesure de densité).

Exercice 5.2 (Intégrale de Riemann) Soient a,b des réels, $a<b$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée, *i.e.* telle qu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $|f(t)|\le M, \forall t\in[a,b]$.
Soit Δ une subdivision de $[a,b]$, $\Delta=\{x_0,x_1,\ldots,x_{N+1}\}$ avec $x_0=a<x_1<\ldots<x_{N+1}=b$. On pose

$$S^\Delta=\sum_{i=0}^{N}(\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x))(x_{i+1}-x_i)\ \text{ et }\ S_\Delta=\sum_{i=0}^{N}(\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x))(x_{i+1}-x_i).$$

On note A l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$, $S^*=\inf_{\Delta\in A}S^\Delta$ et $S_*=\sup_{\Delta\in A}S_\Delta$. On dit que f est Riemann intégrable si $S^*=S_*$.
On pose alors $R\int_a^b f(x)dx=S^*$.

1. Soient Δ_1 et $\Delta_2\in A$ tels que $\Delta_1\subset\Delta_2$. Montrer que $S_{\Delta_1}\le S_{\Delta_2}\le S^{\Delta_2}\le S^{\Delta_1}$. En déduire que $S_\Delta\le S^{\Delta'}$ pour tous $\Delta,\Delta'\in A$, et donc que $S_*\le S^*$.
2. Montrer qu'il existe une suite de subdivisions $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $S_{\Delta_n}\to S_*$ et $S^{\Delta_n}\to S^*$ quand $n\to+\infty$.

3. Montrer que si f est continue, f est Riemann-intégrable.
4. On suppose maintenant que f est Riemann-intégrable. Montrer qu'il existe une suite de subdivisions notée $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{\Delta_n} \to S_*$ et $S^{\Delta_n} \to S^*$ quand $n \to +\infty$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\Delta_n = \{x_0^{(n)}, \ldots, x_{N_n+1}^{(n)}\}$ et on pose :

$$g_n(x) = \inf\{f(y), y \in [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]\}, x_i^{(n)} \le x < x_{i+1}^{(n)}, i = 0, \ldots, N_n, \tag{5.6}$$

$$h_n(x) = \sup\{f(y), y \in [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]\}, x_i^{(n)} \le x < x_{i+1}^{(n)}, i = 0, \ldots, N_n, \tag{5.7}$$

$$g_n(b) = h_n(b) = 0. \tag{5.8}$$

   (a) Montrer que $g_n, h_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\{[a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda\})$ et que $\int (h_n - g_n) d\lambda \to 0$ quand $n \to +\infty$.
   (b) Montrer que $g_n \le g_{n+1} \le f \le h_{n+1} \le h_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   (c) Pour $x \in [a,b]$, on pose $g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$ et $h(x) = \lim_{n\to+\infty} h_n(x)$; montrer que $g = h$ p.p.. En déduire que $f \in L^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)$ et que $\int f d\lambda = \mathrm{R}\int_a^b f(x)dx$.
5. Soit f définie par :

$$f(x) = 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \tag{5.9}$$
$$f(x) = 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}. \tag{5.10}$$

   Montrer que f n'est pas Riemann intégrable, mais que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)$.

Exercice 5.3 (Convergence de la dérivée) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(]0,1[, \mathbb{R})$ convergeant simplement vers la fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$; on suppose que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ($\subset C(]0,1[, \mathbb{R})$) converge simplement vers la fonction constante et égale à 1.

1. A-t-on $f \in C^1(]0,1[, \mathbb{R})$ et $f' = 1$?

   Corrigé – *La réponse est non. La fonction f peut même ne pas être continue, comme le montre l'exemple suivant :*

   Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 4$, on définit g_n de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1 + n^2(x - \frac{1}{2}) & \text{si } \frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1 - n^2(x - \frac{1}{2} - \frac{2}{n}) & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \le \frac{1}{2} + \frac{2}{n}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{2}{n} < x \le 1. \end{cases}$$

   Il est facile de voir que $g_n \in C([0,1], \mathbb{R})$ et que $g_n(x) \to 1$ pour tout $x \in [0,1]$.

   Pour $n \ge 4$, on définit f_n par :

$$f_n(x) = \int_0^x g_n(t)dt, \text{ pour tout } x \in]0,1[,$$

   de sorte que $f_n \in C^1(]0,1[, \mathbb{R})$ et $f_n' = g_n$ sur $]0,1[$. On a donc bien que $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante et égale à 1. (On prend n'importe quelles fonctions C^1 pour f_n, $0 \le n \le 3$).

   On remarque maintenant que, pour $n \ge 4$, $f_n(x) = x$ pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}]$ et que $f_n(x) = x + 1$ pour tout $x \in]\frac{1}{2} + \frac{2}{n}, 1[$. On en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}]$ et $f_n(x) = x + 1$ pour tout $x \in]\frac{1}{2}, 1[$. Cette fonction n'est pas continue en $\frac{1}{2}$, donc $f \notin C^1(]0,1[, \mathbb{R})$.

2. On suppose maintenant que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ vers la fonction constante et égale à 1. A-t-on $f \in C^1(]0,1[, \mathbb{R})$ et $f' = 1$?

Corrigé – *La réponse maintenant est oui. En effet, soit* $0 < x < 1$. *Comme* $f_n \in C^1(]0,1[, \mathbb{R})$, *on a* $f_n(x) = f_n(\frac{1}{2}) + \int_{\frac{1}{2}}^{x} f_n'(t)dt$, *c'est-à-dire*

$$f_n(x) = f_n(\frac{1}{2}) + s_x \int f_n' 1_{I_x} d\lambda, \tag{5.11}$$

avec $s_x = 1$ *et* $I_x =]\frac{1}{2}, x[$ *si* $x \geq \frac{1}{2}$, $s_x = -1$ *et* $I_x =]x, \frac{1}{2}[$ *si* $x < \frac{1}{2}$.

Quand $n \to +\infty$, *on a*

$$|\int f_n' 1_{I_x} d\lambda - \int 1_{I_x} d\lambda| \leq \|f_n' - 1\|_1 \to 0,$$

et $f_n(x) \to f(x)$ *(ainsi que* $f_n(\frac{1}{2}) \to f(\frac{1}{2})$*). On déduit donc de (5.11), quand* $n \to +\infty$,

$$f(x) = f(\frac{1}{2}) + s_x \int 1_{I_x} d\lambda,$$

c'est-à-dire $f(x) = f(\frac{1}{2}) + x - \frac{1}{2}$.

On a bien montré que $f \in C^1(]0,1[, \mathbb{R})$ *et* $f' = 1$.

Exercice 5.4 (Intégrale impropre) On définit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0, \text{ si } x \leq 0,$$
$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}, \text{ si } x > 0.$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

Corrigé – *La fonction* f *est continue et dérivable en tout point de* $\mathbb{R}^*$ *et on a* $f'(x) = 0$ *pour* $x < 0$ *et* $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ *si* $x > 0$.

Pour montrer la continuité et la dérivabilité de f *en* 0, *il suffit de remarquer que, pour tout* $x > 0$, *on a* $|f(x)| \leq x^2$ *et donc* $|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}| \leq x$. *On en déduit que* f *est continue et dérivable en* 0 *et que* $f'(0) = 0$.

2. Soit $0 < a < b < +\infty$. Montrer que $f' 1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On pose $\int_a^b f'(t)dt = \int f' 1_{]a,b[} d\lambda$. Montrer que :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

Corrigé – *La fonction* f' *est continue sur* $]0, +\infty[$. *La restriction de* f' *à* $[a,b]$ *est donc continue (on utilise ici le fait que* $a > 0$*). On a donc, voir la proposition 5.1 (ou l'exercice 4.5) :*

$$f'_{|[a,b]} \in \mathcal{L}^1([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda_{[a,b)}),$$

où $\lambda_{[a,b)}$ *désigne la mesure de Lebesgue sur les boréliens de* $[a,b]$ *(c'est-à-dire la restriction à* $\mathcal{B}([a,b])$ *de la mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*) et l'intégrale (de Lebesgue) de* $f'_{|[a,b]}$ *coïncide avec l'intégrale des fonctions continues, c'est-à-dire :*

$$\int f'_{|[a,b]} d\lambda_{[a,b)} = \int_a^b f'(x)dx.$$

Le terme de droite de l'égalité précédente est à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues. Comme f *est de classe* C^1 *sur un intervalle ouvert contenant* $[a,b]$, *il est alors classique que :*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Pour se convaincre de cette dernière égalité, on rappelle que f *et* $x \mapsto \int_a^x f'(t)dt$ *sont deux primitives de* f', *leur différence est donc constante sur* $[a,b]$.

Enfin, comme $f'_{|[a,b]} \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathcal{B}([a,b]),\lambda_{[a,b)})$, il est facile d'en déduire que $f'1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et que

$$\int f'_{|[a,b]} d\lambda_{[a,b)} = \int f'1_{]a,b[} d\lambda.$$

Plus précisément, on pose $f' = g$ et on considère d'abord le cas $g_{|[a,b]} \in \mathcal{E}_+([a,b], \mathcal{B}([a,b])$ puis $g_{|[a,b]} \in \mathcal{M}_+([a,b], \mathcal{B}([a,b])$ et enfin $g_{|[a,b]} \in \mathcal{L}^1([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda_{[a,b)})$, comme dans l'exercice 4.4. Ceci termine la question.

Un autre moyen de montrer $f'1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ est de procéder de la manière suivante :
La fonction f' est la limite simple, quand $n \to +\infty$, de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où f_n est définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$f_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f est mesurable (c'est-à-dire borélienne car $\mathbb{R}$ est muni de la tribu de Borel). Grâce à la stabilité de l'ensemble des fonctions mesurables (voir la proposition 3.19), on en déduit que f_n est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc que f' est mesurable (comme limite simple de fonctions mesurables). La fonction $f'1_{]a,b[}$ est donc aussi mesurable (comme produit de fonctions mesurables). La mesurabilité de $f'1_{]a,b[}$ est donc vraie pour tout $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (noter cependant que f' n'est pas continue en 0).

Pour montrer que $f'1_{]a,b[}$ est intégrable, il suffit de remarquer que f' est bornée sur $]a,b[$, car f' est continue sur $[a,b]$ (on utilise ici le fait que $a > 0$) et que $\lambda(]a,b[) < +\infty$. On a donc bien montré que $f'1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

3. Soit $a > 0$.

(a) Montrer $f'1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

Corrigé – *La restriction de f' à $]0,a[$ est continue, c'est donc une fonction mesurable (c'est-à-dire borélienne) de $]0,a[$ dans $\mathbb{R}$. On en déduit facilement que $f'1_{]0,a[}$ est borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. (On a aussi vu à la question précédente que f' est borélienne. Ceci montre également que $f'1_{]0,a[}$ est borélienne.)*

On a $f'1_{]0,a[} = g_1 1_{]0,a[} - g_2 1_{]0,a[}$, avec :

$$g_1(x) = 2x\sin\frac{1}{x^2} \text{ et } g_2(x) = \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} \text{ si } x \in]0,a[.$$

Il est clair que $g_1 1_{]0,a[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (car g_1 est continue et bornée sur $]0,a[$). Pour montrer que $f'1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, il suffit donc de montrer que $g_2 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Pour cela, on remarque maintenant que :

$$|g_2(x)| \geq \sqrt{2}\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}, \text{ si } \frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}}, \ n \geq n_0, \tag{5.12}$$

avec $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{\sqrt{n_0\pi - \frac{\pi}{4}}} \leq a$. On déduit alors de (5.12), par monotonie de l'intégrale, que, pour tout $\mathrm{N} \geq n_0$:

$$\begin{aligned}\int |g_2| 1_{]0,a[} d\lambda &\geq \sum_{n=n_0}^{\mathrm{N}} \sqrt{2}\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}}\right) \\ &= \sum_{n=n_0}^{\mathrm{N}} \sqrt{2}\frac{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}} - \sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}},\end{aligned}$$

et donc :

$$\int |g_2|1_{]0,a[}d\lambda \geq \sum_{n=n_0}^{N} \frac{\sqrt{2}\pi}{2\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{4}}(\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{4}}+\sqrt{n\pi-\frac{\pi}{4}})}$$
$$\geq \sum_{n=n_0}^{N} \frac{\sqrt{2}\pi}{4(n\pi+\frac{\pi}{4})}.$$

En faisant tendre N *vers* $+\infty$*, on en déduit que* $\int |g_2|1_{]0,a[}d\lambda = +\infty$ *et donc que* $g_2 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ *et* $f'1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

(b) Pour $0 < x < a$, on pose $g(x) = \int_x^a f'(t)dt$. Montrer que $g(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to 0$, avec $x > 0$, et que cette limite est égale à $f(a) - f(0)$. (Cette limite est aussi notée $\int_0^a f'(t)dt$, improprement… car $f'1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, la restriction de f' à $]0,a[$ n'est donc pas intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $]0,a[$.)

Corrigé – *On a* $g(x) = f(a) - f(x)$*, pour tout* $x > 0$*. Comme* f *est continue en* 0*, on en déduit bien que* $g(x)$ *a une limite (dans* $\mathbb{R}$*) quand* $x \to 0$*, avec* $x > 0$*, et que cette limite est égale à* $f(a) - f(0)$.

Exercice 5.5
Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. On définit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $F(x) = \int f1_{[0,x]}d\lambda (= \int_0^x f(t)dt)$, pour $x \geq 0$, et $F(x) = -\int f1_{[x,0]}d\lambda (= -\int_x^0 f(t)dt)$ pour $x < 0$. Montrer que F est uniformément continue.

Corrigé – *On remarque que, pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$*,* $x < y$*,*

$$F(y) - F(x) = \int f1_{]x,y[}d\lambda = \int_{]x,y[} f d\lambda.$$

Soit $\varepsilon > 0$*, comme* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$*, l'exercice 4.16 (ou l'exercice 4.33) montre qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f|d\lambda \leq \varepsilon.$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$*,* $x < y$*. On a donc, comme* $\lambda(]x,y[) = y - x$*,*

$$|y - x| \leq \delta \Rightarrow |F(y) - F(x)| \leq \int_{]x,y[} |f|d\lambda \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien la continuité uniforme de F.

Exercice 5.6 (Intégrabilité et limite à l'infini) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda) = \mathcal{L}^1$.

1. On suppose que $f(x)$ admet une limite quand $x \to +\infty$. Montrer que cette limite est nulle.

   Corrigé – *On pose* $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et on suppose* $l \neq 0$*. Il existe alors* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $|f(x)| \geq \frac{|l|}{2}$ *pour tout* $x > a$*. On en déduit, par monotonie de l'intégrale sur* $\mathcal{M}_+$*,*

   $$\int |f|d\lambda \geq \int_{]a,+\infty[} \frac{|l|}{2}d\lambda = +\infty,$$

   en contradiction avec l'hypothèse $f \in \mathcal{L}^1$.

2. On suppose que $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$; a-t-on : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

Corrigé –
La réponse est non, comme le montre l'exemple suivant. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, f_n par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq n - \frac{1}{n^2}, \\ n^2(x - n + \frac{1}{n^2} & si\ n - \frac{1}{n^2} < x \leq n, \\ -n^2(x - n - \frac{1}{n^2}) & si\ n < x \leq n + \frac{1}{n^2}, \\ 0 & si\ x > n + \frac{1}{n^2}. \end{cases}$$

Puis, on pose $f(x) = \sum_{n \geq 2} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série définissant $f(x)$ a au

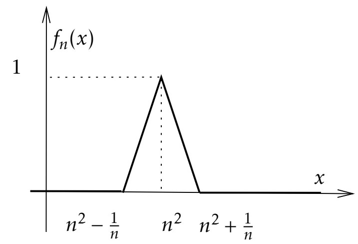

FIGURE 5.1 – La fonction f_n

plus un terme non nul. Plus précisément, il existe n (dépendant de x) tel que $f = f_n$ dans un voisinage de x. On en déduit que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et que f est continue (car les f_n sont continues). Comme $f_n \in \mathcal{M}_+$ pour tout n, le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.18) donne que $f \in \mathcal{M}_+$ et

$$\int f dm = \sum_{n \geq 2} \int f_n dm = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

On a donc $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f(x) \not\to 0$ quand $x \to +\infty$ car $f_n(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

3. On suppose que f est uniformément continue. A-t-on $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$?
[On pourra commencer par montrer que, pour tout $\eta > 0$ et toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telle que $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{x_n - \eta}^{x_n + \eta} |f(x)| d\lambda(x) = 0.]$$

Corrigé – *On commence par montrer le résultat préliminaire suggéré.*
Soient $\eta > 0$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ une suite telle que. $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

On pose $f_n = |f| 1_{]x_n - \eta, x_n + \eta[}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$ (on a même $f_n(x) = 0$ pour n tel que $x_n - \eta > x$). On a aussi $|f_n| \leq |f| \in \mathcal{L}^1$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (ou la proposition préliminaire 4.29). Il donne que $\int f_n dm \to 0$, c'est-à-dire :

$$\int |f| 1_{]x_n - \eta, x_n + \eta[} d\lambda \to 0, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{5.13}$$

On montre maintenant que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

On raisonne par l'absurde. On suppose que $f(x) \not\to 0$ quand $x \to +\infty$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que $x_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ et $|f(x_n)| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La continuité uniforme de f donne l'existence de $\eta > 0$ tel que

$$x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc $|f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \in]x_n - \eta, x_n + \eta[$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\int |f| 1_{]x_n-\eta, x_n+\eta[} d\lambda \geq \varepsilon\eta > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est en contradiction avec (5.13).

On a donc bien finalement montré que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

4. On suppose que $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f' \in L^1$; a-t-on : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

Corrigé – *Comme $f \in C^1$, on a, pour $y > x$, $f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt = \int_{]x,y[} f' d\lambda$. Comme $f' \in \mathcal{L}^1$, l'exercice 5.5 donne que f est uniformément continue. La question précédente donne alors que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ (c'est seulement pour ce dernier point qu'on utilise $f \in \mathcal{L}^1$).*

Une autre démonstration possible est : Comme $f \in C^1$, on a $f(x) = f(0) + \int_{]0,x[} f' d\lambda$. Comme $f' \in \mathcal{L}^1$, on en déduit que $f(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to +\infty$. En effet, le théorème de convergence dominée donne que $\int_{]0,x[} f' d\lambda \to \int_{]0,+\infty[} f' d\lambda$ (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to +\infty$. Enfin, la première question donne que la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$ est nécessairement 0 (et ici aussi, c'est seulement pour ce dernier point qu'on utilise $f \in \mathcal{L}^1$).

Exercice 5.7 (Intégrabilité de certaines fonctions) On s'intéresse dans cet exercice à l'intégrabilité de fonctions classiques.

1. On considère l'espace mesuré $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[, \lambda)$. Soit $0 < \alpha < +\infty$. On pose, pour $x \in]0,1[$, $f(x) = (\frac{1}{x})^\alpha$. Pour quelles valeurs de α a-t-on $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$?

2. On considère l'espace mesuré $(E, T, m) = (\mathbb{R}^*_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*_+), \lambda)$. Soit f définie, pour $x \in]0, +\infty[$, par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Montrer que $f \notin L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On pose $f_n = f 1_{]0,n[}$. Montrer que $f_n \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, que $f_n \to f$ p.p. (et même uniformément) et que $\displaystyle\int f_n dm$ a une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5.8 (Égalité presque partout de fonctions continues) On munit $\mathbb{R}^N$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et de la mesure de Lebesgue λ_N. Cette mesure, dont l'existence sera prouvée au chapitre 7, vérifie :

$$\lambda_N\left(\prod_{i=1}^N A_i\right) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i), \forall A_1, \ldots A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \,; \lambda(A_i) < +\infty, i = 1, \ldots, N.$$

Soient f et $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ telles que $f = g$ p.p.. Montrer que $f = g$ partout.
[On dira donc que $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ est continue s'il existe $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ telle que $f = g$ p.p. (plus précisément on devrait écrire $g \in f$). Dans ce cas on identifie f avec g.]

Corrigé – *On raisonne par l'absurde. Soit $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$. On suppose que $f(x) \neq g(x)$. Comme f et g sont continues, il existe $\alpha > 0$ tel que $f(y) \neq g(y)$ pour tout $y \in \prod_{i=1}^N]x_i - \alpha, x_i + \alpha[$. On en déduit que $\lambda_N(\{f \neq g\}) \geq \lambda_N(\prod_{i=1}^N]x_i - \alpha, x_i + \alpha[) = (2\alpha)^N > 0$, en contradiction avec $f = g$ p.p..*

Exercice 5.9 (Un sous espace de $H^1(\mathbb{R})$) *(Notation : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note f^2 la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f^2(x) = (f(x))^2$.)*
On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \in L^1$ et $f'^2 \in L^1\}$.
Pour $f \in E$, on définit $\|f\| = \int |f| d\lambda + (\int |f'|^2 d\lambda)^{\frac{1}{2}}$

1. Montrer que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé. E est-il un espace de Banach ?

Corrigé – *Pour $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on note $\|g\|_1 = \int |f(x)|dx$, $\|g\|_2 = (\int g^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$ et*

$$F_1 = \{g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|g\|_1 < +\infty\}, \qquad F_2 = \{g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|g\|_2 < +\infty\}.$$

L'espace F_1, muni de $\|\cdot\|_1$ est un espace espace vectoriel normé (on ne détaille pas ce point ici, assez simple à démontrer). Il est un peu plus difficile de montrer que l'espace F_2, muni de $\|\cdot\|_2$, est aussi un espace vectoriel normé. Si $g \in F_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il est clair que $\lambda g \in F_2$ et $\|\lambda g\|_2 = |\lambda|\|g\|_2$. Puis, si g, $h \in F_2$, on montre que $g + h \in F_2$ en remarquant, par exemple, que $|g(x) + h(x)|^2 \leq 4(|g(x)|^2 + |h(x)|^2)$. Enfin, pour montrer l'inégalité triangulaire (ce point est le plus délicat), on montre tout d'abord que, pour tout g, $h \in F_2$, on a

$$\int |g(x)h(x)|dx \leq \|g\|_2\|h\|_2,$$

ce qui peut se montrer en remarquant que $\int |\alpha g(x) + h(x)|^2 dx \geq 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$\|g + h\|_2^2 = \|g\|_2^2 + \|h\|_2^2 + 2\int g(x)h(x)dx \leq \|g\|_2^2 + \|h\|_2^2 + 2\|g\|_2\|h\|_2 = (\|g\|_2 + \|h\|_2)^2,$$

et donc $\|g + h\|_2 \leq \|g\|_2 + \|h\|_2$.

On remarque maintenant que $E = \{f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\,;\ f \in F_1$ et $f' \in F_2\}$ et que, pour $f \in E$, $\|f\| = \|f\|_1 + \|f'\|_2$. On déduit que E, muni de $\|\cdot\|$, est un espace vectoriel normé.

On va montrer maintenant que E, muni de $\|\cdot\|$, n'est pas un espace de Banach. Pour cela, on va construire une suite de Cauchy de E, non convergente (c'est-à-dire non convergente dans E muni de la norme $\|\cdot\|$).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit g_n par

$$\begin{aligned}
&g_n(x) = 0 \text{ si } x \leq -1 - \frac{1}{n},\\
&g_n(x) = n(x + 1 + \frac{1}{n}) \text{ si } -1 - \frac{1}{n} < x \leq -1\\
&g_n(x) = -x \text{ si } -1 < x \leq 1,\\
&g_n(x) = n(x - 1 - \frac{1}{n}) \text{ si } 1 < x \leq 1 + \frac{1}{n},\\
&g_n(x) = 0 \text{ si } 1 + \frac{1}{n} < x.
\end{aligned}$$

Puis, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_{-2}^{x} g_n(y)dy$. La fonction g_n est continue, à support compact et d'intégrale (sur $\mathbb{R}$) nulle. La fonction f_n est donc de classe C^1 (et $f_n' = g_n$) et à support compact. On en déduit que $f_n \in E$.
Enfin, on définit g et f par

$$\begin{aligned}
&g(x) = 0 \text{ si } x < -1, \qquad g(x) = -x \text{ si } -1 < x < 1, \qquad g(x) = 0 \text{ si } 1 < x\\
&f(x) = \int_{-2}^{x} g(y)dy \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

On remarque que $f \notin E$ (f n'est pas de classe C^1). On a $g_n \to g$ p.p. et, par convergence dominée (car $|g_n| \leq 1$ p.p.), on a aussi $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puis, en utilisant encore le théorème de convergence dominée, on a aussi

$$\int_{\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)|^2 dx \to 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|dx \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

(Pour la domination, il suffit de remarquer que $|g_n - g|^2 \leq 1_{[-2,2]}$ et $|f_n - f| \leq 1_{[-2,2]}$ p.p..) On en déduit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans E mais ne converge pas dans E car la limite dans E, si elle existait, serait nécessairement égale à f (qui n'est pas dans E)

2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $a \leq \delta a^2 + \frac{1}{\delta}$. En déduire que pour $f \in E$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \delta \int |f'|^2 d\lambda + \frac{1}{\delta}|x - y|$.

   Corrigé – *Si $a > 1/\delta$, on a alors $a\delta > 1$ et donc $a^2\delta > a$, c'est-à-dire $a < a^2\delta$. On en déduit que $a \leq 1/\delta + a^2\delta$.*

Soient $f \in \mathrm{E}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose $y \leq x$. Comme $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on a $f(x) - f(y) = \int_y^x f'(z)dz$. En utilisant l'inégalité précédente avec $a = f'(z)$, on a donc

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_x^y |f'(z)|dz \leq \int_x^y (\delta|f'(z)|^2 + \frac{1}{\delta})dz \leq \delta \int_{\mathbb{R}} |f'(z)|^2 dz + \frac{1}{\delta}|x-y|.$$

(Bien sûr, le même résultat est vrai si $x < y$.)

3. Soit $f \in \mathrm{E}$. Montrer que f est uniformément continue, bornée, et que $f^2 \in \mathrm{L}^1$.

Corrigé – *La question précédente montrer que tout $\delta > 0$ on a*

$$|f(x) - f(y)| \leq \delta\|f\|^2 + \frac{1}{\delta}|x-y| \text{ pour tout } x,y \in \mathbb{R}.$$

On déduit que f est uniformément continue. En effet, soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta > 0$ tel que $\delta\|f\|^2 \leq \varepsilon$ et on pose $\eta = \varepsilon\delta$. On a alors, pour tout $x,y \in \mathbb{R}$,

$$|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{1}{\delta}\eta = 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve l'uniforme continuité de f.

On montre maintenant que f est bornée. Ceci est une conséquence, par exemple, de l'exercice 5.6 (mais plusieurs autres méthodes sont possibles). Comme f est intégrable et uniformément continue, la question 3 de l'exercice 5.6 donne que $f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et donc que f est bornée.
On note $\mathrm{M} = \sup\{|f(x)|, x \in \mathbb{R}\}$. On vient de montrer que $\mathrm{M} < +\infty$. On en déduit $\int f^2 d\lambda \leq \mathrm{M}\int |f| d\lambda \leq \mathrm{M}\|f\| < +\infty$ et donc $f^2 \in \mathrm{L}^1$.

Exercice 5.10 (Continuité en moyenne) Pour $f \in \mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$, on définit f_h (translatée de f) par : $f_h(x) = f(x+h)$, pour $x \in \mathbb{R}$. (noter que $f_h \in \mathrm{L}^1$).

1. Soit $f \in \mathrm{C}_c = \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, montrer que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Corrigé – *Comme $f \in \mathrm{C}_c$, f est uniformément continue, ce qui donne*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)| \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

Soit $a > 0$ tel que $f = 0$ sur $[-a,a]^c$. Pour $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| \leq 1$, on a donc, comme $f(x+h) - f(x) = 0$ si $x \notin [-a-1, a+1]$,

$$\int |f(x+h) - f(x)|dx \leq (2a+2)\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)| \to 0, \text{ quand } h \to 0,$$

et donc que $\|f(\cdot+h) - f\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.

2. Soit $f \in \mathrm{L}^1$, montrer que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Corrigé – *L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne que $f(\cdot+h) \in \mathrm{L}^1$ pour tout $h \in \mathbb{R}$. On veut maintenant montrer que $\|f(\cdot+h) - f\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.*

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la densité de C_c dans L^1 (théorème 5.20), il existe une fonction $\varphi \in \mathrm{C}_c$ telle que $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne $\|f(\cdot+h) - \varphi(\cdot+h)\|_1 = \|f - \varphi\|_1$. On a donc, pour tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\|f(\cdot+h) - f\|_1 \leq 2\|f - \varphi\|_1 + \|\varphi(\cdot+h) - \varphi\|_1 \leq 2\varepsilon + \|\varphi(\cdot+h) - \varphi\|_1.$$

D'après la première question, il existe $\eta > 0$ t.q.

$$|h| \leq \eta \Rightarrow \|\varphi(\cdot+h) - \varphi\|_1 \leq \varepsilon.$$

Donc,

$$|h| \leq \eta \Rightarrow \|f(\cdot+h) - f\|_1 \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $f(\cdot+h) \to f$ dans L^1, quand $h \to 0$.

Exercice 5.11 (Non existence de borélien "bien équilibré")
On note $\mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Pour $f \in \mathrm{L}^1$, $h \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$f_h(x) = \frac{1}{\lambda(\mathrm{B}(0,h))} \int_{\mathrm{B}(x,h)} f(y)dy,$$

   où $\mathrm{B}(x,h)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon h. Montrer que f_h est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f_h \in \mathrm{L}^1$ et que $f_h \to f$ dans L^1 lorsque $h \to 0$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de continuité en moyenne dans L^1.]

   En déduire qu'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $h_n \to 0$, lorsque $n \to +\infty$ et $f_{h_n} \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$.

   Noter que ce résultat s'étend au cas $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$, où λ_N est la mesure de Lebesgue N-dimensionnelle, définie au chapitre 7.

2. Montrer qu'il n'existe pas de borélien A inclus dans [0,1] et tel que $\lambda(\mathrm{I} \cap \mathrm{A}) = \lambda(\mathrm{I} \cap \mathrm{A}^c) = \frac{\lambda(\mathrm{I})}{2}$ pour tout intervalle I de $[0,1]$. [On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question précédente et f convenablement choisie. Cette question est aussi une conséquence de l'exercice 5.12.]

Exercice 5.12 (Sur la concentration d'un borélien) Soit $-\infty \le a < b \le +\infty$, $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(]a,b[)$ et $\rho \in]0,1[$. On suppose que $\lambda(\mathrm{A}\cap]\alpha,\beta[) \le \rho(\beta-\alpha)$ pour tous α,β tels que $a \le \alpha < \beta \le b$. Montrer que $\lambda(\mathrm{A}) = 0$. [On pourra, par exemple, commencer par montrer que $\lambda(\mathrm{A} \cap \mathrm{O}) \le \rho\lambda(\mathrm{O})$ pour tout ouvert O de $]a,b[$.]

Conséquence de cet exercice : Si $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(]a,b[)$ est tel que $\lambda(\mathrm{A}) > 0$, alors, pour tout $\rho < 1$, il existe α,β tels que $a \le \alpha < \beta \le b$ et $\lambda(\mathrm{A}\cap]\alpha,\beta[) \ge \rho(\beta-\alpha)$.

Corrigé – *Soit* O *un ouvert de* $]a,b[$. *Comme* O *est un ouvert de* $\mathbb{R}$, *il peut s'écrire comme une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux (lemme 2.44). On a donc* $\mathrm{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n$ *avec* $\mathrm{I}_n \cap \mathrm{I}_m = \emptyset$ *si* $n \ne m$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n =]a_n, b_n[$ *avec* $a \le a_n \le b_n \le b$. *La* σ*–additivité de* λ *et l'hypothèse* $\lambda(\mathrm{A}\cap]\alpha,\beta[) \le \rho(\beta-\alpha)$ *pour tout* α,β *tels que* $a \le \alpha < \beta \le b$ *donne alors :*

$$\lambda(\mathrm{A} \cap \mathrm{O}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(\mathrm{A}\cap]a_n,b_n[) \le \rho \sum_{n\in\mathbb{N}} (b_n - a_n) = \rho \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(]a_n,b_n[) = \rho\lambda(\mathrm{O}). \tag{5.14}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. *D'après la régularité de* λ *(et le fait que* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(]a,b[) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$*), il existe* O *ouvert de* $\mathbb{R}$ *tel que* $\mathrm{A} \subset \mathrm{O}$ *et* $\lambda(\mathrm{O} \setminus \mathrm{A}) \le \varepsilon$. *En remplaçant* O *par* $\mathrm{O}\cap]a,b[$, *on peut supposer que* O *est un ouvert de* $]a,b[$. *En utilisant (5.14) et l'additivité de* λ, *on a donc :*

$$\lambda(\mathrm{A}) = \lambda(\mathrm{A} \cap \mathrm{O}) \le \rho\lambda(\mathrm{O}) = \rho(\lambda(\mathrm{A}) + \lambda(\mathrm{O} \setminus \mathrm{A})) \le \rho(\lambda(\mathrm{A}) + \varepsilon).$$

Comme $\varepsilon > 0$ *est arbitrairement petit, on en déduit* $\lambda(\mathrm{A}) \le \rho\lambda(\mathrm{A})$, *ce qui n'est possible (comme* $\rho < 1$*) que si* $\lambda(\mathrm{A}) = 0$ *ou si* $\lambda(\mathrm{A}) = +\infty$.

Il reste donc à montrer que le cas $\lambda(\mathrm{A}) = +\infty$ *est impossible. Pour cela, on pose, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n = \mathrm{A} \cap [-n,n]$. *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *la monotonie de* λ *donne* $\lambda(\mathrm{A}_n\cap]\alpha,\beta[) \le \lambda(\mathrm{A}\cap]\alpha,\beta[)$, *on a donc aussi* $\lambda(\mathrm{A}_n\cap]\alpha,\beta[) \le \rho(\beta-\alpha)$ *pour tout* α,β *tels que* $a \le \alpha < \beta \le b$. *Comme* $\lambda(\mathrm{A}_n) < +\infty$, *la démonstration précédente, appliquée à* A_n *au lieu de* A, *donne* $\lambda(\mathrm{A}_n) = 0$. *Enfin, comme* $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$, *on en déduit* $\lambda(\mathrm{A}) = 0$.

Exercice 5.13 (Points de Lebesgue) On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$, par L^1 l'espace $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathrm{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^1$ l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathrm{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On note $dt = d\lambda(t)$.

1. Soit $(\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_n)$ des intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ tels que chaque intervalle n'est pas contenu dans la réunion des autres. On pose $\mathrm{I}_k =]a_k, b_k[$ et on suppose que la suite $(a_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante. Montrer que la suite $(b_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante et que les intervalles d'indices impairs [resp. pairs] sont disjoints deux à deux.

Corrigé – *Soit $k \in \{1,\ldots,n\}$. Comme $a_k \le a_{k+1}$, on a $b_k < b_{k+1}$ (sinon $\mathrm{I}_{k+1} \subset \mathrm{I}_k$). La suite $(b_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ est donc (strictement) croissante.*

Soit $k \in \{1,\ldots,n\}$. On a $b_k \le a_{k+2}$ (sinon $\mathrm{I}_k \cup \mathrm{I}_{k+2} =]a_k, b_{k+2}[$ et donc $\mathrm{I}_{k+1} \subset \mathrm{I}_k \cup \mathrm{I}_{k+2}$ car $a_k \le a_{k+1} < b_{k+1} \le b_{k+2}$). On a donc $\mathrm{I}_k \cap \mathrm{I}_{k+2} = \emptyset$. Ceci prouve (avec la croissance de $(a_k)_{k=1,\ldots,n}$) que les intervalles d'indices impairs [resp. pairs] sont disjoints deux à deux.

2. Soit J une famille finie d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ dont la réunion est notée A. Montrer qu'il existe une sous–famille finie de J, notée $(\mathrm{I}_1,\ldots,\mathrm{I}_m)$, formée d'intervalles disjoints deux à deux et tels que $\lambda(\mathrm{A}) \le 2\sum_{k=1}^m \lambda(\mathrm{I}_k)$. [Utiliser la question 1.]

Corrigé – *On commence par montrer la propriété suivante :*

Pour toute famille finie J d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$, il existe une sous-famille K telle que :

(a) chaque élément de K n'est pas contenu dans la réunion des autres éléments de K,

(b) la réunion des éléments de K est égale à la réunion des éléments de J.

Cette propriété se démontre par récurrence sur le nombre d'éléments de J. Elle est immédiate si J a un seul élément (on prend K= J). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la propriété est vraie pour toutes les familles de n éléments. Soit J une famille de $(n+1)$ éléments. Si chaque élément de J n'est pas contenu dans la réunion des autres éléments de J, on prend K= J. Sinon, on choisit un élément de J, noté I, contenu dans la réunion des autres éléments de J. On applique alors l'hypothèse de récurrence à la famille $J\setminus\{\mathrm{I}\}$, on obtient une sous famille de $J\setminus\{\mathrm{I}\}$ (et donc de J), notée K, vérifiant bien les assertions (a) et (b) (en effet, la réunion des éléments de $J\setminus\{\mathrm{I}\}$ est égale à la réunion des éléments de J). Ceci termine la démonstration de la propriété désirée.

Soit maintenant J une famille finie d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ dont la réunion est notée A (remarquer que $\mathrm{A} \in \mathrm{B}(\mathbb{R})$). Grâce à la propriété démontrée ci-dessus, on peut supposer que chaque élément de J n'est pas contenu dans la réunion des autres éléments de J. On note $\mathrm{J}_1,\ldots \mathrm{J}_n$ les éléments de J, $\mathrm{J}_i =]a_i, b_i[$, $i = 1,\ldots,n$. En réordonnant, on peut aussi supposer que la suite $(a_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante. On peut alors appliquer la question 1, elle donne, en posant $\mathrm{P} = \{i = 1,\ldots,n;\ i \text{ pair}\}$ et $\mathrm{I} = \{i = 1,\ldots,n;\ i \text{ impair}\}$ que les familles $(\mathrm{J}_i)_{i\in\mathrm{P}}$ et $(\mathrm{J}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ sont formées d'éléments disjoints deux à deux, de sorte que :

$$\lambda\Big(\bigcup_{i\in\mathrm{P}}\mathrm{J}_i\Big) = \sum_{i\in\mathrm{P}}\lambda(\mathrm{J}_i), \quad \lambda\Big(\bigcup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{J}_i\Big) = \sum_{i\in\mathrm{I}}\lambda(\mathrm{J}_i).$$

Enfin, comme $\mathrm{A} = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{J}_i$, la sous–additivité de λ donne

$$\lambda(\mathrm{A}) \le \sum_{i\in\mathrm{P}}\lambda(\mathrm{J}_i) + \sum_{i\in\mathrm{I}}\lambda(\mathrm{J}_i).$$

Une sous–famille de J satisfaisant les conditions demandées est alors $(\mathrm{J}_i)_{i\in\mathrm{P}}$ si $\sum_{i\in\mathrm{P}}\lambda(\mathrm{J}_i) \ge \sum_{i\in\mathrm{I}}\lambda(\mathrm{J}_i)$ et $(\mathrm{J}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ si $\sum_{i\in\mathrm{I}}\lambda(\mathrm{J}_i) > \sum_{i\in\mathrm{P}}\lambda(\mathrm{J}_i)$.

On se donne maintenant $f \in \mathrm{L}^1$ et on suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $f = 0$ p.p. sur $[-a,a]^c$. Le but de l'exercice est de montrer que :

$$\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt \to f(x), \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{5.15}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on définit f_ε^* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_\varepsilon^*(x) = \sup_{h\ge\varepsilon}\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|f(x+t)|dt. \tag{5.16}$$

3.(a) Montrer que f_ε^* est bornée.

Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, pour $h \geq \varepsilon$, $\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|f(x+t)|dt \leq \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_1$ donc $f_\varepsilon^*(x) \in \mathbb{R}$ et $|f_\varepsilon^*(x)| \leq \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_1$. La fonction f_ε^* est donc bornée par $\frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_1$.*

(b) Montrer que f_ε^* est borélienne. [On pourra montrer que f_ε^* est le sup de fonctions continues.]

Corrigé – *Soit $h > 0$. On définit f_h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_h(x) = \int_{-h}^{h}|f(x+t)|dt$. La fonction f_h est continue car*

$$|f_h(x+\eta) - f_h(x)| = |\int_{-h}^{h}(|f(x+\eta+t)| - |f(x+t)|)dt| \leq \int_{-h}^{h}|f(x+\eta+t) - f(x+t)|dt$$
$$\leq \int |f(x+\eta+t) - f(x+t)|dt = \|f(\cdot+\eta) - f\|_1 \to 0, \text{ quand } \eta \to 0,$$

par le théorème de continuité en moyenne. (Ceci donne même la continuité uniforme.)

On en déduit que f_ε^* est borélienne comme sup de fonctions continues. En effet, si $\alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$(f_\varepsilon^*)^{-1}(]\alpha,+\infty[) = \bigcup_{h\geq\varepsilon}(\frac{1}{2h}f_h)^{-1}(]\alpha,+\infty[)$$

et donc $(f_\varepsilon^*)^{-1}(]\alpha,+\infty[)$ est un ouvert, et donc aussi un borélien.

(c) Montrer que $f_\varepsilon^*(x) \to 0$ quand $|x| \to +\infty$.

Corrigé – *Soit $\eta > 0$. On a (avec la notation de la question précédente), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2h}f_h(x) \leq \eta$ si $h \geq \frac{\|f\|_1}{2\eta}$. D'autre part, on a $f_h(x) = 0$ si $h \leq \frac{\|f\|_1}{2\eta}$ et $|x| \geq a + \frac{\|f\|_1}{2\eta}$. On en déduit que $0 \leq f_\varepsilon^*(x) \leq \eta$ si $|x| \geq a + \frac{\|f\|_1}{2\eta}$. Ceci prouve que $f_\varepsilon^*(x) \to 0$ quand $|x| \to +\infty$.*

4. Pour $y > 0$, on pose $\mathrm{B}_{y,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R},\ f_\varepsilon^*(x) > y\}$.

(a) Montrer que tout $x \in \mathrm{B}_{y,\varepsilon}$ est le centre d'un intervalle ouvert $\mathrm{I}(x)$ tel que :

i. $\lambda(\mathrm{I}(x)) \geq 2\varepsilon$,

ii. $\frac{1}{\lambda(\mathrm{I}(x))}\int_{\mathrm{I}(x)}|f|d\lambda > y$.

Montrer que parmi les intervalles $\mathrm{I}(x)$, $x \in \mathrm{B}_{y,\varepsilon}$, ainsi obtenus, il en existe un nombre fini $\mathrm{I}(x_1), \ldots, \mathrm{I}(x_n)$ dont la réunion recouvre $\mathrm{B}_{y,\varepsilon}$. [On pourra d'abord remarquer que $\mathrm{B}_{y,\varepsilon}$ est borné.]

Corrigé – *Si $x \in \mathrm{B}_{y,\varepsilon}$, il existe $h \geq \varepsilon$ tel que $\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|f(t)|dt = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|f(x+t)|dt > y$. On choisit alors $\mathrm{I}(x) =]x-h, x+h[$. On a bien i. et ii..*

$\mathrm{B}_{y,\varepsilon}$ est borné car $f_\varepsilon^*(x) \to 0$ quand $|x| \to +\infty$. $\overline{\mathrm{B}}_{y,\varepsilon}$ est donc fermé et borné (donc compact). De plus, si $z \in \overline{\mathrm{B}}_{y,\varepsilon}$, il existe $x \in \mathrm{B}_{y,\varepsilon}$ tel que $|x - z| < \varepsilon$. On a donc $z \in \mathrm{I}(x)$. Ceci montre que $\{\mathrm{I}(x),\ x \in \mathrm{B}_{y,\varepsilon}\}$ forme un recouvrement ouvert de $\overline{\mathrm{B}}_{y,\varepsilon}$. Par compacité, on peut donc en extraire un sous recouvrement fini. Il existe donc $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{B}_{y,\varepsilon}$ tels que $\mathrm{B}_{y,\varepsilon} \subset \bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{I}(x_i)$.

(b) Montrer que $\lambda(\mathrm{B}_{y,\varepsilon}) \leq \frac{2}{y}\|f\|_1$. [Utiliser la question 2.]

Corrigé – *En appliquant la question 2 à la famille $\{\mathrm{I}(x_i),\ i \in \{1, \ldots, n\}\}$, il existe $\mathrm{E} \subset \{1, \ldots, n\}$ tel que $\mathrm{I}(x_i) \cap \mathrm{I}(x_j) = \emptyset$ si $i, j \in \mathrm{E}$ $i \neq j$ et $\lambda(\mathrm{B}_{y,\varepsilon}) \leq \lambda(\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{I}(x_i)) \leq 2\sum_{i\in\mathrm{E}}\lambda(\mathrm{I}(x_i))$. Comme $\lambda(\mathrm{I}(x_i)) < \frac{1}{y}\int_{\mathrm{I}(x_i)}|f(t)|dt$ et comme $\mathrm{I}(x_i) \cap \mathrm{I}(x_j) = \emptyset$, si $i, j \in \mathrm{E}$, $i \neq j$, on a aussi $\sum_{i\in\mathrm{E}}\lambda(\mathrm{I}(x_i)) < \frac{1}{y}\int|f(t)|dt$ et donc $\lambda(\mathrm{B}_{y,\varepsilon}) \leq \frac{2}{y}\|f\|_1$.*

On définit maintenant f^* de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$f^*(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t)| dt. \tag{5.17}$$

5. Montrer que f^* est borélienne et que $\lambda(\{f^* > y\}) \leq \frac{2}{y}\|f\|_1$, pour tout $y > 0$.

   Corrigé – *La fonction f^* est borélienne (de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) car c'est le supremum de fonctions continues de $\mathbb{R}$. dans $\mathbb{R}$. On remarque ensuite que $\{f^* > y\} = \{x \in \mathbb{R},\ f^*(x) > y\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_{y,\frac{1}{n}}$ et que $\mathrm{B}_{y,\frac{1}{n}} \subset \mathrm{B}_{y,\frac{1}{n+1}}$ (car $f^*_{\frac{1}{n}} \leq f^*_{\frac{1}{n+1}}$). Par continuité croissante de λ, on a donc $\lambda(\{f^* > y\}) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(\mathrm{B}_{y,\frac{1}{n}}) \leq \frac{2}{y}\|f\|_1$.*

6. Montrer (5.15) si f admet un représentant continu. [Cette question n'utilise pas les questions précédentes.]

   Corrigé – *On confond f (qui est dans L^1) avec ce représentant continu. On a alors $\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt \to f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, quand $n \to +\infty$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, par continuité de f, il existe $\theta_{x,n} \in]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$ tel que $\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt = f(\theta_{x,n})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $f(\theta_{x,n}) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$ (par continuité en x de f).*

7. Montrer (5.15). [Approcher f, dans L^1 et p.p., par une suite d'éléments de $\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, notée $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$. On pourra utiliser $(f - f_p)^*$.]

   Corrigé – *On confond f (qui est dans L^1) avec l'un de ses représentants (de sorte que $f \in \mathcal{L}^1$). Par densité de $\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans L^1, il existe une suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f_p \to f$ dans L^1 lorsque $p \to +\infty$. Après extraction éventuelle d'une sous-suite, on peut supposer aussi que $f_p \to f$ p.p..*

   Pour $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$|f(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt| \leq |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_p(x+t)dt| + (f - f_p)^*(x). \tag{5.18}$$

   Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathrm{A}_{m,p} = \{(f - f_p)^* > \frac{1}{m}\},\ \mathrm{B}_{m,p} = \bigcap_{q\geq p} \mathrm{A}_{m,q} \text{ et } \mathrm{B} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} (\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_{m,p}).$$

   On remarque que, par la question 5, $\lambda(\mathrm{A}_{m,p}) \leq 2m\|f - f_p\|_1 \to 0$ quand $p \to +\infty$ (avec m fixé). On a donc $\lambda(\mathrm{B}_{m,p}) \leq \inf_{q\geq p} \lambda(\mathrm{A}_{m,q}) = 0$. On en déduit, par σ-sous-additivité de λ, que $\lambda(\mathrm{B}) = 0$.

   On choisit $\mathrm{C} \in \mathrm{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(\mathrm{C}) = 0$ et $f_p(x) \to f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{C}^c$.

   On va maintenant montrer (grâce à (5.18)) que $(f(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt) \to 0$ pour tout $x \in (\mathrm{B}\cup\mathrm{C})^c$ (ce qui permet de conclure car $\lambda(\mathrm{B}\cup\mathrm{C}) = 0$).

   Soit donc $x \in (\mathrm{B}\cup\mathrm{C})^c$ et soit $\eta > 0$. Comme $x \in \mathrm{C}^c$, il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|f(x) - f_p(x)| \leq \eta$ pour $p \geq p_1$. Comme $x \in \mathrm{B}^c$, $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}^*}(\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{B}^c_{m,p})$. On choisit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{m} \leq \eta$. On a

$$x \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{B}^c_{m,p} = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{q\geq p} \mathrm{A}^c_{m,q} \subset \bigcup_{q\geq p_1} \mathrm{A}^c_{m,q}.$$

Il existe donc $p \geq p_1$ tel que $x \in A^c_{m,p}$, on en déduit $(f - f_p)^*(x) \leq \frac{1}{m} \leq \eta$. Enfin, p étant maintenant fixé, la question 6 donne l'existence de $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|f_p(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_p(x+t)dt| \leq \eta$ pour $n \geq n_1$. On a donc

$$|f(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt| \leq 3\eta \text{ pour } n \geq n_1,$$

ce qui termine la démonstration.

Exercice 5.14 (Convergence vague et convergence étroite) Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures (positives) finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ($d \geq 1$) et m une mesure (positive) finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On suppose que :

- $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to +\infty$, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.
- $m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R}^d)$ quand $n \to +\infty$.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to +\infty$. [On pourra utiliser le fait que φ est limite uniforme d'une suite d'éléments de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.]

Corrigé – *Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $\rho \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$ et $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit ρ_p par $\rho_p(x) = p^d \rho(px)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$, de sorte que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_p(x)dx = 1$ et $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq 1/p$. La suite $(\rho_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ s'appelle suite régularisante (ou suite de noyaux régularisants).*

Soit $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on définit la suite $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ en posant $\psi_p(x) = \int \psi(y)\rho_p(x-y)dy$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Comme ρ_p et ψ sont des fonctions à support compact, il est clair que ψ_p est aussi une fonction à support compact. Grâce au théorème de dérivabilité sous le signe intégral (théorème 4.53), il est assez facile de voir que ψ_p est indéfiniment dérivable. On a donc $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. Enfin, du fait que ψ est uniformément continue, on déduit que ψ_p converge uniformément (sur $\mathbb{R}^d$) vers ψ quand $p \to +\infty$. Plus précisément, en notant $\|\cdot\|_u$ la norme de la convergence uniforme, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\|\psi_p - \psi\|_u \leq \sup_{z\in\mathbb{R}^d, |z|\leq 1/p} \|\psi(\cdot + z) - \psi\|_u,$$

dont on déduit bien $\|\psi_p - \psi\|_u \to 0$ quand $p \to +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. On remarque maintenant que, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \psi dm_n - \int \psi dm = \int (\psi - \psi_p)dm_n + \int \psi_p dm_n - \int \psi_p dm + \int (\psi_p - \psi)dm,$$

on a donc

$$|\int \psi dm_n - \int \psi dm| \leq \|\psi_p - \psi\|_u (\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R}^d) + m(\mathbb{R}^d)) + |\int \psi_p dm_n - \int \psi_p dm|.$$

Comme $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R}^d) + m(\mathbb{R}^d) < +\infty$ (car $\lim_{n\to+\infty} m_n(\mathbb{R}^d) = m(\mathbb{R}^d)$), il existe donc $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\int \psi dm_n - \int \psi dm| \leq \varepsilon + |\int \psi_{p_0} dm_n - \int \psi_{p_0} dm|.$$

Comme $\psi_{p_0} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, la première hypothèse sur la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne qu'il existe n_0 t.q. $n \geq n_0$ implique $|\int \psi_{p_0} dm_n - \int \psi_{p_0} dm| \leq \varepsilon$. On a donc finalement

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\int \psi dm_n - \int \psi dm| \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $\int \psi dm_n \to \int \psi dm$, quand $n \to +\infty$, pour tout $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note B_p la boule fermée de centre 0 et de rayon p (pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$). Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \subset C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $0 \le \varphi_p \le 1$, $\varphi_p = 1$ sur B_p et $\varphi_p \le \varphi_{p+1}$. On utilise cette suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ dans les questions suivantes.

Corrigé – *Il suffit de prendre φ_p définie ainsi :*

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathrm{B}_p, \\ \varphi_p(x) = p+1-|x| & \text{si } x \in \mathrm{B}_{p+1} \setminus \mathrm{B}_p, \\ \varphi_p(x) = 0 & \text{si } x \notin \mathrm{B}_{p+1}. \end{cases}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $p \ge p_0 \Rightarrow \displaystyle\int (1-\varphi_p)dm \le \varepsilon$.

Corrigé – *On utilise ici le théorème de convergence dominée, la suite $(1-\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge p.p. vers 0 et est dominée par la fonction constante et égale à 1 (qui est bien une fonction intégrable pour la mesure m). On a donc $\lim_{p\to+\infty} \int (1-\varphi_p)dm = 0$, ce qui donne le résultat demandé.*

(b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int (1-\varphi_p)dm_n \to \int (1-\varphi_p)dm$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *On a $\int (1-\varphi_p)dm_n = m_n(\mathbb{R}^d) - \int \varphi_p dm_n$. Comme $\varphi_p \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a $\int \varphi_p dm_n \to \int \varphi_p dm$ (quand $n \to +\infty$). D'autre part, on a $\lim_{n\to+\infty} m_n(\mathbb{R}^d) = m(\mathbb{R}^d)$. On a donc finalement, quand $n \to +\infty$,*

$$\int (1-\varphi_p)dm_n \to m(\mathbb{R}^d) - \int \varphi_p dm = \int (1-\varphi_p)dm.$$

(c) Montrer qu'il existe $p_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n \in \mathbb{N}$, $p \ge p_1 \Rightarrow \displaystyle\int (1-\varphi_p)dm_n \le \varepsilon$.

Corrigé – *D'après a), il existe p_2 tel que $\int (1-\varphi_{p_2})dm \le \varepsilon/2$. D'après b), il existe n_0 tel que*

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int (1-\varphi_{p_2})dm_n \le \int (1-\varphi_{p_2})dm + \varepsilon/2.$$

On a donc

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int (1-\varphi_{p_2})dm_n \le \varepsilon.$$

Comme $(1-\varphi_p) \le (1-\varphi_{p_2})$ si $p \ge p_2$, on a aussi

$$n \ge n_0,\ p \ge p_2 \Rightarrow \int (1-\varphi_p)dm_n \le \varepsilon.$$

D'autre part, le théorème de convergence dominée donne (comme en a) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{p\to+\infty} \int (1-\varphi_p)dm_n = 0.$$

Pour tout $n \in 0,\ldots,n_0$, il existe donc $p_{2,n}$ tel que

$$p \ge p_{2,n} \Rightarrow \int (1-\varphi_p)dm_n \le \varepsilon.$$

On choisit donc $p_1 = \max\{p_2, \max_{n=0,\ldots,n_0} p_{2,n}\}$ et on obtient bien $p \in \mathbb{N}^*$ et :

$$n \in \mathbb{N},\ p \ge p_1 \Rightarrow \int (1-\varphi_p)dm_n \le \varepsilon.$$

4. Montrer que $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to +\infty$, pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (on dit alors que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement vers m).

5. (Densité.) Soit $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$.
   (b) Montrer qu'il existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $\|f - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra montrer que, si $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a $\|\varphi - \varphi_n\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$, avec $\varphi_n = \varphi * \rho_n$ et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille régularisante, voir la définition 8.4. du polycopié de cours).]
6. (Continuité en moyenne ?)
   (a) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.
   (b) Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement f et μ) qu'on peut avoir $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \not\to 0$ quand $h \to 0$.
7. On suppose maintenant que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et que μ est une mesure sur les boréliens de Ω, finie sur les sous ensembles compacts de Ω. Indiquer brièvement comment on peut montrer la densité de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ et $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$.

Exercice 5.17 (Loi d'une fonction linéaire de X**)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.. On suppose que la loi de X a une densité par rapport à Lebesgue et on note g cette densité.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, montrer que la v.a. $aX + b$ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et donner cette densité en fonction de g, a et b.

Chapitre 6

Les espaces L^p

6.1 Définitions et premières propriétés

6.1.1 Les espaces L^p, avec $1 \le p < +\infty$

Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $1 \le p < +\infty$ et $f \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ (c'est-à-dire $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$, mesurable). On remarque que $|f|^p \in \mathcal{M}_+$, car $|f|^p = \varphi \circ f$ où φ est la fonction continue (donc borélienne) définie par $\varphi(s) = |s|^p$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. (Noter que $p > 0$ et on rappelle que $|s|^p = e^{p \ln(|s|)}$ pour $s \neq 0$ et $|s|^p = 0$ pour $s = 0$.) La quantité $\int |f|^p dm$ est donc bien définie et appartient à $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ceci va nous permette de définir les espaces de fonctions de puissance p–ième intégrable. On retrouve, pour $p = 1$, la définition de l'espace des fonctions intégrables.

Définition 6.1 (Les espaces $\mathcal{L}^p$) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré,* $1 \le p < +\infty$ *et* f *une fonction définie de* E *dans* $\mathbb{R}$, *mesurable. (On a donc* $|f|^p \in \mathcal{M}_+$.*)*

1. On dit que $f \in \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *si* $\int |f|^p dm < +\infty$. *On pose alors :*

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. On dit que $f \notin \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *si* $\int |f|^p dm = +\infty$ *et on pose alors* $\|f\|_p = +\infty$.

De manière analogue au cas $p = 1$ on quotiente les espaces $\mathcal{L}^p$ par la relation d'équivalence "= p.p." afin que l'application $f \mapsto \|f\|_p$ définisse une norme sur l'espace vectoriel des classes d'équivalence (voir section 4.5).

Définition 6.2 (Les espaces L^p) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* $1 \le p < +\infty$.

1. *On définit l'espace* $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de* $\mathcal{L}^p$ *pour la relation d'équivalence* ($= pp$). *En l'absence d'ambiguïté on notera* L^p *l'espace* $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$.
2. *Soit* $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. *On pose* $\|\mathrm{F}\|_p = \|f\|_p$ *si* $f \in \mathrm{F}$. *(Cette définition est cohérente car ne dépend pas du choix de* f *dans* F. *On rappelle aussi que* $\mathrm{F} = \tilde{f} = \{g \in \mathcal{L}^p ; g = f$ *p.p.*$\}$.*)*

Proposition 6.3 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $1 \le p < +\infty$. *Alors :*

1. $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

2. $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION – 1. – Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^p$. On a $\alpha f \in \mathcal{M}$ (car $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel) et $\int |\alpha f|^p dm = |\alpha|^p \int |f|^p dm < +\infty$. Donc, $\alpha f \in \mathcal{L}^p$.

– Soit $f, g \in \mathcal{L}^p$. On veut montrer que $f + g \in \mathcal{L}^p$. On sait que $f + g \in \mathcal{M}$ (car $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel) et on remarque que, pour tout $x \in E$,

$$|f(x) + g(x)|^p \le 2^p |f(x)|^p + 2^p |g(x)|^p,$$

et donc

$$\int |f + g|^p dm \le 2^p \int |f|^p dm + 2^p \int |g|^p dm < +\infty,$$

ce qui montre que $f + g \in \mathcal{L}^p$.

2. La structure vectorielle de L^p s'obtient comme pour $p = 1$. Soit $F, G \in L^p$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On choisit $f \in F$ et $g \in G$ et on définit $\alpha F + \beta G$ comme étant la classe d'équivalence de $\alpha f + \beta g$. Comme d'habitude, cette définition est cohérente car la classe d'équivalence de $\alpha f + \beta g$ ne dépend pas des choix de f et g dans F et G.

■

On va montrer maintenant que $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^p$ et une norme sur L^p.

Lemme 6.4 (Inégalité de Young) *Soient* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *et* $p, q \in \,]1, +\infty[$ *tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Alors :*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

DÉMONSTRATION – La fonction exponentielle $\theta \mapsto \exp(\theta)$ est convexe (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On a donc, pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$\exp(t\theta_1 + (1 - t)\theta_2) \le t \exp(\theta_1) + (1 - t) \exp(\theta_2).$$

Soit $a, b > 0$ (les autres cas sont triviaux). On prend $t = \frac{1}{p}$ (de sorte que $(1 - t) = \frac{1}{q}$), $\theta_1 = p \ln(a)$ et $\theta_2 = q \ln(b)$. On obtient bien $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. ■

Lemme 6.5 (Inégalité de Hölder) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $p, q \in]1, +\infty[$ *tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Soient* $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *et* $g \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. *Alors,* $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *et*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q. \tag{6.1}$$

Le même résultat est vrai avec L^p, L^q *et* L^1 *au lieu de* $\mathcal{L}^p$, $\mathcal{L}^q$ *et* $\mathcal{L}^1$.

DÉMONSTRATION – On remarque d'abord que $fg \in \mathcal{M}$ car $f, g \in \mathcal{M}$ (voir la proposition 3.19).

L'inégalité de Young donne $|f(x)g(x)| \le \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}$ pour tout $x \in E$. On en déduit, en intégrant :

$$\int |fg| dm \le \frac{1}{p} \int |f|^p dm + \frac{1}{q} \int |g|^q dm < +\infty. \tag{6.2}$$

Donc, $fg \in \mathcal{L}^1$.

Pour montrer (6.1), on distingue maintenant 3 cas :

Cas 1. On suppose $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$. On a alors $f = 0$ p.p. ou $g = 0$ p.p.. On en déduit $fg = 0$ p.p., donc $\|fg\|_1 = 0$ et (6.1) est vraie.

Cas 2. On suppose $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_q = 1$. On a alors, avec (6.2),

$$\|fg\|_1 = \int |fg| dm \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q.$$

L'inégalité (6.1) est donc vraie.

Cas 3. On suppose $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$. On pose alors $f_1 = \frac{f}{\|f\|_p}$ et $g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}$, de sorte que $\|f_1\|_p = \|g_1\|_q = 1$. Le cas 2 donne alors

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} = \|f_1 g_1\|_{\leq} 1.$$

Ce qui donne (6.1).

Dans le cas où $f \in \mathrm{L}^p$ et $g \in \mathrm{L}^q$, on confond les classes f et g avec des représentants, encore notés f et g. Le résultat précédent donne $fg \in \mathcal{L}^1$ et (6.1). On a alors $fg \in \mathrm{L}^1$ au sens de la confusion habituelle, c'est-à-dire "il existe $h \in \mathcal{L}^1$ telle que $fg = h$ p.p." (et fg ne dépend pas des représentants choisis), et (6.1) est vérifiée. ■

Lemme 6.6 (Inégalité de Minkowski) *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* $1 \leq p < +\infty$. *Soit* $f, g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. *Alors,* $f + g \in \mathcal{L}^p$ *et :*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{6.3}$$

Le même résultat est vrai avec L^p *au lieu de* $\mathcal{L}^p$.

DÉMONSTRATION – Le cas $p = 1$ à déjà été fait. On suppose donc $p > 1$. On a aussi déjà vu que $f + g \in \mathcal{L}^p$ (proposition 6.3). Il reste donc à montrer (6.3). On peut supposer que $\|f + g\|_p \neq 0$ (sinon (6.3) est trivial).

On remarque que

$$|f + g|^p \leq \mathrm{FH} + \mathrm{GH}, \tag{6.4}$$

avec $\mathrm{F} = |f|$, $\mathrm{G} = |g|$ et $\mathrm{H} = |f + g|^{p-1}$.

On pose $q = \frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\mathrm{F} \in \mathcal{L}^p$, $\mathrm{G} \in \mathcal{L}^p$ et $\mathrm{H} \in \mathcal{L}^q$ (car $f + g \in \mathcal{L}^p$). On peut donc appliquer l'inégalité de Hölder (6.1), elle donne

$$\|\mathrm{FH}\|_1 \leq \|\mathrm{F}\|_p \|\mathrm{H}\|_q,\ \|\mathrm{GH}\|_1 \leq \|\mathrm{G}\|_p \|\mathrm{H}\|_q.$$

On en déduit, avec (6.4),

$$\int |f + g|^p dm \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)(\int |f + g|^p dm)^{1-\frac{1}{p}},$$

D'où l'on déduit (6.3).

Il est clair que le lemme est vrai avec L^p au lieu de $\mathcal{L}^p$. ■

On en déduit la propriété suivante :

Proposition 6.7 *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* $1 \leq p < +\infty$.

1. *L'application* $f \mapsto \|f\|_p$ *est une semi–norme sur* $\mathcal{L}^p$.
2. *L'application* $f \mapsto \|f\|_p$ *est une norme sur* L^p. L^p, *muni de cette norme, est donc une espace vectoriel (sur* $\mathbb{R}$*) normé.*

DÉMONSTRATION –

– On a bien $\|f\|_p \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in \mathcal{L}^p$.
– On a déjà vu que $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathcal{L}^p$.
– L'inégalité (6.3) donne $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ pour tout $f, g \in \mathcal{L}^p$.

L'application $f \mapsto \|f\|_p$ est donc une semi–norme sur $\mathcal{L}^p$. On remarque que, si $f \in \mathcal{L}^p$, on a

$$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ p.p.}.$$

Cette équivalence donne que l'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme sur L^p. ■

Remarque 6.8 On reprend ici la remarque 4.40. Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$. On confondra dans la suite un élément F de L^p avec un représentant f de F, c'est-à-dire avec un élément $f \in \mathcal{L}^p$ telle que $f \in \mathrm{F}$. De manière plus générale, soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ t.q. A^c soit négligeable (c'est-à-dire $\mathrm{A}^c \subset \mathrm{B}$ avec $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ et $m(\mathrm{B}) = 0$). On dira qu'une fonction f, définie de A dans $\mathbb{R}$, est un élément de L^p s'il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^p$ t.q. $f = g$ p.p.. On confond donc, en fait, la fonction f avec la classe d'équivalence de g, c'est-à-dire avec $\tilde{g} = \{h \in \mathcal{L}^p\,;\, h = g \text{ p.p. }\}$. D'ailleurs, cet ensemble est aussi égal à $\{h \in \mathcal{L}^p\,;\, h = f \text{ p.p. }\}$.

Avec cette confusion, si f et g sont des éléments de L^p, $f = g$ signifie en fait $f = g$ p.p..

Théorème 6.9 (Convergence dominée dans L^p) *Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$. On note L^p l'espace $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p telle que :*

1. $f_n \to f$ p.p.,

2. $\exists\ \mathrm{F} \in \mathrm{L}^p$ telle que $|f_n| \leq \mathrm{F}$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors $f_n \to f$ dans L^p (c'est-à-dire $\displaystyle\int |f_n - f|^p dm \to 0$ quand $n \to +\infty$).

Démonstration – On se ramène au cas $p = 1$.

On peut choisir des représentants des f_n (encore notés f_n) de manière à ce que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. On pose $g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. On a donc $g \in \mathcal{M}$ et $|g| \leq \mathrm{F}$ p.p., ce qui montre que $g \in \mathcal{L}^p$. On a donc $f \in \mathrm{L}^p$ (au sens $f = g$ p.p. avec $g \in \mathcal{L}^p$).

Puis, on remarque que

$$0 \leq h_n = |f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p \mathrm{F}^p \text{ p.p.},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $h_n \to 0$ p.p. quand $n \to +\infty$. Comme $\mathrm{F}^p \in \mathrm{L}^1$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée, il donne $h_n \to 0$ dans L^1, c'est-à-dire $f_n \to f$ dans L^p. ■

Comme dans le cas $p = 1$ (voir le théorème 4.45), l'hypothèse "$f_n \to f$ p.p." dans le théorème 6.9 peut être remplacée par "$f_n \to f$ en mesure". Ceci est montré dans l'exercice 6.23.

Dans le théorème 6.9, l'hypothèse de domination sur la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (l'hypothèse 2) implique que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^p. La réciproque de cette implication est fausse, c'est-à-dire que le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée dans L^p ne donne pas l'hypothèse 2 du théorème 6.9. Toutefois, le théorème 6.10 ci-dessous donne un résultat de convergence intéressant sous l'hypothèse "$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans L^p" (on pourrait appeler cette hypothèse domination en norme) au lieu de l'hypothèse 2 du théorème 6.9.

Théorème 6.10 (Convergence "dominée en norme", mesure finie) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré fini (c'est-à-dire* $m(E) < +\infty$*) et* $1 < p < +\infty$*. On note* L^r *l'espace* $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *(pour tout* $1 \le r < +\infty$*). Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* L^p *telle que :*

1. $f_n \to f$ *p.p.,*

2. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* L^p.

Alors, $f \in L^p$ *et* $f_n \to f$ *dans* L^q *pour tout* $q \in [1, p[$ *(c'est-à-dire* $\displaystyle\int |f_n - f|^q dm \to 0$*, quand* $n \to +\infty$*, pour tout* $1 \le q < p$*).*
Ce théorème est aussi vrai dans le cas $p = +\infty$*, l'espace* L^∞ *sera défini dans la section 6.1.2.*

DÉMONSTRATION – Le fait que $f \in L^p$ est conséquence immédiate du lemme de Fatou (Lemme 4.19) appliqué à la suite $(|f_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$. Le fait que $f_n \to f$ dans L^q pour tout $q \in [1, p[$ peut se faire avec le théorème de Vitali (théorème 4.51). Ceci est démontré dans l'exercice 6.19. Une généralisation avec $m(E) = +\infty$ est étudiée dans l'exercice 6.20. ■

On donne maintenant une réciproque partielle au théorème de convergence dominée, comme dans le cas $p = 1$.

Théorème 6.11 (Réciproque partielle de la convergence dominée)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $1 \le p < +\infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ et $f \in L^p$. On suppose que $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to +\infty$. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

- $f_{n_k} \to f$ p.p. lorsque $k \to +\infty$,
- $\exists$ $F \in L^p$ telle que $|f_{n_k}| \le F$ p.p., pour tout $k \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION – Comme dans le cas $p = 1$, Ce théorème est une conséquence de la proposition suivante sur les séries absolument convergentes. ■

Proposition 6.12 (Séries absolument convergentes dans L^p)
Soient (E, T, m) *un espace mesuré,* $1 \le p < +\infty$ *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$.
On suppose que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p < +\infty$*. Alors :*

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$ *pour presque tout* $x \in E$*. On pose* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *(la fonction* f *est donc définie p.p.).*

2. $f \in L^p$ *(au sens "il existe* $g \in \mathcal{L}^p$ *telle que* $f = g$ *p.p.").*

3. $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to f$ *p.p. et dans* L^p*, lorsque* $n \to +\infty$*. De plus, il existe* $F \in L^p$ *telle que* $|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)| \le F$ *p.p., pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION – Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n.

On pose, pour tout $x \in E$, $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)|$. On a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. Comme la suite est croissante, il existe $F \in \mathcal{M}_+$ telle que $g_n \uparrow F$, quand $n \to +\infty$. On a donc aussi $g_n^p \uparrow F^p$ quand $n \to +\infty$ et le théorème de convergence monotone donne

$$\int g_n^p dm \to \int F^p dm, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.5}$$

On remarque maintenant que $\|g_n\|_p \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_p \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_p = \mathrm{A} < +\infty$. Donc $\|g_n\|_p^p \leq \mathrm{A}^p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (6.5) donne alors

$$\int \mathrm{F}^p dm \leq \mathrm{A}^p < +\infty. \tag{6.6}$$

L'inégalité (6.6) donne que $\mathrm{F} < +\infty$ p.p.. Il existe donc $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{B}) = 0$ et $\mathrm{F}(x) < +\infty$ pour tout $x \in \mathrm{B}^c$. Pour tout $x \in \mathrm{B}^c$, la série de terme général $f_n(x)$ est donc absolument convergente dans $\mathbb{R}$. Elle est donc convergente dans $\mathbb{R}$ et on peut définir, pour tout $x \in \mathrm{B}^c$, $f(x) \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

La fonction f n'est pas forcément dans $\mathcal{M}$, mais elle est m-mesurable (voir la définition 4.13 page 127), il existe donc $g \in \mathcal{M}$ telle que $f = g$ p.p.. Puis, comme $|g| \leq \mathrm{F}$ p.p. (car $|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)| \leq g_n \leq \mathrm{F}$ p.p. et $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to g$ p.p.) on a, grâce à (6.6), $g \in \mathcal{L}^p$, ce qui donne bien $f \in \mathrm{L}^p$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^p$ telle que $f = g$ p.p.")

Enfin, pour montrer le dernier item de la proposition, il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée dans L^p car $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to f$ p.p. et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)| \leq g_n \leq \mathrm{F}$ p.p. avec $\int \mathrm{F}^p dm < +\infty$. On obtient bien que $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to f$ dans L^p. ■

Toute série absolument convergente de L^p est donc convergente dans L^p. On en déduit le résultat suivant :

Théorème 6.13 (L'espace L^p est complet) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* $1 \leq p < +\infty$. *L'espace vectoriel normé* $(\mathrm{L}^p, \|.\|_p)$ *est complet.*

On peut maintenant se demander si les espaces L^p sont des espaces de Hilbert. Ceci est vrai pour $p = 2$, et, en général, faux pour $p \neq 2$ (voir à ce propos l'exercice 6.37). Le cas de L^2 sera étudié en détail dans la section 6.2. En général, les espaces L^p, avec $1 < p < +\infty$, autres que L^2 ne sont pas des espaces de Hilbert, mais nous verrons ultérieurement (section 6.3) que ce sont des espaces de Banach réflexifs (c'est-à-dire que l'injection canonique entre l'espace et son bi-dual est une bijection, voir Définition 6.72). Les espaces L^1 et L^∞ (que nous verrons au paragraphe suivant) sont des espaces de Banach non réflexifs (sauf cas particuliers).

Remarque 6.14 Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $1 < p < +\infty$. On peut aussi définir $\mathrm{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}^\mathrm{N}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ (avec $\mathrm{N} > 1$) comme on a fait pour $p = 1$ (voir la section 4.10). On obtient aussi des espaces de Banach (complexes ou réels). Le cas $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ est particulièrement intéressant. Il sera muni d'une structure hilbertienne (voir le théorème 6.35).

6.1.2 L'espace L^∞

Définition 6.15 (L'espace $\mathcal{L}^\infty$) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* f *une fonction mesurable (de* E *dans* $\mathbb{R}$*) ;*

1. *on dit que* f *est essentiellement bornée, ou encore que* $f \in \mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *s'il existe* $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $|f| \leq \mathrm{C}$ *p.p. ;*
2. *si* $f \in \mathcal{L}^\infty$*, on pose* $\|f\|_\infty = \inf\{\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+ \,;\, |f| \leq \mathrm{C}$ *p.p.*$\}$,
3. *si* $f \notin \mathcal{L}^\infty$*, on pose* $\|f\|_\infty = +\infty$.

Remarque 6.16 (Rappels sur la définition de l'inf) Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. On rappelle que A est borné inférieurement s'il existe un minorant de A, c'est-à-dire s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq \alpha$ pour tout $x \in A$. Si A est borné inférieurement, on définit la borne inférieure de A comme le plus grand des minorants : $\overline{x} = \inf\{A\} = \max\{\alpha; \alpha \leq x \text{ pour tout } x \in A\}$. Si A n'est pas borné inférieurement, on pose $\inf A = -\infty$. Dans les manipulations sur les inf (et sur les sup) il est utile de connaître le résultat suivant :

$$\overline{x} = \inf A \Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A; x_n \downarrow \overline{x} \text{ quand } n \to +\infty.$$

Ceci se démontre très facilement en distinguant deux cas :

1. Si A est non borné inférieurement, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in A$ tel que $y_n \leq -n$. En choisissant $x_0 = y_0$ et, par récurrence, $x_n = \min(x_{n-1}, y_n)$, on a donc $x_n \downarrow -\infty = \inf A$.
2. Si A est borné inférieurement, soit $\overline{x} = \inf A$. Alors, $\overline{x} + \frac{1}{n}$ n'est pas un minorant de A et donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in A$ tel que $\overline{x} \leq y_n \leq \overline{x} + \frac{1}{n}$. En choisissant $x_0 = y_0$ et, par récurrence, $x_n = \min(x_{n-1}, y_n)$, on a clairement : $x_n \downarrow \overline{x}$ lorsque $n \to +\infty$.

Le petit lemme suivant (dont la démonstration est immédiate en écrivant la définition de $\|f\|_\infty$, voir l'exercice corrigé 4.37) est parfois bien utile.

Lemme 6.17 Si $f \in \mathcal{L}^\infty$, alors $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p..

La démonstration de ce lemme fait l'objet de l'exercice corrigé 4.37.
On a égalité entre le sup essentiel et le sup pour les fonctions continues :

Proposition 6.18 *Si* $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *et* $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *alors*

$$\|f\|_u = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_\infty.$$

DÉMONSTRATION – On distingue 2 cas :

Cas 1. On suppose ici que $|f|$ est non bornée, c'est-à-dire $\|f\|_u = +\infty$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Comme $|f|$ est non bornée, il existe $x \in \mathbb{R}$ t.q. $|f(x)| > \alpha$. Par continuité de f, il existe alors $\varepsilon > 0$ t.q. $|f(y)| > \alpha$ pour tout $y \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. On a donc $\{|f| > \alpha\} \supset [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ et donc $\lambda(\{|f| > \alpha\}) \geq 2\varepsilon$. Donc, $|f|$ n'est pas inférieure ou égale à α p.p.. On a donc $\{C \in \mathbb{R}_+ ; |f| \leq C \text{ p.p.}\} = \emptyset$, donc $\|f\|_\infty = +\infty = \|f\|_u$.

Cas 2. On suppose maintenant que $\|f\|_u < +\infty$. On a $|f(x)| \leq \|f\|_u$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\|f\|_\infty \leq \|f\|_u$.

D'autre part, on sait que $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p.. On a donc $\lambda\{|f| > \|f\|_\infty\}) = 0$. Or $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ est ouvert (car f est continue), c'est donc un ouvert de mesure nulle, on a donc $\{|f| > \|f\|_\infty\} = \emptyset$ (la mesure de Lebesgue d'un ouvert non vide est toujours strictement positive), ce qui prouve $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $\|f\|_u \leq \|f\|_\infty$.

On obtient bien finalement $\|f\|_u = \|f\|_\infty$. ■

Définition 6.19 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. *On définit* $L^\infty = L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *comme l'ensemble des classes d'équivalence sur* $\mathcal{L}^\infty$ *pour la relation d'équivalence "= p.p.".*
2. *Soit* $F \in L^\infty$. *On pose* $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$ *avec* $f \in F$, *de sorte que* $F = \{g \in \mathcal{L}^\infty ; g = f \text{ p.p.}\}$. *(Cette définition est cohérente car* $\|f\|_\infty$ *ne dépend pas du choix de* f *dans* F.*)*

Proposition 6.20 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *et* $L^\infty = L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. *Alors :*

1. $\mathcal{L}^\infty$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application définie de $\mathcal{L}^\infty$ dans $\mathbb{R}$ par $f \mapsto \|f\|_\infty$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^\infty$.

2. L^∞ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application définie de L^∞ dans $\mathbb{R}$ par $f \mapsto \|f\|_\infty$ est une norme sur L^∞. L^∞ est donc un espace espace vectoriel normé (réel).

DÉMONSTRATION – 1. – Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^\infty$, il est clair que $\alpha f \in \mathcal{L}^\infty$ et que $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty$.

– Soit $f, g \in \mathcal{L}^\infty$. Comme $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p. et $|g| \leq \|g\|_\infty$ p.p., on montre facilement que $|f+g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ p.p., ce qui prouve que $(f+g) \in \mathcal{L}^\infty$ et que $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

On a bien montré que $\mathcal{L}^\infty$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et comme $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in \mathcal{L}^\infty$, l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est bien une semi–norme sur $\mathcal{L}^\infty$.

2. la structure vectorielle de L^∞ s'obtient comme celle de L^p ($p < +\infty$) et le fait que $f \mapsto \|f\|_\infty$ soit une norme découle du fait que

$$f = 0 \text{ p.p. } \Leftrightarrow \|f\|_\infty = 0.$$

■

Proposition 6.21 *Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré. L'espace $\mathrm{L}^\infty_\mathbb{R}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ est un espace de Banach (réel), c'est-à-dire un e.v.n. complet.*

DÉMONSTRATION – On sait déjà que L^∞ est un e.v.n.. Le fait qu'il soit complet est la conséquence du fait que toute série absolument convergente dans L^∞ est convergente dans L^∞, ce qui est une conséquence de la proposition suivante sur les séries absolument convergentes. ■

Proposition 6.22 (Séries absolument convergentes dans L^∞) *Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^\infty_\mathbb{R}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$. Alors :*

1. Il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} |f_k| < \mathrm{C}$ p.p..

2. La série de terme général $f_n(x)$ est, pour presque tout $x \in \mathrm{E}$, absolument convergente dans $\mathbb{R}$. On définit, pour presque tout x, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

3. On a $f \in \mathrm{L}^\infty$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^\infty$ t.q. $f = g$ p.p.) et $\|\sum_{k=0}^{n} f_k - f\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. Comme $|f_n| \leq \|f_n\|_\infty$ p.p., il existe $\mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}_n) = 0$ et $|f_n| \leq \|f_n\|_\infty$ sur A_n^c. On pose $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$. On a $m(\mathrm{A}) = 0$ (par σ-sous additivité de m) et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathrm{A}^c$, $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$.

Pour tout $x \in \mathrm{A}^c$, on a donc

$$\sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty = \mathrm{C} < \infty. \tag{6.7}$$

Comme $m(\mathrm{A}) = 0$, ceci montre le premier item.

Pour tout $x \in \mathrm{A}^c$, la série de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{R}$, donc convergente. On pose donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \in \mathbb{R}.$$

f est donc définie p.p., elle est m-mesurable (voir la définition 4.13) car limite p.p. de fonctions mesurables. Il existe donc $g \in \mathcal{M}$ t.q. $f = g$ p.p. et (6.7) donne $|g| \leq \mathrm{C}$ p.p.. On a donc $g \in \mathcal{L}^\infty$ et donc $f \in \mathrm{L}^\infty$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^\infty$ t.q. $f = g$ p.p.").

Il reste à montrer que $\sum_{k=0}^n f_k \to f$ dans L^∞.

On remarque que, pour tout $x \in A^c$,

$$|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \to 0,$$

quand $n \to +\infty$. Comme $m(A) = 0$, on en déduit

$$\|\sum_{k=0}^{n} f_k - f\|_\infty \le \sup_{x\in A^c} |\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

et donc $\sum_{k=0}^n f_k \to f$ dans L^∞, quand $n \to +\infty$. ■

La proposition 6.22 permet de montrer que L^∞ est complet (théorème 6.21). Elle permet aussi de montrer ce que nous avons appelé précédemment (dans le cas $p < \infty$) réciproque partielle du théorème de convergence dominée. Il est important par contre de savoir que le théorème de convergence dominée peut être faux dans L^∞, comme le montre la remarque suivante.

Remarque 6.23 (Sur la convergence dominée) Le résultat de convergence dominée qu'on a démontré pour les suites de fonctions de L^p, $1 \le p < +\infty$, est <u>faux</u> pour les suites de fonctions de L^∞. Il suffit pour s'en convaincre de considérer l'exemple suivant : (E, T, m) = $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, $f_n = 1_{[0,\frac{1}{n}]}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a bien

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset L^\infty_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda),\ f_n \to 0 \text{ p.p. quand } n \to +\infty,$$
$$f_n \le 1_{[0,1]} \text{ p.p., pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \ 1_{[0,1]} \in L^\infty_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda).$$

Pourtant, $\|f_n\|_\infty = 1 \not\to 0$, quand $n \to +\infty$.

Par contre, le résultat de réciproque partielle de la convergence dominée est vrai, comme conséquence du résultat que toute suite absolument convergente dans L^∞ est convergente (dans L^∞, proposition 6.22). La démonstration est similaire à la démonstration du théorème 4.49.

Remarque 6.24 Soit (E, T, m) un espace mesuré. On peut aussi définir $L^\infty_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ et $L^\infty_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ (avec $N > 1$) comme on a fait pour $p = 1$ (voir la section 4.10). On obtient aussi des espaces de Banach (complexe ou réels).

6.1.3 Quelques propriétés des espaces $L^p, 1 \le p \le +\infty$

Proposition 6.25 (Comparaison entre les espaces L^p) *Soit (E, T, m) un espace mesuré fini, i.e. $m(E) < +\infty$. Soient $p, q \in \mathbb{R}_+$ tels que $1 \le p < q \le +\infty$. Alors, $L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m) \subset L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. De plus, il existe C, ne dépendant que de p, q et $m(E)$, tel que $\|f\|_p \le C\|f\|_q$ pour tout $f \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (ceci montre que l'injection de L^q dans L^p est continue).*

Démonstration – On distingue les cas $q < \infty$ et $q = \infty$.

Cas $q < \infty$. On suppose ici que $1 \le p < q < +\infty$.

Soit $f \in L^q$. On choisit un représentant de f, encore noté f. Pour tout $x \in E$, on a $|f(x)|^p \le |f(x)|^q$ si $|f(x)| \ge 1$. On a donc $|f(x)|^p \le |f(x)|^q + 1$, pour tout $x \in E$. Ce qui donne, par monotonie de l'intégrale,

$$\int |f|^p dm \le m(E) + \int |f|^q dm < \infty, \tag{6.8}$$

et donc que $f \in L^p$. On a ainsi montré $L^q \subset L^p$.

On veut montrer maintenant qu'il existe C, ne dépendant que de p, q et $m(E)$, t.q., pour tout $f \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$,

$$\|f\|_p \le C\|f\|_q. \tag{6.9}$$

En utilisant (6.8), on remarque que (6.9) est vraie avec $C = (m(E)+1)^{\frac{1}{p}}$, si $\|f\|_q = 1$. Ceci est suffisant pour dire que (6.9) est vraie avec $C = (m(E)+1)^{\frac{1}{p}}$ pour tout $f \in L^q$. En effet, (6.9) est trivialement vraie pour $\|f\|_q = 0$ (car on a alors $f = 0$ p.p. et $\|f\|_p = 0$). Puis, si $\|f\|_q > 0$, on pose $f_1 = \frac{f}{\|f\|_q}$ de sorte que $\|f_1\|_q = 1$. On peut donc utiliser (6.9) avec f_1. On obtient $\frac{1}{\|f\|_q}\|f\|_p = \|f_1\|_p \le C$, ce qui donne bien $\|f\|_p \le C\|f\|_q$.

On a donc montré (6.9) avec un C ne dépendant que p et $m(E)$ (et non de q). Toutefois, le meilleur C possible dans (6.9) dépend de p, q et $m(E)$. Ce meilleur C peut être obtenu en utilisant l'inégalité de Hölder généralisée (proposition 6.26). Elle donne $\|f\|_p \le C\|f\|_q$ avec $C = (m(E))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ (voir la remarque 6.27).

Cas $q = \infty$. On suppose ici que $1 \le p < q = +\infty$.

Soit $f \in L^\infty$. On choisit un représentant de f, encore noté f. On a $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p.. On en déduit $|f|^p \le \|f\|_\infty^p$ p.p. et donc

$$\int |f|^p dm \le m(E)\|f\|_\infty^p < \infty.$$

Ce qui donne $f \in L^p$ et $\|f\|_p \le C\|f\|_\infty$ avec $C = (m(E))^{\frac{1}{p}}$.

On voit ici qu'on a obtenu le meilleur C possible (si $m(E) > 0$) car $\|f\|_p = (m(E))^{\frac{1}{p}} = (m(E))^{\frac{1}{p}}\ \|f\|_\infty$ si $f = 1_E$. ■

Proposition 6.26 (Inégalité de Hölder généralisée) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $p, q, r \in [1, +\infty]$ *tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$. *Soient* $f \in L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *et* $g \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. *Alors,* $fg \in L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *et*

$$\|fg\|_r \le \|f\|_p\|g\|_q. \tag{6.10}$$

DÉMONSTRATION – Comme d'habitude, on confond un élément de L^s ($s = p$, q ou r) avec un de ses représentants. On travaille donc avec $\mathcal{L}^s$ au lieu de L^s. On suppose donc que $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$ et on veut montrer que $fg \in \mathcal{L}^r$ et que (6.10) est vraie. On remarque d'abord que $fg \in \mathcal{M}$.

Ici encore, on distingue plusieurs cas.

Cas 1. On suppose ici $1 \le p, q, r < \infty$.

On pose $f_1 = |f|^r$ et $g_1 = |g|^r$ de sorte que $f_1 \in \mathcal{L}^{\frac{p}{r}}$ et $g_1 \in \mathcal{L}^{\frac{q}{r}}$. Comme $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$, on peut appliquer le lemme 6.5 (donnant l'inégalité de Hölder) avec f_1, g_1 (au lieu de f, g) et $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ (au lieu de p, q). Il donne que $f_1 g_1 \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_1 g_1\|_1 \le \|f_1\|_{\frac{p}{r}}\|g_1\|_{\frac{q}{r}}$. On en déduit que $fg \in L^r$ et

$$\int |fg|^r dm \le (\int |f|^p dm)^{\frac{r}{p}} (\int |g|^q dm)^{\frac{r}{q}},$$

ce qui donne (6.10)

Cas 2. On suppose ici $q = \infty$ et $r = p < \infty$.

Comme $|g| \le \|g\|_\infty$ p.p., On a $|fg|^p \le |f|^p\|g\|_\infty^p$ p.p. et donc

$$\int |fg|^p dm \le \|g\|_\infty^p \int |f|^p dm,$$

ce qui donne $fg \in \mathcal{L}^p$ et (6.10).

Cas 3. On suppose ici $p = q = r = \infty$.

Comme $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p. et $|g| \le \|g\|_\infty$ p.p., on a $|fg| \le \|f\|_\infty\|g\|_\infty$ p.p., ce qui donne $fg \in \mathcal{L}^\infty$ et (6.10). ■

Remarque 6.27

1. Par une récurrence facile sur $n \in \mathbb{N}^*$, on peut encore généraliser la proposition 6.26. Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $p_1, \ldots, p_n \in [1, \infty]$ et $r \in [1, \infty]$ t.q. $\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $f_i \in \mathrm{L}_{\mathbb{R}}^{p_i}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Alors, $\prod_{i=1}^{n} f_i \in \mathrm{L}_{\mathbb{R}}^{r}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et $\|\prod_{i=1}^{n} f_i\|_r \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{p_i}$.
2. L'inégalité (6.10) permet aussi de trouver le meilleur C possible dans la proposition 6.25 (Inégalité (6.9)) :

   Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré fini. Soient $p, q \in \mathbb{R}_+$ tels que $1 \leq p < q < +\infty$. Soit $f \in \mathrm{L}_{\mathbb{R}}^{q}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Comme $1 \leq p < q < \infty$, il existe $r \in [1, \infty[$ t.q. $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. On peut alors utiliser la proposition 6.26 avec $f \in \mathrm{L}^q$ et $1_{\mathrm{E}} \in \mathrm{L}^r$. Elle donne que $f \in \mathrm{L}^p$ et $\|f\|_p \leq \mathrm{C}\|f\|_q$ avec $\mathrm{C} = (m(\mathrm{E}))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$. Cette valeur de C est la meilleure possible (si $m(\mathrm{E}) > 0$) dans (6.9) car si $f = 1_{\mathrm{E}}$ on obtient $\|f\|_p \leq (m(\mathrm{E}))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$.

Remarque 6.28 Les espaces $\mathrm{L}^p, p \in]0, 1[$ (que l'on peut définir comme dans le cas $1 \leq p < \infty$) sont des espaces vectoriels, mais l'application $f \mapsto \left(\int |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}$ n'est pas une norme sur L^p si $p \in]0, 1[$ (sauf cas particulier).

Remarque 6.29 Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E}, \mathrm{T})$. L'ensemble $\mathrm{J} = \{p \in [1, +\infty], f \in \mathcal{L}^p\}$ est un intervalle de $[1, +\infty]$. L'application définie de $\overline{\mathrm{J}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par $p \mapsto \|f\|_p$ est continue, voir à ce propos l'exercice 4.37, et dans le cas particulier des fonctions continues à support compact, l'exercice 6.10. En particulier, lorsque $p \in \mathrm{J}$, $p \to +\infty$ on a $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$. On en déduit le résultat suivant : s'il existe $p_0 < +\infty$ tel que $f \in \mathcal{L}^p$ pour tout p tel que $p_0 \leq p < +\infty$, et s'il existe C t.q. $\|f\|_p \leq \mathrm{C}$, pour tout $p \in [p_0, +\infty[$, alors $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|f\|_\infty \leq \mathrm{C}$.

6.2 Analyse hilbertienne et espace L^2

6.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 6.30 (Produit scalaire)

1. *Soit* H *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$. *On appelle produit scalaire sur* H *une application de* $\mathrm{H} \times \mathrm{H} \to \mathbb{R}$, *notée* $(\cdot \mid \cdot)$ *ou* $(\cdot \mid \cdot)_{\mathrm{H}}$ *t.q.*

   (ps1) $(u \mid u) > 0$ *pour tout* $u \in \mathrm{H} \setminus \{0\}$,

   (ps2) $(u \mid v) = (v \mid u)$ *pour tout* $u, v \in \mathrm{H}$,

   (ps3) $u \mapsto (u \mid v)$ *est une application linéaire de* H *dans* $\mathbb{R}$, *pour tout* $v \in \mathrm{H}$.
2. *Soit* H *un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$. *On appelle produit scalaire sur* H *une application de* $\mathrm{H} \times \mathrm{H} \to \mathbb{C}$, *notée* $(\cdot \mid \cdot)$ *ou* $(\cdot \mid \cdot)_{\mathrm{H}}$ *telle que*

   (ps1) $(u \mid u) \in \mathbb{R}_+^*$ *pour tout* $u \in \mathrm{H} \setminus \{0\}$,

   (ps2) $(u \mid u) = \overline{(v \mid u)}$ *pour tout* $u, v \in \mathrm{H}$,

   (ps3) $u \mapsto (u \mid v)$ *est une application linéaire de* H *dans* $\mathbb{R}$, *pour tout* $v \in \mathrm{H}$.

Remarque 6.31 (Exemple fondamental) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré.

1. On prend $\mathrm{H} = \mathrm{L}_{\mathbb{R}}^2(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. H est un e.v. sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $fg \in \mathrm{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si $f, g \in \mathrm{L}_{\mathbb{R}}^2(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ (lemme 6.5 pour $p = q = 2$). L'application $(f, g) \mapsto \int fg dm$ est un produit scalaire sur H.

2. On prend $H = L^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ (voir le théorème 6.35 ci après). H est un e.v. sur $\mathbb{C}$. En utilisant le lemme 6.5, on montre facilement que $f\overline{g} \in L^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ si $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ (lemme 6.5 pour $p = q = 2$). L'application $(f, g) \mapsto \int f\overline{g}dm$ est un produit scalaire sur H.

Proposition 6.32 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

1. Soit H *un e.v. sur* $\mathbb{R}$ *muni d'un produit scalaire, noté* $(\cdot \mid \cdot)$. *Alors :*

$$(u \mid v)^2 \leq (u \mid u)(v \mid v), \text{ pour tout } u, v \in H. \tag{6.11}$$

De plus, $(u \mid v)^2 = (u \mid u)(v \mid v)$ *si et seulement si* u *et* v *sont colinéaires.*

2. Soit H *un e.v. sur* $\mathbb{C}$ *muni d'un produit scalaire, noté* $(\cdot \mid \cdot)$. *Alors :*

$$|(u \mid v)|^2 \leq (u \mid u)(v \mid v), \text{ pour tout } u, v \in H. \tag{6.12}$$

De plus, $|(u \mid v)|^2 = (u \mid u)(v \mid v)$ *si et seulement si* u *et* v *sont colinéaires.*

DÉMONSTRATION –

1. On suppose ici $K = \mathbb{R}$. Soit $u, v \in H$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose
$$p(\alpha) = (u + \alpha v \mid u + \alpha v) = (v \mid v)\alpha^2 + 2\alpha(u \mid v) + (u \mid u).$$
Comme $p(\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on doit avoir $\Delta = (u \mid v)^2 - (u \mid u)(v \mid v) \leq 0$, ce qui donne (6.11).

On s'intéresse maintenant au cas d'égalité dans (6.11).

Si $u = 0$ ou $v = 0$, on a égalité dans (6.11) (et u et v sont colinéaires).

Si $u \neq 0$ et $v \neq 0$, on a égalité dans (6.11) (c'est-à-dire $\Delta = 0$) si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $p(\alpha) = 0$. On a donc égalité dans (6.11) si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $u = -\alpha v$. On en déduit bien que $(u \mid v)^2 = (u \mid u)(v \mid v)$ si et seulement si u et v sont colinéaires.

2. On suppose maintenant $K = \mathbb{C}$. Soient $u, v \in H$. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ on pose
$$p(\alpha) = (u + \alpha v \mid u + \alpha v) = \alpha\overline{\alpha}(v \mid v) + \alpha(v \mid u) + \overline{\alpha}(u \mid v) + (u \mid u).$$
On choisit de prendre $\alpha = \beta(u \mid v)$ avec $\beta \in \mathbb{R}$. On pose donc, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$,
$$\varphi(\beta) = p(\beta(u \mid v)) = \beta^2|(u \mid v)|^2(v \mid v) + 2\beta|(u \mid v)|^2 + (u \mid u).$$
Ici encore, comme $\varphi(\beta) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on doit avoir $\Delta = |(u \mid v)|^4 - |(u \mid v)|^2(v \mid v)(u \mid u) \leq 0$, ce qui donne (6.12).

On s'intéresse maintenant au cas d'égalité dans (6.12)

Si $u = 0$ ou $v = 0$, on a égalité dans (6.12) (et u et v sont colinéaires).

On suppose maintenant $u \neq 0$ et $v \neq 0$. On remarque d'abord que, si $(u \mid v) = 0$, on n'a pas égalité dans (6.12) et u et v ne sont pas colinéaires. On suppose donc maintenant que $(u \mid v) \neq 0$. On a alors égalité dans (6.12) si et seulement si $\Delta = 0$ et donc si et seulement s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel qu $\varphi(\beta) = 0$. Donc, on a égalité dans (6.12) si et seulement s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $u = -\beta(u \mid v)v$, et donc si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $u = -\alpha v$.

Finalement, on en déduit bien que $|(u \mid v)|^2 = (u \mid u)(v \mid v)$ si et seulement si u et v sont colinéaires. ■

Proposition 6.33 (Norme induite par un produit scalaire) *Soit* H *un e.v. sur* K, *avec* $K = \mathbb{R}$ *ou* $K = \mathbb{C}$, *muni d'un produit scalaire, noté* $(\cdot \mid \cdot)$. *Pour tout* $u \in H$, *on pose* $\|u\|_H = \sqrt{(u \mid u)}$. *Alors,* $\|\cdot\|_H$ *est une norme sur* H. *On l'appelle norme induite par le produit scalaire* $(\cdot \mid \cdot)$.

DÉMONSTRATION –

– Il est clair que $\|u\|_{\mathrm{H}} \in \mathbb{R}_+$ pour tout $u \in \mathrm{H}$ et que

$$\|u\|_{\mathrm{H}} = 0 \Leftrightarrow (u \mid u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

– On a bien $\|\alpha u\|_{\mathrm{H}} = |\alpha| \|u\|_{\mathrm{H}}$ pour tout $\alpha \in \mathrm{K}$ et tout $u \in \mathrm{H}$.

– Enfin, pour montrer l'inégalité triangulaire, soit $u, v \in \mathrm{H}$. On a $\|u+v\|_{\mathrm{H}}^2 = (u+v \mid u+v) = (u \mid u) + (v \mid v) + (u \mid v) + (v \mid u)$. Comme, par (6.11) ou (6.12), $|(u \mid v)| \leq \sqrt{(u \mid u)}\sqrt{(v \mid v)} = \|u\|_{\mathrm{H}} \|v\|_{\mathrm{H}}$, on en déduit $\|u+v\|_{\mathrm{H}}^2 \leq (\|u\|_{\mathrm{H}} + \|v\|_{\mathrm{H}})^2$. Donc,

$$\|u+v\|_{\mathrm{H}} \leq \|u\|_{\mathrm{H}} + \|v\|_{\mathrm{H}}.$$

■

Définition 6.34 (Espace de Hilbert)

1. *Un espace préhilbertien (réel ou complexe) est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$) normé dont la norme est induite par un produit scalaire.*
2. *Un espace de Hilbert (réel ou complexe) est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$) normé complet dont la norme est induite par un produit scalaire. C'est donc un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.*

Théorème 6.35 (L'espace L^2) *Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré.*

1. *L'espace $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$, est un espace de Hilbert (réel) et le produit scalaire associé à la norme est défini par :*

$$(f \mid g)_2 = \int f g \; dm.$$

2(a) *Soit f une application mesurable de E dans $\mathbb{C}$ (donc $|f| \in \mathcal{M}_+$). On dit que $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si $|f|^2 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Pour $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\||f|^2\|_1}$. Alors, $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $f \mapsto \|f\|_2$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$.*

(b) *On appelle $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ l'espace $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ quotienté par la relation d'équivalence "= p.p.". Pour $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, on pose $\|\mathrm{F}\|_2 = \|f\|_2$ avec $f \in \mathrm{F}$ (noter que $\|f\|_2$ ne dépend pas du choix de f dans F). Alors $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, muni de $\|\cdot\|_2$, est un espace de Banach (complexe).*

(c) *L'espace $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$, est un espace de Hilbert (complexe) et le produit scalaire associé à la norme est défini par :*

$$(f \mid g)_2 = \int f \overline{g} \; dm.$$

DÉMONSTRATION – 1. On sait déjà que $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$ est un espace de Banach (réel). Le lemme 6.5 pour $p = q = 2$ donne que $fg \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si $f, g \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. On peut donc poser $(f \mid g)_2 = \int f g dm$. Il est facile de voir que $(\cdot \mid \cdot)_2$ est un produit scalaire et que la norme induite par ce produit scalaire est bien la norme $\|\cdot\|_2$.

2. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbb{C}$ mesurable. On rappelle (section 4.10) que les fonctions $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont mesurables de E dans $\mathbb{R}$ (*i.e.* appartiennent à $\mathcal{M}$). On a donc bien $|f| \in \mathcal{M}_+$ et $|f|^2 = (\mathfrak{Re}(f))^2 + (\mathfrak{Im}(f))^2 \in \mathcal{M}_+$.

Comme $|f|^2 = (\Re(f))^2 + (\Im(f))^2 \in \mathcal{M}_+$, on remarque aussi que $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ si et seulement si $\Re(f)$, $\Im(f) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$. Comme $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ est un e.v. (sur $\mathbb{R}$), il est alors immédiat de voir que $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ est un e.v. sur $\mathbb{C}$.

On quotiente maintenant $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ par la relation "= p.p.". On obtient ainsi l'espace $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ que l'on munit facilement d'une structure vectorielle sur $\mathbb{C}$. L'espace $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ est donc un e.v. sur $\mathbb{C}$.

En utilisant le lemme 6.5, on montre facilement que $f\overline{g} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ si $f, g \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ (on utilise le fait que les parties réelles et imaginaires de f et g sont dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$). On peut donc poser $(f \mid g)_2 = \int f\overline{g}dm$. Il est aussi facile de voir que $(\cdot \mid \cdot)_2$ est alors un produit scalaire sur $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ et que la norme induite par ce produit scalaire est justement $\|\cdot\|_2$ (car $|f|^2 = f\overline{f}$ et donc $\int f\overline{f}dm = \|f\|_2^2$). On a, en particulier, ainsi montré que $f \mapsto \|f\|_2$ est bien une norme sur $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$. On en déduit aussi que $f \mapsto \|f\|_2$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$.

On a montré que l'espace $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$, est un espace préhilbertien. il reste à montrer qu'il est complet (pour la norme $\|\cdot\|_2$). Ceci est facile. En effet, $\|f\|_2^2 = \|\Re(f)\|_2^2 + \|\Im(f)\|_2^2$ pour tout $f \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$. Donc, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ est de Cauchy si et seulement si les suites $(\Re(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Im(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ et cette même suite converge dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ si et seulement si les suites $(\Re(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Im(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$. Le fait que $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ soit complet découle alors du fait que $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ est complet.

■

Remarquons que dans le cas $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder est en fait l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition 6.36 (Continuité du produit scalaire)
Soit H *un Banach réel ou complexe. Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{H}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{H}$ *et* $u, v \in \mathrm{H}$ *tels que* $u_n \to u$ *et* $v_n \to v$ *dans* H, *quand* $n \to +\infty$. *Alors,* $(u_n \mid v_n) \to (u \mid v)$ *quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – Il suffit de remarquer que, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (inégalités (6.11) et (6.12)), on a :

$$\begin{aligned}|(u_n \mid v_n) - (u \mid v)| &\le |(u_n \mid v_n) - (u_n \mid v)| + |(u_n \mid v) - (u \mid v)| \\ &\le \|u_n\|\|v_n - v\| + \|u_n - u\|\|v\|.\end{aligned}$$

On conclut en utilisant le fait que $u_n \to u$, $v_n \to v$ et en remarquant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car convergente.

■

Définition 6.37 (Dual d'un espace de Banach) Soit H un Banach réel ou complexe. On note H′ (ou $\mathcal{L}(\mathrm{H},\mathrm{K})$) l'ensemble des applications linéaires continues de H dans K (avec $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ pour un Banach réel et $\mathrm{K} = \mathbb{C}$ pour un Banach complexe). Si $\mathrm{T} \in \mathrm{H}'$, on pose

$$\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{H}'} = \sup_{u\in\mathrm{H}\setminus\{0\}} \frac{|\mathrm{T}(u)|}{\|u\|_{\mathrm{H}}}.$$

On rappelle que $\|\cdot\|_{\mathrm{H}'}$ est bien une norme sur H′ et que H′, muni de cette norme, est aussi un espace de Banach (sur K).

Enfin, si $\mathrm{T} \in \mathrm{H}'$ et $u \in \mathrm{H}$, on a $|\mathrm{T}(u)| \le \|\mathrm{T}\|_{\mathrm{H}'}\|u\|_{\mathrm{H}}$.

Remarque 6.38 Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Pour $v \in \mathrm{H}$, on pose $\varphi_v(u) = (u \mid v)$ pour tout $u \in \mathrm{H}$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz ((6.11) ou (6.12)), on voit que $\varphi_v \in \mathrm{H}'$ et $\|\varphi_v\|_{\mathrm{H}'} \le \|v\|_{\mathrm{H}}$. Il est facile alors de voir que $\|\varphi_v\|_{H'} = \|v\|_H$. Ceci montre que $v \mapsto \varphi_v$ est une application injective de H dans H′. le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56), fondamental, montrera que cette application est surjective.

Proposition 6.39
Soit H *un espace de Hilbert (réel ou complexe). Alors, pour tout* $u, v \in H$ *On a*

$$\|u+v\|_H^2 + \|u-v\|_H^2 = 2\|u\|_H^2 + 2\|v\|_H^2. \tag{6.13}$$

Cette identité s'appelle identité du parallélogramme.

DÉMONSTRATION – Il suffit d'écrire $\|u+v\|_H^2 + \|u-v\|_H^2 = (u+v \mid u+v) + (u-v \mid u-v)$ et de développer les produits scalaires. ■

Remarque 6.40

1. On peut se demander si deux produits scalaires (sur un même espace vectoriel) peuvent induire la même norme. La réponse est non. En effet, le produit scalaire est entièrement déterminé par la norme qu'il induit. Par exemple, dans le cas d'un e.v. réel, si le produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ induit la norme $\|\cdot\|$, on a, pour tout u, v, $(u \mid v) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$.
2. On se donne maintenant un e.v.n. noté H. Comment savoir si la norme est induite ou non par un produit scalaire ? On peut montrer que la norme est induite par un produit scalaire si et seulement si l'identité du parallélogramme (6.13) est vraie pour tout $u, v \in H$. Ceci est surtout utile pour montrer qu'une norme n'est pas induite par un produit scalaire (on cherche $u, v \in H$ ne vérifiant pas (6.13)).

Définition 6.41 (Orthogonal) *Soit* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe).*
1. Soit $u, v \in H$. *On dit que* u *et* v *sont orthogonaux (et on note* $u \perp v$*) si* $(u \mid v) = 0$.
2. Soit $A \subset H$. *On appelle orthogonal de* A *l'ensemble* $A^\perp = \{u \in H\,;\, (u \mid v) = 0$ *pour tout* $v \in A\}$.

Proposition 6.42 *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* $A \subset H$. *Alors :*
1. $A^\perp$ *est un s.e.v. fermé de* H*,*
2. $A^\perp = \overline{A}^\perp$*,*
3. $A \subset (A^\perp)^\perp$ *(que l'on note aussi* $A^{\perp\perp}$*).*

DÉMONSTRATION – 1. Soit $u_1, u_2 \in A^\perp$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ selon que H est un espace de Hilbert réel ou complexe). Pour tout $v \in A$, on a $(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \mid v) = \alpha_1(u_1 \mid v) + \alpha_2(u_2 \mid v) = 0$. Donc, $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in A^\perp$, ce qui montre que $A^\perp$ est un s.e.v. de H.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^\perp$ telle que $u_n \to u$ dans H, quand $n \to +\infty$. L'application $w \mapsto (w \mid v)$ est continue de H dans K (voir la remarque (6.38)) pour tout $v \in H$. Soit $v \in A$, de $(u_n \mid v) = 0$ on déduit donc que $(u \mid v) = 0$. Ce qui montre que $u \in A^\perp$ et donc que $A^\perp$ est fermé.

2. – Comme $A \subset \overline{A}$, on a $\overline{A}^\perp \subset A^\perp$.
 – Soit maintenant $u \in A^\perp$. On veut montrer que $u \in \overline{A}^\perp$.
 Soit $v \in \overline{A}$, il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ t.q. $v_n \to v$ dans H quand $n \to +\infty$. Comme $(u \mid v_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit, par continuité de $w \mapsto (u \mid w)$, que $(u \mid v) = 0$. Donc $u \in \overline{A}^\perp$, ce qui donne $A^\perp \subset \overline{A}^\perp$.

Finalement, on a bien montré $A^\perp = \overline{A}^\perp$.

3. Soit $v \in \mathrm{A}$. On a $(u \mid v) = 0$ pour tout $u \in \mathrm{A}^\perp$, donc $(v \mid u) = 0$ pour tout $u \in \mathrm{A}^\perp$, ce qui donne $v \in (\mathrm{A}^\perp)^\perp$

■

Remarque 6.43 Dans le dernier item de la proposition précédente, on peut se demander si $\mathrm{A} = \mathrm{A}^{\perp\perp}$. On montrera, dans la section suivante que ceci est vrai si A est s.e.v. fermé (ce qui est aussi une condition nécessaire).

On termine cette section avec le théorème de Pythagore.

Théorème 6.44 (Pythagore) *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* $u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{H}$ *tels que* $(u_i \mid u_j) = 0$ *si* $i \neq j$. *Alors :*

$$\|\sum_{i=1}^{n} u_i\|_{\mathrm{H}}^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{\mathrm{H}}^2. \tag{6.14}$$

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce résultat est immédiate, par récurrence sur n. L'égalité (6.14) est vraie pour $n = 1$ (et tout $u_1 \in \mathrm{H}$). Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que (6.14) est vraie (pour tout $u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{H}$). Soit $u_1, \ldots, u_{n+1} \in \mathrm{H}$. On pose $y = \sum_{i=1}^{n} u_i$, de sorte que

$$\|\sum_{i=1}^{n+1} u_i\|_{\mathrm{H}}^2 = \|y + u_{n+1}\|_{\mathrm{H}}^2 = (y + u_{n+1} \mid y + u_{n+1})$$
$$= (y \mid y) + (y \mid u_{n+1}) + (u_{n+1} \mid y) + (u_{n+1} \mid u_{n+1}).$$

Comme $(y \mid u_{n+1}) = 0 = (u_{n+1} \mid y)$, on en déduit, avec l'hypothèse de récurrence, que

$$\|\sum_{i=1}^{n+1} u_i\|_{\mathrm{H}}^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \|u_i\|_{\mathrm{H}}^2.$$

■

6.2.2 Projection sur un convexe fermé non vide

Remarque 6.45 Soit E un ensemble muni d'une distance, notée d (E est alors un espace métrique). Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$. On pose $d(x, \mathrm{A}) = \inf_{y \in \mathrm{A}} d(x, y)$. Il n'existe pas toujours de $x_0 \in \mathrm{A}$ t.q. $d(x, x_0) = d(x, \mathrm{A})$ et, si un tel x_0 existe, il peut être non unique. Par exemple, dans le cas où A est compact (pour la topologie induite par d), x_0 existe mais peut être non unique.

Dans le cas où il existe un et un seul $x_0 \in \mathrm{A}$ t.q. $d(x, x_0) = d(x, \mathrm{A})$, x_0 est appelé projection de x sur A.

L'objectif de cette section est de montrer l'existence et l'unicité de x_0 dans le cas où A est une partie convexe fermée non vide d'un espace de Hilbert (et d la distance induite par la norme de l'espace de Hilbert).

Définition 6.46 (Partie convexe) *Soit* E *un e.v. sur* K, *avec* $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathrm{K} = \mathbb{C}$. *Soit* $\mathrm{C} \subset \mathrm{E}$. *On dit que* C *est convexe si :*

$$u, v \in \mathrm{C},\ t \in [0,1] \Rightarrow tu + (1-t)v \in \mathrm{C}.$$

Théorème 6.47 (Projection sur un convexe fermé non vide)
Soient H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* $\mathrm{C} \subset \mathrm{H}$ *une partie convexe fermée non vide. Soit* $x \in \mathrm{H}$*. Alors, il existe un et un seul* $x_0 \in \mathrm{C}$ *t.q.* $d(x, x_0) = d(x, \mathrm{C}) = \inf_{y \in \mathrm{C}} d(x, y)$ *(avec* $d(x, y) = \|x - y\|_{\mathrm{H}}$*). On note* $x_0 = \mathrm{P}_{\mathrm{C}}(x)$*.* P_{C} *est donc une application de* H *dans* H *(dont l'image est égale à* C*). On écrit souvent* $\mathrm{P}_{\mathrm{C}}x$ *au lieu de* $\mathrm{P}_{\mathrm{C}}(x)$*.*

DÉMONSTRATION – **Existence de x_0.**
On pose $d = d(x, \mathrm{C}) = \inf_{y \in \mathrm{C}} d(x, y)$. Comme $\mathrm{C} \neq \emptyset$, il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{C}$ t.q. $d(x, y_n) \to d$ quand $n \to +\infty$. On va montrer que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy en utilisant l'identité du parallélogramme (6.13) (ce qui utilise la structure hilbertienne de H) et la convexité de C. L'identité du parallélogramme donne

$$\|y_n - y_m\|_{\mathrm{H}}^2 = \|(y_n - x) - (y_m - x)\|_{\mathrm{H}}^2$$
$$= -\|(y_n - x) + (y_m - x)\|_{\mathrm{H}}^2 + 2\|y_n - x\|_{\mathrm{H}}^2 + 2\|y_m - x\|_{\mathrm{H}}^2,$$

et donc

$$\|y_n - y_m\|_{\mathrm{H}}^2 = -4\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\|_{\mathrm{H}}^2 + 2\|y_n - x\|_{\mathrm{H}}^2 + 2\|y_m - x\|_{\mathrm{H}}^2. \tag{6.15}$$

Comme C est convexe, on a $\frac{y_n + y_m}{2} \in \mathrm{C}$ et donc $d \leq \|\frac{y_n + y_m}{2} - x\|_{\mathrm{H}}$. On déduit alors de (6.15) :

$$\|y_n - y_m\|_{\mathrm{H}}^2 \leq -4d^2 + 2\|y_n - x\|_{\mathrm{H}}^2 + 2\|y_m - x\|_{\mathrm{H}}^2. \tag{6.16}$$

Comme $d(y_n, x) = \|y_n - x\|_{\mathrm{H}} \to d$ quand $n \to +\infty$, on déduit de (6.16) que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Comme H est complet, il existe donc $x_0 \in \mathrm{H}$ t.q. $y_n \to x_0$ quand $n \to +\infty$. Comme C est fermée, on a $x_0 \in \mathrm{C}$. Enfin, comme $\|x - y_n\|_{\mathrm{H}} \to d$ quand $n \to +\infty$, on a, par continuité (dans H) de $z \mapsto \|z\|_{\mathrm{H}}$, $d(x, x_0) = \|x - x_0\|_{\mathrm{H}} = d = d(x, \mathrm{C})$, ce qui termine la partie existence.

Unicité de x_0. Soit $y_1, y_2 \in \mathrm{C}$ t.q. $d(x, y_1) = d(x, y_2) = d(x, \mathrm{C}) = d$. On utilise encore l'identité du parallélogramme. Elle donne (voir (6.15)) :

$$\|y_1 - y_2\|_{\mathrm{H}}^2 = -4\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\|_{\mathrm{H}}^2 + 2\|y_1 - x\|_{\mathrm{H}}^2 + 2\|y_2 - x\|_{\mathrm{H}}^2$$
$$= -4\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\|_{\mathrm{H}}^2 + 4d^2.$$

Comme $\frac{y_1 + y_2}{2} \in \mathrm{C}$ On a donc $d \leq \|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\|_{\mathrm{H}}$ et donc $\|y_1 - y_2\|_{\mathrm{H}}^2 \leq -4d^2 + 4d^2 = 0$. Donc $y_1 = y_2$. Ce qui termine la partie unicité. ∎

Remarque 6.48 Le théorème précédent est, en général, faux si on remplace "Hilbert" par "Banach". Un exemple de non existence est donné à l'exercice 6.31 (et il est facile de trouver des exemples de non unicité).

On donne maintenant deux caractérisations importantes de la projection. La première est valable pour tout convexe fermé non vide alors que la deuxième ne concerne que les s.e.v. fermés.

Proposition 6.49 (Première caractérisation de la projection) *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* $\mathrm{C} \subset \mathrm{H}$ *une partie convexe fermée non vide. Soient* $x \in \mathrm{H}$ *et* $x_0 \in \mathrm{C}$*.*

1. On suppose que H *est un Hilbert réel. Alors :*

$$x_0 = \mathrm{P}_{\mathrm{C}}x \Leftrightarrow (x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0, \text{ pour tout } y \in \mathrm{C}. \tag{6.17}$$

2. On suppose que H *est un Hilbert complexe. Alors :*

$$x_0 = \mathrm{P}_{\mathrm{C}}x \Leftrightarrow \mathfrak{Re}(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0, \text{ pour tout } y \in \mathrm{C}. \tag{6.18}$$

DÉMONSTRATION –
Cas d'un Hilbert réel

- **Sens** ($\Rightarrow$) On veut montrer que $(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0,$ pour tout $y \in \mathrm{C}$. Comme $x_0 = \mathrm{P_C} x$, on a $\|x - x_0\|_{\mathrm{H}}^2 \leq \|x - z\|_{\mathrm{H}}^2$ pour tout $z \in \mathrm{C}$. Soit $y \in \mathrm{C}$. On prend $z = ty + (1-t)x_0$ avec $t \in]0, 1]$. Comme C est convexe, on a $z \in \mathrm{C}$ et donc
$$\begin{aligned}\|x - x_0\|_{\mathrm{H}}^2 \leq \|x - z\|_{\mathrm{H}}^2 &= (x - x_0 - t(y - x_0) \mid x - x_0 - t(y - x_0)) \\ &= \|x - x_0\|_{\mathrm{H}}^2 + t^2\|y - x_0\|_{\mathrm{H}}^2 - 2t(x - x_0 \mid y - x_0).\end{aligned}$$
On en déduit
$$2t(x - x_0 \mid y - x_0) - t^2\|y - x_0\|_{\mathrm{H}}^2 \leq 0.$$
On divise cette inégalité par t (on rappelle que $t > 0$) pour obtenir
$$2(x - x_0 \mid y - x_0) - t\|y - x_0\|_{\mathrm{H}}^2 \leq 0,$$
ce qui donne, en faisant tendre t vers 0 :
$$(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0.$$
- **Sens** ($\Leftarrow$)
On veut montrer que $x_0 = \mathrm{P_C} x$, c'est-à-dire $\|x - x_0\|_{\mathrm{H}}^2 \leq \|x - y\|_{\mathrm{H}}^2$ pour tout $y \in \mathrm{C}$.
Soit $y \in \mathrm{C}$, on a $\|x - y\|_{\mathrm{H}}^2 = \|x - x_0 + x_0 - y\|_{\mathrm{H}}^2 = \|x - x_0\|_{\mathrm{H}}^2 + \|x_0 - y\|_{\mathrm{H}}^2 + 2(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq \|x - x_0\|_{\mathrm{H}}^2$ car $\|x_0 - y\|_{\mathrm{H}}^2 \geq 0$ et $2(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0$.

Cas d'un Hilbert complexe

La démonstration est très voisine.

- **Sens** ($\Rightarrow$)
On veut montrer que $\mathfrak{Re}(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0,$ pour tout $y \in \mathrm{C}$.
En reprenant les mêmes notations que dans le cas Hilbert réel et en suivant la même démarche, on obtient :
$$\begin{aligned}\|x - x_0\|_{\mathrm{H}}^2 \leq \|x - z\|_{\mathrm{H}}^2 &= (x - x_0 - t(y - x_0) \mid x - x_0 - t(y - x_0)) \\ &= \|x - x_0\|_{\mathrm{H}}^2 + t^2\|y - x_0\|_{\mathrm{H}}^2 - 2t\,\mathfrak{Re}(x - x_0 \mid y - x_0).\end{aligned}$$
On en déduit
$$2t\,\mathfrak{Re}(x - x_0 \mid y - x_0) - t^2\|y - x_0\|_{\mathrm{H}}^2 \leq 0.$$
On divise cette inégalité par t (on rappelle que $t > 0$) pour obtenir
$$2\,\mathfrak{Re}(x - x_0 \mid y - x_0) - t\|y - x_0\|_{\mathrm{H}}^2 \leq 0,$$
ce qui donne, en faisant tendre t vers 0 :
$$\mathfrak{Re}(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0.$$
- **Sens** ($\Leftarrow$)
On veut montrer que $x_0 = \mathrm{P_C} x$, c'est-à-dire $\|x - x_0\|_{\mathrm{H}}^2 \leq \|x - y\|_{\mathrm{H}}^2$ pour tout $y \in \mathrm{C}$.
Soit $y \in \mathrm{C}$, on a $\|x - y\|_{\mathrm{H}}^2 = \|x - x_0 + x_0 - y\|_{\mathrm{H}}^2 = \|x - x_0\|_{\mathrm{H}}^2 + \|x_0 - y\|_{\mathrm{H}}^2 + 2\,\mathfrak{Re}(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq \|x - x_0\|_{\mathrm{H}}^2$ car $\|x_0 - y\|_{\mathrm{H}}^2 \geq 0$ et $2\,\mathfrak{Re}(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0$.

■

Remarque 6.50 On prend comme espace de Hilbert réel $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ (avec $\mathrm{E} \neq \emptyset$) et on prend $\mathrm{C} = \{f \in \mathrm{H} : f \geq 0 \text{ p.p.}\}$. On peut montrer que C est une partie convexe fermée non vide et que $\mathrm{P_C} f = f^+$ pour tout $f \in \mathrm{H}$. Ceci est fait dans l'exercice 6.30.

Un s.e.v. fermé est, en particulier, un convexe fermé non vide. On peut donc définir la projection sur un s.e.v. fermé. On donne maintenant une caractérisation de la projection dans ce cas particulier.

Proposition 6.51 (Deuxième caractérisation de la projection) *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* F *un s.e.v. fermé de* H*. Soient* $x \in \mathrm{H}$ *et* $x_0 \in \mathrm{F}$*. Alors :*

$$x_0 = \mathrm{P_F}x \Leftrightarrow (x - x_0) \in \mathrm{F}^\perp. \tag{6.19}$$

DÉMONSTRATION – **Cas d'un Hilbert réel**

- **Sens ($\Leftarrow$)**

  On veut montrer que $x_0 = \mathrm{P_F}x$. On utilise la première caractérisation. Soit $y \in \mathrm{F}$. Comme $(x - x_0) \in \mathrm{F}^\perp$, on a $(x - x_0 \mid x_0 - y) = 0 \geq 0$ (car $x_0 - y \in \mathrm{F}$). Donc, la proposition 6.49 donne $x_0 = \mathrm{P_F}x$.
- **Sens ($\Rightarrow$)**

  On veut montrer que $(x - x_0) \in \mathrm{F}^\perp$. La première caractérisation (proposition 6.49) donne $(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0$ pour tout $y \in \mathrm{F}$. Soit $z \in \mathrm{F}$. On choisit $y = x_0 + z \in \mathrm{F}$ (car F est un s.e.v.) pour obtenir $(x - x_0 \mid z) \leq 0$ et $y = x_0 - z \in \mathrm{F}$ pour obtenir $(x - x_0 \mid z) \geq 0$. On en déduit $(x - x_0 \mid z) = 0$, ce qui donne que $(x - x_0) \in \mathrm{F}^\perp$.

Cas d'un Hilbert complexe

La démonstration est très voisine.

- **Sens ($\Leftarrow$)**

  On veut montrer que $x_0 = \mathrm{P_F}x$. Soit $y \in \mathrm{F}$. Comme $(x - x_0) \in \mathrm{F}^\perp$, on a $(x - x_0 \mid x_0 - y) = 0$ (car $x_0 - y \in \mathrm{F}$). On a donc $\mathfrak{Re}(x - x_0 \mid x_0 - y) = 0$. Donc, la proposition 6.49 donne $x_0 = \mathrm{P_F}x$.
- **Sens ($\Rightarrow$)**

  On veut montrer que $(x - x_0) \in \mathrm{F}^\perp$. La première caractérisation (proposition 6.49) donne $\mathfrak{Re}(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0$ pour tout $y \in \mathrm{F}$. Soit $z \in \mathrm{F}$. On choisit $y = x_0 - \alpha z \in \mathrm{F}$ (car F est un s.e.v.) avec $\alpha = (x - x_0 \mid z)$ pour obtenir $\mathfrak{Re}(x - x_0 \mid \alpha z) \leq 0$. Mais $(x - x_0 \mid \alpha z) = \overline{\alpha}(x - x_0 \mid z) = |(x - x_0 \mid z)|^2$. Donc, $0 \geq \mathfrak{Re}(x - x_0 \mid \alpha z) = |(x - x_0 \mid z)|^2$. On en déduit $(x - x_0 \mid z) = 0$, ce qui donne que $(x - x_0) \in \mathrm{F}^\perp$.

■

Définition 6.52 (Projection orthogonale et projecteurs algébriques)

1. *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$ *un s.e.v. fermé de* H*. L'opérateur* $\mathrm{P_F}$ *s'appelle projecteur orthogonal sur* F*. Si* $u \in \mathrm{H}$*,* $\mathrm{P_F}u$ *s'appelle la projection orthogonale de* u *sur* F*.*
2. *(Rappel algébrique) Soit* E *un e.v. sur* K *(*$\mathrm{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathrm{K} = \mathbb{C}$*). Soient* F*,* G *deux s.e.v. de* E *t.q.* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$*. Pour* $x \in \mathrm{E}$*, il existe donc un et un seul couple* $(y, z) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$ *t.q.* $x = y + z$*. On pose* $y = \mathrm{P}x$ *et donc* $z = (\mathrm{I} - \mathrm{P})x$ *(où I est l'application identité).* P *et* $\mathrm{I} - \mathrm{P}$ *sont les projecteurs associés à la décomposition* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$*. Ce sont des applications linéaires de* E *dans* E*. L'image de* P *est égale à* F *et l'image de* $\mathrm{I} - \mathrm{P}$ *est égale à* G*.*

   Dans le prochain théorème, on va comparer la projection orthogonale et des projecteurs algébriques particuliers.

Théorème 6.53 (Projecteur orthogonal et projecteur algébrique) *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* F *un s.e.v. fermé de* H*. Alors :*

1. $\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$*,*
2. $\mathrm{P_F}$ *(projecteur orthogonal sur* F*) est égal au projecteur algébrique sur* F *associé à la décomposition* $\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$*.*
3. $\mathrm{F} = \mathrm{F}^{\perp\perp}$*.*

DÉMONSTRATION – On rappelle que l'on a déjà vu que $F^{\perp}$ est un s.e.v. fermé.

1. Soit $u \in H$. On a $u = (u - P_F u) + P_F u$. La 2eme caractérisation (proposition 6.51) donne $(u - P_F u) \in F^{\perp}$. Comme $P_F u \in F$, on en déduit que $H = F + F^{\perp}$.

   Soit maintenant $u \in F \cap F^{\perp}$. On doit donc avoir $(u \mid u) = 0$, ce qui donne $u = 0$ et donc $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.

   On a donc $H = F \oplus F^{\perp}$.
2. Soit $u \in H$. Comme $u = P_F u + (u - P_F u)$, avec $P_F u \in F$ et $(u - P_F u) \in F^{\perp}$, on voit que P_F est égal au projecteur algébrique sur F associé à la décomposition $H = F \oplus F^{\perp}$. (Noter aussi que $(I - P_F)$ est égal au projecteur algébrique sur $F^{\perp}$ associé à la décomposition $H = F \oplus F^{\perp}$.)
3. Il reste à montrer que $F = F^{\perp\perp}$.
   - On a déjà vu que $F \subset F^{\perp\perp}$.
   - Soit $u \in F^{\perp\perp}$. On a $u = (u - P_F u) + P_F u$. La 2eme caractérisation (proposition 6.51) donne $(u - P_F u) \in F^{\perp}$ et on a aussi $(u - P_F u) \in F^{\perp\perp}$ car $u \in F^{\perp\perp}$ et $P_F u \in F \subset F^{\perp\perp}$. On a donc $(u - P_F u) \in F^{\perp} \cap F^{\perp\perp} = \{0\}$. Donc $u = P_F u \in F$. On a donc montré que $F^{\perp\perp} \subset F$.

   Finalement, on a bien montré que $F = F^{\perp\perp}$.

■

Le théorème 6.53 a un corollaire très utile :

Corollaire 6.54 *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* F *un s.e.v. de* H. *Alors :*

$$\overline{F} = H \Leftrightarrow F^{\perp} = \{0\}.$$

DÉMONSTRATION – $\overline{F}$ est un s.e.v. fermé de H. Le théorème 6.53 donne donc $H = \overline{F} \oplus (\overline{F})^{\perp}$. On a déjà vu que $(\overline{F})^{\perp} = F^{\perp}$, on a donc

$$H = \overline{F} \oplus F^{\perp},$$

d'où l'on déduit

$$\overline{F} = H \Leftrightarrow F^{\perp} = \{0\}.$$

■

6.2.3 Théorème de Représentation de Riesz

Remarque 6.55 On rappelle ici la définition 6.37 et la remarque 6.38. Soit H un Banach réel ou complexe. On note H' (ou $\mathcal{L}(H,K)$) l'ensemble des applications linéaires continues de H dans K (avec $K = \mathbb{R}$ pour un Banach réel et $K = \mathbb{C}$ pour un Banach complexe). On rappelle que H^* est l'ensemble des applications linéaires de H dans K. On a donc $H' \subset H^*$. Si H est de dimension finie, on a $H' = H^*$, mais si H est de dimension infinie, on peut montrer que $H' \neq H^*$.

1. Si $T \in H^*$, on rappelle que T est continue si seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ t.q. $|T(u)| \le k\|u\|_H$, pour tout $u \in H$.
2. Si $T \in H'$, on pose $\|T\|_{H'} = \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{|T(u)|}{\|u\|_H}$. On rappelle que $\|\cdot\|_{H'}$ est bien une norme sur H' et que H', muni de cette norme, est aussi un espace de Banach (sur K). Noter que H', muni de cette norme, est un espace de Banach même si H est un e.v.n. non complet. Noter aussi que, si $T \in H'$ et $u \in H$, on a $|T(u)| \le \|T\|_{H'}\|u\|_H$.
3. On suppose maintenant que H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Pour $v \in H$, on pose $\varphi_v(u) = (u \mid v)$ pour tout $u \in H$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz ((6.11) ou (6.12)), on a $|\varphi_v(u)| \le \|u\|_H\|v\|_H$. On a donc $\varphi_v \in H'$ et $\|\varphi_v\|_{H'} \le \|v\|_H$. En remarquant que $\varphi_v(v) = \|v\|_H^2$, on montre alors que $\|\varphi_v\|_{H'} = \|v\|_H$.

   On considère maintenant l'application $\varphi : H \to H'$ définie par $\varphi(v) = \varphi_v$ pour tout $v \in H$.

– Si $\mathrm{K} = \mathbb{R}$, φ est une application linéaire de H dans H′ car, pour tout $v, w \in \mathrm{H}$ tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $u \in \mathrm{H}$,
$$\varphi_{\alpha v + \beta w}(u) = (u \mid \alpha v + \beta w) = \alpha(u \mid v) + \beta(u \mid w) = \alpha\varphi_v(u) + \beta\varphi_w(u),$$
ce qui donne $\varphi_{\alpha v+\beta w} = \alpha\varphi_v + \beta\varphi_w$. L'application φ est donc une isométrie (linéaire) de H sur $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{H}'$. (En particulier φ est donc injective.)

– Si $\mathrm{K} = \mathbb{C}$, φ est une application anti-linéaire de H dans H′ car, pour tout $v, w \in \mathrm{H}$ tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $u \in \mathrm{H}$
$$\varphi_{\alpha v + \beta w}(u) = (u \mid \alpha v + \beta w) = \overline{\alpha}(u \mid v) + \overline{\beta}(u \mid w) = \overline{\alpha}\varphi_v(u) + \overline{\beta}\varphi_w(u),$$
ce qui donne $\varphi_{\alpha v+\beta w} = \overline{\alpha}\varphi_v + \overline{\beta}\varphi_w$. L'application φ est donc une isométrie (anti-linéaire) de H sur $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{H}'$. (En particulier φ est donc, ici aussi, injective.)

L'objectif du théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56) est de montrer que l'application φ est surjective, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{H}'$.

Théorème 6.56 (Représentation de Riesz) *Soit* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe). Soit* $\mathrm{T} \in \mathrm{H}'$. *Alors, il existe un et un seul élémentv* $\in$ H *tel que*
$$\mathrm{T}(u) = (u \mid v), \text{ pour tout } u \in \mathrm{H}. \tag{6.20}$$
L'application φ *définie dans la remarque 6.55 est donc surjective (le résultat ci-dessus donne* $\mathrm{T} = \varphi_v$*).*

DÉMONSTRATION –
Existence de v On pose $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(\mathrm{T})$. Comme T est linéaire et continue, F est un s.e.v. fermé de H. Le théorème 6.53 donne donc $\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$. On distingue deux cas :

- **Cas 1.** On suppose ici que $\mathrm{T} = 0$. On a alors $\mathrm{F} = \mathrm{E}$ et il suffit de prendre $v = 0$ pour avoir (6.20).
- **Cas 2.** On suppose maintenant que $\mathrm{T} \neq 0$. On a donc $\mathrm{F} \neq \mathrm{H}$ et donc $\mathrm{F}^{\perp} \neq \{0\}$ (car $\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$). Il existe donc $v_0 \in \mathrm{F}^{\perp}$, $v_0 \neq 0$. Comme $v_0 \notin \mathrm{F}$, on a $\mathrm{T}(v_0) \neq 0$.

  Pour $u \in \mathrm{H}$, on a alors
  $$u = u - \frac{\mathrm{T}(u)}{\mathrm{T}(v_0)}v_0 + \frac{\mathrm{T}(u)}{\mathrm{T}(v_0)}v_0. \tag{6.21}$$
  On remarque que $u - \frac{\mathrm{T}(u)}{\mathrm{T}(v_0)}v_0 \in \mathrm{F}$ car
  $$\mathrm{T}(u - \frac{\mathrm{T}(u)}{\mathrm{T}(v_0)}v_0) = \mathrm{T}(u) - \frac{\mathrm{T}(u)}{\mathrm{T}(v_0)}\mathrm{T}(v_0) = 0.$$
  Donc, comme $v_0 \in \mathrm{F}^{\perp}$, on a $(u - \frac{\mathrm{T}(u)}{\mathrm{T}(v_0)}v_0 \mid v_0) = 0$ et (6.21) donne
  $$(u \mid v_0) = (\frac{\mathrm{T}(u)}{\mathrm{T}(v_0)}v_0 \mid v_0) = \frac{\mathrm{T}(u)}{\mathrm{T}(v_0)}(v_0 \mid v_0),$$
  d'où l'on déduit
  $$\mathrm{T}(u) = \frac{\mathrm{T}(v_0)}{(v_0 \mid v_0)}(u \mid v_0).$$
  On pose $v = \frac{\mathrm{T}(v_0)}{(v_0|v_0)}v_0$ si $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ et $v = \frac{\overline{\mathrm{T}(v_0)}}{(v_0|v_0)}v_0$ si $\mathrm{K} = \mathbb{C}$. On a bien
  $$\mathrm{T}(u) = (u \mid v), \text{ pour tout } u \in \mathrm{H},$$
  c'est-à-dire $\mathrm{T} = \varphi_v$ (avec les notations de la remarque 6.55).

Dans les deux cas on a bien trouvé $v \in \mathrm{H}$ vérifiant (6.20).

Unicité de v Soient $v_1, v_2 \in \mathrm{H}$ t.q. $\mathrm{T} = \varphi_{v_1} = \varphi_{v_2}$ (avec les notations de la remarque 6.55). Comme φ est linéaire (si $\mathrm{K} = \mathbb{R}$) ou anti-linéaire (si $\mathrm{K} = \mathbb{C}$), on en déduit $\varphi_{v_1 - v_2} = \varphi_{v_1} - \varphi_{v_2} = 0$. Comme φ est une isométrie, on a donc $v_1 = v_2$, ce qui donne la partie unicité du théorème. ■

Remarque 6.57 (Densité du noyau d'une forme linéaire non continue) Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Soit $\mathrm{T} \in \mathrm{H}^* \setminus \mathrm{H}'$. T est donc une application linéaire de H dans $\mathrm{K}(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, non continue. On pose $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(\mathrm{T})$. La démonstration du théorème 6.56 permet alors de montrer que $\mathrm{F}^\perp = \{0\}$ et donc $\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{H}$ (dans un Hilbert H, le noyau d'une forme linéaire non continue est donc toujours dense dans H). En effet, on raisonne par l'absurde :

si $\mathrm{F}^\perp \neq \{0\}$, il existe $v_0 \in \mathrm{F}^\perp$, $v_0 \neq 0$. le raisonnement fait pour démontrer le théorème 6.56 donne alors $\mathrm{T}(u) = (u \mid v)$ pour tout $u \in \mathrm{H}$, avec $v = \frac{\mathrm{T}(v_0)}{(v_0|v_0)} v_0$ si $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ et $v = \frac{\overline{\mathrm{T}(v_0)}}{(v_0|v_0)} v_0$ si $\mathrm{K} = \mathbb{C}$. On en déduit que T est continu, contrairement à l'hypothèse de départ.

On a donc $\mathrm{F}^\perp = \{0\}$ et donc $\overline{\mathrm{F}}^\perp = \mathrm{F}^\perp = \{0\}$. On en déduit, comme $\mathrm{H} = \overline{\mathrm{F}} \oplus \overline{\mathrm{F}}^\perp$ (par le théorème 6.53, car $\overline{\mathrm{F}}$ est toujours un s.e.v. fermé), que $\mathrm{H} = \overline{\mathrm{F}}$.

Remarque 6.58 (Structure hilbertienne de H'**)** Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). On sait déjà que H' (avec la norme habituelle, voir la remarque 6.55) est un espace de Banach. Le théorème 6.56 permet aussi de montrer que H' est un espace de Hilbert. En effet, en prenant les notations de la remarque 6.55, l'application φ est un isométrie bijective, linéaire ou anti-linéaire de H dans H'. Cela suffit pour montrer que l'identité du parallélogramme (identité (6.13)) est vraie sur H' et donc que H' est une espace de Hilbert (voir la remarque 6.40). Mais on peut même construire le produit scalaire sur H' (induisant la norme usuelle de H') :

Soient $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 \in \mathrm{H}'$. Par le théorème 6.56, il existe v_1 et $v_2 \in \mathrm{H}$ tels que $\mathrm{T}_1 = \varphi_{v_1}$ et $\mathrm{T}_2 = \varphi_{v_2}$. On pose $(\mathrm{T}_1 \mid \mathrm{T}_2)_{\mathrm{H}'} = (v_2 \mid v_1)_{\mathrm{H}}$ (où $(\cdot \mid \cdot)_{\mathrm{H}}$ désigne ici le produit scalaire dans H). Il est facile de voir que $(\cdot \mid \cdot)_{\mathrm{H}'}$ est un produit scalaire sur H'. Il induit bien la norme usuelle de H' car $(\mathrm{T}_1 \mid \mathrm{T}_1)_{\mathrm{H}'} = (v_1 \mid v_1)_{\mathrm{H}} = \|v_1\|_{\mathrm{H}}^2 = \|\varphi_{v_1}\|_{\mathrm{H}'}^2 = \|\mathrm{T}_1\|_{\mathrm{H}'}^2$ car φ est une isométrie.

6.2.4 Bases hilbertiennes

Soient E un e.v. sur K, $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\mathrm{B} = \{e_i,\ i \in \mathrm{I}\} \subset \mathrm{E}$ une famille d'éléments de E (l'ensemble I est quelconque, il peut être fini, dénombrable ou non dénombrable). On rappelle que $\mathrm{B} = \{e_i,\ i \in \mathrm{I}\} \subset \mathrm{E}$ est une base (algébrique) de E si B vérifie les deux propriétés suivantes :

1. B est libre, c'est-à-dire :
$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i\in \mathrm{J}} \alpha_i e_i = 0, \text{ avec} \\ \mathrm{J} \subset \mathrm{I},\ \mathrm{card}(\mathrm{J}) < +\infty, \\ \alpha_i \in \mathrm{K} \text{ pour tout } i \in \mathrm{J} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ pour tout } i \in \mathrm{J},$$
2. B est génératrice, c'est-à-dire que pour tout $u \in \mathrm{E}$, il existe $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, $\mathrm{card}(\mathrm{J}) < +\infty$, et il existe $(\alpha_i)_{i\in\mathrm{J}} \subset \mathrm{K}$ t.q. $u = \sum_{i\in\mathrm{J}} \alpha_i e_i$.

En notant $\mathrm{vect}\{e_i,\ i \in \mathrm{I}\}$ l'espace vectoriel engendré par la famille $\{e_i,\ i \in \mathrm{I}\}$, le fait que B soit génératrice s'écrit donc : $\mathrm{E} = \mathrm{vect}\{e_i,\ i \in \mathrm{I}\}$.

On rappelle aussi que tout espace vectoriel admet des bases (algébriques). Cette propriété se démontre à partir de l'axiome du choix.

Dans le cas d'un espace de Hilbert, on va définir maintenant une nouvelle notion de base : la notion de base hilbertienne.

Définition 6.59 (Base hilbertienne) *Soient* H *un espace de Hilbert sur* K, $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *et* $\mathrm{B} = \{e_i,\ i \in \mathrm{I}\} \subset \mathrm{H}$ *une famille d'éléments de* H *(l'ensemble* I *est quelconque). La famille* B *est une base hilbertienne de* H *si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. $(e_i \mid e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j, \end{cases}$ *pour tout* $i, j \in \mathrm{I}$.
2. $\overline{vect\{e_i,\ i \in \mathrm{I}\}} = \mathrm{H}$. *On rappelle que* $vect\{e_i,\ i \in \mathrm{I}\} = \{\sum_{i\in \mathrm{J}} \alpha_i e_i,\ \mathrm{J} \subset \mathrm{I},\ \mathrm{card}(\mathrm{J}) < +\infty,\ (\alpha_i)_{i\in \mathrm{J}} \subset \mathrm{K}\}$.

Remarque 6.60 Soit H un espace de Hilbert sur K, $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Si H est de dimension finie, il existe des bases hilbertiennes (qui sont alors aussi des bases algébriques). Le cardinal d'une base hilbertienne est alors égal à la dimension de H puisque, par définition, la dimension de H est égal au cardinal d'une base algébrique (ce cardinal ne dépendant pas de la base choisie). La démonstration de l'existence de bases hilbertiennes suit celle de la proposition 6.62 (la récurrence dans la construction de la famille des e_n s'arrête pour $n = \dim(\mathrm{H}) - 1$, voir la preuve de la proposition 6.62).
2. Si H est de dimension infinie et que H est séparable (voir la définition 6.61), il existe des bases hilbertiennes dénombrables (voir la proposition 6.62).
3. Si H est de dimension infinie et que H est non séparable, il existe toujours des bases hilbertiennes (ceci se démontre avec l'axiome du choix), mais elles ne sont plus dénombrables.

Définition 6.61 (Espace séparable) *Soit* E *un e.v.n. sur* K, $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *On dit que* E *est séparable s'il existe* $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ *t.q.* $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{E}$ *et* A *au plus dénombrable.*

Proposition 6.62 (Existence d'une base hilbertienne) *Soit* H *un espace de Hilbert sur* K, $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *de dimension infinie. On suppose que* H *est séparable . Alors, il existe une base hilbertienne* $\mathrm{B} = \{e_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{H}$ *de* H.

DÉMONSTRATION – Comme H est séparable, il existe une famille $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{H}$ dense dans H, c'est-à-dire t.q. $\overline{\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}} = \mathrm{H}$.

On va construire, par une récurrence sur n, une famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ t.q. :

1. $(e_n \mid e_m) = \delta_{n,m}$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,
2. $\{f_0, \ldots, f_n\} \subset \mathrm{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On aura alors trouvé une base hilbertienne car on aura $f_i \in \mathrm{vect}\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, et donc $\mathrm{H} = \overline{\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}} \subset \mathrm{H}$, d'où $\mathrm{H} = \overline{\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}}$. Avec la propriété $(e_n \mid e_m) = \delta_{n,m}$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, ceci donne bien que $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de H.

On construit maintenant la famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Construction de e_0

Soit $\varphi(0) = \min\{i \in \mathbb{N}\,;\, f_i \neq 0\}$ (les f_i ne sont pas tous nuls car $\mathrm{H} \neq \{0\}$). On prend $e_0 = \frac{f_{\varphi(0)}}{\|f_{\varphi(0)}\|}$, de sorte que $(e_0 \mid e_0) = 1$ et $f_0 \in \mathrm{vect}\{e_0\}$ (car $f_0 = \|f_0\| e_0$, même si $\varphi(0) \neq 0$).

Construction de e_{n+1}

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose construits $e_0, \ldots, e_n$ t.q.

– $(e_p \mid e_m) = \delta_{p,m}$ pour tout $p, m \in \{0, \ldots, n\}$,

– $\{f_0,\ldots,f_p\}\subset \mathrm{vect}\{e_0,\ldots,e_p\}$ pour tout $p\in\{0,\ldots,n\}$.

(Ce qui est vérifié pour $n=0$ grâce à la construction de e_0.)

On construit maintenant e_{n+1} t.q. les deux assertions précédentes soient encore vraies avec $n+1$ au lieu de n.

Un sous espace vectoriel de dimension finie est toujours fermé, donc $\overline{\mathrm{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}} = \mathrm{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}$. Si $f_i\in\mathrm{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}$ pour tout $i\in\mathbb{N}$, on a alors $\{f_i,\, i\in\mathbb{N}\}\subset\mathrm{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}$ et donc $\mathrm{H}=\overline{\mathrm{vect}\{f_i,\, i\in\mathbb{N}\}}\subset\overline{\mathrm{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}}=\mathrm{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}$. Ce qui prouve que H est de dimension finie (et $\dim(\mathrm{H})=n+1$). Comme H est de dimension infinie, il existe donc $i\in\mathbb{N}$ t.q. $f_i\notin\mathrm{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}$ (dans le cas où H est dimension finie, la construction de la famille des e_n s'arrête pour $n=\dim(\mathrm{H})-1$ et on obtient une base hilbertienne avec $\{e_0,\ldots,e_n\}$). On pose alors $\varphi(n+1)=\min\{i\in\mathbb{N}\,;\, f_i\notin\mathrm{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}\}$. On a donc, en particulier, $\varphi(n+1)\geq n+1$. En prenant $\tilde e_{n+1}=f_{\varphi(n+1)}-\sum_{i=0}^n\alpha_i e_i$ avec $\alpha_i=(f_{\varphi(n+1)}\mid e_i)$ pour tout $i\in\{0,\ldots,n\}$, on remarque que $\tilde e_{n+1}\neq 0$ (car $f_{\varphi(n+1)}\notin\mathrm{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}$) et que $(\tilde e_{n+1}\mid e_i)=0$ pour tout $i\in\{0,\ldots,n\}$. Il suffit alors de prendre $e_{n+1}=\frac{\tilde e_{n+1}}{\|\tilde e_{n+1}\|}$ pour avoir $(e_p\mid e_m)=\delta_{p,m}$ pour tout $p,m\in\{0,\ldots,n+1\}$. Enfin, il est clair que $f_{n+1}\in\mathrm{vect}\{e_0,\ldots,e_{n+1}\}$ car on a $f_{n+1}=\|\tilde e_{n+1}\|e_{n+1}+\sum_{i=0}^n\alpha_i e_i\in\mathrm{vect}\{e_0,\ldots,e_{n+1}\}$ si $\varphi(n+1)=n+1$ et $f_{n+1}\in\mathrm{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}$ si $\varphi(n+1)>n+1$.

On a donc bien trouvé e_{n+1} t.q.

– $(e_p\mid e_m)=\delta_{p,m}$ pour tout $p,m\in\{0,\ldots,n+1\}$,
– $\{f_0,\ldots,f_p\}\subset\mathrm{vect}\{e_0,\ldots,e_p\}$ pour tout $p\in\{0,\ldots,n+1\}$.

Ce qui conclut la construction de la famille $\{e_n,\, n\in\mathbb{N}\}$ vérifiant les deux assertions demandées. Comme cela a déjà été dit, la famille $\{e_n,\, n\in\mathbb{N}\}$ est alors une base hilbertienne de H. ∎

La proposition 6.62 montre donc que tout espace de Hilbert séparable, et de dimension infinie, admet une base hilbertienne dénombrable. On peut aussi démontrer la réciproque de ce résultat, c'est-à-dire que tout espace de Hilbert admettant une base hilbertienne dénombrable est séparable et de dimension infinie (cf. exercice 6.29). La proposition suivante s'adresse donc uniquement aux espaces de Hilbert séparables.

Proposition 6.63 *Soient* H *un espace de Hilbert sur* K, $\mathrm{K}=\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *et* $\{e_n,\, n\in\mathbb{N}\}$ *une base hilbertienne de* H *(l'espace* H *est donc séparable et de dimension infinie (cf. exercice 6.29) et, dans ce cas, une telle base existe d'après la proposition 6.62). Alors :*

1. *(Identité de Bessel)* $\|u\|^2=\sum_{n\in\mathbb{N}}|(u\mid e_n)|^2$, *pour tout* $u\in\mathrm{H}$,
2. $u=\sum_{n\in\mathbb{N}}(u\mid e_n)e_n$, *pour tout* $u\in\mathrm{H}$, *c'est-à-dire* $\sum_{i=0}^n(u\mid e_i)e_i\to u$ *dans* H, *quand* $n\to+\infty$,
3. *soient* $u\in\mathrm{H}$ *et* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathrm{K}$ *t.q.* $u=\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n e_n$ *(c'est-à-dire* $\sum_{i=0}^n\alpha_i e_i\to u$ *dans* H *quand* $n\to+\infty$*), alors* $\alpha_i=(u\mid e_i)$ *pour tout* $i\in\mathbb{N}$,
4. *(identité de Parseval)* $(u\mid v)=\sum_{n\in\mathbb{N}}(u\mid e_n)\overline{(v\mid e_n)}$, *pour tout* $u,v\in\mathrm{H}$.

DÉMONSTRATION – Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{F}_n=\mathrm{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}$. F_n est donc un s.e.v. fermé de H (on a $\dim(\mathrm{F}_n)=n+1$ et on rappelle qu'un espace de dimension finie est toujours complet, F_n est donc fermé dans H).

On remarque que $\mathrm{F}_n\subset\mathrm{F}_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{F}_n=\mathrm{vect}\{e_i,\, i\in\mathbb{N}\}$ et donc que $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{F}_n}=\mathrm{H}$ (car $\{e_i,\, i\in\mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de H).

Soit $u\in\mathrm{H}$. La suite $(d(u,\mathrm{F}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (car $\mathrm{F}_n\subset\mathrm{F}_{n+1}$), on a donc $d(u,\mathrm{F}_n)\downarrow l$ quand $n\to+\infty$, avec $l\geq 0$. On va montrer que $l=0$. En effet, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $v\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{F}_n$ tel que $d(v,u)\leq\varepsilon$ (car $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{F}_n}=\mathrm{H}$) ; il existe donc $n\in\mathbb{N}$ tel que $v\in\mathrm{F}_n$. On a alors $d(u,\mathrm{F}_n)\leq\varepsilon$, ce qui prouve que $l\leq\varepsilon$. Comme $\varepsilon>0$ est arbitraire, on a bien montré que $l=0$.

On utilise maintenant le théorème d'existence et d'unicité de la projection sur un convexe fermé non vide (théorème 6.47). Il donne l'existence (et l'unicité) de $u_n=P_{\mathrm{F}_n}u\in\mathrm{F}_n$ t.q. $d(u_n,u)=d(u,\mathrm{F}_n)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. On a alors $u=(u-u_n)+u_n$ et la deuxième caractérisation de la projection (proposition 6.51) donne que $(u-u_n)\in\mathrm{F}_n^{\perp}$. Le théorème de Pythagore (théorème 6.44) donne enfin que $\|u\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u-u_n\|^2$. Comme $\|u-u_n\| = d(u,u_n) = d(u,F_n) \downarrow 0$ quand $n \to +\infty$, on en déduit que

$$\|u_n\|^2 \to \|u\|^2, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.22}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \in F_n = \text{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}$, on a $u_n = \sum_{i=0}^n \alpha_i e_i$ avec $\alpha_i = (u_n \mid e_i)$ pour tout $i \in \{0,\ldots,n\}$ (car $(e_i \mid e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout i,j). Puis, comme $(u-u_n) \in F_n^\perp$, on a $(u-u_n \mid e_i) = 0$ pour tout $i \in \{0,\ldots,n\}$, d'où l'on déduit que $\alpha_i = (u \mid e_i)$ pour tout $i \in \{0,\ldots,n\}$. On a donc montré que $u_n = \sum_{i=0}^n (u \mid e_i)e_i$, ce qui, avec le théorème de Pythagore, donne $\|u_n\|^2 = \sum_{i=0}^n |(u \mid e_i)|^2$. On obtient donc, avec (6.22) le premier item de la proposition, c'est-à-dire l'identité de Bessel.

On montre maintenant le deuxième item de la proposition. En reprenant les notations précédentes, on a, pour $u \in H$, $u = (u-u_n) + u_n$ et $(u-u_n) \to 0$ dans H quand $n \to +\infty$ (car $\|u-u_n\| = d(u,F_n)$). On a donc $u_n \to u$ dans H quand $n \to +\infty$. Ceci donne bien le deuxième item de la proposition car on a vu que $u_n = \sum_{i=0}^n (u \mid e_i)e_i$.

Pour montrer le troisième item de la proposition, on suppose que $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset K$ est t.q. $\sum_{i=0}^n \alpha_i e_i \to u$ dans H quand $n \to +\infty$. Soit $j \in \mathbb{N}$. On remarque que $(\sum_{i=0}^n \alpha_i e_i \mid e_j) = \sum_{i=0}^n \alpha_i (e_i \mid e_j) = \alpha_j$ pour $n \geq j$. En utilisant la continuité du produit scalaire par rapport à son premier argument (ce qui est une conséquence simple de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on en déduit (faisant $n \to +\infty$) que $(u \mid e_j) = \alpha_j$, ce qui prouve bien le troisième item de la proposition.

Enfin, pour montrer l'identité de Parseval, on utilise la continuité du produit scalaire par rapport à ses deux arguments (ce qui est aussi une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), c'est-à-dire le fait que

$$\left.\begin{array}{l} u_n \to u \text{ dans H, quand } n \to +\infty, \\ v_n \to v \text{ dans H, quand } n \to +\infty, \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n \mid v_n) \to (u \mid v) \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.23}$$

Pour $u,v \in H$, on utilise (6.23) avec $u_n = \sum_{i=0}^n (u \mid e_i)e_i$ et $v_n = \sum_{i=0}^n (v \mid e_i)e_i$. On a bien $u_n \to u$ et $v_n \to v$ (d'après le deuxième item) et on conclut en remarquant que $(u_n \mid v_n) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (u \mid e_i)\overline{(v \mid e_j)}(e_i \mid e_j) = \sum_{i=0}^n (u \mid e_i)\overline{(v \mid e_i)}$. ■

Remarque 6.64 Soit H un espace de Hilbert sur K, K = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, séparable et de dimension infinie.

1. Soit $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective. On pose $\tilde{e}_n = e_{\varphi(n)}$. Comme $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\} = \{\tilde{e}_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, la famille $\{\tilde{e}_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ est donc aussi une base hilbertienne de H. On peut donc appliquer la proposition 6.63 avec la famille $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ ou avec la famille $\{\tilde{e}_n,\, n \in \mathbb{N}\}$. Le deuxième item de la proposition 6.63 donne alors, pour tout $u \in H$,

$$u = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u \mid e_n)e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u \mid e_{\varphi(n)})e_{\varphi(n)}.$$

Ceci montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u \mid e_n)e_n$ est commutativement convergente, c'est-à-dire qu'elle est convergente, dans H, quel que soit l'ordre dans lequel on prend les termes de la série et la somme de la série ne dépend pas de l'ordre dans lequel les termes ont été pris. Noter pourtant que cette série peut ne pas être absolument convergente. On peut remarquer, pour donner un exemple, que la suite $(\sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} e_i)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ est de Cauchy, donc converge, dans H, quand $n \to +\infty$, vers un certain u. Pour cet élément u de H, on a $(u \mid e_i) = \frac{1}{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u \mid e_n)e_n$ est donc commutativement convergente mais n'est pas absolument convergente car $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|(u \mid e_n)e_n\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} = +\infty$ (voir à ce propos l'exercice 6.27). L'exercice 6.39 complète cet exemple en construisant une isométrie bijective naturelle entre H et l^2.

Par contre, on rappelle que, dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une série est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente (voir l'exercice 2.34). On peut d'ailleurs remarquer que la série donnée à l'item 4 de la proposition 6.63 est commutativement convergente (pour la même raison que pour la série de l'item 2, donnée ci-dessus) et est aussi absolument convergente. En effet, pour $u,v \in H$, on a $|(u \mid e_i)(v \mid e_i)| \leq |(u \mid e_i)|^2 + |(v \mid e_i)|^2$

pour tout $i \in \mathbb{N}$, ce qui montre bien (grâce à l'identité de Bessel) que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u \mid e_n)\overline{(v \mid e_n)}$ est absolument convergente (dans K).

2. Soit I un ensemble dénombrable (un exemple intéressant pour la suite est $\mathrm{I} = \mathbb{Z}$) et $\{e_i,\ i \in \mathrm{I}\} \subset \mathrm{H}$.

   Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{I}$ bijective. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{e}_n = e_{\varphi(n)}$. On a alors $\{e_i,\ i \in \mathrm{I}\} = \{\tilde{e}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. La famille $\{e_i,\ i \in \mathrm{I}\}$ est donc une base hilbertienne si et seulement si la famille $\{\tilde{e}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne.

   Si la famille $\{e_i,\ i \in \mathrm{I}\}$ est une base hilbertienne, on peut donc appliquer la proposition 6.63 avec la famille $\{\tilde{e}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. On obtient, par exemple, que pour tout $u \in \mathrm{H}$:

$$u = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u \mid e_{\varphi(n)})e_{\varphi(n)}.$$

   La somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u \mid e_{\varphi(n)})e_{\varphi(n)}$ ne dépend donc pas du choix de la bijection φ entre $\mathbb{N}$ et I et il est alors légitime de la noter simplement $\sum_{i\in\mathrm{I}}(u \mid e_i)e_i$. Ceci est détaillé dans la définition 6.65 et permet d'énoncer la proposition 6.66.

Définition 6.65 *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* I *un ensemble dénombrable. Soit* $(u_i)_{i\in\mathrm{I}} \subset \mathrm{H}$. *On dit que la série* $\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i$ *est commutativement convergente s'il existe* $u \in \mathrm{H}$ *t.q., pour tout* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{I}$ *bijective, on ait*

$$\sum_{p=0}^{n} u_{\varphi(p)} \to u, \text{ quand } n \to +\infty.$$

On note alors $u = \sum_{i\in\mathrm{I}} u_i$.

Proposition 6.66 *Soit* H *un espace de Hilbert sur* K, $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Soient* I *dénombrable et* $\{e_i,\ i \in \mathrm{I}\}$ *une base hilbertienne de* H *(l'espace* H *est donc séparable et de dimension infinie). Alors :*

1. *(Identité de Bessel) Pour tout* $u \in \mathrm{H}$, *la série* $\sum_{i\in\mathrm{I}} |(u \mid e_i)|^2$ *est commutativement convergente et* $\|u\|^2 = \sum_{i\in\mathrm{I}} |(u \mid e_i)|^2$,
2. *Pour tout* $u \in \mathrm{H}$, *la série* $\sum_{i\in\mathrm{I}}(u \mid e_i)e_i$ *est commutativement convergente et* $u = \sum_{i\in\mathrm{I}}(u \mid e_i)e_i$,
3. *soient* $u \in \mathrm{H}$ *et* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{K}$ *tels que la série* $\sum_{i\in\mathrm{I}} \alpha_i e_i$ *est commutativement convergente et* $u = \sum_{i\in\mathrm{I}} \alpha_i e_i$, *alors* $\alpha_i = (u \mid e_i)$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$,
4. *(identité de Parseval) Pour tous* $u, v \in \mathrm{H}$, *la série* $\sum_{i\in\mathrm{I}}(u \mid e_i)\overline{(v \mid e_i)}$ *est commutativement convergente et* $(u \mid v) = \sum_{i\in\mathrm{I}}(u \mid e_i)\overline{(v \mid e_i)}$.

DÉMONSTRATION – La démonstration est immédiate à partir de la proposition 6.63 et de la définition des séries commutativement convergentes (définition 6.65). Il suffit de remarquer que $\{e_{\varphi(n)},\ n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de H pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{I}$ bijective (et d'appliquer la proposition 6.63), comme cela est indiqué dans la remarque 6.64 (deuxième item). ■

La proposition suivante donne une caractérisation très utile des bases hilbertiennes.

Proposition 6.67 (Caractérisation des bases hilbertiennes) *Soit* H *un espace de Hilbert réel ou complexe. Soit* $\{e_i,\ i \in \mathrm{I}\} \subset \mathrm{H}$ *t.q.* $(e_i \mid e_j) = \delta_{i,j}$ *pour tout* $i, j \in \mathrm{I}$. *Alors,* $\{e_i,\ i \in \mathrm{I}\}$ *est une base hilbertienne si et seulement si :*

$$u \in \mathrm{H},\ (u \mid e_i) = 0\ \forall i \in \mathrm{I} \Rightarrow u = 0.$$

DÉMONSTRATION – On pose $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\{e_i,\ i \in \mathrm{I}\}$. F est s.e.v. de H.

On sait que $\{e_i,\ i \in \mathrm{I}\}$ est une base hilbertienne si et seulement si $\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{H}$. Or, on a déjà vu (proposition 6.54) que $\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{H} \Leftrightarrow \mathrm{F}^\perp = \{0\}$. Donc, $\{e_i,\ i \in \mathrm{I}\}$ est une base hilbertienne si et seulement si

$$u \in \mathrm{H},\ u \in \mathrm{F}^\perp \Rightarrow u = 0.$$

Comme $u \in \mathrm{F}^\perp$ si et seulement si $(u \mid e_i) = 0$ pour tout $i \in \mathrm{I}$, on en déduit que $\{e_i,\ i \in \mathrm{I}\}$ est une base hilbertienne si et seulement si

$$u \in \mathrm{H},\ (u \mid e_i) = 0\ \forall i \in \mathrm{I} \Rightarrow u = 0.$$

■

On donne maintenant un exemple de base hilbertienne, cet exemple donne un résultat de convergence de la série de Fourier d'une fonction périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Pour cet exemple, on prend $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(]0,2\pi[,\mathcal{B}(]0,2\pi[),\lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(]0,2\pi[)$. On rappelle que H est un espace de Hilbert complexe et que le produit scalaire sur H est donné par $(f \mid g)_2 = \int f\overline{g}d\lambda = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g}(x)dx$ pour $f, g \in \mathrm{H}$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit $e_n \in \mathrm{H}$ par (en confondant e_n avec son représentant continu) :

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(inx),\ x \in]0,2\pi[. \tag{6.24}$$

La convergence dans H de la série de Fourier de $f \in \mathrm{H}$ est alors donnée par la proposition suivante (noter que cette proposition ne donne pas de convergence ponctuelle de la série de Fourier, même si f est continue).

Proposition 6.68 (Séries de Fourier) *Soit* $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(]0,2\pi[,\mathcal{B}(]0,2\pi[),\lambda)$. *Alors :*

1. La famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$*, où* e_n *est donnée par (6.24), est une base hilbertienne de* H.

2. Pour tout $f \in \mathrm{H}$*, la série* $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(f \mid e_n)_2 e_n$ *est commutativement convergente et*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(f \mid e_n)_2 e_n.$$

En particulier, on a

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sum_{p=-n}^{n}(f \mid e_p)_2 e_p(x)|^2 dx \to 0,\ \textit{quand}\ n \to +\infty.$$

DÉMONSTRATION – Pour démontrer que $\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne, on utilise la proposition 6.67. Il suffit donc de montrer :

1. $(e_n \mid e_m)_2 = \delta_{n,m}$ pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$,
2. $f \in \mathrm{H},\ (f \mid e_n)_2 = 0\ \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = 0$.

L'assertion 1 est immédiate car $(e_n \mid e_m)_2 = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\exp(i(n-m)x)dx$. Ce qui donne bien 0 si $n \neq m$ et 1 si $n = m$.

Pour montrer l'assertion 2, soit $f \in \mathrm{H}$ t.q. $(f \mid e_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On va montrer que $f = 0$ (c'est-à-dire $f = 0$ p.p.) en raisonnant en plusieurs étapes.

Etape 1. On note $\mathrm{P} = \mathrm{vect}\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ (P est donc l'ensemble des polynômes trigonométriques). Par anti–linéarité du produit scalaire de H par rapport à son deuxième argument, on a $(f \mid g) = 0$ pour tout $g \in \mathrm{P}$.

Etape 2. On note $\mathrm{C}_p = \{g \in \mathrm{C}([0,2\pi],\mathbb{C})\,;\ g(0) = g(2\pi)\}$. On peut montrer que P est dense dans C_p pour la norme de la convergence uniforme (définie par $\|g\|_u = \max\{g(x),\ x \in [0,2\pi]\}$). On admet ce résultat ici (c'est une conséquence du théorème de Stone-Weierstrass). Soit $g \in C_p$, il existe donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in P$ t.q. $g_n \to g$ uniformément sur $[0,2\pi]$. On a donc $\|g_n - g\|_u = \|g_n - g\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$. Comme $\lambda([0,2\pi]) < +\infty$, on en déduit que $\|g_n - g\|_2 \to 0$ quand $n \to +\infty$. (Plus précisément, on a ici $\|\cdot\|_2 \le \sqrt{2\pi}\|\cdot\|_\infty$). Comme $(f \mid g_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par l'étape 1), on en déduit (avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz) que $(f \mid g)_2 = 0$. On a donc $(f \mid g)_2 = 0$ pour tout $g \in C_p$.

Etape 3. Soit $g \in C([0,2\pi],\mathbb{C})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit g_n par :

$$g_n(x) = g(x), \text{ si } x \in [\tfrac{1}{n}, 2\pi],$$
$$g_n(x) = g(2\pi) + (g(\tfrac{1}{n}) - g(2\pi))(nx), \text{ si } x \in [0, \tfrac{1}{n}[,$$

de sorte que $g_n \in C_p$ (noter que g_n est affine entre 0 et $\frac{1}{n}$ et vérifie $g_n(0) = g(2\pi)$ et $g_n(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$).

Par l'étape 2, on a $(f \mid g_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'autre part, le théorème de convergence dominée dans L^p donne que $g_n \to g$ dans H quand $n \to +\infty$ (noter en effet que $g_n \to g$ p.p. et que $g_n \le \|g\|_\infty \in H$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). On en déduit donc que $(f \mid g)_2 = 0$. On a donc $(f \mid g)_2 = 0$ pour tout $g \in C([0,2\pi],\mathbb{C})$.

Etape 4. On prend maintenant $g \in H = L^2_{\mathbb{C}}(]0,2\pi[,\mathcal{B}(]0,2\pi[),\lambda)$. On définit $\tilde{g}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par $\tilde{g} = g$ sur $[0,2\pi]$ et $\tilde{g} = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [0,2\pi]$. On obtient ainsi $g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (On a, comme d'habitude, confondu un élément de L^2 avec l'un de ses représentants ; et λ désigne maintenant la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On montre dans l'exercice (corrigé) 6.4 que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. On en déduit facilement que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Il existe donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{C})$ t.q. $h_n \to \tilde{g}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, quand $n \to +\infty$. On en déduit que

$$\int_0^{2\pi} |h_n(x) - g(x)|^2 dx \le \int_{\mathbb{R}} |h_n(x) - \tilde{g}(x)|^2 dx \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

En posant $g_n = (h_n)_{|[0,2\pi]}$, on a donc $g_n \in C([0,2\pi],\mathbb{C})$ et $g_n \to g$ dans H, quand $n \to +\infty$. Comme l'étape 3 donne $(f \mid g_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $(f \mid g)_2 = 0$.

Pour conclure, il suffit maintenant de prendre $g = f$. On obtient $(f \mid f)_2 = 0$ et donc $f = 0$ p.p..

On a bien ainsi montré (grâce à la proposition 6.67) que $\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de H.

On montre maintenant le deuxième item de la proposition.

Soit $f \in H$. La proposition 6.66 donne que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (f \mid e_n)_2 e_n$ est commutativement convergente et que

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (f \mid e_n)_2 e_n.$$

En utilisant la définition 6.65 et la bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ donnée par $\varphi(0) = 0$, et, pour $n \ge 1$, $\varphi(2n-1) = n$, $\varphi(2n) = -n$, on a donc, en particulier, $\sum_{i=0}^{m} (f \mid e_{\varphi(m)})_2 e_{\varphi(m)} \to f$, dans H, quand $m \to \infty$. en prenant $m = 2n$, ceci donne exactement

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sum_{p=-n}^{n} (f \mid e_p) e_p(x)|^2 dx \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

■

6.3 Dualité dans les espaces L^p, $1 \le p \le \infty$

6.3.1 Dualité pour $p = 2$

Soit (E,T,m) un espace mesuré. On note $H = L^2_K(E,T,m)$, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $f \in L^2_K(E,T,m)$. On note $\varphi_f\ :\ H \to K$, l'application définie par $\varphi_f(g) = (g \mid f)_2$. On a déjà vu (remarque 6.38) que $\varphi_f \in H'$ (dual topologique de H). On remarque aussi que $\|\varphi_f\|_{H'} = \|f\|_H = \|f\|_2$. En effet $|\varphi_f(g)| \le \|f\|_H \|g\|_H$

(par l'inégalité de Cauchy-Schwarz) et $|\varphi_f(f)| \leq \|f\|_{\mathrm{H}}^2$. Donc :

$$\|\varphi_f\|_{\mathrm{H}'} = \sup\{\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_{\mathrm{H}}}, \, g \in \mathrm{H} \setminus \{0\}\} = \|f\|_{\mathrm{H}}.$$

Le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56 page 240) appliqué à l'espace de Hilbert $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2_{\mathrm{K}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ donne que pour tout $\mathrm{T} \in \mathrm{H}'$, il existe un et un seul $f \in \mathrm{H}$ t.q. $\mathrm{T}(g) = (g \mid f)_2$ pour tout $g \in \mathrm{H}$, c'est-à-dire un et un seul $f \in \mathrm{H}$ t.q. $\mathrm{T} = \varphi_f$.

L'application $\varphi : f \mapsto \varphi_f$ est donc une isométrie bijective de $\mathrm{L}^2_{\mathrm{K}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ sur $\mathrm{L}^2_{\mathrm{K}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. (Noter que φ est linéaire si $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ et antilinéaire si $\mathrm{K} = \mathbb{C}$.)

Cette situation est spécifique au cas $p = 2$. Nous examinons ci-après le cas général $1 \leq p \leq \infty$.

6.3.2 Dualité pour $1 \leq p \leq \infty$

Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré. Soit $p \in [1, +\infty]$, on pose $q = \frac{p}{p-1} \in [1, +\infty]$ (de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, q s'appelle le conjugué de p). Dans toute cette section, on note $\mathrm{L}^r_{\mathrm{K}} = \mathrm{L}^r_{\mathrm{K}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, avec $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (et $r \in [1, \infty]$).

On cherche à caractériser le dual de $\mathrm{L}^p_{\mathrm{K}}$, de manière semblable à ce qui a été fait à la section précédente dans le cas $p = 2$.

Soit $f \in \mathrm{L}^q_{\mathrm{K}}$, on considère l'application :

$$\varphi_f : g \mapsto \begin{cases} \displaystyle\int g f \, dm \text{ si } \mathrm{K} = \mathbb{R}, \\ \displaystyle\int g \overline{f} \, dm \text{ si } \mathrm{K} = \mathbb{C}. \end{cases} \tag{6.25}$$

L'inégalité de Hölder (proposition 6.26) montre que $\varphi_f(g)$ est bien définie si $g \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{K}}$ et que $\varphi_f \in (\mathrm{L}^p_{\mathrm{K}})'$ (dual topologique de $\mathrm{L}^p_{\mathrm{K}}$). On peut aussi obtenir un majorant de la norme de φ_f car l'inégalité de Hölder donne

$$|\varphi_f(g)| \leq \|f\|_q \|g\|_p, \text{ pour tout } g \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{K}},$$

d'où l'on déduit que

$$\|\varphi_f\|_{(\mathrm{L}^p_{\mathrm{K}})'} = \sup\{\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p}, \, g \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{K}} \setminus \{0\}\} \leq \|f\|_q. \tag{6.26}$$

On définit donc une application $\varphi : f \mapsto \varphi_f$ de $\mathrm{L}^q_{\mathrm{K}}$ dans $(\mathrm{L}^p_{\mathrm{K}})'$. La définition de φ_f (formule (6.25)) montre que cette application est linéaire dans le cas $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $\mathrm{K} = \mathbb{C}$. Elle est toujours continue, grâce à (6.26). On montre maintenant que c'est, en général, une isométrie.

Proposition 6.69 (Injection de L^q dans $(\mathrm{L}^p)'$) *Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré. Soient $p \in [1, +\infty]$ et $q = \frac{p}{p-1}$. Si $p = 1$, la mesure m est supposée de plus σ-finie. L'application $\varphi : f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est définie par (6.25) est une application de $\mathrm{L}^q_{\mathrm{K}}$ dans $(\mathrm{L}^p_{\mathrm{K}})'$, linéaire dans le cas $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $\mathrm{K} = \mathbb{C}$. De plus, c'est une isométrie, c'est-à-dire que $\|\varphi_f\|_{(\mathrm{L}^p_{\mathrm{K}})'} = \|f\|_q$ pour tout $f \in \mathrm{L}^q_{\mathrm{K}}$. (L'application φ est donc nécessairement injective, mais pas forcément surjective.)*

DÉMONSTRATION – on sait déjà que φ est une application de L^q_K dans $(L^p_K)'$, linéaire dans le cas $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $K = \mathbb{C}$. On sait aussi que $\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} \le \|f\|_q$ pour tout $f \in L^q_K$ (voir (6.26)). Pour terminer la démonstration de cette proposition, Il suffit donc de montrer que, pour tout $f \in L^q_K$,

$$\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} \ge \|f\|_q. \tag{6.27}$$

On se limite au cas $K = \mathbb{R}$ (les adaptations pour traiter le cas $K = \mathbb{C}$ sont faciles à deviner).

Soit $f \in L^q_{\mathbb{R}}$. On suppose $f \neq 0$ (sinon (6.27) est immédiat). On confond f avec l'un de ses représentants, de sorte que $f \in \mathcal{L}^q = \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Pour montrer 6.27, on va chercher $g \in L^p_K \setminus \{0\}$ t.q. $\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p} = \|f\|_q$.

On distingue maintenant trois cas.

Cas 1 : $1 < p < \infty$**.** On définit $g : E \to \mathbb{R}$ par $g(x) = |f(x)|^{q-1}\operatorname{sign}(f(x))$ pour tout $x \in E$, avec la fonction sign : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\operatorname{sign}(s) = -1$ si $s < 0$, $\operatorname{sign}(s) = 1$ si $s > 0$ et (par exemple) $\operatorname{sign}(0) = 0$. La fonction g est mesurable (comme composée d'applications mesurables) et on a (en notant que $p = \frac{q}{q-1}$) :

$$\int |g|^p dm = \int (|f|^{q-1})^{\frac{q}{q-1}} dm = \int |f|^q dm < \infty.$$

Donc, $g \in L^p_{\mathbb{R}}$ (plus précisément, $g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$) et $\|g\|_p = \|f\|_q^{\frac{q}{p}} \neq 0$. Pour ce choix de g, on a donc

$$\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p} = \frac{1}{\|f\|_q^{\frac{q}{p}}} \int fg\,dm = \frac{1}{\|f\|_q^{\frac{q}{p}}} \|f\|_q^q = \|f\|_q,$$

car $q - \frac{q}{p} = 1$.

On en déduit que

$$\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} = \sup\{\frac{|\varphi_f(h)|}{\|h\|_p},\ h \in L^p_K \setminus \{0\}\} \ge \frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p} = \|f\|_q,$$

ce qui donne (6.27).

Cas 2 : $p = \infty$**.** On a, dans ce cas, $q = 1$. On prend, comme pour le premier cas, $g = \operatorname{sign}(f)$. On a ici $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}$ et $\|g\|_\infty = 1$ (car $m(E) \neq 0$, sinon $L^1_{\mathbb{R}} = \{0\}$ et il n'y a pas de $f \in L^1_{\mathbb{R}}$, $f \neq 0$). Pour ce choix de g, on a $\varphi_f(g) = \|f\|_1$, donc $\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_\infty} = \|f\|_1$ et, comme dans le premier cas, ceci donne (6.27).

Cas 3 : $p = 1$**.** On a, dans ce cas, $q = \infty$. Ce cas est un peu plus délicat que les précédents. On ne peut pas toujours trouver $g \in L^1_K \setminus \{0\}$ t.q. $\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_1} = \|f\|_\infty$. En utilisant le caractère σ-fini de m, on va, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, trouver $g_n \in L^1_K \setminus \{0\}$ t.q. $\frac{|\varphi_f(g_n)|}{\|g\|_1} \ge \|f\|_\infty - \frac{1}{n}$, ce qui permet aussi de montrer (6.27).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\alpha_n = \|f\|_\infty - \frac{1}{n}$ et $A_n = \{|f| \ge \alpha_n\}$. On a $m(A_n) > 0$ (car $m(A_n) = 0$ donnerait $\|f\|_\infty \le \alpha_n$).

Si $m(A_n) < \infty$, on peut prendre $g_n = \operatorname{sign}(f)1_{A_n}$ qui est mesurable (car $\operatorname{sign}(f)$ et 1_{A_n} sont mesurables) et intégrable car $m(A_n) < \infty$. On a alors $g_n \in L^1_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, $\|g_n\|_1 = m(A_n)$ et $\varphi_f(g_n) = \int_{A_n} |f| dm \ge \alpha_n m(A_n)$. Donc :

$$\|\varphi_f\|_{(L^1_K)'} \ge \frac{|\varphi_f(g_n)|}{\|g_n\|_1} \ge \alpha_n = \|f\|_\infty - \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit (6.27).

Si $m(A_n) = \infty$, le choix de $g_n = \operatorname{sign}(f)1_{A_n}$ ne convient pas car $\operatorname{sign}(f)1_{A_n} \notin L^1_{\mathbb{R}}$. On utilise alors le fait que m est σ-finie. Comme m est σ-finie, il existe une suite $(E_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $m(E_p) < \infty$, $E_p \subset E_{p+1}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, et $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} E_p$. Par continuité croissante de m, on a donc $m(A_n \cap E_p) \uparrow m(A_n)$ quand $p \to \infty$. Comme $m(A_n) > 0$ il existe donc $p \in \mathbb{N}$ (dépendant de n, on ne note pas cette dépendance) t.q. $m(A_n \cap E_p) > 0$. On prend alors $g_n = \operatorname{sign}(f)1_{A_n\cap E_p}$.

On a bien alors $g_n \in L^1_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, $\|g_n\|_1 = m(A_n \cap E_p) \le m(E_p) < \infty$ et $\varphi_f(g_n) = \int_{A_n \cap E_p} |f| dm \ge \alpha_n m(A_n \cap E_p)$. Donc :

$$\|\varphi_f\|_{(L^1_K)'} \ge \frac{|\varphi_f(g_n)|}{\|g_n\|_1} \ge \alpha_n = \|f\|_\infty - \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit (6.27), ce qui conclut la preuve de la proposition. ■

La proposition 6.69 montre que l'application $\varphi : f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est définie par (6.25) est une application de L^q_K dans $(L^p_K)'$, linéaire dans le cas $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $K = \mathbb{C}$. De plus, c'est une isométrie, c'est-à-dire que $\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} = \|f\|_q$ pour tout $f \in L^q_K$. Comme cela a déjà été dit, l'application φ est donc nécessairement injective car $\varphi_f = \varphi_h$ implique $\varphi_{f-h} = 0$ et donc $\|f - h\|_q = \|\varphi_{f-h}\|_{(L^p_K)'} = 0$, ce qui donne $f = h$ p.p.. Mais l'application φ n'est pas forcément surjective. On sait qu'elle est surjective si $p = 2$ (c'est l'objet de la section précédente). Le théorème suivant montre qu'elle est surjective si m est σ-finie et $p \in [1, +\infty[$ (de sorte qu'on identifie souvent, dans ce cas, $(L^p_K)'$ à L^q_K).

Théorème 6.70 (Dualité $L^p - L^q$) *Soient (E, T, m) un espace mesuré σ-fini, $1 \le p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$ et $T \in (L^p_K)'$. Alors, il existe un unique $f \in L^q_K$ t.q.*

$$T(g) = \begin{cases} \displaystyle\int g f \, dm & \text{si } K = \mathbb{R}, \\ \displaystyle\int g \overline{f} \, dm & \text{si } K = \mathbb{C}, \end{cases}$$

c'est-à-dire telle que $T = \varphi_f$ avec φ donné par (6.25) (on a donc montré la surjectivité de l'application $\varphi : L^q_K \to (L^p_K)'$ définie par $\varphi(f) = \varphi_f$ pour $f \in L^q_K$).

Remarque 6.71 (Dual de L^∞) Noter que le théorème précédent est, en général, faux pour $p = +\infty$. L'application $\varphi : f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est donnée par (6.25) est donc une isométrie (linéaire ou antilinéaire, selon que $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de L^1_K dans $(L^\infty_K)'$ mais l'image de φ est, sauf cas très particuliers, différente de $(L^\infty_K)'$. L'application φ ne permet donc pas d'identifier le dual de L^∞_K à L^1_K.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME *6.70* La démonstration de ce théorème est faite dans l'exercice 6.49. Elle consiste essentiellement à se ramener directement à appliquer le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56) dans un espace L^2 approprié.
Une autre démonstration, probablement plus classique, consiste à appliquer le théorème de Radon-Nikodym, qui lui-même se démontre en se ramenant au théorème de représentation de Riesz. Cette démonstration est donnée, dans le cas particulier $p = 1$, dans l'exercice 6.47. Nous verrons le théorème de Radon-Nikodym dans la section suivante, voir les théorèmes 6.78 et 6.79.
Enfin, on propose dans l'exercice 6.48 une autre démonstration de ce théorème dans le cas $p < 2$ (utilisant toujours le théorème de représentation de Riesz). ■

Une conséquence intéressante du théorème de dualité (théorème 6.70) est le caractère réflexif des espaces L^p pour $1 < p < +\infty$, ce que l'on détaille maintenant.

Soit F un espace de Banach réel (mais il est possible de traiter aussi les Banach complexes). On note F' le dual (topologique) de F et F'' le dual (topologique) de F'. On dit aussi que F'' est le bidual de F. Pour $u \in F$, on définit $J_u : F' \to \mathbb{R}$ par

$$J_u(T) = T(u) \text{ pour tout } T \in F'. \tag{6.28}$$

Proposition 6.99 (Loi forte des grands nombres) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.r. indépendantes.*

1. *On suppose ici que les* X_n *sont de carré intégrable, que* $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathrm{E}(\mathrm{X}_n^2)}{n^2} < +\infty.$$

On a alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \to 0 \text{ p.s., quand } n \to +\infty.$$

2. *On suppose ici que la suite* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de v.a.r.i.i.d. et que* $\mathrm{E}(|\mathrm{X}_1|) < +\infty$. *Alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \to \mathrm{E}(\mathrm{X}_1) \text{ p.s., quand } n \to +\infty.$$

3. *On suppose ici simplement que la suite* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de v.a.r.i.i.d.. Alors, pour toute fonction* φ *borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *on a :*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(\mathrm{X}_i) \to \mathrm{E}(\varphi(\mathrm{X}_1)) \text{ p.s., quand } n \to +\infty.$$

Le troisième item de la proposition 6.99 est une conséquence immédiate du deuxième car la suite $(\varphi(\mathrm{X}_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r.i.i.d. et $\mathrm{E}(|\varphi(\mathrm{X}_1)| < +\infty$. Il montre qu'il est possible en pratique d'avoir une idée de la loi d'une v.a.r. en faisant un grand nombre d'expériences indépendantes. (La même remarque s'applique avec la loi faible des grands nombres.)

Remarque 6.100 *Nous verrons au chapitre 10 (théorème 10.24) un résultat de convergence en loi lorsque que l'on s'intéresse à* $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ *au lieu de* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ *(comme dans les propositions 6.98et 6.99). Nous énonçons ici ce résultat (connu sous le nom de théorème central limite).*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.r.i.i.d. de carrés intégrables. On note* $m = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1)$ *et* $\sigma^2 = Var(\mathrm{X}_1)$. *On pose*

$$\mathrm{Y}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - m).$$

La suite $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge alors en loi vers toute v.a.r.* Y *dont la loi est la loi normale* $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ *(la loi normale, ou loi de Gauss,* $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, *est définie au chapitre 4 section 4.4 dans le cas* $\sigma^2 \neq 0$ *et* $\mathcal{N}(0,0) = \delta_0$*).*

6.5 Exercices

6.5.1 Espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$

Exercice 6.1 (Fonctions nulles p.p. sur un ensemble mesurable) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $p \in [1, \infty[$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$. On pose $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m);\ f = 0 \text{ p.p. sur } \mathrm{A}\}$. Montrer que F est fermé (dans $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$).

Corrigé – *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{F}$ et $f \in \mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ t.q. $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$.*

Grâce à l'inégalité de Hölder (inégalité (6.1) pour $1 < p < \infty$ ou inégalité (6.10) qui contient aussi le cas $p = 1$), on a, pour tout $g \in \mathrm{L}^q_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ avec $q = \frac{p}{p-1}$,

$$\left|\int f_n g dm - \int f g dm\right| \leq \int |(f_n - f)g| dm \leq \|f_n - f\|_p \|g\|_q \to 0, \text{ quand } n \to +\infty,$$

et donc

$$\int f_n g dm \to \int f g dm, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.39}$$

On prend alors $g = (|f|)^{p-1} 1_{\{f>0\}} 1_\mathrm{A} - (|f|)^{p-1} 1_{\{f<0\}} 1_\mathrm{A} \in \mathrm{L}^q_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ si $p > 1$ et on prend $g = 1_{\{f>0\}} 1_\mathrm{A} - 1_{\{f<0\}} 1_\mathrm{A} \in \mathrm{L}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ si $p = 1$.

Comme $f_n g = 0$ p.p., on déduit de (6.39) que $\int |f|^p 1_\mathrm{A} dm = 0$ et donc que $f = 0$ p.p. sur A.

Un autre démonstration est possible en utilisant la réciproque partielle du théorème de convergence dominée (théorème 6.11).

Exercice 6.2 (Fonctions positives ou nulles p.p.) Soit $p \in [1,\infty]$ et $\mathrm{C} = \{f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda);\ f \geq 0 \text{ p.p.}\}$. Montrer que C est d'intérieur vide pour $p < \infty$ et d'intérieur non vide pour $p = \infty$.

Corrigé – **Cas** $p < \infty$

Soit $f \in \mathrm{C}$ et soit $\varepsilon > 0$. On va construire $g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, avec $g \notin \mathrm{C}$ et $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, ceci montrera bien que f ne peut pas être dans l'intérieur de C et donc, comme f est arbitraire, que C est d'intérieur vide.

On choisit, comme d'habitude, un représentant de f. On pose $\mathrm{A}_n = \{0 \leq f \leq n\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n = \{f \geq 0\}$. Par continuité croissante de λ, on a donc $\lambda(\mathrm{A}_n) \to \lambda(\{f \geq 0\}) = \infty$ quand $n \to +\infty$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\lambda(\mathrm{A}_n) > 0$. On choisit cette valeur de n et on pose $\mathrm{A} = \mathrm{A}_n$.

On prend maintenant $m > (\frac{n+1}{\varepsilon})^p$ (ce choix sera bientôt compréhensible...) et, pour $i \in \mathbb{Z}$, on pose $\mathrm{B}_i = \mathrm{A} \cap [\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}[$. Comme les B_i sont disjoints deux à deux et que $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{B}_i = \mathrm{A}$, on a $\lambda(\mathrm{A}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda(\mathrm{B}_i)$. Il existe donc $i \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda(\mathrm{B}_i) > 0$. On choisit cette valeur de i et on pose $\mathrm{B} = \mathrm{B}_i$ (noter que $\lambda(\mathrm{B}) \leq 1/m$).

On construit maintenant g en prenant $g(x) = f(x)$ si $x \in \mathrm{B}^c$ et $g(x) = -1$ si $x \in \mathrm{B}$. La fonction g mesurable et :

$$\int |g|^p dm = \int_{\mathrm{B}^c} |g|^p dm + \int_\mathrm{B} |g|^p dm \leq \int |f|^p dm + \lambda(\mathrm{B}) < \infty.$$

On a donc $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (et $g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ en confondant g avec sa classe d'équivalence). On a aussi $g \notin \mathrm{C}$ car $\lambda(\mathrm{B}) > 0$ et $g < 0$ sur B. Enfin $\|f - g\|_p^p \leq (n+1)^p \lambda(\mathrm{B}) \leq \frac{(n+1)^p}{m} \leq \varepsilon^p$ (par le choix de m), donc $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$.

Ceci montre bien que C est d'intérieur vide.

Cas $p = \infty$

On prend $f = 1_\mathbb{R} \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (et donc $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ en confondant f avec sa classe d'équivalence). On note $\mathrm{B}(f,1)$ la boule (dans L^∞) de centre f et de rayon 1. Soit $g \in \mathrm{B}(f,1)$. On a $|1 - g| = |f - g| \leq \|f - g\|_\infty \leq 1$ p.p.. On en déduit que $g \geq 0$ p.p. et donc que $g \in \mathrm{C}$. La fonction f appartient donc à l'intérieur de C, ce qui prouve que C est d'intérieur non vide.

Exercice 6.3 (Convergence essentiellement uniforme) Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, quand $n \to +\infty$, si et seulement s'il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}) = 0$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *On suppose que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, quand $n \to +\infty$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n - f| \le \|f_n - f\|_\infty$ p.p. (voir, par exemple, l'exercice corrigé 4.37). Il existe donc $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $|(f_n - f)(x)| \le \|f_n - f\|_\infty$ pour tout $x \in A_n^c$.

On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, on a alors, par σ−additivité de m, $m(A) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{x\in A^c} |f_n(x) - f(x)| \le \|f_n - f\|_\infty.$$

On en déduit que $f_n \to f$ uniformément sur A^c, quand $n \to +\infty$, ce qui donne la propriété désirée.

Réciproquement, on suppose maintenant qu'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c, quand $n \to +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a, pour tout $x \in A^c$, $|f_n(x) - f(x)| \le \sup_{y\in A^c} |f_n(y) - f(y)|$. Comme $m(A) = 0$, on en déduit :

$$|f_n - f| \le \sup_{y\in A^c} |f_n(y) - f(y)| \text{ p.p.},$$

et donc :

$$\|f_n - f\|_\infty \le \sup_{y\in A^c} |f_n(y) - f(y)|.$$

Comme $f_n \to f$ uniformément sur A^c, quand $n \to +\infty$, ceci donne bien $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, quand $n \to +\infty$.

Exercice 6.4 (Densité et continuité en moyenne) 1. Soit $p \in [1, \infty[$. Montrer que $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, montrer que $\|f - f(\cdot + h)\|_p \to 0$ quand $h \to 0$.

Corrigé – **Densité de C_c dans L^p** *On reprend ici la démonstration faite pour p = 1 (voir le théorème 5.20)*

Il est clair que $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. En confondant un élément de $\mathcal{L}^p$ avec sa classe d'équivalence, on a donc aussi $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset L^p = L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (ceci est aussi vrai pour $p = \infty$). L'objectif est donc de montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}^p$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_p \le \varepsilon$. On va raisonner en plusieurs étapes (fonctions caractéristiques, $\mathcal{E}_+$, $\mathcal{M}_+$ et enfin $\mathcal{L}^p$).

(a) On suppose ici que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(A) < \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. On prend la même fonction φ que pour $p = 1$ (démonstration du théorème 5.20). On a $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\varphi = 1$ sur K, $\varphi = 0$ sur O^c et $0 \le \varphi \le 1$ (partout). Les ensembles K et O sont t.q. $K \subset A \subset O$ et $\lambda(O \setminus K) \le 2\varepsilon$. On en déduit que $f - \varphi = 0$ sur $K \cup O^c$ et $0 \le |f - \varphi| \le 1$, ce qui donne

$$\|f - \varphi\|_p^p \le \lambda(O \setminus K) \le 2\varepsilon,$$

et donc

$$\|f - \varphi\|_p \le (2\varepsilon)^{\frac{1}{p}}.$$

Comme ε est arbitrairement petit, ceci termine la première étape.

(b) On suppose ici que $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^p$. Comme $f \in \mathcal{E}_+$, il existe $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $A_1, \ldots, A_n \in T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. Comme $f \in \mathcal{L}^p$, on a, pour tout i, $a_i^p \lambda(A_i) \le \int |f|^p dm < \infty$. Donc, $\lambda(A_i) < \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$, l'étape 1 donne, pour tout i, l'existence de $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\|1_{A_i} - \varphi_i\|_p \le \varepsilon$. On pose $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i\varphi_i \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on obtient $\|f - \varphi\|_p \le (\sum_{i=1}^n a_i)\varepsilon$ (ce qui est bien arbitrairement petit).

(c) On suppose ici que $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^p$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f \in \mathcal{M}_+$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. La suite $(f - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc dominée par $f \in \mathcal{L}^p$. Le théorème de convergence dominée donne alors que $(f - f_n) \to 0$ dans L^p quand $n \to +\infty$. On peut donc choisir $g = f_n \in \mathcal{E}_+$ t.q. $\|f - g\|_p \le \varepsilon$.

L'étape 2 donne alors l'existence de $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\|g - \varphi\|_p \le \varepsilon$. D'où l'on déduit $\|f - \varphi\|_p \le 2\varepsilon$, ce qui termine l'étape 3.

(d) On suppose enfin que $f \in \mathcal{L}^p$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f^\pm \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^p$, l'étape 3 donne qu'il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\|f^+ - \varphi_1\|_p \leq \varepsilon$ et $\|f^- - \varphi_2\|_p \leq \varepsilon$. On pose alors $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. On a $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\|f - \varphi\|_p \leq 2\varepsilon$, ce qui prouve bien la densité de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans L^p.

Continuité en moyenne

On raisonne ici en 2 étapes :

(a) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction φ est donc uniformément continue, ce qui donne

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x+h) - \varphi(x)| \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

Soit $a > 0$ t.q. $\varphi = 0$ sur $[-a, a]^c$. Pour $h \in \mathbb{R}$ t.q. $|h| \leq 1$, on a donc, comme $\varphi(x+h) - \varphi(x) = 0$ si $x \notin [-a-1, a+1]$,

$$\int |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p dx \leq (2a+2) \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p \to 0, \text{ quand } h \to 0.$$

On en déduit que $\|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_p \to 0$ quand $h \to 0$.

(b) Soit $f \in L^p$. L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne que $f(\cdot + h) \in L^p$ pour tout $h \in \mathbb{R}$. On veut maintenant montrer que $\|f(\cdot + h) - f\|_p \to 0$ quand $h \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la densité de C_c dans L^p, il existe $\varphi \in C_c$ t.q. $\|f - \varphi\|_p \leq \varepsilon$. L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne $\|f(\cdot + h) - \varphi(\cdot + h)\|_p = \|f - \varphi\|_p$. On a donc, pour tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\|f(\cdot + h) - f\|_p \leq 2\|f - \varphi\|_p + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_p \leq 2\varepsilon + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_p.$$

D'après la première étape, il existe $\eta > 0$ t.q.

$$|h| \leq \eta \Rightarrow \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_p \leq \varepsilon.$$

Donc,

$$|h| \leq \eta \Rightarrow \|f(\cdot + h) - f\|_p \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $f(\cdot + h) \to f$ dans L^p, quand $h \to 0$.

2. Les assertions précédentes sont-elles vraies pour $p = \infty$?

Corrigé – *Les assertions précédentes sont fausses pour $p = \infty$, comme cela est montré dans l'exercice 8.4.*

(a) On a bien $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset L^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ mais le résultat de densité est faux. On prend, par exemple, $f = 1_{]0,1[}$. Il est facile de voir que $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$, pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) On prend ici aussi $f = 1_{]0,1[}$. Il est facile de voir que $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty = 1$ pour tout $h \neq 0$.

Exercice 6.5 (Sur la séparabilité) 1. Montrer que $L^p_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est séparable pour $p \in [1, \infty[$ et n'est pas séparable pour $p = \infty$.

2. On munit $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. Montrer que $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est séparable et que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas séparable.

Exercice 6.6 Soient (E, T, m) un espace mesuré, et f, g, h des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. Soient $p, q, r \in]1, +\infty[$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, montrer que :

$$\int |fgh| dm \leq (\int |f|^p dm)^{\frac{1}{p}} (\int |g|^q dm)^{\frac{1}{q}} (\int |h|^r dm)^{\frac{1}{r}}.$$

(En convenant que $0 \times (+\infty) = 0$.)

Exercice 6.7 (Produit $L^p - L^q$) Soient (E, T, m) un espace mesuré, $p \in [1, +\infty]$ et q le conjugué de p (*i.e.* $q = \frac{p}{p-1}$). Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f \in L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $g \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $g_n \to g$ dans $L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $\int f_n g_n dm \to \int f g dm$ lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé – *On remarque d'abord que le lemme 6.5 (ou la proposition 6.26 pour avoir aussi le cas $p = \infty$ ou $q = \infty$) donne que $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $f_n g_n \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, on utilise l'inégalité de Hölder (lemme 6.5 et proposition 6.26) pour obtenir*

$$|\int f_n g_n dm - \int f g dm| \le |\int (f_n - f) g_n dm| + |\int f(g_n - g) dm|$$
$$\le \|f_n - f\|_p \|g_n\|_q + \|f\|_p \|g - g_n\|_q \to 0, \text{ quand } n \to +\infty,$$

car $\|f_n - f\|_p \to 0$, $\|g - g_n\|_q \to 0$ (quand $n \to +\infty$) et la suite $(\|g_n\|_q)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans L^q.

Exercice 6.8 (Caractérisation de $\mathcal{L}^p$) Soit (E, T, m) un espace mesuré, $p \in [1, \infty]$ et $q = \frac{p}{p-1}$. On note $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (pour $r \in [1, \infty]$).

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application mesurable. On suppose que $fg \in \mathcal{L}^1$ pour tout $g \in \mathcal{L}^q$. Le but de l'exercice est de montrer que $f \in \mathcal{L}^p$.

1. On suppose, dans cette question, que $p = 1$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1$.
2. On suppose, dans cette question, que $p = \infty$. Pour montrer que $f \in \mathcal{L}^\infty$, on raisonne par l'absurde en supposant que $f \notin \mathcal{L}^\infty$.
   (a) Soit $\alpha \ge 0$. Montrer qu'il existe $\beta > \alpha$ t.q. $m(\{\alpha \le |f| < \beta\}) > 0$. En déduire qu'il existe une suite croissante $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\alpha_0 = 0$, $\alpha_n \ge n$ et $m(A_n) > 0$ avec $A_n = \{\alpha_n \le |f| < \alpha_{n+1}\}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).
   (b) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. On pose $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n 1_{A_n}$ (les A_n étant définis à la question précédente). Montrer qu'un choix convenable de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne $g \in \mathcal{L}^1$ et $fg \notin \mathcal{L}^1$.
   (c) Conclure.
3. On suppose, dans cette question, que $p \in]1, \infty[$ et que $m(E) < \infty$. Pour montrer que $f \in \mathcal{L}^p$, on raisonne une nouvelle fois par l'absurde en supposant que $f \notin \mathcal{L}^p$.
   (a) Soit $\alpha \ge 0$. Montrer qu'il existe $\beta > \alpha$ t.q. $1 \le \int_A |f|^p dm < \infty$ avec $A = \{\alpha \le |f| < \beta\}$. En déduire qu'il existe une suite croissante $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\alpha_0 = 0$ et $1 \le \int_{A_n} |f|^p dm < \infty$ avec $A_n = \{\alpha_n \le |f| < \alpha_{n+1}\}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).
   (b) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. On pose $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n |f|^{p-1} 1_{A_n}$ (les A_n étant définis à la question précédente). Montrer qu'un choix convenable de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne $g \in \mathcal{L}^q$ et $fg \notin \mathcal{L}^1$.
   (c) Conclure.
4. On suppose, dans cette question, que $p \in]1, \infty[$ et que m est σ-finie. Montrer que $f \in \mathcal{L}^p$.

Exercice 6.9 (Une fonction L^p est "mieux" que L^p ?) Soit (X, T, m) un mesure mesuré, $1 \le p < +\infty$ et $f \in L^p$ (avec $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(X, T, m)$). L'exercice consiste à montrer qu'il existe $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ t.q. $\lim_{s\to+\infty} \varphi(s)/s = +\infty$ et $\varphi(|f|) \in L^p$.

1. (Question préliminaire) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de nombres positifs t.q. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$. Montrer qu'il existe $\psi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ croissante t.q. $\lim_{s\to+\infty} \psi(s) = +\infty$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \psi(n) a_n < +\infty$.
2. Montrer qu'il existe $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ t.q. $\lim_{s\to+\infty} \varphi(s)/s = +\infty$ et $\varphi(|f|) \in L^p$.

Exercice 6.10 (Convergence de $\|\cdot\|_p$ quand $p \to +\infty$) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue à support compact. Montrer que $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ lorsque $p \to +\infty$.

Exercice 6.11 (Convergence de l'intégrale du produit de fonctions)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. On suppose que $g_n \to g$ dans $L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

   Corrigé – *Cette question a été faite dans l'exercice 6.7.*

2. On suppose maintenant que $g_n \to g$ p.p.. Montrer par un contre–exemple qu'on peut ne pas avoir $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

   Corrigé – *On prend* $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. *On prend* $f = g = 0$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$f_n = g_n = \sqrt{n} 1_{]0,\frac{1}{n}[}.$$
   On a bien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *et* $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *(comme d'habitude, on confond un élément de* $\mathcal{L}^p$ *avec sa classe d'équivalence).*

   On a aussi $f_n \to 0$ *dans* $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *(car* $\|f_n\|_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$*),* $g_n \to 0$ *p.p. et* $f_n g_n \not\to 0$ *dans* $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *car* $\|f_n g_n\|_1 = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

3. On suppose maintenant que $g_n \to g$ p.p. et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $\|g_n\|_\infty \leq M$. Montrer qu'on a alors $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

   Corrigé – *On remarque d'abord que* $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *et* $f_n g_n \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(voir la proposition 6.26). Puis, on écrit*
$$|\int f_n g_n dm - \int fg dm| \leq \int |f_n - f||g_n| dm + \int |f||g_n - g| dm. \tag{6.40}$$
   Le premier terme du membre de droite de cette inégalité tend vers 0 *car il est majoré par* $M\|f_n - f\|_1$ *qui tend vers* 0 *quand* $n \to +\infty$.

   Pour montrer que le deuxième terme de cette inégalité tend aussi vers 0*, on pose* $h_n = |f||g_n - g|$. *On a* $h_n \to 0$ *p.p. car* $g_n \to g$ *p.p., quand* $n \to +\infty$. *On a aussi* $0 \leq h_n \leq 2M|f| \in L^1_R(E, T, m)$ *(en effet, comme* $g_n \to g$ *p.p. et* $|g_n| \leq M$ *p.p., on a aussi* $|g| \leq M$ *p.p.). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée. Il donne que* $\int h_n dm \to 0$. *On en déduit que le deuxième terme de (6.40) tend vers* 0 *quand* $n \to +\infty$ *et donc que* $f_n g_n \to fg$ *dans* $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *quand* $n \to +\infty$.

Exercice 6.12 (Mesure de densité) Soit (E, T, m) un espace mesuré et μ une mesure de densité $f \in \mathcal{M}_+$ par rapport à m, montrer que :

$$\begin{array}{ll} (i) & \displaystyle\int g d\mu = \int f g dm, \forall g \in \mathcal{M}_+ \\ (ii) & \text{Soit } g \in \mathcal{M}, \text{ alors } g \in L^1(\mu) \Leftrightarrow fg \in L^1(m), \\ & \text{et si } g \in L^1(\mu), \text{ alors } \displaystyle\int g d\mu = \int f g dm \end{array}$$

Exercice 6.13 (Opérateur à noyau) Soit $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable (on a donc $K \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$). On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\int K(x, t) dt \leq M$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\int K(t, y) dt \leq M$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$ t.q. $K(x, \cdot) f(\cdot) \in \mathcal{L}^1$, $T(f)(x) = \int K(x, t) f(t) dt$.
Soit $1 \leq p \leq \infty$. [On conseille de considérer séparément les cas $p = 1$, $p = \infty$ et $1 < p < \infty$.]

1. Soit $f \in \mathrm{L}^p$ (on identifie f, comme d'habitude, avec l'un de ses représentants, on a donc $f \in \mathcal{L}^p$). Montrer que $\mathrm{T}(f)(x)$ est définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{L}^p$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^p$ t.q. $\mathrm{T}(f) = g$ p.p.").
2. Montrer que T est une application linéaire continue de L^p dans L^p.

Exercice 6.14 (Inégalité de Hardy) Soit $p \in]1,\infty[$. On note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(]0,\infty[, \mathcal{B}(]0,\infty[), \lambda)$ (λ est donc ici la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,\infty[$).

Soit $f \in \mathcal{L}^p$. Pour $x \in]0,\infty[$, on pose $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{x}\int f 1_{]0,x[} d\lambda$. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathrm{F} \in \mathcal{L}^p$ et $\|\mathrm{F}\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

1. On suppose, dans cette question, que $f \in \mathrm{C}_c(]0,\infty[)$ (c'est-à-dire que f est continue et à support compact dans $]0,\infty[$).
   (a) Montrer $\mathrm{F} \in \mathrm{C}^1(]0,\infty[) \cap \mathcal{L}^p$. Montrer que $x\mathrm{F}'(x) = -\mathrm{F}(x) + f(x)$ pour tout $x > 0$.

   Corrigé – *On pose* $\mathrm{G}(x) = \int f 1_{]0,x[} d\lambda$ *pour* $x \in]0,\infty[$. *Comme f est continue, la fonction g est de classe* C^1 *sur* $]0,\infty[$ *(et* $\mathrm{G}' = f$*). On en déduit que* F *est aussi de classe* C^1 *sur* $]0,\infty[$.

   Comme f est à support compact dans $]0,\infty[$, *il existe* $a, \mathrm{A} \in]0,\infty[$, $a \le \mathrm{A}$, *t.q.* $f(x) = 0$ *si* $x < a$ *ou* $x > \mathrm{A}$. *La fonction f est bornée (car continue sur le compact* $[a,\mathrm{A}]$ *et nulle en dehors de ce compact), on note* $\mathrm{M} = \sup\{|f(x)|; x \in [a,\mathrm{A}]\}$. *On a alors* $|\mathrm{F}(x)| \le \frac{\mathrm{M}(\mathrm{A}-a)}{x} 1_{[a,\infty[}(x)$ *pour tout* $x \in]0,\infty[$. *On en déduit que* $\mathrm{F} \in \mathcal{L}^p$ *car* $p > 1$ *(et on aussi* $\mathrm{F} \in \mathcal{L}^\infty$*).*

   Comme $x\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x)$, *on a bien* $x\mathrm{F}'(x) + \mathrm{F}(x) = \mathrm{G}'(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in]0,\infty[$.

   (b) On suppose, dans cette question, que $f(x) \ge 0$ pour tout $x \in]0,\infty[$.
   Montrer que $\int_0^\infty \mathrm{F}^p(x)dx = \frac{p}{p-1}\int_0^\infty \mathrm{F}^{p-1}(x)f(x)dx$. [On pourra utiliser une intégration par parties.]
   Montrer que $\|\mathrm{F}\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

   Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *En intégrant par parties (entre* F^p *et* 1*) sur* $]0,n[$, *on obtient :*

$$\int_0^n \mathrm{F}^p(x)dx = -\int_0^n p\mathrm{F}^{p-1}\mathrm{F}'(x)xdx + \mathrm{F}^p(n)n$$
$$= \int_0^n p\mathrm{F}^p(x)dx - \int_0^n p\mathrm{F}^{p-1}f(x)dx + \mathrm{F}^p(n)n,$$

   et donc :

$$(p-1)\int_0^n \mathrm{F}^p(x)dx = \int_0^n p\mathrm{F}^{p-1}f(x)dx - \mathrm{F}^p(n)n.$$

   Comme $0 \le \mathrm{F}^p(n)n \le \frac{1}{n^{p-1}}\mathrm{M}(\mathrm{A}-a) \to 0$, *quand* $n \to +\infty$ *(où* $a, \mathrm{A}, \mathrm{M}$ *sont définis à la question précédente) et que* $\mathrm{F}, f \in \mathcal{L}^p$, *on en déduit :*

$$\int_0^\infty \mathrm{F}^p(x)dx = \frac{p}{p-1}\int_0^\infty \mathrm{F}^{p-1}(x)f(x)dx.$$

   En utilisant l'inégalité de Hölder (entre $f \in \mathcal{L}^p$ *et* $\mathrm{F}^{p-1} \in \mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}$*) on déduit de la précédente inégalité :*

$$\int_0^\infty \mathrm{F}^p(x)dx \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p\Big(\int_0^\infty \mathrm{F}^p(x)dx\Big)^{\frac{p-1}{p}},$$

   et donc (comme $\mathrm{F} \in \mathcal{L}^p$*)* $\|\mathrm{F}\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

   (c) Monter que $\|\mathrm{F}\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$ (on ne suppose plus que $f(x) \ge 0$ pour tout $x \in]0,\infty[$).

Corrigé – *Il suffit de considérer* $\mathrm{H}(x) = \frac{1}{x}\int |f| 1_{]0,x[} d\lambda$ *pour* $x > 0$. *La question précédente donne que* $\mathrm{H} \in \mathcal{L}^p$ *et* $\|\mathrm{H}\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$. *Comme* $|\mathrm{F}(x)| \le \mathrm{H}(x)$ *pour tout* $x > 0$, *on a donc* $\|\mathrm{F}\|_p \le \|\mathrm{H}\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

2. On ne suppose plus que $f \in \mathrm{C}_c(]0,\infty[)$.

(a) Montrer qu'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(]0,\infty[)$ t.q $\|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$. [On pourra utiliser la densité de $\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, exercice 6.4.]

Corrigé – *On définit* g *par* $g = f$ *sur* $]0,\infty[$ *et* $g = 0$ *sur* $]-\infty, 0]$. *On a donc* $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. *il existe donc* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *t.q.* $g_n \to g$ *dans* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *quand* $n \to +\infty$. *On note* $\overline{g}_n$ *la restriction de la fonction* g_n *à* $]0,\infty[$. *La suite* $(\overline{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge donc vers* f *dans* $\mathcal{L}^p$, *mais les fonctions* $\overline{g}_n$ *ne sont pas nécessairement à support compact dans* $]0,\infty[$. *Il faut donc les modifier légèrement.*

On se donne une fonction $\varphi \in \mathrm{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *t.q.* $\varphi = 0$ *sur* $]-1,1[$ *et* $\varphi = 1$ *sur* $]-2,2[^c$. *On pose* $\varphi_m(x) = \varphi(mx)$ *pour* $x \in \mathbb{R}$ *et* $m \in \mathbb{N}^\star$. *Le théorème de convergence dominée donne alors que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $\varphi_m \overline{g}_n \to \overline{g}_n$ *dans* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *quand* $m \to \infty$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on peut donc choisir* $m_n \in \mathbb{N}^\star$ *t.q.* $\|\varphi_{m_n}\overline{g}_n - \overline{g}_n\|_p \le \frac{1}{n+1}$. *On pose* $f_n = \varphi_{m_n}\overline{g}_n$, *on a bien* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(]0,\infty[)$ *et* $\|f_n - f\|_p \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

(b) Montrer que $\mathrm{F} \in \mathrm{C}(]0,\infty[) \cap \mathcal{L}^p$ et que $\|\mathrm{F}\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

Corrigé – *On pose* $\mathrm{G}(x) = \int f 1_{]0,x[} d\lambda$ *pour* $x \in]0,\infty[$. *On remarque que* $\mathrm{G} \in \mathrm{C}(]0,\infty[)$ *car si* $0 < x < y < \infty$, *on a (en utilisant l'inégalité de Hölder)* $|\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(y)| \le \int |f| 1_{]x,y[} d\lambda \le \|f\|_p (y-x)^{1-\frac{1}{p}}$. *On a donc aussi* $\mathrm{F} \in \mathrm{C}(]0,\infty[)$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(]0,\infty[)$ *t.q.* $\|f_n - f\|_p \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *On pose* $\mathrm{F}_n(x) = \frac{1}{x}\int f_n 1_{]0,x[} d\lambda$. *On a donc* $\mathrm{F}_n \in \mathcal{L}^p$ *et*

$$\|\mathrm{F}_n\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f_n\|_p. \tag{6.41}$$

Pour $x \in]0,\infty[$, *on a (en utilisant l'inégalité de Hölder)* $|\mathrm{F}_n(x) - \mathrm{F}(x)| \le \frac{1}{x}\|f_n - f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}$. *On en déduit que* $\mathrm{F}_n \to \mathrm{F}$ *p.p.. Il suffit alors d'appliquer le lemme de Fatou à la suite* $(|\mathrm{F}_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ *pour déduire de (6.41) que* $\mathrm{F} \in \mathcal{L}^p$ *et* $\|\mathrm{F}\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

3. Montrer que $\sup\{\frac{\|\mathrm{F}\|_p}{\|f\|_p}, f \in \mathcal{L}^p, \|f\|_p \ne 0\} = \frac{p}{p-1}$ (dans cette formule, F est donné comme précédemment à partir de f). [On pourra considérer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $f_n(t) = t^{-\frac{1}{p}} 1_{]1,n[}(t)$ pour $t \in]0,\infty[$.]

Corrigé – *Soit* $n \ge 2$ *et* f_n *définie par* $f_n(t) = t^{-\frac{1}{p}} 1_{]1,n[}(t)$ *pour* $t \in]0,\infty[$. *On a* $f_n \in \mathcal{L}^p$ *et* $\|f_n\|_p = (\log n)^{\frac{1}{p}}$.

On pose $\mathrm{F}_n(x) = \frac{1}{x}\int f_n 1_{]0,x[} d\lambda$ *et on cherche maintenant à minorer* $\|\mathrm{F}_n\|_p$. *On remarque que* $\mathrm{F}_n(x) \ge 0$ *pour tout* $x \in]0,\infty[$ *et :*

$$\mathrm{F}_n(x) = \frac{p}{p-1}\frac{1}{x}(x^{\frac{p-1}{p}} - 1), \text{ pour } x \in [1,n]. \tag{6.42}$$

Soit $\eta > 0$. *Il existe* $\mathrm{A} > 1$ *t.q. :*

$$x > \mathrm{A} \Rightarrow x^{\frac{p-1}{p}} - 1 \ge (1-\eta)x^{\frac{p-1}{p}},$$

et donc, en utilisant (6.42), on obtient :

$$n > \mathrm{A} \Rightarrow \|\mathrm{F}_n\|_p \ge \frac{p}{p-1}(1-\eta)\left(\int_{\mathrm{A}}^n \frac{1}{x}dx\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}(1-\eta)(\log n - \log \mathrm{A})^{\frac{1}{p}}.$$

Comme $\|f_n\|_p = (\log n)^{\frac{1}{p}}$, *on en déduit que* $\limsup_{n\to+\infty} \frac{\|\mathrm{F}_n\|_p}{\|f_n\|_p} \ge \frac{p}{p-1}(1-\eta)$. *Comme* $\eta > 0$ *est arbitrairement petit, on a donc* $\limsup_{n\to+\infty} \frac{\|\mathrm{F}_n\|_p}{\|f_n\|_p} \ge \frac{p}{p-1}$, *ce qui donne :*

$$\sup\{\frac{\|\mathrm{F}\|_p}{\|f\|_p}, f \in \mathcal{L}^p, \|f\|_p \ne 0\} \ge \frac{p}{p-1}.$$

La majoration donnée à la question 3 permet de conclure :

$$\sup\{\frac{\|F\|_p}{\|f\|_p}, f \in \mathcal{L}^p, \|f\|_p \neq 0\} = \frac{p}{p-1}.$$

Exercice 6.15 (Continuité d'une application de L^p **dans** L^q**)** Soit (E, T, m) un espace mesuré fini, $p, q \in [1, \infty[$ et g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. :

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+^* \,;\; |g(s)| \leq C|s|^{\frac{p}{q}} + C,\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{6.43}$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Corrigé – *Cet exercice est très voisin de l'exercice 4.40 correspondant au cas $p = q = 1$, le corrigé des 3 premières questions va donc suivre essentiellement le corrigé de l'exercice 4.40.*

La fonction u est mesurable de E (muni de la tribu T) dans $\mathbb{R}$ (muni de la tribu $\mathcal{B}(R)$) et g est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu $\mathcal{B}(R)$). On en déduit, par composition, que $g \circ u$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

Pour $s \in [-1, 1]$, on a $|g(s)| \leq 2C$ et donc $|g(s)|^q \leq 2^q C^q$. Pour $s \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, on a $|g(s)| \leq 2C|s|^{\frac{p}{q}}$ et donc $|g(s)|^q \leq 2^q C^q |s|^p$. On a donc, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $|g(s)|^q \leq 2^q C^q + 2^q C^q |s|^p$. On en déduit que, pour tout $x \in E$, $|g \circ u(x)|^q = |g(u(x))|^q \leq 2^q C^q + 2^q C^q |u(x)|^p$, et donc :

$$\int |g \circ u|^q dm \leq 2^q C^q \|u\|_p^p + 2^q C^q m(E),$$

ce qui donne $g \circ u \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

On pose $L^r = L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, pour $r = p$ et $r = q$. Pour $u \in L^p$, on pose $G(u) = \{h \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m);\ h = g \circ v$ p.p.$\}$, avec $v \in u$. On a donc $G(u) \in L^q$ et cette définition a bien un sens, c'est-à-dire que $G(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u.

Corrigé – *La démonstration du fait que cette définition a bien un sens est essentiellement identique à celle du cas $p = q = 1$ (exercice 4.40). Elle n'est pas demandée ici.*

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$. On suppose que $u_n \to u$ p.p., quand $n \to +\infty$, et qu'il existe $F \in L^p$ t.q. $|u_n| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^q.

Corrigé – *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de u_n, encore notée u_n. On choisit aussi des représentants de u et F, notés toujours u et F. Comme $u_n \to u$ p.p. quand $n \to +\infty$ et que g est continu, il est facile de voir que $g \circ u_n \to g \circ u$ p.p.. On a donc $G(u_n) \to G(u)$ p.p..*

On remarque aussi que $|g \circ u_n| \leq C|u_n|^{\frac{p}{q}} + C \leq C|F|^{\frac{p}{q}} + C$ p.p. et donc $|G(u_n)| \leq C|F|^{\frac{p}{q}} + C$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $F \in F^p$, on a $|F|^{\frac{p}{q}} \in L^q$. Les fonctions constantes sont aussi dans L^q (car $m(E) < \infty$). On a donc $C|F|^{\frac{p}{q}} + C \in L^q$. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée dans L^q (théorème 6.9), il donne que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^q quand $n \to +\infty$.

3. Montrer que G est continue de L^p dans L^q.

Corrigé – *On raisonne par l'absurde. On suppose que G n'est pas continue de L^p dans L^q. Il existe donc $u \in L^p$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ t.q. $u_n \to u$ dans L^p et $G(u_n) \not\to G(u)$ dans L^q quand $n \to +\infty$.*

Comme $G(u_n) \not\to G(u)$, il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to +\infty$ et :

$$\|G(u_{\varphi(n)}) - G(u)\|_q \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{6.44}$$

(La suite $(G(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite $(G(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.)

Comme $u_{\varphi(n)} \to u$ dans L^p, on peut appliquer le théorème 6.11 (réciproque partielle de la convergence dominée dans L^q). Il donne l'existence de $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et de $F \in L^p$ t.q. $\psi(n) \to \infty$ quand $n \to +\infty$, $u_{\varphi\circ\psi(n)} \to u$ p.p. et $|u_{\varphi\circ\psi(n)}| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. (La suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$).

On peut maintenant appliquer la question 2 à la suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle donne que $G(u_{\varphi\circ\psi(n)}) \to G(u)$ dans L^q quand $n \to +\infty$, ce qui est en contradiction avec (6.44).

4. On considère ici $(E, T, m) = ([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et on prend $p = q = 1$. On suppose que g ne vérifie pas (6.43). On va construire $u \in L^1$ t.q. $G(u) \notin L^1$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que : $|g(\alpha_n)| \geq n|\alpha_n|$ et $|\alpha_n| \geq n$.

Corrigé – *On raisonne par l'absurde. On suppose que $|g(s)| < n|s|$ pour tout s t.q. $|s| \geq n$. On pose $M = \max\{|g(s)|, s \in [-n, n]\}$. On a $M < \infty$ car g est continue sur le compact $[-n, n]$ (noter que n est fixé). en posant $C = \max\{n, M\}$, on a donc :*

$$|g(s)| \leq C|s| + C, \text{ pour tout } s \in \mathbb{R},$$

en contradiction avec l'hypothèse que g ne vérifie pas (6.43).

Il existe donc s, t.q. $|s| \geq n$ et $|g(s)| \geq n|s|$. Ceci prouve l'existence de α_n.

(b) On choisit une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant les conditions données à la question précédente. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{|\alpha_n| n^2} = 1.$$

Corrigé – *Comme $\alpha_n \geq n$, on a $\frac{1}{|\alpha_n|n^2} \leq \frac{1}{n^3}$ et donc :*

$$0 < \beta = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{|\alpha_n| n^2} < \infty.$$

On choisit alors $\alpha = \frac{1}{\beta}$.

(c) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite définie par : $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n - \dfrac{\alpha}{|\alpha_n| n^2}$ (où α_n et α sont définies dans les 2 questions précédentes). On pose $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n 1_{[a_{n+1}, a_n[}$. Montrer que $u \in L^1$ et $G(u) \notin L^1$.

Corrigé – *Pour $n \geq 2$, on a $a_n = 1 - \sum_{p=1}^{n-1} \dfrac{\alpha}{|\alpha_p| p^2}$.*

Grâce au choix de α, on a donc $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_n \downarrow 0$, quand $n \to +\infty$.

La fonction u est bien mesurable et, par le théorème de convergence monotone (plus précisément, on utilise sa première conséquence, le corollaire 4.18) :

$$\int |u| d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |\alpha_n| (a_n - a_{n+1}) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\alpha}{n^2} < \infty.$$

Donc, $u \in \mathcal{L}^1$ et aussi $u \in L^1$ en confondant, comme d'habitude, u avec sa classe.

on remarque ensuite que $g \circ u = \sum_{n=1}^{+\infty} g(\alpha_n) 1_{[a_{n+1}, a_n[}$. On a donc :

$$\int |g \circ u| d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |g(\alpha_n)| (a_n - a_{n+1}) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\alpha}{n} = \infty.$$

ceci montre que $g \circ u \notin \mathcal{L}^1$ et donc $G(u) \notin L^1$.

Exercice 6.16 (Convergence presque partout et convergence des normes, par Egorov) Soit (E, T, m) un espace mesuré et $1 \leq p \leq \infty$. On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de L^p et $f \in L^p$. On suppose que $f_n \to f$ p.p., quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que $\|f\|_p \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_p$. [Traiter séparément le cas $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$.]

Corrigé – *On suppose que* $\liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_p < \infty$ *(sinon, l'inégalité à démontrer est immédiate). Comme d'habitude, on choisit des représentants de* f_n *et de* f *(qui sont donc dans* $\mathcal{L}^p$*).*

Pour $p < \infty$*, on utilise le lemme de Fatou (lemme 4.19) à la suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *où* $g_n = |f_n|^p$*. Comme* $g_n \to |f|^p$ *p.p., Il donne :*

$$\int |f|^p dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int |f_n|^p dm.$$

On en déduit que $\|f\|_p \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_p$.

Pour $p = \infty$*, il existe* $A \in T$ *t.q.* $m(A^c) = 0$ *et* $f_n(x) \to f(x)$*, quand* $n \to +\infty$*, pour tout* $x \in A$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, il existe* $A_n \in T$ *t.q.* $m(A_n^c) = 0$ *et* $f_n(x) \leq \|f_n\|_\infty$ *pour tout* $x \in A_n$*. On pose* $B = A \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$*, de sorte que* $B \in T$ *et* $m(B^c) = 0$*. Pour* $x \in B$*, on a :*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f\|_\infty.$$

On en déduit que $\|f\|_\infty \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty$.

2. En prenant $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ (où λ est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$), donner un exemple pour lequel la suite $(\|f_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ et $\|f\|_p < \lim_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p$. [On pourra aussi traiter séparément les cas $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$.]

Corrigé – *Pour* $p < \infty$*, on peut prendre* $f_n = n^{\frac{1}{p}} 1_{]0,\frac{1}{n}[}$ *(et* $f = 0$ *p.p.).*

Pour $p = \infty$*, on peut prendre* $f_n = 1_{]0,\frac{1}{n}[}$ *(et* $f = 0$ *p.p.).*

Pour la suite de l'exercice, on suppose que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, quand $n \to +\infty$.

3. Dans cette question, on suppose que $p = 1$.

(a) On suppose que $m(E) < \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. On choisit aussi un représentant de f, encore noté f. Soit $A \in T$ et $\varepsilon > 0$. On suppose que $f_n \to f$ uniformément sur A^c. Montrer qu'il existe n_0 t.q. :

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \varepsilon + \int_A |f| dm.$$

Corrigé – *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, on a :*

$$\begin{aligned}\int_A |f_n| dm &= \int_A |f| dm + \int_A (|f_n| - |f|) dm \\ &= \int_A |f| dm + \|f_n\|_1 - \|f\|_1 + \int_{A^c} (|f| - |f_n|) dm.\end{aligned} \tag{6.45}$$

Soit $\varepsilon > 0$*. Par convergence uniforme de* f_n *vers* f *sur* A^c *(qui est de mesure finie car* $m(E) < \infty$*), il existe* n_1 *t.q.*

$$n \geq n_1 \Rightarrow \int_{A^c} (|f| - |f_n|) dm \leq \int_{A^c} |f_n - f| dm \leq \varepsilon.$$

Comme $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$*, quand* $n \to +\infty$*, il existe* n_2 *t.q.* $n \geq n_2 \Rightarrow \|f_n\|_1 - \|f\|_1 \leq \varepsilon$*. Pour* $n_0 = \max(n_1, n_2)$*, on a donc :*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \int_A |f| dm + 2\varepsilon.$$

ce qui donne le résultat demandé.

(b) On suppose que $m(E) < \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1, quand $n \to +\infty$. [On pourra utiliser le théorème d'Egorov.]

Corrigé – *Soit* $\varepsilon > 0$. *D'après la proposition 4.50 page 141, il existe* $\delta > 0$ *t.q.*

$$(A \in T,\ m(A) \leq \delta) \Rightarrow \int_A |f| dm \leq \varepsilon.$$

Le théorème d'Egorov (théorème 3.39) donne l'existence de $A \in T$ *t.q.* $m(A) \leq \delta$ *et* $f_n \to f$ *uniformément sur* A^c. *On a donc :*

$$\int |f_n - f| dm \leq \int_{A^c} |f_n - f| dm + \int_A |f_n| dm + \int_A |f| dm.$$

On a $\int_A |f| dm \leq \varepsilon$. *Par la question précédente, il existe* n_0 *t.q.*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \int_A |f| dm + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon.$$

Par convergence uniforme de f_n *vers* f *sur* A^c, *il existe* n_1 *t.q.*

$$n \geq n_1 \Rightarrow \int_{A^c} |f_n - f| dm \leq m(E) \sup_{A^c} |f_n - f| \leq \varepsilon.$$

On a donc finalement :

$$n \geq \max(n_0, n_1) \Rightarrow \int |f_n - f| dm \leq 5\varepsilon.$$

Ce qui prouve que $f_n \to f$ *dans* L^1, *quand* $n \to +\infty$.

(c) On suppose que $m(E) = \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $C \in T$ t.q. :

$$m(C) < \infty \text{ et } \int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon.$$

Corrigé – *Cette question est résolue dans la proposition 4.50 page 141.*

(d) On suppose que $m(E) = \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Soit* $\varepsilon > 0$. *La question précédente donne l'existence de* $C \in T$ *t.q.* $m(C) < \infty$ *et* $\int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon$.

La proposition 4.50 donne ici aussi l'existence de $\delta > 0$ *t.q.* $(A \in T,\ m(A) \leq \delta) \Rightarrow \int_A |f| dm \leq \varepsilon$.

Le théorème d'Egorov (appliqué à la mesure définie par $m_C(B) = m(B \cap C)$ *pour* $B \in T$, *qui est bien une mesure finie sur* T*) donne l'existence de* $A \in T$ *t.q.* $m(A \cap C) \leq \delta$ *et* $f_n \to f$ *uniformément sur* A^c. *On a donc :*

$$\int |f_n - f| dm \leq \int_{A^c \cap C} |f_n - f| dm + \int_{A \cup C^c} |f_n| dm + \int_{A \cup C^c} |f| dm.$$

Par le choix de A *et de* C, *on a* $\int_{A \cup C^c} |f| dm = \int_{(A \cap C) \cup C^c} |f| dm \leq \int_{A \cap C} |f| dm + \int_{C^c} |f| dm \leq 2\varepsilon$.

En reprenant la question 3a, on remarque que l'hypothèse $m(E) < \infty$ *n'a été utilisée que pour dire que* $m(A^c) < \infty$. *Ici, comme* $m(A^c \cap C) < \infty$, *la même démonstration donne donc qu'il il existe* n_0 *t.q.*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int_{A \cup C^c} |f_n| dm \leq \int_{A \cup C^c} |f| dm + 2\varepsilon \leq 4\varepsilon.$$

Enfin, par convergence uniforme de f_n *vers* f *sur* A^c, *il existe* n_1 *t.q.*

$$n \geq n_1 \Rightarrow \int_{A^c \cap C} |f_n - f| dm \leq m(C) \sup_{A^c} |f_n - f| \leq \varepsilon.$$

On a donc :

$$n \geq \max(n_0, n_1) \Rightarrow \int |f_n - f| dm \leq 7\varepsilon.$$

Ce qui prouve que $f_n \to f$ *dans* L^1, *quand* $n \to +\infty$.

4. Dans cette question, on suppose que $1 < p < \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^p, quand $n \to +\infty$. [S'inspirer de la méthode suggérée pour le cas $p = 1$.]

Corrigé – *On traite directement le cas général (c'est-à-dire $m(E) \le \infty$). Soit $\varepsilon > 0$. Comme $|f|^p \in L^1$, La proposition 4.50 donne l'existence de $C \in T$ t.q. $m(C) < \infty$ et $\int_{C^c} |f|^p dm \le \varepsilon$. Elle donne ici aussi l'existence de $\delta > 0$ t.q. $(A \in T, m(A) \le \delta) \Rightarrow \int_A |f|^p dm \le \varepsilon$.*

On applique maintenant le théorème d'Egorov avec la mesure m_C (comme à la question précédente) et pour les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|f_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$. On obtient (en prenant l'union des ensembles donnés par le théorème pour ces deux suites) l'existence de $A \in T$ t.q. $m(A \cap C) \le \delta$, $f_n \to f$ uniformément sur A^c et $|f_n|^p \to |f|^p$ uniformément sur A^c . On a :

$$\int |f_n - f|^p dm \le \int_{A^c\cap C} |f_n - f|^p dm + 2^p \int_{A\cup C^c} |f_n|^p dm + 2^p \int_{A\cup C^c} |f|^p dm.$$

Par le choix de A et de C, on a $\int_{A\cup C^c} |f|^p dm = \int_{(A\cap C)\cup C^c} |f|^p dm \le \int_{A\cap C} |f|^p dm + \int_{C^c} |f|^p dm \le 2\varepsilon$.

Comme à la question précédente, en reprenant la question 3a, on obtient qu'il existe n_0 t.q.

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int_{A\cup C^c} |f_n|^p dm \le \int_{A\cup C^c} |f|^p dm + 2\varepsilon \le 4\varepsilon.$$

En fait, pour montrer cette inégalité avec la question 3a, on remplace (6.45) par :

$$\begin{aligned}\int_{A\cup C^c} |f_n|^p dm &= \int_{A\cup C^c} |f|^p dm + \int_{A\cup C^c} (|f_n|^p - |f|^p) dm\\ &= \int_{A\cup C^c} |f|^p dm + \|f_n\|_p^p - \|f\|_p^p + \int_{A^c\cap C} (|f|^p - |f_n|^p) dm,\end{aligned}$$

et on utilise la convergence de $\|f_n\|_p^p$ vers $\|f\|_p^p$, la convergence uniforme de $|f_n|^p$ vers $|f|^p$ et le fait que $m(C) < \infty$.

Enfin, par convergence uniforme de f_n vers f sur A^c, il existe n_1 t.q.

$$n \ge n_1 \Rightarrow \int_{A^c\cap C} |f_n - f|^p dm \le m(C) \sup_{A^c} |f_n - f|^p \le \varepsilon.$$

On a donc :

$$n \ge \max(n_0, n_1) \Rightarrow \int |f_n - f|^p dm \le 2^p (7\varepsilon).$$

Ce qui prouve que $f_n \to f$ dans L^p, quand $n \to +\infty$.

5. Dans cette question, on suppose que $p = \infty$ et que $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. Donner un exemple pour lequel $f_n \not\to f$ dans L^∞, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Pour $n \ge 2$, on pose $f = 1_{]\frac{1}{2},1[}$ et on définit f_n ainsi :*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ n(x - \frac{1}{2}) \text{ si } \frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1 \text{ si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

On a bien, quand $n \to +\infty$, $f_n \to f$ p.p., $\|f_n\|_\infty \to \|f\|_\infty$ et $f_n \not\to f$ dans L^∞ (car $\|f_n - f\|_\infty = 1$ pour tout $n \ge 2$).

Exercice 6.17 (Convergence presque partout et convergence des normes, par Fatou) Soit (E, T, m) un espace mesuré. Pour $p \in [1, \infty]$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Soit $p \in [1, \infty[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p et $f \in L^p$. On suppose que $f_n \to f$ p.p. et que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, quand $n \to +\infty$.

1. On suppose que $p = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = |f_n| + |f| - |f_n - f|$ (en ayant choisi des représentants de f_n et f). Montrer que $g_n \ge 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le lemme de Fatou, montrer que $f_n \to f$ dans L^1.

Corrigé – *Comme $|f - f_n| \le |f| + |f_n|$, on a bien $g_n \ge 0$. Comme g_n tend p.p. vers $2|f|$, le lemme de Fatou (lemme 4.19) donne :*

$$\int 2|f|dm \le \liminf_{n\to+\infty} \int g_n dm.$$

Comme $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$, on a $\liminf_{n\to+\infty} \int g_n dm = 2\int |f|dm - \limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|dm$. On a donc :

$$\int 2|f|dm \le 2\int |f|dm - \limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|dm.$$

On en déduit que $\limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|dm \le 0$, et donc que $f_n \to f$ dans L^1.

2. On suppose maintenant que $p \in]1,\infty[$. En utilisant le lemme de Fatou pour une suite convenable, montrer que $f_n \to f$ dans L^p.

Corrigé – *On prend maintenant $g_n = 2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p - |f_n - f|^p$. Comme $|f - f_n| \le |f| + |f_n| \le 2\max\{|f_n|,|f|\}$, on a $|f - f_n|^p \le 2^p \max\{|f_n|,|f|\}^p \le 2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p$. On a donc $g_n \ge 0$. Comme g_n tend p.p. vers $2^{p+1}|f|^p$, le lemme de Fatou (lemme 4.19) donne :*

$$\int 2^{p+1}|f|^p dm \le \liminf_{n\to+\infty} \int g_n dm.$$

Comme $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, on a

$$\liminf_{n\to+\infty} \int g_n dm = 2^{p+1} \int |f|^p dm - \limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|^p dm.$$

On a donc

$$\int 2^{p+1}|f|^p dm \le 2^{p+1} \int |f|^p dm - \limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|^p dm.$$

On en déduit que $\limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|^p dm \le 0$, et donc que $f_n \to f$ dans L^p.

Exercice 6.18 (Généralisation de l'exercice 6.17) Soit (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Soit p une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{R}_+$ tel que $0 < p(x) \le q$ pour tout $x \in E$.

1. (Question liminaire) Pour $(a,p) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^\star$, on pose

$$\psi(a,p) = a^p = \begin{cases} e^{p\ln(a)} & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Montrer que ψ est continue de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé – *Soit $(a,p) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^\star$ et (a_n,p_n) une suite de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^\star$ telle que $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$ et $p = \lim_{n\to+\infty} p_n$. Pour montrer que $\lim_{n\to+\infty} \psi(a_n,p_n) = \psi(a,p)$, on distingue deux cas :*

Premier cas

On suppose $a \ne 0$. On peut alors supposer que $a_n \ne 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors $\lim_{n\to+\infty} p_n \ln a_n = p\ln a$ et on en déduit la continuité de ψ au point (a,p).

Second cas

On suppose $a = 0$. Pour tout n tel que $a_n = 0$, on a $\psi(a_n,p_n) = \psi(a,p) = 0$. On peut donc se restreindre au cas $a_n > 0$. On a alors $\lim_{n\to+\infty} p_n \ln a_n = -\infty$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \psi(a_n,p_n) = 0 = \psi(a,p)$. ce qui donne la continuité de ψ au point (a,p) et termine cete question.

2. Montrer que l'application $x \mapsto |f(x)|^{p(x)}$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}_+$).

Corrigé – *Comme f est mesurable, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées telle que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Comme p est mesurable positive, il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées positives telle que $\lim_{n\to+\infty} p_n(x) = p(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. On peut même supposer que $p_n(x) > 0$ pour tout n et tout x (il suffit, par exemple, de remplacer la fonction p_n par la fonction $p_n + 1/n$).*

On pose $h_n(x) = |f_n(x)|^{p_n(x)} = \psi(|f_n(x)|, p_n(x))$.

La fonction h_n est étagée (et donc mesurable). La continuité de ψ nous donne $\lim_{n\to+\infty} h_n(x) = |f(x)|^{p(x)}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. On en déduit que la fonction $x \mapsto |f(x)|^{p(x)}$ est mesurable.

On suppose maintenant que

- $\displaystyle\int |f(x)|^{p(x)} dm(x) < +\infty$,
- $\displaystyle\int |f_n(x)|^{p(x)} dm(x) \to \int |f(x)|^{p(x)} dm(x)$, quand $n \to +\infty$,
- $f_n \to f$ p.p..

3. Montrer que $\displaystyle\int |f_n(x) - f(x)|^{p(x)} dm(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

[On pourra appliquer le lemme de Fatou à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $g_n = \mathrm{M}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$ en choisissant convenablement M dans $\mathbb{R}$.]

Corrigé – *On choisit $\mathrm{M} = 2^q$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathrm{E}$, on pose donc*

$$g_n(x) = 2^q |f_n(x)|^{p(x)} + 2^q |f(x)|^{p(x)} - |f_n(x) - f(x)|^{p(x)}.$$

Comme $|f(x) - f_n(x)| \le |f(x)| + |f_n(x)| \le 2\max\{|f_n(x)|, |f(x)|\}$, on a

$$|f(x) - f_n(x)|^{p(x)} \le 2^{p(x)} \max\{|f_n(x)|, |f(x)|\}^{p(x)} \le 2^{p(x)} |f_n(x)|^{p(x)} + 2^{p(x)} |f(x)|^{p(x)}.$$

Comme $p(x) \le q$, on en déduit

$$|f(x) - f_n(x)|^{p(x)} \le 2^q |f_n(x)|^{p(x)} + 2^q |f(x)|^{p(x)}.$$

On a donc $g_n(x) \ge 0$.

La question précédente donne que g_n est mesurable et comme $f_n \to f$ p.p., on a $g_n \to 2^{q+1}|f|^p$ p.p.. Le lemme de Fatou (lemme 4.19) donne alors :

$$\int 2^{q+1} |f|^p dm \le \liminf_{n\to+\infty} \int g_n dm.$$

Comme $\int |f_n(x)|^{p(x)} dm(x) \to \int |f(x)|^{p(x)} dm(x)$, on a

$$\liminf_{n\to+\infty} \int g_n dm = 2^{q+1} \int |f(x)|^{p(x)} dm(x) - \limsup_{n\to+\infty} \int |f(x) - f_n(x)|^{p(x)} dm(x).$$

On a donc

$$\int 2^{q+1} |f(x)|^{p(x)} dm(x) \le 2^{q+1} \int |f(x)|^{p(x)} dm(x) - \limsup_{n\to+\infty} \int |f(x) - f_n(x)|^{p(x)} dm(x).$$

On en déduit que $\int |f(x) - f_n(x)|^{p(x)} dm(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 6.19 (Compacité $\mathrm{L}^p - \mathrm{L}^q$) Dans cet exercice, $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ est un espace mesuré. Pour tout $1 \le r \le \infty$, on note L^r l'espace $\mathrm{L}^r_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ (et $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$).

1. Soit $r > 1$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^r. Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable, c'est-à-dire que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ t.q. } n \in \mathbb{N},\ \mathrm{A} \in \mathrm{T},\ m(\mathrm{A}) \le \delta \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} |g_n| dm \le \varepsilon.$$

[Utiliser l'inégalité de Hölder.]

Corrigé – *En utilisant l'inégalité de Hölder (inégalité (6.1)) entre* $r \in]1,\infty]$ *et son conjugué et les fonctions* g_n *et* 1_A*, on obtient, pour tout* $A \in T$ *de mesure finie :*

$$\int_A |g_n| dm \le \|g_n\|_r m(A)^{1-\frac{1}{r}}.$$

Si C *est un majorant de* $\{\|g_n\|_r,\ n \in \mathbb{N}\}$*, il suffit donc de prendre* $\delta > 0$ *t.q.* $C\delta^{1-\frac{1}{r}} \le \varepsilon$ *(ce qui est possible car* $r > 1$*) pour avoir le résultat demandé.*

Soit $1 \le p < q \le \infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^q. On suppose dans toute la suite que $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$.

2. (Compacité $L^p - L^q$.) On suppose que $m(E) < \infty$.

(a) Montrer que $f \in L^q$ (au sens où il existe $g \in \mathcal{L}^q$ t.q. $f = g$ p.p.).

Corrigé – *Pour chaque* $n \in \mathbb{N}$*, on choisit un représentant de* f_n*, encore noté* f_n*. Il existe* $A \in T$ *t.q.* $m(A) = 0$ *et* $f_n(x) \to f(x)$*, quand* $n \to +\infty$*, pour tout* $x \in A^c$*. On pose* $g(x) = f(x)$ *pour* $x \in A^c$ *et* $g(x) = 0$ *pour* $x \in A$*, de sorte que* $g = f$ *p.p. et* $g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n 1_{A^c}(x)$ *pour tout* $x \in E$.

Si $q < \infty$*, on applique le lemme de Fatou à la suite* $(|f_n|^q)_{n\in\mathbb{N}}$*. Il donne :*

$$\int |g|^q dm \le \liminf_{n\to+\infty} \int |f_n|^q dm \le C^q,$$

où C *est un majorant de* $\{\|f_n\|_q,\ n \in \mathbb{N}\}$*. On a donc* $g \in \mathcal{L}^q$ *et donc* $f \in L^q$ *(au sens demandé).*

Si $q = \infty$*, comme* $|f_n| \le \|f_n\|_\infty$ *p.p., on déduit de* $g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n 1_{A^c}(x)$ *pour tout* $x \in E$ *le fait que* $\|g\|_\infty \le C$ *p.p., où* C *est un majorant de* $\{\|f_n\|_\infty,\ n \in \mathbb{N}\}$*. On a donc, ici aussi,* $g \in \mathcal{L}^\infty$ *et donc* $f \in L^\infty$ *(au sens demandé).*

(b) Montrer que $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to +\infty$. [Utiliser la question 1 avec $g_n = |f_n - f|^p$ et un théorème du cours.]

Corrigé – *La suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* L^r*, avec* $r = \frac{q}{p} > 1$*. Elle est donc équi-intégrable (par la question 1). Comme elle converge p.p. vers* 0 *et que* $m(E) < \infty$*, le théorème de Vitali (théorème 4.51) donne que la suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0 *dans* L^1 *et donc que* $f_n \to f$ *dans* L^p *quand* $n \to +\infty$.

3. On suppose que $m(E) = \infty$.

(a) Soit $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$. Montrer que $f_n 1_B \to f 1_B$ dans L^p quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *On définit la mesure* m_B *sur* T *en posant* $m(A) = m(A \cap B)$ *pour tout* $A \in T$*. la mesure* m_B *est finie. On peut donc appliquer la question 2 avec cette mesure. On obtient que* $f_n \to f$*, quand* $n \to +\infty$*, dans l'espace* $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m_B)$*. Ceci qui donne que* $f_n 1_B \to f 1_B$ *dans* L^p *quand* $n \to +\infty$ *(car,* $\int |f_n - f|^p 1_B dm = \int |f_n - f|^p dm_B$*).*

(b) On prend ici $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $q = 2$, $p = 1$, $f = 0$. Donner un exemple pour lequel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$, $f_n \not\to 0$ dans L^1 quand $n \to +\infty$ (et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans L^2, $f_n \to 0$ p.p. quand $n \to +\infty$).

Corrigé – *On peut prendre, par exemple,* $f_n = 1_{]n,n+1[}$.

Exercice 6.20 (Convergence "dominée en norme", mesure non finie) Pour tout $s \in [1,\infty]$, on note L^s l'espace $L^s_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $r, p, q \in \overline{\mathbb{R}}$ t.q. $1 \le r < p < q \le +\infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f vérifient les trois conditions suivantes :

- $f_n \to f$ p.p., quand $n \to +\infty$,
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^r et dans L^q,

– $f_n(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$, uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $f \in \mathrm{L}^r \cap \mathrm{L}^q$ (distinguer les cas $q < +\infty$ et $q = +\infty$).
2. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $\delta > 0$ t.q.

$$\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{N},\ \lambda(\mathrm{A}) \le \delta \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} |f_n|^p d\lambda \le \varepsilon.$$

3. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(\mathrm{C}) < +\infty$ et

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{\mathrm{C}^c} |f_n|^p d\lambda \le \varepsilon.$$

4. Montrer que $f_n \to f$ dans L^p. [Utiliser le théorème de Vitali, donné dans le cours.]
5. On suppose de plus que $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ t.q. $|x| \ge 1$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^s pour tout $s \in [1, q[$ et donner un exemple pour lequel $f_n \not\to f$ dans L^q (distinguer les cas $q < +\infty$ et $q = +\infty$).

Exercice 6.21 (Sur les suites convergentes en mesure et bornées dans $\mathcal{L}^p$) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré fini. Pour $r \in [1, +\infty]$, on note $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Soit $p \in]1, +\infty]$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathcal{L}^p$ (c'est-à-dire $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p < +\infty$) et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ en mesure quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}^p$. [On rappelle que, comme $f_n \to f$ en mesure, il existe une sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge p.p. vers f.]

Corrigé – *On note $\mathrm{M} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p$. Il existe une sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge p.p. vers f. On note $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) une telle sous-suite.*
Si $p < +\infty$, on applique alors le lemme de Fatou à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $g_n = |f_{\varphi(n)}|^p$. Comme $g_n \to |f|^p$ p.p., on en déduit que

$$\int |f|^p dm \le \liminf_{n\to+\infty} \int g_n dm \le \mathrm{M}^p < +\infty.$$

Ce qui prouve que $f \in \mathcal{L}^p$. (Ce résultat est aussi vrai si $p = 1$.)
Si $p = \infty$, comme $|f_{\varphi(n)}| \le \mathrm{M}$ p.p., on en déduit que $|f| \le \mathrm{M}$ p.p. et donc que $f \in \mathcal{L}^\infty$.

2. Soit $q \in [1, p[$. Montrer que $\|f_n - f\|_q \to 0$ quand $n \to +\infty$. [Pour $\varepsilon > 0$, on pourra utiliser, avec $\mathrm{A}_{n,\varepsilon} = \{|f_n - f| \le \varepsilon\}$, l'égalité suivante :
$\int |f_n - f|^q dm = \int_{\mathrm{A}_{n,\varepsilon}} |f_n - f|^q dm + \int_{\mathrm{A}^c_{n,\varepsilon}} |f_n - f|^q dm$.]

Corrigé – *Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\int |f_n - f|^q dm = \int_{\mathrm{A}_{n,\varepsilon}} |f_n - f|^q dm + \int_{\mathrm{A}^c_{n,\varepsilon}} |f_n - f|^q dm \le \varepsilon^q m(\mathrm{E}) + \int |f_n - f|^q 1_{\mathrm{A}^c_{n,\varepsilon}} dm. \tag{6.46}$$

On suppose tout d'abord $p < +\infty$. En appliquant l'inégalité de Hölder à la dernière intégrale (avec l'exposant p/q et son conjugué), on obtient

$$\int |f_n - f|^q dm \le \varepsilon^q m(\mathrm{E}) + \Big(\int |f_n - f|^p dm\Big)^{\frac{q}{p}} m(\mathrm{A}^c_{n,\varepsilon})^{1-\frac{q}{p}}.$$

Comme $\|f_n\|_p \le \mathrm{M}$ et $\|f\|_p \le \mathrm{M}$, on en déduit

$$\int |f_n - f|^q dm \le \varepsilon^q m(\mathrm{E}) + (2^{p+1}\mathrm{M}^p)^{\frac{q}{p}} m(\mathrm{A}^c_{n,\varepsilon})^{1-\frac{q}{p}}.$$

Soit maintenant $\eta > 0$. On choisit tout d'abord $\varepsilon > 0$ t.q. $\varepsilon^q m(\mathrm{E}) \le \eta$. Puis, comme $f_n \to f$ en mesure, on a $\lim_{n\to+\infty} m(\mathrm{A}^c_{n,\varepsilon}) = 0$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \ge n_0 \Rightarrow (2^{p+1}\mathrm{M}^p)^{\frac{q}{p}} m(\mathrm{A}^c_{n,\varepsilon})^{1-\frac{q}{p}} \le \eta$$

et donc

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int |f_n - f|^q dm \leq 2\eta.$$

Ce qui montre bien que $\|f_n - f\|_q \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

On suppose maintenant que $p = \infty$. *Comme* $|f_n| \leq \mathrm{M}$ *p.p. et* $|f| \leq \mathrm{M}$ *p.p., l'inégalité 6.46 donne*

$$\int |f_n - f|^q dm \leq \varepsilon^q m(\mathrm{E}) + 2^q \mathrm{M}^q m(\mathrm{A}^c_{n,\varepsilon}).$$

On conclut alors, comme dans le cas $p < +\infty$, *que* $\|f_n - f\|_q \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

3. (Question plus difficile.) Donner un exemple pour lequel $\|f_n - f\|_p \not\to 0$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Pour cet exemple, on prend* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ *et* $p = 2$. *Pour* $n \in \mathbb{N}^\star$, *on définit* f_n *par*

$$f_n(x) = \sqrt{n} \text{ si } 0 < x < \frac{1}{n} \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } \frac{1}{n} < x < 1.$$

Avec ce choix, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ *est bornée dans* $\mathcal{L}^2$, *elle converge en mesure vers la fonction nulle mais* $\|f_n\|_2 \not\to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

Exercice 6.22 (Caractérisation de $\mathcal{L}^\infty$) Soit $(\mathrm{X}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré. Pour $p \in [1, \infty]$, on note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}, m)$. Soit f une application de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ il existe $f_n \in \mathcal{L}^\infty$ et $g_n \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = f_n + g_n$, $\|f_n\|_\infty \leq 1$ et $\|g_n\|_1 \leq \frac{1}{n}$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|f\|_\infty \leq 1$.

Corrigé – *On remarque d'abord que* f *est mesurable car* f_1 *et* g_1 *sont mesurables. Puis, pour montrer que* $f \in \mathcal{L}^\infty$, *on peut, par exemple, procéder de la manière suivante.*

Soit $\varepsilon > 0$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^\star$. *Comme* $|f_n| \leq 1$ *p.p., on a* $|f| \leq 1 + |g_n|$ *p.p. et donc*

$$m(\{|f| \geq 1 + \varepsilon\}) \leq m(\{|g_n| \geq \varepsilon\}).$$

Puis, comme $m(\{|g_n| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int |g_n| dm \leq \frac{1}{n\varepsilon}$, *on en déduit (quand* $n \to +\infty$*)* $m(\{|f| \geq 1 + \varepsilon\}) = 0$.

Finalement, comme $\{|f| > 1\}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^\star} \{|f| \geq 1 + \frac{1}{n}\}$, *la* σ*-additivité de* m *donne* $m(\{|f| > 1\}) = 0$ *et donc* $|f| \leq 1$ *p.p.. Ceci donne bien* $f \in \mathcal{L}^\infty$ *et* $\|f\|_\infty \leq 1$.

N.B. Une autre méthode consiste à utiliser le théorème 6.11. Il donne que, après extraction éventuelle d'une sous-suite, on a $g_n \to 0$ *p.p. (quand* $n \to +\infty$*). On a donc* $f_n \to f$ *p.p.. De* $\|f_n\|_\infty \leq 1$, *on déduit alors* $\|f\|_\infty \leq 1$.

Exercice 6.23 (Convergence en mesure et domination) Cet exercice généralise au cas $p > 1$ l'exercice 4.36. Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$. On note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^p$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

- $f_n \to f$ en mesure quand $n \to +\infty$.
- Il existe $g \in \mathcal{L}^p$, t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ p.p..

1. Soit $\varepsilon > 0$. En remarquant que $|f| \leq |f - f_n| + |f_n|$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m(\{|f| - g \geq \varepsilon\}) \leq m(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}).$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $m(\{|f| - g \geq \varepsilon\}) = 0$. En déduire que $|f| \leq g$ p.p. et que $f \in \mathcal{L}^p$.
3. On suppose, dans cette question, que $m(\mathrm{E}) < +\infty$.
   (a) Soit $\eta > 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int |f_n - f|^p dm \leq \eta m(\mathrm{E}) + \int_{\{|f_n - f|^p > \eta\}} 2^p g^p dm.$$

(b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\int |f_n - f|^p dm = 0$.

[On rappelle que si, h est une fonction intégrable de E dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q.

$$\mathrm{A} \in \mathrm{T},\ m(\mathrm{A}) \leq \delta \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} |h| dm \leq \varepsilon.]$$

4. On ne suppose plus que $m(\mathrm{E}) < +\infty$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\int |f_n - f|^p dm = 0$. [On rappelle que si, h est une fonction intégrable de E dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mathrm{C} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{C}) < +\infty$ et $\int_{\mathrm{C}^c} |h| dm \leq \varepsilon$.]

Exercice 6.24 (Espace $\mathrm{L}^1 + \mathrm{L}^\infty$**)**
Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et L^p l'espace $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On désigne par $\|\cdot\|_p$ la norme dans $\mathcal{L}^p$ ou L^p.
On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ somme d'un élément de $\mathcal{L}^1$ et d'un élément de $\mathcal{L}^\infty$, c'est-à-dire que $f \in \mathrm{E}$ si il existe $g \in \mathcal{L}^1$ et $h \in \mathcal{L}^\infty$ t.q. $f = g + h$.

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $g \in \mathcal{L}^1$, $h \in \mathcal{L}^\infty$ et $f = g + h$. Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Montrer que $\|f 1_{\mathrm{K}}\|_1 \leq \|g\|_1 + \lambda(\mathrm{K})\|h\|_\infty$.
   Pour $f \in \mathrm{E}$, on pose $\mathrm{N}(f) = \inf\{\|g\|_1 + \|h\|_\infty$, avec g et h t.q. $f = g + h$, $g \in \mathcal{L}^1$ et $h \in \mathcal{L}^\infty\}$.
3. Soit $f \in \mathrm{E}$ t.q. $\mathrm{N}(f) = 0$. Montrer que $f 1_{\mathrm{K}} = 0$ p.p. pour tout compact K de $\mathbb{R}$.
   En déduire que $f = 0$ p.p..
4. Soit $f_1, f_2 \in \mathrm{E}$ t.q. $f_1 = f_2$ p.p.. Montrer que $\mathrm{N}(f_1) = \mathrm{N}(f_2)$
   On note maintenant $\tilde{\mathrm{E}}$ l'ensemble E quotienté par la relation d'équivalence "= p.p.". (Cet espace est souvent noté $\mathrm{L}^1 + \mathrm{L}^\infty$.)
   Un élément de $\tilde{\mathrm{E}}$ est donc un ensemble d'éléments de E (deux à deux égaux p.p.).
5. montrer que $\tilde{\mathrm{E}}$ a une structure d'espace vectoriel induite par celle de E.
   Pour $\mathrm{F} \in \tilde{\mathrm{E}}$, on pose $\mathrm{N}(\mathrm{F}) = \mathrm{N}(f)$ où f est un élément de F. (Cette définition est cohérente grâce à la question précédente.)
6. Montrer que N est une norme sur $\tilde{\mathrm{E}}$.
7. Montrer que $\tilde{\mathrm{E}}$ muni de la norme N est un espace de Banach (c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet).
8. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Montrer que L^p s'injecte continûment dans $\tilde{\mathrm{E}}$ (c'est-à-dire que l'application $f \mapsto f$ est linéaire continue de L^p dans $\tilde{\mathrm{E}}$).
   [On pourra commencer par les cas $p = 1$ et $p = +\infty$.]

Exercice 6.25 (Injection de l^p **in** l^q **si** $p < q$**)**
Soit $1 \leq p < q < +\infty$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

1. On suppose dans cette question que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p = 1$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^q \leq 1$.
2. On suppose dans cette question que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p < +\infty$.
   Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^q < +\infty$ et que $(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^q)^{1/q} \leq (\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p)^{1/p}$. [On pourra commencer par le cas où $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p = 1$.]
3. On note $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \lambda)$. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est constante sur les intervalles $]i, i+1[$, $i \in \mathbb{N}$. On suppose que $f \in \mathcal{L}^p$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^q$ et $\|f\|_q \leq \|f\|_p$. Cette propriété est-elle encore vraie si $q = +\infty$?

Exercice 6.26 (Exemples de v.a. appartenant à L^q**)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X une v.a. (réelle). Dans les trois cas suivants, donner les valeurs de $q \in [1, \infty]$ pour lesquels la variable aléatoire X appartient à l'espace $\mathrm{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$:

1. X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ ($\lambda > 0$) (c'est-à-dire que la loi de X a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, avec $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{]0,+\infty[}$ pour $x \in \mathbb{R}$).

   Corrigé – *Soit $q \in [1, \infty[$, on a :*
   $$\int_\Omega |X|^q dP = \int_\mathbb{R} |x|^q dP_X(x) = \int_0^\infty x^q \lambda \exp(-\lambda x) dx < \infty,$$
   car la fonction $x \mapsto |x|^q \lambda \exp(-\lambda x)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $X \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   Soit maintenant $q = \infty$. Pour tout $a > 0$, on a, avec $A =]a, \infty[$:
   $$P[X > a] = \int_\Omega 1_A(X) dP = \int_\mathbb{R} 1_A(x) dP_X(x) = \int_a^\infty \lambda \exp(-\lambda x) dx > 0,$$
   car $\lambda \exp(-\lambda x) > 0$ pour tout $x > a$. Donc $X \notin L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. X suit une loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ (la loi de X a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, avec $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{x^2 + c^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$).

   Corrigé – *Il suffit ici de considérer le cas $q = 1$. On a :*
   $$\int_\Omega |X| dP = \int_\mathbb{R} |x| dP_X(x) \ge \frac{c}{\pi} \int_0^\infty \frac{x}{x^2 + c^2} dx \ge \frac{c}{\pi} \int_c^\infty \frac{1}{2x} dx = \infty.$$
   On a donc $X \notin L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ce qui donne aussi $X \notin L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pour tout $q \in [1, \infty]$ (car $L^q(\Omega, \mathcal{A}, P) \subset L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pour $q > 1$).

3. X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ ($p \in]0, 1[$) (c'est-à-dire que $P(\{X = k\}) = p(1-p)^{k-1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$).

   Corrigé – *On note $A_k = \{X = k\} = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = k\}$ et $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Par σ-additivité de P, on a $P(A) = \sum_{k=1}^\infty P(A_k) = \sum_{k=1}^\infty p(1-p)^{k-1} = 1$. On a donc $P(A^c) = 0$.*
   Soit $q \in [1, \infty[$, on a :
   $$\int_\Omega |X|^q dP = \int_A |X|^q dP = \sum_{k=1}^\infty \int_{A_k} |X|^q dP = \sum_{k=1}^\infty k^q p(1-p)^{k-1} < \infty,$$
   car la série de terme général $k^q p(1-p)^{k-1}$ est convergente (pour le voir, il suffit, par exemple, de remarquer que
   $$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^q p(1-p)^k}{k^q p(1-p)^{k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^q (1-p)}{k^q} = 1 - p < 1.$$
   On a donc $X \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   Soit maintenant $q = \infty$. Pour tout $a > 0$, on a $P[X > a] \ge P(A_k) > 0$ si $k > a$. On a donc $X \notin L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

6.5.2 Espaces de Hilbert, Espace L^2

Exercice 6.27 (Séries orthogonales dans L^2) Soit H un espace de Hilbert et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H deux à deux orthogonaux. Un exemple important est $H = L^2_\mathbb{R}(E, T, m)$ ou (E, T, m) est un espace mesuré. On note $\|\cdot|_H$ la norme dans H.

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge (dans H) si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_H^2$ est convergente (dans $\mathbb{R}$).

   Corrigé – *Comme H est un espace complet, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est convergente dans H si et seulement si la suite des sommes partielles, $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n\in\mathbb{N}}$, est de Cauchy (dans H). Cette suite des sommes partielles est de Cauchy si et seulement si elle vérifie :*

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ n_0 \text{ t.q. } m \geq n \geq n_0 \Rightarrow \|\sum_{k=n}^{m} f_k\|_{\mathrm{H}}^2 \leq \varepsilon. \tag{6.47}$$

Le fait que les f_n soient deux à deux orthogonaux nous donne (théorème de Pythagore) que

$$\|\sum_{k=n}^{m} f_k\|_{\mathrm{H}}^2 = \sum_{k=n}^{m} \|f_k\|_{\mathrm{H}}^2.$$

L'assertion 6.47 est donc équivalente à dire que la suite $(\sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_{\mathrm{H}}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (dans $\mathbb{R}$), ce qui est équivalent à dire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{\mathrm{H}}^2$ est convergente (dans $\mathbb{R}$).

2. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge (dans H). On note f la somme de cette série. Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_{\varphi(n)}$ converge aussi vers f (dans H). (La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est donc commutativement convergente, voir la définition 6.64.)

Corrigé – *Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge (dans* H*), la question 1 donne que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{\mathrm{H}}^2$ est convergente (dans $\mathbb{R}$). On va en déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_{\varphi(n)}$ converge aussi vers f dans* H.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{\mathrm{H}}^2$ est convergente, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n\geq \mathrm{N}} \|f_n\|_{\mathrm{H}}^2 \leq \varepsilon$.
Pour $i \in \{0, \ldots, \mathrm{N}\}$, soit $n_i \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n_i) = i$. On a alors

$$n \geq \max\{n_0, \ldots, n_{\mathrm{N}}\} \Rightarrow \|\sum_{p=0}^{n} f_{\varphi(p)} - \sum_{p=0}^{n} f_p\|_{\mathrm{H}}^2 \leq \sum_{p=\mathrm{N}}^{\infty} \|f_p\|_{\mathrm{H}}^2 \leq \varepsilon.$$

Mail il existe aussi m tel que

$$n \geq m \Rightarrow \|f - \sum_{p=0}^{n} f_p\|_{\mathrm{H}}^2 \leq \varepsilon.$$

On a donc

$$n \geq \{m, n_0, \ldots, n_{\mathrm{N}}\} \Rightarrow \|\sum_{p=0}^{n} f_{\varphi(p)} - f\|_{\mathrm{H}}^2 \leq 4\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_{\varphi(n)}$ converge aussi vers f dans H.

Exercice 6.28 (L^p n'est pas un espace de Hilbert si $p \neq 2$) Montrer que $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (muni de sa norme usuelle) n'est pas un espace de Hilbert si $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$. [Pour $p \neq 2$, chercher des fonctions f et g mettant en défaut l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire l'identité (6.13) page 234.]

Corrigé – *On prend $f = 1_{]0,1[}$ et $g = 1_{]1,2[}$, de sorte que $f \in \mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $g \in \mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (avec la confusion habituelle entre une classe et l'un de ses représentants) et que :*

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 1,\ \|f + g\|_p = \|f - g\|_p = 2^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p \neq 2$, on a donc $\|f + g\|_p^2 + \|f - g\|_p^2 = 2(2^{\frac{2}{p}}) \neq 4 = 2\|f\|_p^2 + 2\|g\|_p^2$.

L'identité du parallélogramme, c'est-à-dire l'identité (6.13) page 234, n'est donc pas satisfaite (pour $p \neq 2$), ce qui prouve que, pour $p \neq 2$, la norme $\|\cdot\|_p$ (sur $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$) n'est pas induite par un produit scalaire.

Exercice 6.29 (Caractérisation des espaces de Hilbert séparables) Soit E un espace de Hilbert (réel) de dimension infinie. Montrer que E est séparable si et seulement s'il existe une base hilbertienne dénombrable de E [l'une des implications a déjà été vue].

Exercice 6.30 (projection sur le cône positif de L^2) Soit (X, T, m) un espace mesuré et $E = L^2_{\mathbb{R}}(X, T, m)$. On pose $C = \{f \in E,\ f \geq 0 \text{ p.p.}\}$.

1. Montrer que C est une partie convexe fermée non vide de E.

> **Corrigé** – L^2 *est un e.v., et* $tf + (1-t)g \geq 0$ *p.p.. On a donc* $tf + (1-t)g \in C$*, ce qui prouve que* C *est convexe.*
>
> *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ *t.q.* $f_n \to f$ *dans* L^2 *quand* $n \to +\infty$*. On veut montrer que* $f \in C$ *(pour en déduire que* C *est fermée).*
>
> *Pour tout* $\varphi \in L^2$*, on a* $\int f_n \varphi dm \to \int f \varphi dm$ *(car* $|\int f_n \varphi dm - \int f \varphi dm| \leq \|f_n - f\|_2 \|\varphi\|_2$*).*
>
> *On choisit* $\varphi = f^- \in L^2$*. Comme* $f_n f^- \geq 0$ *p.p., on en déduit* $-\int (f^-)^2 dm = \int f f^- dm \geq 0$*, ce qui prouve que* $f^- = 0$ *p.p. et donc que* $f \geq 0$ *p.p.. On a donc montré que* $f \in C$ *et donc que* C *est fermée.*
>
> *Pour montrer que* C *est fermée, il est aussi possible d'utiliser la réciproque partielle du théorème de convergence dominée (théorème 6.11).*

2. Soit $f \in E$. Montrer que $P_C f = f^+$.

> **Corrigé** – *On a* $f^+ \in C$*. Pour montrer que* $P_C f = f^+$*, on utilise la première caractérisation de la projection (proposition 6.49).*
>
> *Soit* $g \in C$*, on a* $(f - f^+ \mid f^+ - g)_2 = -(f^- \mid f^+ - g)_2 = \int f^- g dm \geq 0$ *(on a utilisé ici le fait que* $f^- f^+ = 0$ *p.p.). La proposition 6.49 donne alors* $P_C f = f^+$*.*

Exercice 6.31 (Exemple de non existence de la projection) Dans cet exercice, construit un espace de Banach réel E, un sous espace vectoriel fermé F de E, $g \in E \setminus F$ (et donc $d(g, F) = \inf\{\|g - f\|_E,\ f \in F\} > 0\ldots$) tels qu'il n'existe pas d'élément $f \in E$ t.q. $d(g, F) = \|g - f\|_E$.

On prend $E = C([0,1], \mathbb{R})$, on munit E de la norme habituelle, $\|f\|_E = \max\{|f(x)|,\ x \in [0,1]\}$. On pose $F = \{f \in E;\ f(0) = 0,\ \int_0^1 f(x)dx = 0\}$. Enfin, on prend $g \in E$ défini par $g(x) = x$, pour tout $x \in [0,1]$.

1. Montrer que E est un espace de Banach (réel).

> **Corrigé** – *Il est clair que* E *est un e.v. sur* $\mathbb{R}$ *et que* $\|\cdot\|_E$ *est une norme sur* E*, c'est la norme associée à la convergence uniforme. On montre maintenant que* E *est complet.*
>
> *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy de* E*. Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe donc* $n(\varepsilon)$ *t.q. :*
>
> $$x \in [0,1],\ n, m \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon. \tag{6.48}$$
>
> *De (6.48) on déduit que, pour tout* $x \in [0,1]$*, la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy. Il existe donc* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *t.q.* $f_n(x) \to f(x)$ *quand* $n \to +\infty$*, pour tout* $x \in [0,1]$*. Pour montrer que la convergence de* f_n *vers* f *est uniforme, il suffit de reprendre (6.48) avec un* x *fixé et un* n *fixé (*$n \geq n(\varepsilon)$*) et de faire tendre* m *verts* ∞*, on obtient :*
>
> $$x \in [0,1],\ n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \tag{6.49}$$
>
> *ce qui donne bien la convergence uniforme de* f_n *vers* f*. Comme les* f_n *sont continues, on en déduit que* f *est continue (comme limite uniforme de fonctions continues), c'est-à-dire* $f \in E$*. Enfin, (6.49) donne* $\|f_n - f\|_E \leq \varepsilon$ *si* $n \geq n(\varepsilon)$ *et donc* $f_n \to f$ *dans* E*, quand* $n \to +\infty$*, ce qui prouve que* E *est complet.*

2. Montrer que F est un sous espace vectoriel fermé de E.

> **Corrigé** – *On note* T *et* S *les applications de* E *dans* $\mathbb{R}$ *définies par* $T(f) = f(0)$ *et* $S(f) = \int_0^1 f(x)dx$*. Il s'agit donc d'applications linéaires de* E *dans* $\mathbb{R}$*. Elles sont également continues car* $|T(f)| \leq \|f\|_E$ *et* $|S(f)| \leq \|f\|_E$ *pour tout* $f \in E$*.*
>
> *On en déduit que* F *est un s.e.v. fermé de* E *en remarquant que* $F = \mathrm{Ker}T \cap \mathrm{Ker}S$*.*

3. Soit $f \in F$. Montrer que $\|g-f\|_E \geq 1/2$. [On pourra remarquer que $\int_0^1 |(g-f)(x)|dx \geq \int_0^1 (g-f)(x)dx = 1/2$.]

Corrigé – *Comme $(g-f)(x) \leq |(g-f)(x)|$ pour tout $x \in [0,1]$, on a bien*

$$\int_0^1 (g-f)(x)dx \leq \int_0^1 |(g-f)(x)|dx.$$

On remarque ensuite que, puisque $f \in F$, on a $\int_0^1 (g-f)(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$. Et donc :

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 |(g-f)(x)|dx.$$

Puis, comme $\int_0^1 |(g-f)(x)|dx \leq \|g-f\|_E$, on en déduit que $\|g-f\|_E \geq 1/2$.

4. Montrer qu'il n'existe pas d'élément $f \in F$ t.q. $\|g-f\|_E = 1/2$.

Corrigé – *Dans le raisonnement de la question précédente, on remarque que les $\|g-f\|_E > 1/2$ sauf si $\int_0^1 |(g-f)(x)|dx = \|g-f\|_E$ et $\int_0^1 (g-f)(x)dx = \int_0^1 |(g-f)(x)|dx$.*

Soit $f \in F$ t.q. $\|g-f\|_E = 1/2$. On a donc $\int_0^1 (g-f)(x)dx = \int_0^1 |(g-f)(x)|dx$ et $\int_0^1 |(g-f)(x)|dx = \|g-f\|_E$. On en déduit que $(g-f)(x) = |(g-f)(x)| = \|g-f\|_E = 1/2$ pour tout $x \in [0,1]$. En effet, s'il existe, par exemple, $x_0 \in [0,1]$ t.q. $(g-f)(x_0) < |(g-f)(x_0)|$, on peut alors trouver (par continuité de $g-f$) un intervalle ouvert non vide sur lequel $(g-f) < |(g-f)|$ et on en déduit $\int_0^1 (g-f)(x)dx < \int_0^1 |(g-f)(x)|dx$ (un raisonnement analogue donne $|(g-f)(x)| = \|g-f\|_E$ pour tout $x \in [0,1]$).

On a donc montré que $f(x) = g(x) - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [0,1]$ ce qui est en contradiction avec $f(0) = 0$.

5. Montrer que $d(g,F) = 1/2$. [On pourra, par exemple, montrer que $\|g-f_n\|_E \to 1/2$, avec f_n défini par $f_n(x) = -\beta_n x$, pour $x \in [0,1/n]$, $f_n(x) = (x-1/n) - \beta_n/n$, pour $x \in [1/n,1]$, et β_n choisi pour que $f_n \in F$.]

Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n définie par $f_n(x) = -\beta_n x$, pour $x \in [0,1/n]$, $f_n(x) = (x-1/n) - \beta_n/n$, pour $x \in [1/n,1]$. En prenant $\beta_n = (n-1)^2/(2n-1)$ on a $\int_0^1 f_n(x)dx = 0$ et donc $f_n \in F$. On remarque ensuite que $\|f_n - g\|_E = 1/n - \beta_n/n \to 1/2$ quand $n \to +\infty$. On en déduit que $d(g,F) = 1/2$.*

Exercice 6.32 (Lemme de Lax–Milgram) Soit E est un espace de Hilbert réel et a une application bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$. On note $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire dans E et $\|\cdot\|$ la norme dans E. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ t.q. :

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|, \ \forall u,v \in E \text{ (continuité de } a\text{)},$$

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2, \ \forall u \in E \text{ (coercivité de } a\text{)}.$$

Soit $T \in E'$. On va montrer, dans cet exercice, qu'il existe un et un seul $u \in E$ t.q. $T(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$ (ceci est le lemme de Lax-Milgram).

1. On suppose, dans cette question, que a est symétrique. On définit une application bilinéaire, notée $(\cdot \mid \cdot)_a$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par $(u \mid v)_a = a(u,v)$. Montrer que $(\cdot \mid \cdot)_a$ est un produit scalaire sur E et que la norme induite par ce produit scalaire est équivalente à la norme $\|\cdot\|$. En déduire qu'il existe un et un seul $u \in E$ t.q. $T(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$. [Utiliser le théorème de représentation de Riesz.]

Corrigé – *L'application $(\cdot \mid \cdot)_a : E \times E \to \mathbb{R}$ est symétrique, linéaire par rapport à son premier argument, et $(u \mid u)_a > 0$ pour $u \in E \setminus \{0\}$ (grâce à la coercivité de a). C'est donc un produit scalaire sur E.*

La norme induite par ce produit scalaire est équivalente à la norme sur E, *notée* $\|\cdot\|$. *En effet, les hypothèses de continuité et coercivité de a donnent*

$$\sqrt{\alpha}\|u\| \leq \|u\|_a \leq \sqrt{C}\|u\|, \forall u \in E.$$

Comme T *est dans* E′, *c'est-à-dire linéaire et continu pour la norme* $\|\cdot\|$, T *est aussi linéaire et continu pour la norme* $\|\cdot\|_a$. *Or,* E *muni de la norme* $\|\cdot\|_a$ *est un espace de Hilbert car la norme* $\|\cdot\|_a$ *est induite par un produit scalaire et* E *est complet avec cette norme car il est complet avec la norme* $\|\cdot\|$ *qui est équivalente. On peut donc appliquer le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56) avec* E *muni de la norme* $\|\cdot\|_a$. *Il donne qu'il existe un et seul* $u \in E$ *t.q.* $T(v) = (u \mid v)_a$ *pour tout* $v \in E$, *c'est-à-dire qu'il existe un et un seul* $u \in E$ *t.q. :*

$$T(v) = a(u,v) \text{ pour tout } v \in E.$$

2. On ne suppose plus que a est symétrique.

(a) Soit $u \in E$, Montrer que l'application $v \mapsto a(u,v)$ est un élément de E′. En déduire qu'il existe un et un seul élément de E, notée Au, t.q. $(Au \mid v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$.

Corrigé – *L'application* $\psi_u : E \to \mathbb{R}$, *définie par* $\psi_u(v) = a(u,v)$ *pour tout* $v \in E$, *est bien linéaire de* E *dans* $\mathbb{R}$. *Elle est aussi continue car* $|\psi_u(v)| = |a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$ *pour tout v dans* E. *On a donc* $\psi_u \in E'$ *(et* $\|\psi_u\|_{E'} \leq C\|u\|$*).*

Comme $\psi_u \in E'$, *le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56) donne qu'il existe un élément de* E, *noté* Au *t.q.* $(Au \mid v) = \psi_u(v)$ *pour tout* $v \in E$, *c'est-à-dire :*

$$(Au \mid v) = a(u,v) \text{ pour tout } v \in E.$$

On note, dans la suite A l'application qui à $u \in E$ associe $Au \in E$.

(b) Montrer que A est linéaire continue de E dans E.

Corrigé – *Soit* $u_1, u_2 \in E$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. *On note* $w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. *Comme a est linéaire par rapport à son premier argument, on a :*

$$a(w,v) = \alpha_1 a(u_1,v) + \alpha_2 a(u_2,v) \text{ pour tout } v \in E,$$

et donc $(Aw \mid v) = \alpha_1(Au_1 \mid v) + \alpha_2(Au_2 \mid v)$ *pour tout* $v \in E$, *ou encore*

$$(Aw - \alpha_1 Au_1 - \alpha_2 Au_2 \mid v) = 0 \text{ pour tout } v \in E.$$

On en déduit que $Aw = \alpha_1 Au_1 - \alpha_2 Au_2$ *(il suffit de prendre* $v = Aw - \alpha_1 Au_1 - \alpha_2 Au_2$ *dans l'égalité précédente) et donc que* A *est une application linéaire de* E *dans* E.

Pour montrer la continuité de A, *on remarque que (pour tout* $u \in E$*)* $|(Au \mid v)| = |a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$ *pour tout* $v \in E$. *D'où l'on déduit, en prenant* $v = Au$, *que* $\|Au\| \leq C\|u\|$.

L'application A *est donc linéaire continue de* E *dans* E.

Il est important, pour la suite, de remarquer que la coercivité de a donne :

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u,u) = (Au \mid u) \leq \|Au\|\|u\|, \text{ pour tout } u \in E,$$

et donc :

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|Au\|, \text{ pour tout } u \in E. \tag{6.50}$$

(c) Montrer que Im(A) est fermé.

Corrigé – *Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Im}(A)$ *et* $f \in E$ *t.q.* $f_n \to f$ *dans* E *quand* $n \to +\infty$. *On veut montrer que* $f \in \mathrm{Im}(A)$.

Comme $f_n \in \mathrm{Im}(A)$, *il existe, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in E$ *t.q.* $Au_n = f_n$. *L'inégalité (6.50) donne alors, pour tout* $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n - u_m\| \leq \frac{1}{\alpha}\|f_n - f_m\|.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *étant de Cauchy (car convergente), on en déduit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy et donc convergente (car* E *est complet).*

Il existe donc $u \in \mathrm{E}$ t.q. $u_n \to u$ (dans E) quand $n \to +\infty$. D'où l'on déduit, comme A est continue, que $f_n = \mathrm{A}u_n \to \mathrm{A}u$ (dans E) quand $n \to +\infty$. On a donc $f = \mathrm{A}u$, ce qui prouve que $f \in \mathrm{Im(A)}$ et donc que $\mathrm{Im(A)}$ est fermé.

(d) Montrer que $(\mathrm{Im(A)})^\perp = \{0\}$.

Corrigé – *Soit $u \in (\mathrm{Im(A)})^\perp$. On a donc $(\mathrm{A}v \mid u) = 0$ pour tout $v \in \mathrm{E}$. On prend $v = u$, on obtient, grâce à la coercivité de a :*

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u,u) = (\mathrm{A}u \mid u) = 0,$$

et donc $u = 0$. Ceci prouve bien que $(\mathrm{Im(A)})^\perp = \{0\}$.

(e) Montrer que A est bijective et en déduire qu'il existe un et un seul $u \in \mathrm{E}$ t.q. $\mathrm{T}(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in \mathrm{E}$.

Corrigé – *L'inégalité (6.50) donne l'injectivité de A. Pour montrer la surjectivité de A, on remarque que $\mathrm{Im(A)}$ est un s.e.v. fermé de E, on a donc $\mathrm{E} = \mathrm{Im(A)} \oplus (\mathrm{Im(A)})^\perp$ (cf. théorème 6.53). Comme $(\mathrm{Im(A)})^\perp = \{0\}$, on a donc $\mathrm{E} = \mathrm{Im(A)}$, c'est-à-dire A surjective.*

On a bien bien montré que A est bijective.

Le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56) donne l'existence d'un et un seul $z \in \mathrm{E}$ t.q.

$$\mathrm{T}(v) = (z \mid v),\ \forall v \in \mathrm{E}.$$

D'autre part, la définition de A donne :

$$a(u,v) = (\mathrm{A}u \mid v),\ \forall v \in \mathrm{E}.$$

Pour $u \in \mathrm{E}$, on a donc :

$$(\mathrm{T}(v) = a(u,v),\ \forall v \in \mathrm{E}) \Leftrightarrow (z = \mathrm{A}u).$$

La bijectivité de A donne l'existence d'un et d'un seul $u \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{A}u = z$. On a donc un et un seul $u \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{T}(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in \mathrm{E}$.

Exercice 6.33 (Exemple de projection dans L^2) On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$, par L^p l'espace $\mathrm{L}^p_\mathbb{R}(]0,1[,\mathrm{B}(]0,1[),\lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_\mathbb{R}(]0,1[,\mathrm{B}(]0,1[),\lambda)$.

Soit $g \in \mathrm{L}^2$.

1. Soit $v \in \mathrm{L}^2$ et $\phi \in \mathrm{C}^\infty_c(]0,1[,\mathbb{R})$ (on rappelle que $\phi \in \mathrm{C}^\infty_c(]0,1[,\mathbb{R})$ signifie que ϕ est une application de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, et qu'il existe $\mathrm{K} \subset]0,1[$, K compact, t.q. $\phi(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1[\setminus \mathrm{K}$) . Montrer que $vg\phi' \in \mathrm{L}^1$.

   Corrigé – *Comme d'habitude, on va confondre un élément de L^p avec l'un de ses représentants.*

   Comme $g, v \in \mathrm{L}^2$, on a $vg \in \mathrm{L}^1$ (d'après le lemme 6.5).
   Puis, comme $\phi' \in \mathrm{C}^\infty_c(]0,1[,\mathbb{R})$, on a $\phi' \in \mathrm{L}^\infty$ et donc (par la proposition 6.26) $vg\phi' \in \mathrm{L}^1$.

   On pose $\mathcal{C} = \{v \in \mathrm{L}^2\ ;\ v \leq 1$ p.p., $\int vg\phi' d\lambda \leq \int \phi d\lambda$, pour tout $\phi \in \mathrm{C}^\infty_c(]0,1[,\mathbb{R})$, $\phi \geq 0\}$. (On rappelle que $\phi \geq 0$ signifie $\phi(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0,1[$.)

2. Montrer que $\mathcal{C}$ est un convexe fermé non vide de L^2.

   Corrigé – – *$\mathcal{C} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathcal{C}$.*

   – *On montre la convexité de $\mathcal{C}$. Soient $v, w \in \mathcal{C}$ et $t \in [0,1]$. On a $tv + (1-t)w \in \mathrm{L}^2$ (car L^2 est un e.v.). Du fait que $v \leq 1$ p.p. et $w \leq 1$ p.p., on déduit immédiatement (comme $t \geq 0$ et $(1-t) \geq 0$) que $tv + (1-t)w \leq t + (1-t) = 1$ p.p.. Enfin, soit $\phi \in \mathrm{C}^\infty_c(]0,1[,\mathbb{R})$, $\phi \geq 0$. Comme $t \geq 0$ et $(1-t) \geq 0$, on remarque que*

   $$t\int vg\phi' d\lambda \leq t\int \phi d\lambda,$$
   $$(1-t)\int wg\phi' d\lambda \leq (1-t)\int \phi d\lambda.$$

Ce qui donne, en additionnant,

$$\int (tv + (1-t)w)g\phi' d\lambda \leq \int \phi d\lambda.$$

On en déduit que $(tv + (1-t)w) \in \mathcal{C}$ *et donc que* $\mathcal{C}$ *est convexe.*

– *On montre enfin que* $\mathcal{C}$ *est fermée. Soient* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ *et* $v \in \mathrm{L}^2$ *t.q.* $v_n \to v$ *dans* L^2 *quand* $n \to +\infty$*. On veut montrer que* $v \in \mathcal{C}$*.*

On remarque tout d'abord que, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (inégalité (6.11)), on a :

$$\int v_n w d\lambda \to \int v w d\lambda, \text{ quand } n \to +\infty, \forall w \in \mathrm{L}^2. \tag{6.51}$$

On prend $w = v1_{v>1} \in \mathrm{L}^2$ *dans (6.51). Comme* $v_n w \leq w$ *p.p., on a* $\int v_n w d\lambda \leq \int w d\lambda$*. On déduit alors de (6.51) que* $\int v w d\lambda \leq \int w d\lambda$ *et donc que* $\int (v-1)v1_{v>1} d\lambda \leq 0$*. Comme* $v(v-1)1_{v>1} \geq 0$ *p.p., on a donc nécessairement* $v(v-1)1_{v>1} = 0$ *p.p. et donc* $\lambda(\{v > 1\}) = 0$*, c'est-à-dire* $v \leq 1$ *p.p..*

Soit maintenant $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$*,* $\phi \geq 0$*. Par les inégalités de Cauchy-Schwarz et Hölder, on a :*

$$\int v_n g\phi' d\lambda \to \int v g\phi' d\lambda, \text{ quand } n \to +\infty.$$

En effet,

$$\begin{aligned} |\int v_n g\phi' d\lambda - \int v g\phi' d\lambda| &\leq \|\phi'\|_\infty \int |v_n - v||g| d\lambda \\ &\leq \|\phi'\|_\infty \|v_n - v\|_2 \|g\|_2 \to 0, \end{aligned}$$

quand $n \to +\infty$*.*

Du fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$*,* $\int v_n g\phi' d\lambda \leq \int \phi d\lambda$*, on obtient donc, passant à limite quand* $n \to +\infty$*, que* $\int v g\phi' d\lambda \leq \int \phi d\lambda$*, ce qui montre bien que* $v \in \mathcal{C}$*.*

On a bien montré que $\mathcal{C}$ *est fermée.*

3. On désigne par $\mathbf{1}$ la fonction constante et égale à 1 sur $]0,1[$. Soit $u \in \mathcal{C}$. Montrer que :
$(\|u - \mathbf{1}\|_2 \leq \|v - \mathbf{1}\|_2$ pour tout $v \in \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\int (\mathbf{1} - u)(u - v) d\lambda \geq 0$ pour tout $v \in \mathcal{C})$.

Corrigé – *On remarque d'abord que*

$$(\|u - \mathbf{1}\|_2 \leq \|v - \mathbf{1}\|_2 \text{ pour tout } v \in \mathcal{C}) \Leftrightarrow u = \mathrm{P}_{\mathcal{C}}\mathbf{1}.$$

On utilise maintenant la première caractérisation de la projection (proposition 6.49), elle donne que

$$u = \mathrm{P}_{\mathcal{C}}\mathbf{1} \Leftrightarrow ((\mathbf{1} - u \mid u - v)_2 \geq 0 \text{ pour tout } v \in \mathcal{C}),$$

et donc que

$$u = \mathrm{P}_{\mathcal{C}}\mathbf{1} \Leftrightarrow (\int (\mathbf{1} - u)(u - v) d\lambda \geq 0 \text{ pour tout } v \in \mathcal{C}). \tag{6.52}$$

4. Soit $u \in \mathcal{C}$ t.q. $\|u - \mathbf{1}\|_2 \leq \|v - \mathbf{1}\|_2$ pour tout $v \in \mathcal{C}$. On suppose que $u, g \in \mathrm{C}^1(]0,1[,\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $(ug)'(x) \geq -1$ pour tout $x \in]0,1[$.

Corrigé – *On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe* $c \in]0,1[$ *t.q.* $(ug)'(c) < -1$*. Par continuité de* $(ug)'$ *en c, il existe donc* a, b *t.q.* $0 < a < c < b < 1$ *et* $(ug)'(x) < -1$ *pour tout* $x \in]a,b[$*.*

On peut construire $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$ *t.q.* $\varphi \geq 0$*,* $\varphi(c) > 0$ *et* $\varphi = 0$ *sur* $]a,b[^c$*. une telle fonction* φ *est obtenue, par exemple, en prenant :*

$$\varphi(x) = \varphi_0\left(\frac{2y - (a+b)}{b-a}\right), \ x \in]0,1[, \tag{6.53}$$

avec :

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x) = \exp \tfrac{1}{x^2-1}, \ x \in]-1,1[, \\ &\varphi_0(x) = 0, \ x \in \mathbb{R} \setminus]-1,1[. \end{aligned} \tag{6.54}$$

Comme $u \in \mathcal{C}$, on a, d'après la définition de $\mathcal{C}$ (car φ est un choix possible pour ϕ) :

$$\int_a^b u(x)g(x)\varphi'(x)dx = \int ug\varphi' d\lambda \le \int \phi d\lambda = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Comme ug est de classe C^1 sur $[a,b]$, on peut intégrer par parties sur $[a,b]$ pour obtenir (noter que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$) $\int_a^b -(ug)'(x)\varphi(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$, ou encore :

$$\int_a^b ((ug)'(x)+1)\varphi(x)dx \ge 0.$$

Ce qui impossible car $((ug)'+1)\varphi$ est une fonction continue négative, non identiquement nulle sur $[a,b]$ (car non nulle au point c).

(b) Soit $x \in]0,1[$ t.q. $u(x) < 1$. Montrer que $(ug)'(x) = -1$.

Corrigé – *On raisonne encore par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $c \in]0,1[$ t.q. $u(c) < 1$ et $(ug)'(c) \ne -1$. Comme on sait déjà que $(ug)'(x) \ge -1$ pour tout $x \in]0,1[$, on a donc $(ug)'(c) > -1$.*

Par continuité de u et $(ug)'$ en c, il existe donc a, b, avec $0 < a < c < b < 1$, et $\delta > 0$ t.q. $u(x) \le 1-\delta$ et $(ug)'(x) > -1+\delta$ pour tout $x \in]a,b[$.

On utilise la même fonction φ qu'à la question précédente, c'est-à-dire donnée, par exemple, par (6.53) et (6.54). La propriété importante est que $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$ soit t.q. $\varphi \ge 0$, $\varphi(c) > 0$ et $\varphi = 0$ sur $]a,b[^c$.

On va montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $u + \varepsilon\varphi \in \mathcal{C}$.

On remarque d'abord que $u+\varepsilon\varphi \in L^2$ (pour tout $\varepsilon > 0$). Puis, en prenant $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1 = \frac{\delta}{\|\varphi\|_\infty}$, on a $u+\varepsilon\varphi \le 1$ p.p.. Enfin, soit $\phi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$, $\phi \ge 0\}$. On a, en utilisant une intégration par parties sur un intervalle compact de $]0,1[$ contenant le support de ϕ :

$$\int ((u+\varepsilon\varphi)g)\phi' d\lambda = -\int (ug)'\phi d\lambda - \varepsilon \int (\varphi g)'\phi d\lambda.$$

En utilisant le fait que $(ug)' \ge -1$ (partout) et $(ug)' > -1+\delta$ sur $]a,b[$, on en déduit

$$\int ((u+\varepsilon\varphi)g)\phi' d\lambda \le \int \phi d\lambda - \delta \int_a^b \phi(x)dx - \varepsilon \int_a^b (\varphi g)'\phi d\lambda \le \int \phi d\lambda,$$

si $0 < \varepsilon \le \frac{\delta}{M}$, avec $M = \max_{x\in[a,b]} |(\varphi g)'(x)| < \infty$ car $(\varphi g)'$ est continue sur $[a,b]$.

En prenant $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, on obtient donc $u+\varepsilon\varphi \in \mathcal{C}$. Comme $u = P_{\mathcal{C}}\mathbf{1}$, on peut maintenant prendre $v = u+\varepsilon\varphi$ dans la caractérisation de $P_{\mathcal{C}}\mathbf{1}$, on obtient, comme $\varepsilon > 0$:

$$\int_a^b (1-u(x))\varphi(x)dx = \int (1-u)\varphi d\lambda \le 0.$$

Ce qui est impossible car $(1-u)\varphi$ est une fonction continue positive, non identiquement nulle sur $]a,b[$ (car non nulle en c).

(c) Montrer que u est solution du problème suivant :

$(ug)'(x) \ge -1$, pour tout $x \in]0,1[$,
$u(x) \le 1$, pour tout $x \in]0,1[$,
$(1+(ug)'(x))(u(x)-1) = 0$, pour tout $x \in]0,1[$.

Corrigé – *On a déjà vu que $(ug)'(x) \ge -1$, pour tout $x \in]0,1[$. Comme $u \in \mathcal{C}$, on a $u \le 1$ p.p.. Mais, comme u est continue sur $]0,1[$, l'ensemble $\{u > 1\}$ est un ouvert, cet ensemble est donc vide (car un ouvert de mesure de Lebesgue nulle est toujours vide). On a donc $u \le 1$ partout. Enfin, le fait que $(1+(ug)'(x))(u(x)-1) = 0$, pour tout $x \in]0,1[$, découle de la question précédente qui montre justement que $(1+(ug)'(x)) = 0$ si $u(x) < 1$.*

Exercice 6.34 (Approximation dans L^2) On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$, par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$. On note $dt = d\lambda(t)$.
Pour $f \in L^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $T_k f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$T_k f(x) = k \int_{\frac{n(x)}{k}}^{\frac{n(x)+1}{k}} f(t)dt, \tag{6.55}$$

où $n(x)$ est l'entier de $\mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{n(x)}{k} \leq x < \dfrac{n(x)+1}{k}$ (l'entier n dépend donc de x).

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L^2$. Montrer que $T_k f \in L^2$ (plus précisément, $T_k f \in \mathcal{L}^2$ et on confond alors, comme d'habitude, $T_k f$ avec $\{g \in \mathcal{L}^2,\ g = T_k f \text{ p.p.}\}$) et que $\|T_k f\|_2 \leq \|f\|_2$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   Corrigé – *Comme $f\mathbf{1}_{]\frac{n}{k},\frac{n+1}{k}[} \in L^1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $T_k(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose $c_n = k\int_{\frac{n}{k}}^{\frac{n+1}{k}} f(t)dt$, pour $n \in \mathbb{Z}$, de sorte que $T_k(x) = c_n$ pour tout $x \in [\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}[$.*

   $T_k f$ est mesurable car $(T_k f)^{-1}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}, c_n\in A}[\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}[\in B(\mathbb{R})$, pour tout $A \subset \mathbb{R}$.

   Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in [\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}[$, on a (en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

   $$(T_k(x))^2 = c_n^2 \leq k \int_{\frac{n}{k}}^{\frac{n+1}{k}} f^2(t)dt.$$

   On en déduit (on utilise ici le premier corollaire du théorème de convergence monotone, corollaire 4.18) :

   $$\int (T_k f)^2 d\lambda = \sum_{n\in Z} \frac{1}{k} c_n^2 \leq \sum_{n\in Z} \int_{\frac{n}{k}}^{\frac{n+1}{k}} f^2(t)dt = \int f^2 d\lambda.$$

   On a donc $T_k f \in L^2$ et $\|T_k f\|_2 \leq \|f\|_2$.

2. Soit $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (*i.e.* f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact). Montrer que $T_k f \to f$ dans L^2 quand $k \to \infty$.

   Corrigé – *Soit $a > 0$ t.q. $f = 0$ sur $[-a, a]^c$. Comme f est uniformément continue, on a $T_k f \to f$ uniformément (sur $\mathbb{R}$) quand $k \to \infty$. En remarquant que $T_k f = 0$ sur $[-a-1, a+1]^c$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit*

   $$\|T_k f - f\|_2^2 = \int (T_k f - f)^2 d\lambda \leq 2(a+1)\|T_k f - f\|_\infty^2 \to 0, \text{ quand } k \to \infty.$$

3. Soit $f \in L^2$. Montrer que $T_k f \to f$ dans L^2 quand $k \to \infty$.
   [On pourra utilser la densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans L^2, exercice 6.4.]

   Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$. Par densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans L^2, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_2 \leq \varepsilon$. Comme T_k est un opérateur linéaire, on a, en utilisant la question 1 :*

   $$\|T_k f - f\|_2 \leq \|T_k f - T_k\varphi\|_2 + \|T_k\varphi - \varphi\|_2 + \|\varphi - f\|_2 \leq 2\|\varphi - f\|_2 + \|T_k\varphi - \varphi\|_2. \tag{6.56}$$

   La question 2 donne l'existence de $k_0 \in \mathbb{N}$ t.q. le dernier terme de (6.56) soit inférieur à ε pour $k \geq k_0$. On a donc $\|T_k f - f\|_2 \leq 3\varepsilon$ pour $k \geq k_0$, ce qui prouve que $T_k f \to f$, dans L^2, quand $k \to \infty$.

Exercice 6.35 (Projections orthogonales)
On pose $H = L^2_{\mathbb{R}}(]-1,+1[,\mathcal{B}(]-1,+1[),\lambda)$. (On rappelle que $\mathcal{B}(]-1,+1[)$ est la tribu borélienne de $]-1,1[$ et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(]-1,+1[)$.) Soit $F=\{f\in H$ t.q. $\int_{]-1,+1[} f\,d\lambda=0\}$. Soit $G=\{f\in H$ t.q. $\int_{]-1,0[} f\,d\lambda=\int_{]0,1[} f\,d\lambda\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels fermés de H. Déterminer les sous-espaces $F^\perp$, $G^\perp$ et $F\cap G$.

Corrigé – *Pour $f\in H$, on pose $T(f)=\displaystyle\int_{]-1,+1[} f\,d\lambda$ et $S(f)=\displaystyle\int_{]-1,0[} f\,d\lambda-\int_{]0,1[} f\,d\lambda$.*

L'inégalité de Cauchy–Schwarz entre f et $1_{]-1,+1[}$, pour T, et f et $(1_{]-1,0[}-1_{]0,1[})$, pour S, montre que $T(f)$ et $S(f)$ sont bien définis pour tout $f\in H$ et que, pour tout $f\in H$:

$$|T(f)|\le\sqrt{2}\|f\|_2,\ |S(f)|\le\sqrt{2}\|f\|_2.$$

On en déduit que T et S sont des éléments de H' et donc que $F=\mathrm{Ker}T$ et $G=\mathrm{Ker}S$ sont des s.e.v. fermés de H.

De plus, comme $T\neq 0$ et $S\neq 0$, on a $\dim(F^\perp)=\dim(G^\perp)=1$. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre $v\in F^\perp$, $v\neq 0$ (un tel v existe car $T\neq 0$ et $H=F\oplus F^\perp$). Pour tout $w\in F^\perp$, on a alors $w=w-\frac{T(w)}{T(v)}v+\frac{T(w)}{T(v)}v$. On en déduit que $(w-\frac{T(w)}{T(v)}v)\in F\cap F^\perp=\{0\}$ et donc que $w\in\mathbb{R}v=vect\{v\}$, ce qui donne $F^\perp=\mathbb{R}v$ et donc $\dim(F^\perp)=1$. Un raisonnement semblable donne $\dim(G^\perp)=1$.

Soit f l'élément de H t.q. $f=1$ p.p.. On a clairement $f\in F^\perp$ (car $(f\mid h)_2=T(h)=0$ pour tout $h\in F$) et donc, comme $\dim F^\perp=1$, $F^\perp=\mathbb{R}f$.

Soit g l'élément de H t.q. $g=1$ p.p. sur $]-1,0[$ et $g=-1$ sur $]0,1[$. On a clairement $g\in G^\perp$ (car $(g\mid h)_2=S(h)=0$ pour tout $h\in G$) et donc, comme $\dim G^\perp=1$, $G^\perp=\mathbb{R}g$.

Il reste à déterminer $F\cap G$. Soit $h\in F\cap G$. On a donc $\int_{]-1,0[} h\,d\lambda=\int_{]0,1[} h\,d\lambda$, car $h\in G$, et donc, comme $h\in F$, $0=\int_{]-1,+1[} f\,d\lambda=2\int_{]-1,0[} h\,d\lambda=2\int_{]0,1[} h\,d\lambda$, ce qui donne $\int_{]-1,0[} h\,d\lambda=\int_{]0,1[} h\,d\lambda=0$.

Réciproquement, si $h\in H$ est t.q. $\int_{]-1,0[} h\,d\lambda=\int_{]0,1[} h\,d\lambda=0$, on a bien $S(h)=T(h)=0$ et donc $h\in F\cap G$. On a donc :

$$F\cap G=\{h\in H;\ \int_{]-1,0[} h\,d\lambda=\int_{]0,1[} h\,d\lambda=0\}.$$

2. Calculer, pour $g\in H$, les projections orthogonales $P_F(g)$ et $P_G(g)$ de g sur F et G.

Corrigé – *Soit $h\in H$. Comme $h-P_Fh\in F^\perp$, il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ t.q. $h-P_Fh=\alpha$ p.p.. Comme $P_Fh\in F$, on a $T(P_Fh)=0$. On en déduit que $2\alpha=\int_{-1}^1 h(t)dt$ et donc*

$$P_Fh=h-\frac{1}{2}\int_{-1}^1 h(t)dt \text{ p.p..}$$

Comme $h-P_Gh\in G^\perp$, il existe $\beta\in\mathbb{R}$ t.q. $h-P_Gh=\beta$ p.p. sur $]-1,0[$ et $h-P_Gh=-\beta$ p.p. sur $]0,1[$. Comme $P_Gh\in G$, on a $S(P_Gh)=0$. On en déduit que $2\beta=\int_{-1}^0 h(t)dt-\int_0^1 h(t)dt$ et donc

$$P_Gh=h-\tfrac{1}{2}(\textstyle\int_{-1}^0 h(t)dt-\int_0^1 h(t)dt) \text{ p.p. sur }]-1,0[,$$
$$P_Gh=h+\tfrac{1}{2}(\textstyle\int_{-1}^0 h(t)dt-\int_0^1 h(t)dt) \text{ p.p. sur }]1,0[.$$

Exercice 6.36 (Projection orthogonale dans L^2) On pose $L^2=L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (muni de sa structure hilbertienne habituelle) et, pour $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ donnés, $\alpha<\beta$, $\mathcal{C}=\{f\in L^2;\ \alpha\le f\le\beta$ p.p.$\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est vide si et seulement si $\alpha\beta>0$.

Corrigé – – *Si $\alpha\beta > 0$ (c'est-à-dire α et β non nuls et de même signe), on a alors pour tout $f \in \mathcal{C}$, $f \geq \gamma = \min(|\alpha|, |\beta|) > 0$ p.p.. Donc, $\int f^2 d\lambda \geq \gamma^2 \lambda(\mathbb{R}) = \infty$, en contradiction avec $f \in \mathrm{L}^2$. On a donc $\mathcal{C} = \emptyset$.*

– *On suppose maintenant $\alpha\beta \leq 0$. On a alors $\alpha \leq 0 \leq \beta$ et donc $0 \in \mathcal{C}$, ce qui prouve que $\mathcal{C} \neq \emptyset$.*

2. On suppose maintenant que $\alpha\beta \leq 0$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une partie convexe fermée non vide de L^2. Soit $f \in \mathrm{L}^2$, montrer que $\mathrm{P}_{\mathcal{C}} f(x) = \max\{\min\{f(x), \beta\}, \alpha\}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. ($\mathrm{P}_{\mathcal{C}} f$ désigne la projection de f sur $\mathcal{C}$.)

Corrigé – *(a) On sait déjà que $\mathcal{C} \neq \emptyset$. On montre maintenant que $\mathcal{C}$ est convexe. Soient $f, g \in \mathcal{C}$ et $t \in [0,1]$. On a $tf + (1-t)g \in \mathrm{L}^2$ car L^2 est un e.v.. Puis, du fait que $\alpha \leq f \leq \beta$ p.p. et $\alpha \leq g \leq \beta$ p.p., on déduit immédiatement que $\alpha \leq tf + (1-t)g \leq \beta$ p.p.. Donc, $tf + (1-t)g \in \mathcal{C}$.*

Pour montrer que $\mathcal{C}$ est fermée, soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ et $f \in \mathrm{L}^2$ t.q. $f_n \to f$ dans L^2, quand $n \to +\infty$. On peut montrer que $\alpha \leq f \leq \beta$ p.p. comme dans le corrigé 6.33 (question 2) ou (pour changer de méthode...) de la manière suivante :

D'après le théorème 6.11 (réciproque partielle de la convergence dominée), il existe une sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant p.p. vers f, c'est-à-dire il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to +\infty$ et $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$. Comme $\alpha \leq f_{\varphi(n)} \leq \beta$ p.p., on en déduit $\alpha \leq f \leq \beta$ p.p., et donc que $f \in \mathcal{C}$, ce qui prouve que $\mathcal{C}$ est fermée.

(b) On montre maintenant que $\mathrm{P}_{\mathcal{C}} f = \max\{\min\{f, \beta\}, \alpha\}$.

On confond comme d'habitude f avec l'un de ses représentants, et on définit g par

$$g = \max\{\min\{f, \beta\}, \alpha\} = \alpha 1_{\{f<\alpha\}} + f 1_{\{\alpha \leq f \leq \beta\}} + \beta 1_{\{f > \beta\}}.$$

g est donc une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Puis, comme $|g| \leq |f|$ p.p., on a bien $g \in \mathcal{L}^2$ (et donc $g \in \mathrm{L}^2$ avec la confusion habituelle). Enfin, il est immédiat que $\alpha \leq g \leq \beta$ p.p.. Donc, $g \in \mathcal{C}$.

Pour montrer que $g = \mathrm{P}_{\mathcal{C}} f$, on utilise la première caractérisation de la projection (proposition 6.49). Soit $h \in \mathcal{C}$, on a :

$$\begin{aligned}(f - g \mid g - h)_2 &= \int (f-g)(g-h) d\lambda \\ &= \int (f-\alpha)(\alpha - h) 1_{\{f<\alpha\}} d\lambda + \int (f-\beta)(\beta-h) 1_{\{f>\beta\}} d\lambda \geq 0,\end{aligned}$$

car $\alpha \leq h \leq \beta$ p.p.. On en déduit que $g = \mathrm{P}_{\mathcal{C}} f$.

Exercice 6.37 (L^p n'est toujours pas un Hilbert...) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $\mathrm{L}^p = \mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$.

1. On suppose ici qu'il existe A et B $\in$ T t.q. $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$, et $0 < m(\mathrm{B}) < +\infty$, $0 < m(\mathrm{A}) < +\infty$. Montrer que L^p est un Hilbert si et seulement si $p = 2$. [On pourra utiliser l'identité du parallélogramme avec des fonctions de L^p bien choisies.]

Corrigé – *On sait déjà que L^2 est un espace de Hilbert.*

On suppose maintenant que $p \neq 2$ (et $p \in [1, \infty]$) et on va montrer que L^p n'est pas un espace de Hilbert. Pour cela, On pose $f = 1_\mathrm{A}$ et $g = 1_\mathrm{B}$. On a bien $f, g \in \mathrm{L}^p$. On va montrer que l'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée pour ces deux fonctions. On distingue les cas $p < \infty$ et $p = \infty$.

Premier cas : *$p < \infty$. On pose $a = m(\mathrm{A})$ et $b = m(\mathrm{B})$ (noter que $a, b \in]0, \infty[$). On a :*

$$\frac{1}{2}(\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2) = (a+b)^{\frac{2}{p}},\ \|f\|_p^2 + \|g\|_p^2 = a^{\frac{2}{p}} + b^{\frac{2}{p}}.$$

On en déduit $\frac{1}{2}(\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2) - \|f\|_p^2 + \|g\|_p^2 = (a+b)^\alpha (1 - h_a(t))$ avec $\alpha = \frac{2}{p}$ et $h_\alpha(t) = t^\alpha + (1-t)^\alpha$, $t = \frac{a}{a+b} \in]0, 1[$.

Un étude de la fonction h_α montre que :

– *Si $\alpha \in]0, 1[$, on a $h_\alpha(t) > 1$ pour tout $t \in]0, 1[$,*

– *Si* $\alpha \in]1,\infty[$, *on a* $h_\alpha(t) < 1$ *pour tout* $t \in]0,1[$.

L'identité du parallèlogramme n'est donc pas vérifiée pour ces fonctions f *et* g, *ce qui prouve que la norme de* L^p *n'est pas induite pas un produit scalaire.*

Deuxième cas : $p = \infty$. *Dans ce cas, on a :*

$$\frac{1}{2}(\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2) = 1,\ \|f\|_p^2 + \|g\|_p^2 = 2.$$

On en déduit $\frac{1}{2}(\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2) - \|f\|_p^2 + \|g\|_p^2 = -1 \neq 0$. *L'identité du parallèlogramme n'est donc pas vérifiée pour ces fonctions* f *et* g, *ce qui prouve que la norme de* L^p *n'est pas induite pas un produit scalaire.*

2. Montrer que pour $m = \delta_0$ (mesure de Dirac en 0), $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ est un Hilbert pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Corrigé – *Soit* $f \in \mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$. *On a* $\|f\|_p = |f(0)|$ *(noter que tous les représentants de* f *ont la même valeur en* 0 *car* $m(\{0\}) > 0$*).*

Il est facile de voir que la norme de L^p *est induite pas un produit scalaire, notée* $(\cdot \mid \cdot)$, *ce produit scalaire est défini par :*

$$(f \mid g) = f(0)g(0),\ \textit{pour } f, g \in \mathrm{L}^p.$$

L'espace L^p *est donc un espace de Hilbert.*

Exercice 6.38 (Espace l^2) On note m la mesure du dénombrement sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, c'est-à-dire $m(\mathrm{A}) = \mathrm{card}(\mathrm{A})$ si A est fini et $m(\mathrm{A}) = \infty$ si A n'est pas fini.

On note $l^2 = \mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$.

1. Montrer que chaque élément de l^2 ne contient qu'un seul élément de l'espace $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$.

Corrigé – *(Noter d'abord que* m *est bien une mesure sur* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$*.)*

Soient $f, g \in \mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $f(n) = g(n)$ *car* $m(\{n\}) = 1 > 0$. *On en déduit que* $f = g$. *Ceci montre bien que chaque élément de* l^2 *ne contient qu'un seul élément de l'espace* $\mathcal{L}^2$.

2. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l^2 donne :

$$(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n)^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2 \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n^2$$

pour toutes suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ t.q. $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2 < \infty$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n^2 < \infty$.

Corrigé – *Soient* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ *t.q.* $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2 < \infty$ *et* $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n^2 < \infty$ *(on peut aussi prendre* $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ *au lieu de* $\mathbb{R}_+$*).*

On définit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *par* $f(n) = a_n$ *et* $g(n) = b_n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$. *Les fonctions* f *et* g *sont mesurables (toute fonction de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est mesurable car la tribu choisie sur* $\mathbb{N}$ *est* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$*) et on a bien* $f, g \in \mathcal{L}^2$ *car :*

$$\int f^2 dm = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2 < \infty \textit{ et } \int g^2 dm = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n^2 < \infty. \tag{6.57}$$

En effet, pour montrer (6.57), il suffit, par exemple, de remarquer que

$$f^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2 1_{\{n\}} \textit{ et } g^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n^2 1_{\{n\}}$$

et d'utiliser le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.18).

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors que $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, *c'est-à-dire :*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n b_n| < \infty,$$

et que $(f \mid g)_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$. *On en déduit :*

$$(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n)^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2.$$

3. Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, bijective. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \infty$. [On pourra commencer par montrer que $\sum_{p=1}^n \frac{1}{\varphi(p)} \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.]

Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On peut ordonner l'ensemble des* $\varphi(p)$, $p \in \{1,\ldots,n\}$, *selon l'ordre croissant, c'est-à-dire :* $\{\varphi(p),\ p \in \{1,\ldots,n\}\} = \{p_1,\ldots,p_n\}$ *avec* $p_i < p_{i+1}$ *pour tout* $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ *(on utilise ici l'injectivité de* φ*). Comme* φ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{N}^*$, *on a* $p_1 \geq 1$. *On en déduit (par récurrence finie sur i) que* $p_i \geq i$, *pour tout* $i \in \{1,\ldots,n\}$, *et donc :*

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{\varphi(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}. \tag{6.58}$$

On utilise maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz de la question précédente avec $a_p = \frac{\sqrt{\varphi(p)}}{p}$, $b_p = \frac{1}{\sqrt{\varphi(p)}}$ *pour* $p = 1,\ldots,n$ *et* $a_p = b_p = 0$ *pour* $p > n$, *on obtient :*

$$(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p})^2 = (\sum_{p=1}^n a_p b_p)^2 \leq \sum_{p=1}^n \frac{\varphi(p)}{p^2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{\varphi(p)}.$$

En utilisant (6.58), on en déduit :

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq \sum_{p=1}^n \frac{\varphi(p)}{p^2},$$

et donc $\lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{p=1}^n \frac{\varphi(p)}{p^2} \geq \lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = \infty$.

(Noter que cette démonstration reste vraie lorsque φ *est seulement injective.)*

Exercice 6.39 (Isométrie d'un espace de Hilbert avec l^2) Soit H un espace de Hilbert réel, de dimension infinie et séparable. Soit $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H (une telle base existe, cf. proposition 6.62).

Pour $u \in$ H, on définit $a_u \in l^2$ (l^2 est défini à l'exercice 6.38) par $a_u(n) = (u \mid e_n)_{\mathrm{H}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. (On montrera tout d'abord que a_u est bien un élément de l^2.)

Montrer que l'application A $: u \mapsto a_u$ (est linéaire et) est une isométrie de H dans l^2, c'est-à-dire que $\|a_u\|_{l^2} = \|u\|_{\mathrm{H}}$ pour tout $u \in$ H.

Montrer que A est bijective (il faut donc montrer que, pour tout $a \in l^2$, il existe $u \in$ H t.q. $a = a_u$).

Corrigé – *La fonction* a_u *est mesurable de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(toute fonction de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est mesurable car la tribu choisie sur* $\mathbb{N}$ *est* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$*). En notant m la mesure du dénombrement sur* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *(voir l'exercice 6.38), on a* $\int a_u^2 dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u \mid e_n)_{\mathrm{H}}^2$. *L'égalité de Bessel (voir la proposition 6.63) donne alors que* $a_u \in l^2$ *et* $\|a_u\|_{l^2} = \|u\|_{\mathrm{H}}$.

Il est immédiat de voir que l'application A $: u \mapsto a_u$ *est linéaire, l'application* A *est donc une isométrie de* H *dans* l^2 *(ceci donne, en particulier, que* A *est injective). Il reste à montrer que* A *est surjective.*

Soit $a \in l^2$. *On note* $a_n = a(n)$ *pour* $n \in \mathbb{N}$, *de sorte que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty$. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $f_n = \sum_{p=1}^n a_p e_p$. *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy dans* H *car, pour* $m > n$, $\|f_m - f_n\|_{\mathrm{H}}^2 = \sum_{p=n+1}^m a_p^2 \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p^2 \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *Il existe donc* $u \in$ H *t.q.* $f_n \to u$, *dans* H, *quand* $n \to +\infty$. *Le troisième item de la proposition 6.63 page 243 donne alors que* $a = a_u$. *Ceci montre bien que* A *est surjective.*

Exercice 6.40 (Intégration par parties dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$) Soit $u, v \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. On suppose, dans cette question, que u et u' sont des fonctions de carré intégrable pour le mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$. [On pourra commencer par montrer que $u^2(x)$ a une limite dans $\mathbb{R}$ quand $x \to +\infty$, puis montrer que cette limite est nécessairement nulle.]

   Corrigé – *La fonction u est de classe C^1, la fonction u^2 est donc aussi de classe C^1 et sa dérivée est la fonction $2uu'$. On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*
   $$u^2(x) = u^2(0) + \int_0^x 2u(t)u'(t)dt.$$
   Comme $|2uu'| \le u^2 + (u')^2$, la fonction $2uu'$ est intégrable (sur $\mathbb{R}$, pour la mesure de Lebesgue). l'égalité précédente montre alors que $u^2(x)$ a des limites dans $\mathbb{R}$ quand $x \to \pm\infty$. Plus précisément, on a $\lim_{x\to+\infty} u^2(x) = l$ et $\lim_{x\to-\infty} u^2(x) = m$ avec
   $$l = u^2(0) + \int 2uu'1_{\mathbb{R}_+} d\lambda \text{ et } m = u^2(0) - \int 2uu'1_{\mathbb{R}_-} d\lambda.$$
   On montre maintenant que $l = 0$ (un raisonnement analogue donne $m = 0$). Pour cela, on raisonne par l'absurde. Si $l \neq 0$, Comme $\lim_{x\to+\infty} u^2(x) = l$, il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ t.q.
   $$x > \mathrm{A} \Rightarrow u^2(x) > \frac{|l|}{2}.$$
   On a donc $\int u^2 d\lambda \ge \int_{]\mathrm{A},+\infty[} u^2 d\lambda \ge \int_{]\mathrm{A},+\infty[} \frac{|l|}{2} d\lambda = +\infty$, en contradiction avec le fait u est de carré intégrable. On a donc bien montré que $l = 0$.

2. On suppose, dans cette question, que u, v, u' et v' sont des fonctions de carré intégrable (pour le mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$). Montrer que
   $$\int_{\mathbb{R}} u(x)v'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} v(x)u'(x)dx.$$

   Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme u et v sont de classe C^1, une intégration par parties sur l'intervalle $[-n,n]$ donne*
   $$\int_{-n}^n u(x)v'(x)dx + \int_{-n}^n u'(x)v(x)dx = u(n)v(n) - u(-n)v(-n).$$
   On peut passer à la limite dans cette égalité quand $n \to +\infty$. On utilise pour cela le théorème de convergence dominée pour les termes du membre de gauche (les fonctions uv' et $u'v$ sont des fonctions intégrables car $|uv'| \le u^2 + (v')^2$ et $|u'v| \le (u')^2 + v^2$) et la première question pour le membre de droite. On obtient bien $\int_{\mathbb{R}} u(x)v'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} v(x)u'(x)dx$.

3. Donner un exemple pour lequel uv' et $v'u$ sont intégrables (pour le mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$) et
   $$\int_{\mathbb{R}} u(x)v'(x)dx \neq -\int_{\mathbb{R}} v(x)u'(x)dx.$$

   Corrigé – *Un exemple possible est donné par $v(x) = 1$ et $u(x) = \arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a bien $u, v \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Les fonctions uv' et vu' sont intégrables (uv' est nulle et $v(x)u'(x) = 1/(1+x^2)$) et on a*
   $$\int_{\mathbb{R}} u(x)v'(x)dx = 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} v(x)u'(x)dx = \pi.$$

Exercice 6.41 (Tribu et partition, suite et fin) Cet exercice est la suite de l'exercice 3.35. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et a une partition de Ω. On note $\mathcal{T}(a)$ la tribu engendrée par a (voir l'exercice 3.35). On suppose que la partition a est mesurable, c'est-à-dire que ses atomes sont des éléments de $\mathcal{A}$ (on a donc $\mathcal{T}(a) \subset \mathcal{A}$).

Donner une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{T}(a), \mathrm{P})$ construite à partir des atomes de a.

En déduire l'expression de la projection orthogonale d'une variable aléatoire X appartenant à $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ sur le sous espace $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{T}(a), \mathrm{P})$.