Devoir 2 - Première Partie - Corrigé.

Exercice 1. Inégalités de Carleson et de Carleman

1. (a) La fonction m étant convexe, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $m'(x)$ existe et tout $y > x$,

$$m'x) \leq \frac{m(y) - m(x)}{y - x}.$$

En appliquant l'inégalité précédente à $x > 0$ (tel que $m'(x)$ existe) et $y = kx > 0$, on obtient le résultat voulu.

(b) On a d'après la question précédente :

$$\int_0^\infty e^{-\frac{m(kx)}{kx}} dx \leq \int_0^\infty e^{-\frac{m(x)}{kx}} e^{-\frac{k-1}{k}\frac{m'(x)}{x}} dx.$$

Le résultat souhaité découle ensuite de l'inégalité de Hölder appliquée aux fonctions $f(x) = e^{-\frac{m(x)}{x}}$ et $g(x) = e^{-\frac{m'(x)}{x}}$ et aux coefficients conjugués $k > 1$ et $\frac{k}{k-1} > 1$.

(c) L'inégalité précédente implique que pour tout $k > 1$, on a $\log\left(\frac{I_1}{I_2}\right) \leq \frac{k}{k-1}\log(k)$. De plus, on a $\lim_{k\to 1} \frac{k}{k-1}\log(k) = 1$. Cela implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $k > 1$ tel que $\log\left(\frac{I_1}{I_2}\right) < 1+\varepsilon$, et donc $\log\left(\frac{I_1}{I_2}\right) \leq 1$. En repassant à l'exponentielle, on a bien montré que $I_1 \leq eI_2$.

(d) Pour une telle fonction m, on calcule :

$$I_1 = \int_1^\infty e^{-a\log(x)} dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx = \frac{1}{a-1}.$$

De plus, on a $m'x) = a\log(x) + a$, on calcule donc :

$$I_2 = \int_1^\infty e^{-a-a\log(x)} dx = \frac{e^{-a}}{a-1},$$

et ainsi $\frac{I_1}{I_2} = e^{-a}$. En choisissant $a > 1$ très proche de 1, on s'aperçoit que la constante e ne peut pas être amélirée.

2. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une famille de réels strictement positifs telle que $\sum_{n=1}^\infty a_n < \infty$.

(a) La fonction m est affine par morceaux et, sur l'intervalle $]n-1, n[$, sa pente est égale à :

$$m'(x) = \frac{\sum_{k=1}^n \log\left(\frac{1}{a_k}\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\log\left(\frac{1}{a_k}\right)}{n-(n-1)} = \log\left(\frac{1}{a_n}\right),$$

et donc $e^{-m'(x)} = a_n$. Cette formule est en particulier vraie pour $n = 1$. On a donc :

$$I_2 = \sum_{n=1}^\infty \int_{n-1}^n e^{-m'(x)} dx = \sum_{n=1}^\infty a_n.$$

Il reste à trouver une borne inférieure pour I_1. Pour cela, on utilise la convexité de m et le fait que $m(0) = 0$ pour écrire :

$$\forall 0 \leq x \leq n\ ,\ m(x) = m\left(\frac{n-x}{n}0 + \frac{x}{n}n\right) \leq \frac{x}{n}m(n).$$

On a alors :

$$I_1 = \sum_{n=1}^\infty \int_{n-1}^n e^{-\frac{m(x)}{x}} dx \geq \sum_{n=1}^\infty e^{-\frac{m(x)}{n}} dx = \sum_{n=1}^\infty (a_1 \cdots a_n)^{1/n}.$$

(b) La famille $(a_n)_{n\geq 1}$ est à termes positifs. De plus, il n'existe qu'un nombre fini d'indices $n \geq 1$ tels que $a_n \geq a_1$, sinon la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ ne serait pas convergente. Il existe donc un indice n_1 tel que $\forall n \geq 1$, $a_n \leq a_{n_1}$. On pose $\sigma(1) = n_1$. On définit ensuite de proche en proche $\phi(k) = n_k$ tel que $n_k \notin \{n_1, \dots, n_{k-1}\}$ et tel que $\forall n \geq 1, n \notin \{n_1, \dots, n_{k-1}\}, a_n \leq a_{n_k}$. L'application $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est par construction injective. De plus, soit $m \geq 1$. On a $a_m > 0$, donc il existe $k \geq 1$ tel que $a_{n_k} < a_m$, sinon la série $\sum_{k\geq 1} a_{n_k}$ ne serait pas convergente. Par construction, cela signifie que $m = \phi(l)$ avec $l < k$. Ainsi ϕ est aussi surjective et $(a_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ est décroissante.

(c) La famille $(a_n)_{n\geq 1}$ est sommable, car ses termes sont positifs et $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. On sait alors que la valeur de S ne dépend pas de l'ordre dans lequel les a_n sont sommés, en particulier $S = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(d) On fixe $n \geq 1$. On réordonne la famille $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ de façon décroissante et on note $c_1 \geq \cdots \geq c_n$ la famille obtenue. Par construction, on a $c_k \leq b_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$, et comme les a_n sont positifs, on a

$$a_1 \cdots a_n = c_1 \cdots c_n \leq b_1 \cdots b_n.$$

(e) On a déjà prouvé l'inégalité de Carleman pour la suite décroissante $(b_n)_{n\geq 1}$, on a alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (b_1 \cdots b_n)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{\infty} b_n = e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Exercice 2. Une loi des grands nombres dans L^4.

1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\mathbb{E}[X_n^2]^2 \leq \mathbb{E}[X_n^4] < \infty$, donc $\mathbb{E}[X_n^2] < \infty$.

2. Supposons par exemple que $i \notin \{j, k, l\}$. Alors la v.a. X_i est indépendante de $X_j X_k X_l$, et donc

$$\mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l] = \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j X_k X_l] = 0.$$

On peut reprendre le même raisonnement si $j \notin \{i, k, l\}$, $k \notin \{i, j, l\}$ ou $l \notin \{i, j, k\}$. Si $i = j \neq k = l$, on a

$$\mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l] = \mathbb{E}[X_i^2 X_k^2] = \mathbb{E}[X_i^2]\mathbb{E}[X_k^2] = \mathbb{E}[X_1^2]^2.$$

On a utilisé successivement, le fait que X_i et X_k sont indépendantes, puis identiquement distribuées, de même loi que X_1. On prouve de même que $\mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l] = \mathbb{E}[X_i^4] = \mathbb{E}[X_1^4]$ si les quatre indices sont identiques.

3. On développe le produit $(X_1 + \cdots + X_n)^4$ et on utilise la linéarité de l'espérance pour écrire :

$$\mathbb{E}[S_n^4] = \sum_{1\leq i,j,k,l\leq n} \mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l].$$

La question précédente a permis de montrer que la plupart des termes de cette somme sont nuls. Il reste à dénombrer les termes non-nuls. Pour $1 \leq i \leq n$, le terme $\mathbb{E}[X_i^4]$ n'est présent qu'une seule fois, lorsque $i = j = k = l$. Pour $1 \leq i_0 < k_0 \leq n$, le terme $\mathbb{E}[X_{i_0}^2 X_{k_0}^2]$ se retrouve lorsque exactement deux indices parmi i, j, k, l valent i_0 et les deux autres valent k_0. Il y a $\binom{4}{2} = 6$ possiblités. On a donc :

$$\mathbb{E}[S_n^4] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i^4] + \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{E}[X_{i_0}^2 X_{k_0}^2] = n\mathbb{E}[X_1^2] + \frac{n(n-1)}{2} 6\mathbb{E}[X_1^2]^2.$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(|S_n/n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|S_n^4| > n^4\varepsilon^4) \leq \frac{\mathbb{E}[S_n^4]}{\varepsilon^4 n^4}.$$

D'après la question précédente, on a donc $\mathbb{P}(A_n) = O(1/n^2)$, donc la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente. Le lemme de Borel-Cantelli permet de conclure que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.

5. En passant au complémentaire dans la définition de la limite supérieure, on montre que

$$C = \bigcup_{N=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n^c \right).$$

Ainsi $\omega \in C$ si et seulement si il existe $N \geq 1$ tel que $\omega \in A_n^c$ pour tout $n \geq N$. Mais on a $\omega \in A_n^c$ si et seulement si $|S_n(\omega)/n| \leq \varepsilon$. On pose $C := (\limsup A_n)^c$. Montrer que $\omega \in C$ si et seulement si il existe $N \geq 1$ (dépendant de ω) tel que $\forall n \geq N$, $\frac{S_n(\omega)}{n} \leq \varepsilon$.

6. Pour $p \geq 1$, on note C_p l'ensemble C défini à la question précédente, avec le choix particulier $\varepsilon = 1/p$. La suite $(C_p)_{p\geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion, on note $L = \bigcap_{p\geq 1} C_p$. Comme $\mathbb{P}(C_p) = 1$ pour tout $p \geq 1$, on a aussi $\mathbb{P}(L) = 1$. Soit $\omega \in L$ et $\varepsilon > 0$. Soit $p > 1/\varepsilon$. On a $\omega \in C_p$, donc d'après la question précédente :
$$\exists N \geq 1 \ , \ \forall n \geq N \ , \left| \frac{S_n(\omega)}{n} \right| \leq \frac{1}{p} \leq \varepsilon,$$
ce qui prouve que la suite $\left(\frac{S_n(\omega)}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0. Ainsi la suite de v.a. $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

Devoir 2, suite (et fin)

Exercice 7.24 (Itérations de convolution) Soient $\mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f \in \mathrm{L}^1$ t.q. $f = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$. On pose $f^{*1} = f$ et pour $n > 1$, $f^{*n} = f^{*(n-1)} * f$.

Pour $\alpha \geq 0$, on pose $g(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}|f(t)|dt$.

1(a) Montrer que f^{*n} est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et que $f^{*n} = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$.

Corrigé – *On montre par récurrence que f^{*n} est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, appartient à L^1 et que $f^{*n} = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$.*
En effet, on a bien $f^{*1} = f \in \mathrm{L}^1$ et $f^{*1} = f = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$.
Puis on suppose (hypothèse de récurrence) que $f^{*n} \in \mathrm{L}^1$ et $f^{*n} = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$. On remarque alors que f^{*n+1} est bien définie comme étant le produit de convolution de deux éléments de L^1 et appartient à L^1 (proposition 7.22). Puis pour $x < 0$, on a $f^{*n}(x - \cdot)f(\cdot) = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$ (en remarquant en $x - y < 0$ pour $y > 0$) et donc $f^{*n+1}(x) = 0$. Ce qui termine la récurrence.

(b) Montrer, par récurrence sur n, que $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}|f^{*n}(t)|dt \leq (g(\alpha))^n$, pour tout $\alpha \geq 0$ et tout $n \geq 1$.

Corrigé – *Soit $\alpha \geq 0$. On montre par récurrence sur n que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t}|f^{*n}(t)|dt \leq (g(\alpha))^n$. Cette inégalité est vraie pour $n = 1$ puisque c'est la définition de g et que $f = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$.*
On suppose maintenant que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t}|f^{*n}(t)|dt \leq (g(\alpha))^n$. On a alors, en utilisant le thèorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) puis le changement de variable $t - s = \tau$

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t}|f^{*(n+1)}(t)|dt &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t}|\int_{\mathbb{R}} f^{*n}(t-s)f(s)ds|dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t}(\int_{\mathbb{R}} |f^{*n}(t-s)||f(s)|ds)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha s}|f(s)|(\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha(t-s)}|f^{*n}(t-s)|dt)ds
\end{aligned}
$$
$$
= \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha s}|f(s)|(\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha \tau}|f^{*n}(\tau)|d\tau)ds \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha s}|f(s)|(g(\alpha))^n ds \leq (g(\alpha))^{n+1}.
$$

(c) Montrer que $\int_0^x |f^{*n}(t)|dt \leq e^{\alpha x}(g(\alpha))^n$, pour tout $\alpha \geq 0$ tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$.

Corrigé – *If suffit ici de remarquer que $e^{-\alpha x} \leq e^{-\alpha t}$ pour $0 < t < x$, on en déduit, pour tout n, avec la question précédente,*

$$
e^{-\alpha x}\int_0^x |f^{*n}(t)|dt \leq \int_0^x e^{-\alpha t}|f^{*n}(t)|dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}|f^{*n}(t)|dt \leq g(\alpha)^n.
$$

Ce qui donne bien l'inégalité recherchée.

2. Soit $h \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $h * f(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $h * f \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Remarquer de même que $h * f^{*n} \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose maintenant que, $h = 0$ sur $\mathbb{R}_-$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h * f^{*n}(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *On pose* $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |h(x)|$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *la fonction* $y \mapsto h(x-y)f^{*n}(y)$ *est intégrable (car elle est mesurable de dominée par* $M|f^{*n}|$ *qui est intégrable). La fonction* $h * f^{*n}$ *est donc définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Cette fonction est bornée car* $|h * f^{*n}(x)| \le M\|f^{*n}\|_1 < +\infty$. *Enfin, elle est continue d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, théorème 4.52.*

On suppose maintenant que, $h = 0$ *sur* $\mathbb{R}_-$. *Comme* $f^{*n} = 0$ *p.p. sur* $\mathbb{R}_-$, $h * f^{*n}(x) = 0$ *pour tout* $x \le 0$ *et tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit maintenant $x > 0$. *On a, avec la question précédente, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\alpha \ge 0$,

$$|h * f^{*n}(x)| = |\int_0^x h(x-t)f^{*n}(t)dt| \le M\int_0^x |f^{*n}(t)|dt \le Me^{\alpha x}g(\alpha)^n. \qquad (7.24)$$

Il suffit maintenant de remarquer que $\lim_{\alpha\to+\infty} g(\alpha) = 0$ *(c'est une conséquence du théorème de convergence dominée car* $\lim_{\alpha\to+\infty} e^{-\alpha t} = 0$ *et* $|e^{-\alpha t}f(t)| \le |f((t)|$ *pour tout* $t > 0$*). On peut donc choisir* $\alpha \ge 0$ *tel que* $g(\alpha) < 1$. *On déduit alors de l'inégalité* (7.24) $\lim_{n\to+\infty} h * f^{*n}(x) = 0$.

Exercice 7.25 Soient μ et ν deux mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose

$$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x+y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y).$$

1. Montrer que $\mu * \nu$ est une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Corrigé – *Selon le théorème 7.3,* $\mu\otimes\nu$ *est mesure finie sur les boréliens de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mu\otimes\nu(\mathbb{R}^2) = \mu(\mathbb{R})\nu(\mathbb{R})$ *(cf. égalité* (7.1) *avec* $A_1 = A_2 = \mathbb{R}$*)*

On remarque maintenant que si φ *est une fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(c'est-à-dire mesurable quand* $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel) la fonction* $(x,y) \mapsto \varphi(x,y)$ *est borélienne de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *car c'est la composée de l'application continue (donc borélienne)* $(x,y) \mapsto x+y$ *(de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$*) avec* φ. *Si* φ *est de plus positive ou bornée* $\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x+y)d(\mu\otimes\nu)(x,y)$ *est alors bien définie (et appartient à* $\mathbb{R}$ *ou éventuellement* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *dans le cas* φ *positive non bornée).*

Comme $\mu * \nu(A) = \mu\otimes\nu(\mathbb{R}^2) < +\infty$, *il suffit de vérifier la* σ*-additivité de* $\mu * \nu$ *pour montrer que* $\mu * \nu$ *est une mesure. Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *disjoints deux à deux, et* $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. *Comme* $1_A = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}$, *le téorème de convergence monotone (ou sa conséquence, corollaire 4.18) donne*

$$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x+y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^2} 1_{A_n}(x+y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y)$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu * \nu(A_n).$$

2. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(z)\, d(\mu * \nu)(z) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x+y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y), \qquad (7.25)$$

pour toute fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, borélienne positive ou borélienne bornée.

Corrigé – *L'égalité* (7.25) *est vrai si* $\varphi = 1_A$, $A \in \mathcal{B}(R)$ *(par la définition de* $\mu * \nu$*). Par "linéarité positive" (proposition 4.10) pour les deux mesures* $\mu * \nu$ *et* $\mu \otimes \nu$ *elle est aussi vraie si* φ *est étagée positive, c'est-à-dire* $\varphi \in \mathcal{E}_+(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *(en fait, on peut aussi remarquer sur* $(x, y) \mapsto \varphi(x + y)$ *est étagée positive de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *et utiliser la définition de l'intégrale sur* $\mathcal{E}_+$, $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^2$ *sont toujours munis de leur tribu boréleinne).*

Soit maintenant φ *borélienne positive de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. La fonction* φ *est alors limite croissante d'une suite de fonctions étagées positives et on obtient* (7.25) *avec le théorème de convergence monotone pour les deux mesures* $\mu * \nu$ *et* $\mu \otimes \nu$*. (En fait, on peut aussi utiliser directement la définition de l'intégrale sur* $\mathcal{M}_+$*.)*

Enfin, si φ *est une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *borélienne bornée, elle est donc intégrable pour la mesure* $\mu * \nu$ *(car c'est une mesure finie). En utilisant* (7.25) *avec* φ^+ *et* φ^-*, on en déduit que la fonction* $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ *est intégrable pour la mesure* $\mu \otimes \nu$ *et que* (7.25) *est vraie.*

3. Montrer que si μ et ν sont des probabilités, alors $\mu * \nu$ est une probabilité.

Corrigé – *Il suffit ici de remarquer que* $\mu * \nu(\mathbb{R}) = \mu \otimes \nu(\mathbb{R}^2) = \mu(\mathbb{R})\nu(\mathbb{R}) = 1$ *si* μ *et* ν *sont des probabilités.*

4. Montrer que si μ et ν sont des probabilités de densités respectives f et g (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$), alors $\mu * \nu$ est la probabilité de densité $f * g$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Corrigé – *On reprend ici le preuve faite dans le paragraphe 7.5. Soit* φ *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *borélienne bornée. En utilisant* $\mu = f\lambda$, $\nu = g\lambda$ *et le théorème de Fubini, on obtient*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x + y) d(\mu \otimes \nu) = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} \varphi(x + y) f(x) dx) g(y) dy.$$

Le changement de variable $x + y = z$ *dans l'intégrale sur* x *puis le théorème de Fubini donnent*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} \varphi(z) f(z - y) dz) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(z - y) g(y) dy) \varphi(z) dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f * g(z) \varphi(z) dz.$$

Ceci prouve bien que $\mu * \nu = (f * g)\lambda$.

Exercice 7.26 (Fonction de Carathéodory et composition)

Soit $N, p, q \in \mathbb{N}^\star$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soit a une application de $\Omega \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. On suppose que a est une fonction de Carathéodory, c'est-à-dire que $a(\cdot, s)$ est borélienne pour tout $s \in \mathbb{R}^p$ et $a(x, \cdot)$ est continue pour tout $x \in \Omega$.

1. Montrer que la fonction a est borélienne de $\Omega \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. (Noter que ceci peut être faux si a était seulement borélienne par rapport à chacun de ses arguments, un exemple est donné dans l'exercice 7.4.)

Corrigé – *Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère une partition dénombrable de $\mathbb{R}^p$ formée de boréliens de diamètre inférieur à $1/n$ (une telle partition est possible en utilisant, par exemple, un quadrillage de $\mathbb{R}^p$.*

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $\mathrm{A}_{k,n}$, $k \in \mathbb{N}$, les éléments de cette partition (avec $\mathrm{A}_{k,n}$ non vide pour tout k). Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on choisit un point $s_{k,n} \in \mathrm{A}_{k,n}$ et on définit la fonction a_n de $\Omega \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ par

$$a_n(x,s) = a(x, s_{k,n}) \text{ si } s \in \mathrm{A}_{k,n}.$$

Si $s \in \mathrm{A}_{k,n}$, on a $|s - s_{k,n}| \leq 1/n$ (car le diamètre de $\mathrm{A}_{k,n}$ est inférieur à $1/n$). Comme a est continue par rapport à son deuxième argument, on a pour tout $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^p$, $lim_{n\to+\infty} a_n(x,s) = a(x,s)$.

On remarque maintenant que a_n est (pour tout n) une fonction borélienne. En effet $a_n(x,s) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a(x,s_{k,n}) 1_{\mathrm{A}_{k,n}}(s)$ qui est bien une fonction borélienne comme limite d'une somme et de produits de fonctions boréliennes (voir la proposition 3.19). On a utilisé ici le fait que $a(\cdot, s)$ est borélienne, de Ω dans $\mathbb{R}^q$, pour tout $s \in \mathbb{R}^p$.

Finalement, a est borélienne comme limite de fonctions boréliennes.

Remarque : En pratique, on peut remplacer l'hypothèse "$a(x,\cdot)$ est continue pour tout $x \in \Omega$" par l'hypothèse "$a(x,\cdot)$ est continue pour presque tout $x \in \Omega$". Le raisonnement précédent permet alors de montrer qu'il existe $\bar{a}$ borélienne telle que $a = \bar{a}$ p.p., ce qui est suffisant du point de vue de la théorie de l'intégration.

2. Soit v est une fonction borélienne de Ω dans $\mathbb{R}^p$. Montrer que la fonction $x \mapsto a(x, v(x))$ est alors borélienne de Ω dans $\mathbb{R}^q$.

Corrigé – *On note b la fonction de Ω dans $\Omega \times \mathbb{R}^p$ définie par $b(x) = (x, v(x))$. La fonction b est borélienne car ses deux composantes sont boréliennes (voir la proposition 4.63). On en déduit que la fonction $x \mapsto a(x, v(x))$ est borélienne car cette fonction est la composition de b avec a (c'est-à-dire la fonction $x \mapsto a(b(x))$) qui sont boréliennes.*

3. Soient v_1, v_2 deux fonctions de Ω dans $\mathbb{R}^p$. On suppose que $v_1 = v_2$ p.p.. Montrer que les fonctions $x \mapsto a(x, v_1(x))$ et $x \mapsto a(x, v_2(x))$ sont égales p.p. sur Ω.

Corrigé – *Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{B}(\mathbb{R})$ $(\mathrm{A} \subset \Omega)$ tel que $\lambda(\mathrm{A}) = 0$ et $v_1 = v_2$ sur $\Omega \setminus \mathrm{A}$. On a alors $a(x, v_1(x)) = a(x, v_2(x))$ pour tout $x \in \Omega \setminus \mathrm{A}$ et donc $a(x, v_1(x)) = a(x, v_2(x))$ p.p. sur Ω.*