

Exercice 1 (Convergence p.p. et convergence L^1).

Soit (X, T, m) est une espace mesuré. Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(X, T, m)$.

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^1 et f une application mesurable de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans L^1 et que $f_n \rightarrow f$ p.p. quand $n \rightarrow +\infty$.

1. Montrer que f appartient à L^1 (plus précisément, $f \in \mathcal{L}^1$ et on confond f avec sa classe).

Corrigé – Il suffit d'appliquer le lemme de Fatou à la suite $(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}}$, il donne $\int |f| dm \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int |f_n| dm < +\infty$ et donc que $f \in \mathcal{L}^1$.

2. En prenant $(X, T, m) = ([0, 1[, \mathcal{B}([0, 1[), \lambda)$, donner un exemple pour lequel f_n ne converge pas vers f dans L^1 quand $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé – Un exemple possible est $f_n = n1_{[0, \frac{1}{n}]}$.

Pour la suite de l'exercice, on ajoute qu'il existe $p > 1$ tel que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans L^p .

3. On suppose que $m(X) < +\infty$. Montrer que $f_n \rightarrow f$ dans L^1 (quand $n \rightarrow +\infty$) et donner un exemple pour lequel f_n ne converge pas vers f dans L^p (on pourra prendre $(X, T, m) = ([0, 1[, \mathcal{B}([0, 1[), \lambda)$).

Corrigé – Ce résultat est contenu dans le théorème 6.10 du cours. On rappelle que pour le démontrer il suffit de remarquer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équi-intégrable. Cette équi-intégrabilité est due au fait que pour tout $A \in T$ l'inégalité de Hölder donne

$$\int_A |f_n| dm \leq C m(A)^{1-\frac{1}{p}},$$

où C est une borne de $\|f_n\|_p$. Le théorème de Vitali (théorème 4.51 du cours) donne alors que $f_n \rightarrow f$ dans L^1 .

Dans le cas $(X, T, m) = ([0, 1[, \mathcal{B}([0, 1[), \lambda)$ un exemple possible est $f_n = n^{1/p} 1_{[0, \frac{1}{n}]}$.

4. On suppose que $m(X) = +\infty$. A t on $f_n \rightarrow f$ dans L^1 ? (Si oui, le démontrer. Si non, donner un exemple).

Corrigé – La réponse est "non".

Dans le cas $(X, T, m) = ([0, 1[, \mathcal{B}([0, 1[), \lambda)$ un exemple possible est $f_n = \frac{1}{n} 1_{[n, 2n[}$.

Exercice 2 (Chaine de Markov).

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une espace probabilisé et G un ensemble de cardinal m ($m \in \mathbb{N}^*$). Une variable aléatoire à valeurs dans G est donc une application X de Ω dans G telle que $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ pour toute partie A de G .

On pose $G = \{a_1, \dots, a_m\}$ (comme m est le cardinal de G , on a donc $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$).

Rappels :

- Si X est une variable aléatoire (à valeurs dans G) et $a \in G$, on pose $\{X = a\} = \{\omega \in \Omega; X(\omega) = a\}$.
- Si X est une variable aléatoire (à valeurs dans G), la loi de X est donnée par l'ensemble $\{P(\{X = a\}), a \in G\}$. Si on identifie G avec $\{1, \dots, m\}$, cette loi est une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$, notée P_X , et $P_X = \sum_{i=1}^m P(\{X = a_i\})\delta_i$ (où δ_i est la mesure de Dirac en i).
- Soient $A, B \in \mathcal{F}$. Si $P(B) \neq 0$, $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$. Si $P(B) = 0$, $P(A|B) = 0$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires (à valeurs dans G).

On suppose que pour $i, j \in \{1, \dots, m\}$, il existe $T_{i,j}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $\{a_{j_k}, k < n\}$,

$$P(\{X_{n+1} = a_j\} | \{X_n = a_i\} \cap (\cap_{k < n} \{X_k = a_{j_k}\})) = P(\{X_{n+1} = a_j\} | \{X_n = a_i\}) = T_{i,j}. \quad (1)$$

On note T la matrice (de m lignes et m colonnes) dont la composante à la ligne i , colonne j , est $T_{i,j}$.

1. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $\sum_{j=1}^m T_{i,j} = 1$.

Corrigé – Pour tout n et i , on note $A_{n,i} = \{X_n = a_i\}$ (on gardera cette notation dans la suite). Pour n fixé, les ensembles $A_{n,j}$ sont disjoints deux à deux et $\cup_j A_{n+1,j} = \Omega$. On en déduit, par additivité de P , que

$$\sum_{j=1}^m T_{i,j} = \frac{1}{P(A_{n,i})} \sum_{j=1}^m P(A_{n+1,j} \cap A_{n,i}) = \frac{1}{P(A_{n,i})} P(\Omega \cap A_{n,i}) = 1.$$

2. Montrer que pour tout $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $P(\{X_2 = a_j\} | \{X_0 = a_i\}) = (T^2)_{i,j}$, où $(T^2)_{i,j}$ est la composante à la ligne i colonne j de la matrice T^2 .

Corrigé – Par additivité de P et en utilisant (1),

$$\begin{aligned} P(A_{2,j} \cap A_{0,i}) &= \sum_{k=1}^m P(A_{2,j} \cap A_{0,i} \cap A_{1,k}) = \sum_{k=1}^m P(A_{2,j} | A_{0,i} \cap A_{1,k}) P(A_{0,i} \cap A_{1,k}) \\ &= \sum_{k=1}^m P(A_{2,j} | A_{1,k}) P(A_{0,i} \cap A_{1,k}) = \sum_{k=1}^m P(A_{1,j} | A_{0,k}) P(A_{1,k} | A_{0,i}) P(A_{0,i}) \end{aligned}$$

On en déduit que $P(A_{2,j} | A_{0,i}) = \sum_{k=1}^m P(A_{1,j} | A_{0,k}) P(A_{1,k} | A_{0,i}) = \sum_{k=1}^m T_{i,k} T_{k,j} = (T^2)_{i,j}$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $P(\{X_n = a_j\} | \{X_0 = a_i\}) = (T^n)_{i,j}$, où $(T^n)_{i,j}$ est la composante à la ligne i colonne j de la matrice T^n . [On pourra faire une récurrence sur n .]

Corrigé – On fait maintenant une récurrence sur n . On suppose le résultat vrai jusqu'à $n-1$.

$$P(A_{n,j} \cap A_{0,i}) = \sum_{k=1}^m P(A_{n,j} \cap A_{0,i} \cap A_{n-1,k}) = \sum_{k=1}^m P(A_{n,j} | A_{0,i} \cap A_{n-1,k}) P(A_{0,i} \cap A_{n-1,k}) \quad (2)$$

Une conséquence de (1) (et de l'additivité de P) est que $P(A_{n,j} | A_{0,i} \cap A_{n-1,k}) = P(A_{n,j} | A_{n-1,k})$, et donc

$$P(A_{n,j} \cap A_{0,i}) = \sum_{k=1}^m P(A_{n,j} | A_{n-1,k}) P(A_{0,i} \cap A_{n-1,k}) = \sum_{k=1}^m P(A_{1,j} | A_{0,k}) P(A_{n-1,k} | A_{0,i}) P(A_{0,i}) \quad (3)$$

On en déduit que $P(A_{n,j} | A_{0,i}) = \sum_{k=1}^m P(A_{1,j} | A_{0,k}) P(A_{n-1,k} | A_{0,i}) = \sum_{k=1}^m (T^{n-1})_{i,k} T_{k,j} = (T^n)_{i,j}$.

On suppose pour la suite de l'exercice que $m = 3$ et $T = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Corrigé – On pose $a = 1/4$, $b = 3/4$, $c = 1/2$ et $m = \max\{a, b, c\}$.

On montre par récurrence que $T^n = \begin{bmatrix} a^n & \alpha_n & \beta_n \\ 0 & b^n & \gamma_n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, avec $0 < \alpha_n \leq nm^n$.

En effet, cette propriété est vraie pour $n = 1$. Puis, si elle vraie pour n , on remarque qu'elle est vraie pour $n+1$ avec $\alpha_{n+1} = a^n b + \alpha_n c$, ce qui donne $0 < \alpha_{n+1} \leq (n+1)m^{n+1}$.

Comme $m < 1$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$. Puis, comme, pour $i = 1, 2$, $\sum_{j=1}^3 (T^n)_{i,j} = 1$, on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = 1$. Ce qui donne bien la limite désirée pour T^n .

5. Montrer qu'il existe une unique loi stationnaire, c'est-à-dire un unique choix de l'ensemble $\{P(\{X_0 = a_i\})$, $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $P(\{X_n = a_i\}) = P(\{X_0 = a_i\})$ pour tout n et tout i .

Corrigé – Soit $j \in \{1, 2\}$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (T^n)_{i,j} = 0$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_{n,j} \cap A_{0,i}) = 0$ et donc, comme $A_{n,j} = \bigcup_{i=1}^3 (A_{n,j} \cap A_{0,i})$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_{n,j}) = 0$. On a alors aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_{n,3}) = 1$. Ceci est vrai quelquesoit X_0 .

On suppose maintenant que l'on a une loi stationnaire, c'est-à-dire que $P(A_{n,i}) = P(A_{0,i})$ pour tout n et tout i .
On déduit du raisonnement précédent que $P(A_{0,j}) = 0$ pour $j \in \{1, 2\}$ et $P(A_{0,3}) = 1$ (c'est-à-dire $X_0 = a_3$ p.s.).
On a donc nécessairement $P(A_{0,1}) = P(A_{0,2}) = 0$ et $P(A_{0,3}) = 1$.
Réciproquement, cette loi est bien stationnaire, car on a alors, pour tout n , $P(A_{n,3}) = P(A_{n,3}|A_{0,3}) = (T^n)_{3,3} = 1$.

6. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle en probabilité quelquesoit le choix de X_0 ? Si oui, quelle est cette limite ? La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle p.s. quelquesoit le choix de X_0 ? (Justifier les réponses).

Corrigé – On pose $X = a_3$ p.s.
Le début du raisonnement de la question précédente nous donne que, pour tout X_0 , $X_n \rightarrow X$ en probabilité (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\{X_n \neq X\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\{X_n \in \{a_1, a_2\}\}) = 0$).
On peut aussi montrer que $X_n \rightarrow X$ p.s.. Pour cela on remarque que $P(\{X_n \in \{a_1, a_2\}\}) \leq \sum_{i=1}^3 (T^n)_{i,1} + (T^n)_{i,2}$ et que la série de terme général $(T^n)_{i,1} + (T^n)_{i,2}$ est convergente.

Exercice 3 (Un exemple simple de suite de v.a.r.i.i.d.).

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une espace probabilisé et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.i.i.d..

On suppose que la loi de X_1 est $P(\{X_1 = 1\}) = P(\{X_1 = -1\}) = 1/2$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k/k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{B}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ (c'est-à-dire que $\mathcal{B}_n$ est la tribu engendrée par $X_1, \dots, X_n$).
Montrer que pour toute v.a.r. φ , $\mathcal{B}_n$ -mesurable bornée, $E(S_{n+1}\varphi) = E(S_n\varphi)$.

Corrigé – Comme $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r.i.i.d., la tribu engendrée par X_{n+1} est indépendante de la tribu $\mathcal{B}_n$ (c'est une conséquence, par exemple, la proposition 2.59 du cours). Les v.a.r. X_{n+1} et φ sont donc indépendantes. Ceci donne $E(X_{n+1}\varphi) = E(X_{n+1})E(\varphi) = 0$, et donc $E(S_{n+1}\varphi) = E(S_n\varphi)$.

2. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Corrigé – Si $k \neq p$, les v.a.r. X_k et X_p sont indépendantes et donc $E(X_k X_p) = E(X_k)E(X_p) = 0$. On en déduit que $E(S_n^2) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} E(X_p^2) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}$. Ceci montre que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

3. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p > 1$, toujours grâce à $E(X_i X_j) = 0$ si $i \neq j$,

$$\|S_{n+p} - S_n\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} n + p \frac{1}{k^2} \|X_k\|_2^2 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Ceci montre que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans L^2 et donc convergente.

On note S la limite (dans L^2) de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Donner l'espérance et la variance de S .

Corrigé – $E(S) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(S_n) = 0$ et $\text{Var}(S) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(S_n^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.