Centre de Télé-Enseignement Sciences
Université de Provence

MASTER SCIENCES
Mention Mathématiques et Applications -- (2M1MAP)

Expédition dans la semaine n°	Etape	Code UE	N° d'envoi de l'UE
	2M1MAP	2TMAP14	1

Nom de l'UE : Théorie de la mesure et Probabilités (UE 1-4)

– **Contenu de l'envoi : Polycopié, chapitres 2 et 3. Corrigés des exercices des chapitres 2 et 3. Le polycopié est très volumineux mais il contient beaucoup de résultats vus en Licence.**

- Guide du travail à effectuer

Semaine 1 :
  Etudier le chapitre 2, sections 1-5
  Exercices proposés (avec corrigés) : 2.1, 2.2, 2.4, 2.6, 2.14
Semaine 2 :
  Etudier le chapitre 2, section 6 (Indépendance et probabilité conditionnelle)
  Exercices proposés (avec corrigés) : 2.20, 2.21, 2.24
Semaine 3 :
  Etudier le chapitre 3, sections 1-3
  Exercices proposés (avec corrigés) : 2.25, 2.27, 2.37, 3.1, 3.3, 3.6, 3.10
Semaine 4 :
  Etudier le chapitre 3, sections 4-5 (loi d'une v.a., convergence p.s., convergence en probabilité)
  Exercices proposés (avec corrigés) : 3.15, 3.16, 3.17, 3.25
  Les exercices 3.19 et 3.27 font partie du premier devoir (à rendre ultérieurement).

- Coordonnées de l'enseignant responsable de l'envoi

Thierry Gallouet, LATP-CMI, 39 rue Joliot Curie, 13453 marseille cedex 13.
  email : gallouet@cmi.univ-mrs.fr
  fax : 04 91 11 35 52

Vous pouvez aussi consulter la page web: http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/tele.d
et me poser des questions par email.

Chapitre 2

Tribus et mesures

2.1 Introduction... par les probabilités

2.1.1 Cas d'un problème "discret"

Pour introduire la série de définitions qui suivent, commençons par quelques exemples, tirés du calcul des probabilités. Le calcul des probabilités s'intéresse à mesurer la "chance" qu'un certain "événement", résultat d'une expérience, a de se produire. Considérons par exemple "l'expérience" qui consiste à lancer un dé. On appelle "éventualité" associée à cette expérience un des résultats possibles de cette expérience, et "univers des possibles" l'ensemble E de ces éventualités. Dans notre exemple, les éventualités peuvent être $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6 ; on pourrait choisir aussi comme éventualités les résultats correspondant au "dé cassé". On peut donc tout de suite remarquer que l'ensemble E des univers du possible dépend de la modélisation, c'est à dire de la formalisation mathématique que l'on fait du problème. Notons qu'il est parfois difficile de définir l'ensemble E.

A partir des éventualités, qui sont, par définition, les éléments de l'univers des possibles E, on définit les "événements", qui forment un ensemble de parties de E. Dans notre exemple du lancer de dé, l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$. Dans l'exemple du dé, la partie $\{2, 4, 6\}$ de E est l'événement : "le résultat du lancer est pair". On appelle événement élémentaire un singleton, par exemple $\{6\}$ dans notre exemple du lancer de dé, événement certain l'ensemble E tout entier, et l'événement "vide" l'ensemble vide $\emptyset$ (qui a donc une "chance" nulle de se réaliser). Pour mesurer "la chance" qu'a un événement de se réaliser, on va définir une application p de l'ensemble des événements (donc de $\mathcal{P}(E)$ dans notre exemple du lancer de dé) dans $[0, 1]$ avec certaines propriétés (qui semblent naturelles…). La "chance" (ou probabilité) pour un événement $A \subset E$ de se réaliser sera donc le nombre $p(A)$, appartenant à $[0, 1]$.
L'exemple du lancer de dé, que nous venons de considérer, est un problème discret fini, au sens ou l'ensemble E est fini. On peut aussi envisager des problèmes discrets infinis, l'ensemble E est alors infini dénombrable (on rappelle qu'un ensemble I est "dénombrable" s'il existe une bijection de I dans $\mathbb{N}$, il est "au plus dénombrable" s'il existe une injection de I dans $\mathbb{N}$), ou des problèmes (parfois appelés "continus") où E est infini non dénombrable.

2.1.2 Exemple continu

Considérons maintenant "l'expérience" qui consiste à lancer une balle de ping-pong sur une table de ping-pong. Soit E l'ensemble des points de la table de ping-pong, on peut voir E comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, un événement élémentaire est alors un point $(x, y) \in E$ (le point d'impact de la balle), et un événement semble être une partie quelconque A de $\mathcal{P}(E)$. On suppose qu'on a effectué le lancer "sans viser", c'est à dire en supposant que “n’importe quel point de la table a une chance égale d’être atteint" (les événements élémentaires sont “équiprobables"), et que la balle tombe forcément sur la table (on est très optimiste…). On se rend compte facilement que la probabilité pour chacun des points de E d’être atteint doit être nulle, puisque le nombre des points est infini. On peut aussi facilement “intuiter" que la probabilité pour une partie A d’être atteinte (dans le modèle “équiprobable") est le rapport entre la “surface de A" et la surface de E. La notion intuitive de “surface" correspond en fait à la notion mathématique de “mesure" que nous allons définir dans le prochain paragraphe. Malheureusement, comme on l’a dit dans le chapitre introductif, il ne nous sera pas mathématiquement possible de définir une application convenable, i.e. qui vérifie les propriétés (1.9)-(1.10) et qui “mesure" toutes les parties de $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}^2$, ou même du sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ (voir à ce sujet l’exercice 2.27). On va donc définir un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ (qu’on appelle “tribu") sur lequel on pourra définir une telle application. Dans le cas d’un ensemble fini, la tribu sera, en général, $\mathcal{P}(E)$ tout entier. Mais, dans le cas de la balle de ping-pong que vous venons de décrire, l’ensemble des événements sera une tribu strictement incluse dans $\mathcal{P}(E)$.

2.2 Tribu ou $\sigma-$algèbre

Définition 2.1 (Tribu ou $\sigma-$algèbre) *Soient E un ensemble, T une famille de parties de E (i.e. $T \subset \mathcal{P}(E)$). La famille T est une tribu (on dit aussi une $\sigma-$algèbre) sur E si T vérifie :*

1. $\emptyset \in T, E \in T$,

2. T est stable par union dénombrable, c’est-à-dire que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, on a $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$.

3. T est stable par intersection dénombrable, c’est-à-dire que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, on a $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$.

4. T est stable par passage au complémentaire, c’est-à-dire que pour tout $A \in T$, on a $A^c \in T$ (On rappelle que $A^c = E \setminus A$).

Il est clair que, pour montrer qu’une partie T de $\mathcal{P}(E)$ est une tribu, il est inutile de vérifier les propriétés 1-4 de la proposition précédente. Il suffit de vérifier par exemple $\emptyset \in T$ (ou $E \in T$), 2 (ou 3) et 4.

Exemples de tribus sur E :
- $T = \{\emptyset, E\}$,
- $\mathcal{P}(E)$.

Définition 2.2 (Langage probabiliste) *Soient E un ensemble quelconque (“l’univers des possibles") et T une tribu ; on appelle “éventualité" les éléments de E et “événements" les éléments de T. On appelle “événement élémentaire" un singleton de T.*
On dit que deux événements $A, B \in T$ sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Proposition 2.1 (Stabilité par intersection des tribus)
Soient E et I deux ensembles. Pour tout $i \in I$, on se donne une tribu, T_i, sur E. Alors, la famille (de parties de E) $\cap_{i\in I} T_i = \{A \subset E\,;\, A \in T_i$, pour tout $i \in I\}$ est encore une tribu sur E.

DÉMONSTRATION : La démonstration de cette proposition fait l’objet de la première question de l’exercice 2.2.

■

Cette proposition nous permet de définir ci-après la notion de tribu engendrée.

Définition 2.3 (Tribu engendrée) *Soient E un ensemble et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. On appelle tribu engendrée par $\mathcal{C}$ la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$, c’est-à-dire la tribu $T(\mathcal{C})$ intersection de toutes les tribus sur E contenant $\mathcal{C}$ (cette intersection est non vide car $\mathcal{P}(E)$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$).*

Il est parfois utile d'utiliser la notion d'algèbre, qui est indentique à celle de tribu en remplaçant “dénombrable" par “finie".

Définition 2.4 (Algèbre) *Soient E un ensemble, $\mathcal{A}$ une famille de parties de E (i.e. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$). La famille $\mathcal{A}$ est une algèbre sur E si $\mathcal{A}$ vérifie :*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}, E \in \mathcal{A}$,

2. $\mathcal{A}$ est stable par union finie, c'est-à-dire que pour tout $A, B \in \mathcal{A}$ on a $A \cup B \in \mathcal{A}$.

3. $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie, c'est-à-dire que pour tout $A, B \in \mathcal{A}$ on a $A \cap B \in \mathcal{A}$.

4. $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $A^c \in \mathcal{A}$.

Remarque 2.1 *Soit E un ensemble et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$. Comme pour les tribus, on peut définir l'algèbre engendrée par $\mathcal{C}$. C'est la plus petite algèbre contenant $\mathcal{C}$, c'est-à-dire l'intersection de toutes les algèbres contenant $\mathcal{C}$ (voir l'exercice 2.9).*

Soit E un ensemble, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$ et $T(\mathcal{C})$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ (voir la définition 2.3 et l'exercice 2.2). Il est important de remarquer que, contrairement à ce que l'on pourrait être tenté de croire, les éléments de la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ ne sont pas tous obtenus, à partir des éléments de $\mathcal{C}$, en utilisant les opérations : “intersection dénombrable", “union dénombrable" et “passage au complémentaire". Plus précisément, on pose :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^1(\mathcal{C}) &= \{A \subset E \text{ t.q. } A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, A_n \in \mathcal{C} \text{ ou } A_n^c \in \mathcal{C}\},\\
\mathcal{R}^2(\mathcal{C}) &= \{A \subset E \text{ t.q. } A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n, A_n \in \mathcal{C} \text{ ou } A_n^c \in \mathcal{C}\},\\
\mathcal{R}(\mathcal{C}) &= \mathcal{R}^1(\mathcal{C}) \cup \mathcal{R}^2(\mathcal{C}).
\end{aligned}$$

Prenons $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ (donc $T(\mathcal{C})$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, voir définition ci-après). Il est facile de voir que $\mathcal{R}(\mathcal{C}) \subset T(\mathcal{C})$, mais que, par contre (et cela est moins facile à voir), $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ n'est pas une tribu. En posant : $\mathcal{S}_0 = \mathcal{C}$, et $\mathcal{S}_n = \mathcal{R}(\mathcal{S}_{n-1})$, pour $n \geq 1$, on peut aussi montrer que $\overline{\mathcal{S}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_n$ n'est pas une tribu (et que $\overline{\mathcal{S}} \subset T(\mathcal{C})$).

Remarque 2.2 *Soit E un ensemble et $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{P}(E)$. Il est alors facile de voir que $T(\mathcal{C}_1) \subset T(\mathcal{C}_2)$ (cf. Exercice 2.2).*

Soit E un ensemble. On rappelle qu'une “topologie" sur E est donnée par une famille de parties de E, appelées “ouverts de E", contenant $\emptyset$ et E, stable par union (quelconque) et stable par intersection finie. L'ensemble E, muni de cette famile de parties, est alors un “espace topologique".

Définition 2.5 (Tribu borélienne) *Soit E un ensemble muni d'une topologie (un espace métrique, par exemple). On appelle tribu borélienne (ou tribu de Borel) la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de E, cette tribu sera notée $\mathcal{B}(E)$. Dans le cas $E = \mathbb{R}$, cette tribu est donc notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Remarque 2.3
1. L'objectif de la section 2.5 est de construire une application $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. :

(a) $\lambda(]\alpha, \beta[) = \beta - \alpha$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha < \beta$,

(b) $\lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n)$, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. (Noter que $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ grâce à la stabilité d'une tribu par union dénombrable.)

2. On peut se demander si $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. La réponse est non (voir les exercices 2.27 et 2.28). On peut même démontrer que $\mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$ (alors que $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) > \mathrm{card}(\mathbb{R})$). On donne ci-après un rappel rapide sur les cardinaux (sans entrer dans les aspects difficiles de la théorie des ensembles, et donc de manière peut-être un peu imprécise).

3. Rappel sur les cardinaux. Soit A et B deux ensembles.

(a) On dit que $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$ si il existe une application $\varphi : A \to B$, bijective.

Pour montrer que deux ensembles ont même cardinaux, il est souvent très utile d'utiliser le théorème de Bernstein (voir l'exercice 1.12) qui montre que s'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A, alors il existe $\varphi : A \to B$, bijective (et donc $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$). Le théorème de Bernstein motive également la définition suivante.

(b) On dit que $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ s'il existe $\varphi : A \to B$, injective.

(c) Un autre théorème intéressant, dû à Cantor, donne que, pour tout ensemble X, on a $\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(X))$ (c'est-à-dire $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(\mathcal{P}(X))$ et $\mathrm{card}(X) \neq \mathrm{card}(\mathcal{P}(X))$). On a donc, en particulier, $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) > \mathrm{card}(\mathbb{R})$. La démonstration du théorème de Cantor est très simple. Soit $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$. On va montrer que φ ne peut pas être surjective. On pose $A = \{x \in X;\, x \notin \varphi(x)\}$ (A peut être l'ensemble vide). Supposons que $A \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Soit alors $a \in X$ t.q. $A = \varphi(a)$.

Si $a \in A = \varphi(a)$, alors $a \notin A$ par définition de A.

Si $a \notin A = \varphi(a)$, alors $a \in A$ par définition de A.

On a donc montré que A ne peut pas avoir d'antécédent (par φ) et donc φ n'est pas surjective.

Proposition 2.2 *On note $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_2 = \{]a,b[,\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ et $\mathcal{C}_3 = \{]a,\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}$. Alors $T(\mathcal{C}_1) = T(\mathcal{C}_2) = T(\mathcal{C}_3) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (Noter que d'autres caractérisations de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, semblables, sont possibles.)*

DÉMONSTRATION : On a, par définition de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $T(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On va démontrer ci-après que $T(\mathcal{C}_1) = T(\mathcal{C}_2)$ (le fait que $T(\mathcal{C}_2) = T(\mathcal{C}_3)$ est laissé au lecteur).

Comme $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$, on a $T(\mathcal{C}_2) \subset T(\mathcal{C}_1)$. Il suffit donc de démontrer l'inclusion inverse. On va montrer que $\mathcal{C}_1 \subset T(\mathcal{C}_2)$, on aura alors que $T(\mathcal{C}_1) \subset T(\mathcal{C}_2)$.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose $O \neq \emptyset$ (on sait déjà que $\emptyset \in T(\mathcal{C}_2)$). Le lemme 2.1 (plus simple que le lemme 2.4 page 35) ci-après nous donne l'existence d'une famille $(I_n)_{n\in A}$ d'intervalles ouverts t.q. $A \subset \mathbb{N}$ et $O = \cup_{n\in A}I_n$. Noter qu'on a aussi $O = \cup_{n\in\mathbb{N}}I_n$ en posant $I_n = \emptyset$ si $n \in \mathbb{N} \setminus A$. Comme $I_n \in \mathcal{C}_2 \subset T(\mathcal{C}_2)$ pour tout $n \in A$ et $\emptyset \in T(\mathcal{C}_2)$, on en déduit, par stabilité dénombrable d'une tribu, que $O \in T(\mathcal{C}_2)$. Donc, $\mathcal{C}_1 \subset T(\mathcal{C}_2)$ et donc $T(\mathcal{C}_1) \subset T(\mathcal{C}_2)$. On a bien montré que $T(\mathcal{C}_1) = T(\mathcal{C}_2)$.

■

Lemme 2.1 *Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts bornés.*

DÉMONSTRATION : Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, $O \neq \emptyset$. On pose $A = \{(\beta,\gamma) \in \mathbb{Q}^2\,;\, \beta < \gamma,\,]\beta,\gamma[\subset O\}$. On a donc $\cup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[\subset O$. On va montrer que $O \subset \cup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[$ (et donc que $O = \cup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[$).

Soit $x \in O$, il existe $\alpha_x > 0$ t.q. $]x-\alpha_x, x+\alpha_x[\subset O$. En prenant $\beta_x \in \mathbb{Q}\cap]x-\alpha_x, x[$ et $\gamma_x \in \mathbb{Q}\cap]x, x+\alpha_x[$ (de tels β_x et γ_x existent) on a donc $x \in]\beta_x,\gamma_x[\subset O$ et donc $(\beta_x,\gamma_x) \in A$. D'où $x \in]\beta_x,\gamma_x[\subset \cup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[$. On a bien montré que $O \subset \cup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[$ et donc que $O = \cup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[$. Comme $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable, A est au plus dénombrable et le lemme est démontré. ■

Définition 2.6 (Espace et partie mesurable ou probabilisable)
Soient E un ensemble, et T une tribu sur E. Le couple (E,T) est appelé "espace mesurable" ou (en langage probabiliste !) "espace probabilisable". Les parties de E qui sont (resp. ne sont pas) des éléments de T sont dites mesurables ou probabilisables (resp. non mesurables, non probabilisables).

2.3 Mesure, probabilité

Définition 2.7 (Mesure) *Soit (E,T) un espace mesurable. On appelle mesure une application $m : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (avec $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup (+\infty)$) vérifiant :*

1. $m(\emptyset) = 0$

2. m est σ-additive, c'est-à-dire que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ de parties disjointes deux à deux, (i.e. t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$, si $n \neq m$), on a :

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.1}$$

Remarque 2.4

1. Dans la définition précédente on a étendu à $\overline{\mathbb{R}}_+$ l'addition dans $\mathbb{R}_+$. On a simplement posé $x + \infty = \infty$, pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Noter également que la somme de la série dans la définition précédente est à prendre dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et que, bien sûr, $a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ signifie simplement que $\sum_{p=0}^{n} a_p \to a$ (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) quand $n \to \infty$.
2. Soient $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Remarquer que $x + y = x + z$ implique $y = z$ si $x \neq \infty$.
3. Dans la définition précédente, la condition 1. peut être remplacée par la condition : $\exists\ A \in T, m(A) < \infty$. La vérification de cette affirmation est laissée au lecteur attentif.
4. Il est intéressant de remarquer que, pour une série à termes positifs, l'ordre de sommation est sans importance. Plus précisément, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et si φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$. C'est l'objet du lemme 2.2.
5. Une conséquence immédiate de la σ-additivité est l'additivité, c'est-à-dire que
$$m(\cup_{p=0}^{n} A_p) = \sum_{p=0}^{n} m(A_p)$$
pour toute famille finie $(A_p)_{p=0,\ldots,n}$ d'éléments de T, disjoints 2 à 2. L'additivité se démontre avec la σ-additivité en prenant $A_p = \emptyset$ pour $p > n$ dans (2.1).
6. Dans le cas $E = \mathbb{R}$ et $T = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, il est facile de construire des mesures sur T, mais il n'existe pas de mesure sur T, notée m, telle que $m(]a,b[) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ (voir les exercices 2.28 et 2.27). Une telle mesure existe si on prend pour T la tribu borélenne de $\mathbb{R}$, c'est l'objet de la section 2.5.

Lemme 2.2 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et soit $\varphi\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$.*

DÉMONSTRATION :

On pose

$$A = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (= \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} a_p) \text{ et } B = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)} (= \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)}).$$

Noter que $A, B \in \overline{\mathbb{R}}_+$. On veut montrer que $A = B$.
On montre d'abord que $B \leq A$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $N = \max\{\varphi(0), \ldots, \varphi(n)\}$. Comme $a_q \geq 0$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \leq \sum_{p=0}^{N} a_p \leq A$. On en déduit, faisant tendre n vers ∞ que $B \leq A$.
En raisonnant avec l'inverse de φ on a aussi $A \leq B$ et finalement $A = B$.

■

Définition 2.8 (Mesure finie) *Soient E un ensemble et T une tribu sur E. On appelle mesure finie une mesure m sur T telle que $m(E) < \infty$.*

Définition 2.9 (Probabilité) *Soient E un ensemble et T une tribu sur E. On appelle probabilité une mesure p sur T t.q. $p(E) = 1$.*

Définition 2.10 (Espace mesuré, espace probabilisé) *Soient E un ensemble, T une tribu sur E et m une mesure (resp. une probabilité) sur T. Le triplet (E, T, m) est appelé "espace mesuré" (resp. "espace probabilisé").*

Définition 2.11 (Mesure σ-finie) *Soit (E, T, m) un espace mesuré, on dit que m est σ-finie (ou que (E, T, m) est σ-fini) si :*

$$\exists\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T,\;\; m(A_n) < \infty,\;\; \forall\, n \in \mathbb{N},\; \textit{et}\;\; E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n. \tag{2.2}$$

Remarque 2.5 (Langage probabiliste) En langage probabiliste, la propriété de σ-additivité (2.1) que l'on requiert dans la définition d'une mesure (et donc d'une probabilité) est souvent appelé "axiome complet des probabilités totales".

Exemple 2.1 (Mesure de Dirac) Soient E un ensemble, T une tribu sur E et $a \in E$. On définit sur T la mesure δ_a par (pour $A \in T$) :

$$\delta_a(A) = 0,\;\; \text{si } a \notin A, \tag{2.3}$$

$$\delta_a(A) = 1,\;\; \text{si } a \in A. \tag{2.4}$$

On peut remarquer que la mesure de Dirac est une probabilité.

Remarque 2.6 (Comment choisir la probabilité) Soit (E, T) un espace probabilisable, on peut évidemment définir plusieurs probabilités sur T. C'est tout l'art de la modélisation que de choisir une probabilité qui rende compte du phénomène aléatoire que l'on veut observer. On se base pour cela souvent sur la notion de fréquence, qui est une notion expérimentale à l'origine. Soit $A \in T$ un événement, dont on cherche à évaluer la probabilité $p(A)$. On effectue pour cela N fois l'expérience dont l'univers des possibles est E, et on note N_A le nombre de fois où l'événement A est réalisé. A N fixé, on définit alors la *fréquence* $f_A(N)$ de l'événement A par :

$$f_A(N) = \frac{N_A}{N}.$$

Expérimentalement, il s'avère que $f_N(A)$ admet une limite lorsque $N \to +\infty$. C'est ce qu'on appelle la "loi empirique des grands nombres". On peut donc définir "expérimentalement" $p(A) = \lim_{N\to+\infty} f_N(A)$. Cependant, on n'a pas ainsi démontré que p est une probabilité : il ne s'agit pour l'instant que d'une approche intuitive. On démontrera plus loin la loi forte des grands nombres, qui permettra de justifier mathématiquement la loi empirique. On peut remarquer que $f_N(E) = \frac{N}{N} = 1\ldots$

Exemple 2.2 (Le cas "équiprobable") Soit (E, T, p) un espace probabilisé .On suppose que tous les singletons de E appartiennent à la tribu et que les événements élémentaires sont équiprobables. . On a alors : $p(\{x\}) = \frac{1}{\text{card}E}$ pour tout $x \in E$.

Définition 2.12 (mesure atomique) *Soit (E, T, m) un espace mesuré tel que : $\{x\} \in T$ pour tout x de E. On dit que m est portée par $S \in T$ si $m(S^c) = 0$. Soit $x \in E$, on dit que x est un atome ponctuel de m si $m(\{x\}) \neq 0$. On dit que m est purement atomique si elle est portée par la partie de E formée par l'ensemble de ses atomes ponctuels.*

Définition 2.13 (Mesure diffuse) *Soient (E, T) un espace mesurable et m une mesure sur T . On dit que m est diffuse si $\{x\} \in T$ et $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$. (Cette définition est aussi valable pour une mesure signée sur T, définie dans la section 2.4.)*

Définition 2.14 (Partie négligeable) *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $A \subset E$. On dit que A est négligeable s'il existe un ensemble $B \in T$ tel que $A \subset B$ et $m(B) = 0$.*

Définition 2.15 (Mesure complète) *Soit (E, T, m) un espace mesuré, on dit que m est complète (ou que l'espace (E, T, m) est complet) si toutes les parties négligeables sont mesurables, c'est-à-dire appartiennent à T.*

La proposition suivante donne les principales propriétés d'une mesure.

Proposition 2.3 (Propriétés des mesures) *Soit (E, T, m) un espace mesuré. La mesure m vérifie les quatre propriétés suivantes :*

1. *Monotonie : Soit A, $B \in T$, $A \subset B$, alors*
$$m(A) \leq m(B) \tag{2.5}$$
2. *σ-sous-additivité : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, alors*
$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.6}$$
3. *Continuité croissante : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, t.q. $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors*
$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty}(m(A_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n)) \tag{2.7}$$
4. *Continuité décroissante : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, t.q. $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et t.q. il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $m(A_{n_0}) < \infty$, alors*
$$m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty}(m(A_n)) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n)) \tag{2.8}$$

DÉMONSTRATION :
La démonstration de ces propriétés est facile : elles découlent toutes du caractère positif et du caractère σ-additif de la mesure. Attention : ces propriétés ne sont pas vérifiées par les mesures signées que nous verrons à la section 2.4.

1. *Monotonie.* Soit $A, B \in T$, $A \subset B$. On a $B = A \cup (B \setminus A)$ et $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Comme $A \in T$ et $B \setminus A = B \cap A^c \in T$, l'additivité de m (voir la remarque 2.4) donne $m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \geq m(A)$, car m prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

   Noter aussi que $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$ si $0 \leq m(A) \leq m(B) < \infty$ (mais cette relation n'a pas de sens si $m(A) = m(B) = \infty$).

2. *$\sigma-$sous additivité.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On veut montrer que

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n).$$

On pose $B_0 = A_0$ et, par récurrence sur n, $B_n = A_n \setminus (\cup_{i=0}^{n-1}B_i)$ pour $n \ge 1$. Par récurrence sur n on montre que $B_n \in T$ pour tout n en remarquant que, pour $n > 1$, $B_n = A_n \cap (\cap_{i=0}^{n-1}B_i^c)$. La construction des B_n assure que $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \ne m$ et $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n$. Pour vérifier cette dernière propriété, on remarque que $B_n \subset A_n$ donc $\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n \subset \cup_{n\in\mathbb{N}}A_n$. Puis, si $x \in A_n$ et $x \notin \cup_{i=0}^{n-1}B_i$, on a alors $x \in A_n \cap (\cap_{i=0}^{n-1}B_i^c) = B_n$. Ceci prouve que $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n \subset \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n$ et donc, finalement, $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n$.

On utilise maintenant la $\sigma-$additivité de m et la monotonie de m (car $B_n \subset A_n$) pour écrire $m(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) = m(\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$.

3. *Continuité croissante.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, t.q. $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par monotonie de m, on a $m(A_{n+1}) \ge m(A_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ et on définit la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ pour tout $n \ge 1$ (noter que $A_{n-1} \subset A_n$). On a $A = \cup_{n\in\mathbb{N}}A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n$, $B_n \in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \ne m$.

La $\sigma-$additivité de m nous donne

$$m(A) = m(\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{n} m(B_p).$$

Puis, comme $A_n = \cup_{p=0}^{n}B_p$, l'additivité de m (qui se déduit de la $\sigma-$additivité) nous donne $\sum_{p=0}^{n} m(B_p) = m(A_n)$ et donc $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$.

4. *Continuité décroissante.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, t.q. $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $m(A_{n_0}) < \infty$.

Par monotonie, on a $m(A_{n+1}) \le m(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. On a aussi, par monotonie, $m(A) \le m(A_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $A = \cap_{n\in\mathbb{N}}A_n$. Comme $m(A_{n_0}) < \infty$, on a aussi $m(A_n) < \infty$ pour tout $n \ge n_0$ et $m(A) < \infty$. On pose $B_n = A_{n_0} \setminus A_n = A_{n_0} \cap A_n^c \in T$, pour tout $n \ge n_0$. La suite $(B_n)_{n\ge n_0}$ est croissante ($B_n \subset B_{n+1}$ pour tout $n \ge n_0$) et $B = \cup_{n\ge 0}B_n = \cup_{n\ge n_0}(A_{n_0} \setminus A_n) = A_{n_0} \setminus \cap_{n\ge n_0}A_n = A_{n_0} \setminus A$.

La continuité croissante donne

$$m(A_{n_0} \setminus A) = m(B) = \lim_{n\to\infty} m(B_n) = \lim_{n\to\infty} m(A_{n_0} \setminus A_n). \tag{2.9}$$

Comme $A \subset A_{n_0}$, on a $m(A_{n_0} \setminus A) = m(A_{n_0}) - m(A)$ (car $m(A) \le m(A_{n_0}) < \infty$, on utilise ici la remarque à la fin de la preuve de la monotonie). De même, comme $A_n \subset A_{n_0}$ (pour $n \ge n_0$), on a $m(A_{n_0} \setminus A_n) = m(A_{n_0}) - m(A_n)$ (car $m(A_n) \le m(A_{n_0}) < \infty$). En utilisant une nouvelle fois que $m(A_{n_0}) < \infty$, on déduit de (2.9) que $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$.

■

Théorème 2.1 (Mesure complétée) *Soit (E,T,m) un espace mesuré, on note $\mathcal{N}_m$ l'ensemble des parties négligeables. On pose $\overline{T} = \{A \cup N,\ A \in T,\ N \in \mathcal{N}_m\}$. Alors $\overline{T}$ est une tribu, et il existe une et une seule mesure, notée $\overline{m}$, sur $\overline{T}$, égale à m sur T. De plus, une partie de E est négligeable pour $(E,\overline{T},\overline{m})$ si et seulement si elle est négligeable pour (E,T,m). la mesure $\overline{m}$ est complète et l'espace mesuré $(E,\overline{T},\overline{m})$ s'appelle le complété de (E,T,m). La mesure $\overline{m}$ s'appelle la mesure complétée de la mesure m.*

DÉMONSTRATION : Cette démonstration est l'objet de l'exercice 2.32. ■

Définition 2.16 (Mesure absolument continue, mesure étrangère)
Soient (E,T) un espace mesurable, et m et μ des mesures (positives) sur T.

1. *On dit que la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure m (et on note $\mu << m$) si pour tout $A \in T$ tel que $m(A) = 0$, alors $\mu(A) = 0$.*
2. *On dit que la mesure μ est étrangère à la mesure m (et note $\mu \perp m$) s'il existe $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et $\mu(A^c) = 0$.*

Proposition 2.4 *Soient (E,T) un espace mesurable, et m et μ des mesures (positives) sur T ; on suppose de plus que la mesure μ est σ-finie. Alors il existe une mesure μ_a absolument continue par rapport à m et une mesure μ_e étrangère à m (et à μ_a) t.q. $\mu = \mu_a + \mu_e$.*

DÉMONSTRATION :
On suppose tout d'abord que μ est une mesure finie. On pose $\alpha = \sup\{\mu(A); A \in T, m(A) = 0\}$. Il existe donc une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $m(A_n) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\mu(A_n) \to \alpha$, quand $n \to \infty$. On pose alors $C = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
On a $C \in T$, $0 \le m(C) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) = 0$ (par σ-sous additivité de m), $\mu(C) \ge \mu(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par monotonie de μ) et donc, en passant à la limite quand $n \to \infty$, $\mu(C) \ge \alpha$. Enfin, la définition de α donne alors $\mu(C) = \alpha$. On a donc trouvé $C \in T$ t.q. $m(C) = 0$ et $\mu(C) = \alpha$.

Pour $A \in T$, on pose $\mu_e(A) = \mu(A \cap C)$ et $\mu_a(A) = \mu(A \cap C^c)$.
Il est clair que μ_e et μ_a sont des mesures sur T et que $\mu = \mu_e + \mu_a$. Comme $\mu_e(C^c) = 0$ et $\mu_a(C) = 0$, les mesures μ_a et μ_e sont étrangères. Comme $m(C) = 0$ et $\mu_e(C^c) = 0$, les mesures μ_e et m sont aussi étrangères. Il reste à montrer que μ_a est absolument continue par rapport à m.

Soit $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$. On veut montrer que $\mu_a(B) = 0$, c'est-à-dire que $\mu(B \cap C^c) = 0$. On pose $D = B \cap C^c$ et $F = C \cup D$. Comme $D \cap C = \emptyset$, On a $m(F) = m(C) + m(D) \le m(C) + m(B) = 0$ et $\mu(F) = \mu(C) + \mu(D) = \alpha + \mu(D)$. Comme $m(F) = 0$, la définition de α donne que $\mu(F) \le \alpha$. On a donc $\alpha + \mu(D) \le \alpha$, d'où l'on déduit, comme $\alpha \in \mathbb{R}$ (et c'est ici que l'on utilise le fait que μ est une mesure finie), que $\mu(D) = 0$, c'est-à-dire $\mu_a(B) = 0$. On a bien ainsi montré que μ_a est absolument continue par rapport à m.

On considère maintenant le cas général où μ est σ-finie. Il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $E_n \cup E_m = \emptyset$ si $n \ne m$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $A \in T$, on pose $\mu^{(n)}(A) = \mu(A \cap E_n)$. $\mu^{(n)}$ est donc une mesure finie sur T. Le raisonnement précédent donne donc l'existence de $\mu_a^{(n)}$ absolument continue par rapport à m et de $\mu_e^{(n)}$ étrangère à m (et à $\mu_a^{(n)}$) t.q. $\mu^{(n)} = \mu_a^{(n)} + \mu_e^{(n)}$. On pose alors, pour $A \in T$:

$$\mu_e(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_e^{(n)}(A);\ \mu_a(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_a^{(n)}(A).$$

μ_e et μ_a sont bien des mesures sur T (voir l'exercice 4.2) et il est clair que $\mu = \mu_e + \mu_a$, μ_a absolument continue par rapport à m et μ_e étrangère à m (et à μ_a). ■

Il est parfois utile (surtout en théorie des probabilités, mais une telle question apparaît aussi dans le section 2.5 et dans le chapitre 7) de montrer l'unicité d'une mesure ayant des propriétés données. La proposition suivante donne une méthode pour montrer une telle unicité (d'autres méthodes sont possibles, voir, par exemple, la proposition 5.4 dans le chapitre 5).

Proposition 2.5 *Soit (E,T) un espace mesurable et m, μ deux mesures sur T. On suppose qu'il existe $\mathcal{C} \subset T$ t.q.*

1. $\mathcal{C}$ engendre T,

2. $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie (c'est-à-dire $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$),

3. Il existe $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ t.q. $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$, $m(E_n) < \infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$,

4. $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$.

On a alors $m = \mu$ (c'est-à-dire $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$).

DÉMONSTRATION : Cette démonstration est l'objet de l'exercice 2.21. ■

2.4 mesure signée

Définition 2.17 (Mesure signée) *Soit (E,T) un espace mesurable. On appelle mesure signée (sur T) une application $m : T \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété de σ-additivité, c'est-à-dire t.q. pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$, si $n \neq m$,*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.10}$$

Noter qu'une mesure signée prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. En prenant $A_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans (2.10), on en déduit que $m(\emptyset) = 0$.

On peut aussi considérer des mesures à valeurs complexes (c'est-à-dire dans $\mathbb{C}$). Dans ce cas, les parties réelles et imaginaires de ces mesures à valeurs complexes sont des mesures signées.

Dans toute la suite du cours, les mesures considérées seront en général positives, c'est-à-dire (cf. définition 2.7) à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Lorsque l'on s'intéressera à des mesures prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}$, on précisera qu'il s'agit de "mesures signées". Noter que les mesures signées ne vérifient pas, en général, les propriétés (2.5) et (2.6). Pour avoir un contre exemple, il suffit de considérer une mesure signée m (non nulle) t.q. $-m$ soit une mesure (positive).

Proposition 2.6 (Décomposition d'une mesure signée) *Soient (E,T) un espace mesurable et m une mesure signée sur T. Alors, il existe deux mesures (positives) finies, notées m^+ et m^-, t.q. :*

1. $m(A) = m^+(A) - m^-(A)$, pour tout $A \in T$.

2. Les mesures m^+ et m^- sont étrangères, c'est-à-dire qu'il existe $C \in T$ tel que $m^+(C) = 0$, et $m^-(E \setminus C) = 0$.

Une conséquence des propriétés ci-dessus est que $m^-(A) = -m(A \cap C)$ et $m^+(A) = m(A \cap C^c)$ pour tout $A \in T$.

De plus, la décompostion de m en différence de deux mesures (positives) finies étrangères est unique. Elle s'appelle "décomposition de Hahn" de m.

DÉMONSTRATION :
La démonstration d'existence de m^+ et m^- est décomposée en trois étapes. Dans la première étape, on va montrer que, si $A \in T$, il existe $\tilde{A} \in T$ t.q. $\tilde{A} \subset A$, $m(\tilde{A}) \geq m(A)$ et :

$$B \in T,\ B \subset \tilde{A} \ \Rightarrow\ m(B) \geq 0.$$

Cette première étape nous permettra, dans l'étape 2, de montrer l'existence de $C \in T$ t.q. $m(C) = \sup\{m(A), A \in T\}$ (ceci montre, en particulier que $\sup\{m(A), A \in T\} < \infty$).

Enfin, dans l'étape 3, on pose $m^+(A) = m(A \cap C)$ et $m^-(A) = -m(A \cap C^c)$ (pour tout $A \in T$) et on remarque que m^+ et m^- sont des mesures finies, étrangères et t.q. $m = m^+ - m^-$.

Etape 1. Soit $A \in T$, on montre, dans cette étape, qu'il existe $\tilde{A} \in T$ t.q. $\tilde{A} \subset A$, $m(\tilde{A}) \geq m(A)$ et :

$$B \in T,\ B \subset \tilde{A} \ \Rightarrow\ m(B) \geq 0. \tag{2.11}$$

On commence par montrer, par récurrence sur n, l'existence d'une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déléments de T t.q. :

1. $B_0 = A$,
2. $B_{n+1} \subset B_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
3. $m(B_n \setminus B_{n+1}) \leq \beta_n = \max\{\frac{\alpha_n}{2}, -1\}$ où $\alpha_n = \inf\{m(C), C \in T, C \subset B_n\}$.

On prend $B_0 = A$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, on suppose B_p connu pour $p \leq n$. On a $\alpha_n = \inf\{m(C), C \subset B_n\} \leq 0$ (car $\emptyset \subset B_n$). Si $\alpha_n = -\infty$, il existe $C_n \in T$ t.q. $C_n \subset B_n$ et $m(C_n) \leq \beta_n = -1$. Si $-\infty < \alpha_n < 0$, on a $\beta_n > \alpha_n$, il existe donc $C_n \in T$ t.q. $C_n \subset B_n$ et $m(C_n) \leq \beta_n$. Si $\alpha_n = 0$, on prend $C_n = \emptyset$. Enfin, on prend $B_{n+1} = B_n \setminus C_n$ et on obtient bien les propriétés désirées en remarquant que $C_n = B_n \setminus B_{n+1}$.

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (c'est-à-dire $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Pour $m > n$, on a donc $C_m \subset B_m \subset B_{n+1}$ et donc $C_m \cap C_n = \emptyset$ (car $B_{n+1} = B_n \setminus C_n$). Par $\sigma-$additivité de m, on en déduit $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(C_n)$. Comme $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n) \in \mathbb{R}$, la série de terme général $m(C_n)$ est convergente. On a donc $m(C_n) \to 0$ quand $n \to \infty$ et donc $\beta_n \to 0$ quand $n \to \infty$ (car $m(C_n) \leq \beta_n \leq 0$) et, finalement, $\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

On pose maintenant $\tilde{A} = A \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. On a, bien sûr, $\tilde{A} \in T$ et $\tilde{A} \subset A$. On montre maintenant que $\tilde{A}$ vérifie (2.11). Soit $C \in T$, $C \subset \tilde{A}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C \subset B_n$ et donc $m(C) \geq \alpha_n$. Quand $n \to \infty$, on en déduit que $m(C) \geq 0$. ce qui donne bien (2.11).

Il reste à montrer que $m(\tilde{A}) \geq m(A)$. Comme $A = \tilde{A} \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n)$ (et que cette union est "disjointe"), la $\sigma-$additivité de m donne que $m(A) = m(\tilde{A}) + \sum_{n\in\mathbb{N}} m(C_n) \leq m(\tilde{A})$. Ce qui termine la première étape.

Etape 2. On pose $\alpha = \sup\{m(A), A \in T\}$ et on montre, dans cette étape, qu'il existe $C \in T$ t.q. $m(C) = \alpha$.

Par définition d'une borne supérieure, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de T t.q. $m(A_n) \to \alpha$ quand $n \to \infty$. Grâce à l'étape 1, on peut supposer (quitte à remplacer A_n par $\tilde{A}_n$ construit comme dans l'étape 1) que A_n vérifie (2.11), c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B \in T,\ B \subset A_n \ \Rightarrow\ m(B) \geq 0. \tag{2.12}$$

On pose $C = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On commence par montrer que $m(C) \geq m(A_m)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. On peut écrire C comme une union "disjointe" :

$$C = A_m \cup (\cup_{n \neq m} C_{n,m}),$$

avec $C_{n,m} \in T$ et $C_{n,m} \subset A_n$ pour tout $m \neq n$. En effet, il suffit pour cela de constuire par récurrence (sur n) la suite des $C_{n,m}$ en prenant pour $C_{n,m}$ l'intersection de C avec A_n à laquelle on retranche A_m et les $C_{n,m}$ précédemment construits.

Par $\sigma-$additivité de m, on a $m(C) = m(A_m) + \sum_{n \neq m} m(C_{n,m})$. puis, comme $C_{n,m} \subset A_n$, on a, par (2.12), $m(C_{n,m}) \geq 0$. On en déduit $m(C) \geq m(A_m)$.

En faisant tendre m vers ∞, on a alors $m(C) \geq \alpha$ et donc, finalement $m(C) = \alpha$.

Etape 3. Construction de m^+ et m^-.

Pour constuire m^+ et m^-, on utilise un élément C de T t.q. $m(C) = \alpha = \sup\{m(A), A \in T\}$ (l'existence de C a été montré à l'étape 2). Pour $A \in T$, on pose :

$$m^+(A) = m(A \cap C),\ m^-(A) = -m(A \cap C^c).$$

On a $m^+(\emptyset) = m^-(\emptyset) = 0$ (car $m(\emptyset) = 0$) et les applications m^+ et m^- sont des applications $\sigma-$additives de T dans $\mathbb{R}$ (car m est $\sigma-$additive). Pour montrer que m^+ et m^- sont des mesures finies, il suffit de montrer qu'elles prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ce que l'on montre maintenant.

Soit $A \in T$, on a, par additivité de m et grâce à la définition de α, $\alpha = m(C) = m(A \cap C) + m(A^c \cap C) \leq m(A \cap C) + \alpha$. On en déduit $m(A \cap C) \geq 0$. ce qui prouve bien que $m^+(A) \in \mathbb{R}_+$. On a aussi, encore une fois par additivité de m et grâce à la définition de α, $\alpha \geq m(C) + m(A \cap C^c) = \alpha + m(A \cap C^c)$. On en déduit $m(A \cap C^c) \leq 0$ et donc $m^-(A) \in \mathbb{R}_+$.

Les applications m^+ et m^- sont des mesures finies (noter que $m^+(E) = m(E \cap C) < \infty$ et $m^-(E) = m(E \cap C^c) < \infty$). Elles sont étrangères car $m^+(C^c) = m(C^c \cap C) = m(\emptyset) = 0$ et $m^-(C) = -m(C \cap C^c) = 0$. Enfin, pour tout $A \in T$, on a, par $\sigma-$additivité de m :

$$m(A) = m(A \cap C) + m(A \cap C^c) = m^+(A) - m^-(A).$$

Ceci termine la démonstration de l'existence de m^+ et m^-.

Pour montrer l'unicité de cette décomposition de m, on suppose que μ et ν sont deux mesures finies étrangères t.q. $m = \mu - \nu$. Comme elle sont étrangères, il existe $D \in T$ t.q. $\mu(D^c) = \nu(D) = 0$. On montre alors que, pour tout $A \in T$, on a nécessairement :

$$\mu(A) = \sup\{m(B);\ B \in T,\ B \subset A\}. \tag{2.13}$$

En effet, si $A \in T$ et $B \in T$, $B \subset A$, on a $m(B) = \mu(B) - \nu(B) \leq \mu(B) \leq \mu(A)$ (par positivité de ν et monotonie de μ). Puis, en prenant $B = A \cap D$, on a $m(B) = m(A \cap D) = \mu(A \cap D) - \nu(A \cap D) = \mu(A \cap D) = \mu(A) - \mu(A \cap D^c) = \mu(A)$. Ceci prouve bien que (2.13) est vraie (et prouve que le sup est atteint pour $B = A \cap D$). L'égalité (2.13) donne donc de manière unique μ en fonction de m. L'unicité de ν découle alors du fait que $\nu = \mu - m$. ■

Remarque 2.7 Une conséquence de la proposition 2.6 est que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$ apparaissant dans (2.10) est absolument convergente car (pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$, si $n \neq m$) on a

$$\sum_{p=0}^{n} |m(A_p)| \leq \sum_{p=0}^{n} m^+(A_p) + \sum_{p=0}^{n} m^-(A_p) \leq m^+(E) + m^-(E) < \infty.$$

En fait, la définition 2.17 donne directement que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$ apparaissant dans (2.10) est commutativement convergente (c'est-à-dire qu'elle est convergente, dans $\mathbb{R}$, quel que soit l'ordre dans lequel on prend les termes de la série et la somme de la série ne dépend pas de l'ordre dans lequel les termes ont été pris). Elle est donc absolument convergente (voir l'exercice 2.33). Nous verrons plus loin que cette équivalence entre les séries absolument convergentes et les séries commutativement convergentes est fausse pour des séries à valeurs dans un espace de Banach de dimension infinie.

2.5 La mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens

Il serait bien agréable, pour la suite du cours, de montrer l'existence d'une application λ, définie sur tout $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, t.q. l'image par λ d'un intervalle de $\mathbb{R}$ soit la longueur de cet intervalle, et qui vérifie les propriétés

(1.9) et (1.10). Malheureusement, on peut montrer qu'une telle application n'existe pas (voir les exercices 2.28 et 2.27). Le théorème suivant donne l'existence d'une telle application définie seulement sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (l'exercice 2.28 donne alors que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$). Cette application s'appelle la mesure de Lebesgue.

Théorème 2.2 (Carathéodory) *Il existe une et une seule mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée λ et appelée mesure de Lebesgue sur les boréliens, t.q. $\lambda(]\alpha, \beta[) = \beta - \alpha$, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$.*

Il y a plusieurs démonstrations possibles de ce théorème. Pour la partie "existence" de ce théorème, nous donnons dans cette section une démonstration due à Carathéodory. Soit $A \subset \mathbb{R}$. On définit $\lambda^\star(A)$ par :

$$\lambda^\star(A) = \inf_{(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E_A} \sum_{i=1}^{n} \ell(A_i),$$

où E_A est l'ensemble des familles dénombrables d'intervalles ouverts dont l'union contient A, et $\ell(A_i)$ représente la longueur de l'intervalle A_i. On peut montrer (voir l'exercice 2.27) que l'application $\lambda^\star$ ainsi définie de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ n'est pas σ- additive (ce n'est donc pas une mesure).

On montre par contre dans cette section que la restriction de $\lambda^\star$ à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une mesure, qu'on note λ, mesure de Lebesgue. L'existence de la mesure de Lebesgue peut aussi être démontrée en utilisant un théorème plus général (de F. Riesz) que nous verrons dans un chapitre ultérieur.

Après la définition de $\lambda^\star$ et la démonstration de propriétés de $\lambda^\star$, on donne la démonstration de la partie "existence" du théorème de Carathéodory (voir page 33). La partie "unicité" du théorème de Carathéodory (voir page 36) peut être démontrée en utilisant le théorème de "régularité" sur les mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Théorème 2.3, très utille dans la suite du cours) et d'un lemme classique sur les ouverts de $\mathbb{R}$ (lemme 2.4). Cette partie "unicité" peut aussi être démontrée, plus directement, en utilisant la proposition 2.5.

Définition 2.18 (Définition de $\lambda^\star$) *Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On pose*

$$\lambda^\star(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n); (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_A\},$$

avec $E_A = \{(I_n)_{n\in\mathbb{N}}; I_n =]a_n, b_n[, -\infty < a_n \leq b_n < \infty, \forall n \in \mathbb{N}, A \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n\}$ et $\ell(I) = b - a$ si $I =]a, b[$, $-\infty < a \leq b < \infty$.

Proposition 2.7 (Propriétés de $\lambda^\star$) *L'application $\lambda^\star : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (définie dans la définition 2.18) vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\lambda^\star(\emptyset) = 0$,

2. (Monotonie) $\lambda^\star(A) \leq \lambda^\star(B)$, pour tout A, $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $A \subset B$,

3. ($\sigma-$sous additivité) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, alors $\lambda^\star(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^\star(A_n)$,

4. $\lambda^\star(]a, b[) = b - a$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$.

DÉMONSTRATION :
On remarque tout d'abord que $\lambda^\star(A) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (car $\lambda^\star(A)$ est la borne inférieure d'une partie de $\overline{\mathbb{R}}_+$).

Propriété 1. Pour montrer que $\lambda^\star(\emptyset) = 0$, il suffit de remarquer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_\emptyset$ avec $I_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $0 \leq \lambda^\star(\emptyset) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) = 0$.

Propriété 2. Soit $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $A \subset B$. On a $E_B \subset E_A$ et donc $\lambda^\star(A) \le \lambda^\star(B)$.

Propriété 3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Il suffit de considérer le cas où $\lambda^\star(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (sinon, l'inégalité est immédiate).

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(I_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} \in E_{A_n}$ t.q. $\sum_{m\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,m}) \le \lambda^\star(A_n) + \varepsilon/(2^n)$.

On remarque alors que $(I_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est un recouvrement de A par des intervalles ouverts et donc que :

$$\lambda^\star(A) \le \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \ell(I_{n,m}).$$

Noter que $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \ell(I_{n,m}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_{\varphi(n)})$, où φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$ (cette somme ne dépend pas de la bijection choisie, voir le lemme 2.2 page 22).Avec le lemme 2.3 ci dessous, on en déduit :

$$\lambda^\star(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{m\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,m})) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^\star(A_n) + 2\varepsilon,$$

ce qui donne bien, quand $\varepsilon \to 0$, $\lambda^\star(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^\star(A_n)$.

Propriété 4. Pour montrer la quatrième propriété. On commence par montrer :

$$\lambda^\star([a,b]) = b - a, \ \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b. \tag{2.14}$$

Soit donc $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Comme $[a,b] \subset]a-\varepsilon, b+\varepsilon[$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lambda^\star([a,b]) \le b - a + 2\varepsilon$. On en déduit $\lambda^\star([a,b]) \le b - a$.

Pour démontrer l'inégalité inverse, soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{[a,b]}$. Par compacité de $[a,b]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $[a,b] \subset \cup_{p=0}^n I_p$. On peut alors construire (par récurrence) i_0, $i_1, \ldots, i_q \in \{0, \ldots, n\}$ t.q. $a_{i_0} < a$, $a_{i_{p+1}} < b_{i_p}$ pour tout $p \in \{0, \ldots, q-1\}$, $b < b_{i_q}$. On en déduit que $b - a < \sum_{p=0}^q b_{i_p} - a_{i_p} \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$ et donc $b - a \le \lambda^\star([a,b])$. Ceci donne bien (2.14).

En remarquant que $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset]a,b[\subset [a,b]$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $0 < \varepsilon < (b-a)/2$, la monotonie de $\lambda^\star$ donne (avec (2.14)) que $\lambda^\star(]a,b[) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. La monotonie de $\lambda^\star$ donne alors aussi que $\lambda^\star([a,b[) = \lambda^\star(]a,b]) = \lambda^\star(]a,b[) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, et enfin que $\lambda^\star(]-\infty, a]) = \lambda^\star(]-\infty, a[) = \lambda^\star(]a, \infty]) = \lambda^\star([a, \infty]) = \infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. ■

Lemme 2.3 (Double série à termes positifs) *Soit $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \subset \mathbb{R}_+$. Alors on a :*

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m}).$$

DÉMONSTRATION : On pose $A = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m}$ et $B = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m})$. Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$. On rappelle que $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m} = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_{\varphi(p)}$.

Pour tout i, $j \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\{0, \ldots, i\} \times \{0, \ldots j\} \subset \{\varphi(0), \ldots, \varphi(n)\}$. Comme $a_{n,m} \ge 0$ pour tout (n,m), on en déduit que

$$A \ge \sum_{p=0}^n a_{\varphi(p)} \ge \sum_{n=0}^i (\sum_{m=0}^j a_{n,m})$$

et donc, en faisant tendre j puis i vers $+\infty$, que $A \ge B$. Un raisonnement similaire donne que $B \ge A$ et donc $A = B$. ■

On introduit maintenant la tribu de Lebesgue, sur laquelle on montrera que $\lambda^\star$ est une mesure.

Définition 2.19 (Tribu de Lebesgue) *On pose $\mathcal{L} = \{E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda^\star(A) = \lambda^\star(A \cap E) + \lambda^\star(A \cap E^c)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$. On rappelle que $\lambda^\star$ est définie dans la définition 2.18 (et que $E^c = \mathbb{R} \setminus E$). Cet ensemble de parties de $\mathbb{R}$ noté $\mathcal{L}$ s'appelle "tribu de Lebesgue" (on montre dans la proposition 2.8 que $\mathcal{L}$ est bien une tribu).*

Remarque 2.8 On peut avoir une première idée de l'intérêt de la définition 2.19 en remarquant qu'elle donne immédiatement l'additivité de $\lambda^\star$ sur $\mathcal{L}$. En effet, soit $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ t.q. $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ et soit $A \subset \mathbb{R}$. On suppose que $E_1 \in \mathcal{L}$ et on utilise la définition de $\mathcal{L}$ avec $A \cap (E_1 \cup E_2)$, on obtient $\lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + \lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1^c) = \lambda^\star(A \cap E_1) + \lambda^\star(A \cap E_2)$ (car $E_1 \cap E_2 = \emptyset$).

Par récurrence sur n, on a donc aussi $\lambda^\star(A \cap (\cup_{i=1}^n E_i)) = \sum_{i=1}^n \lambda^\star(A \cap E_i)$, dès que $E_1, \ldots, E_{n-1} \in \mathcal{L}$, $A, E_n \subset \mathbb{R}$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

En particulier, en prenant $A = \mathbb{R}$, on obtient l'additivité de $\lambda^\star$ sur $\mathcal{L}$, c'est-à-dire

$$\lambda^\star(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \lambda^\star(E_i),$$

si $E_1, \ldots, E_{n-1} \in \mathcal{L}$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Remarque 2.9 Pour tout $E, A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a, par $\sigma-$sous additivité de $\lambda^\star$, $\lambda^\star(A) \leq \lambda^\star(A \cap E) + \lambda^\star(A \cap E^c)$. Pour montrer que $E \in \mathcal{L}$ (définie dans la définition 2.19), il suffit donc de montrer que $\lambda^\star(A) \geq \lambda^\star(A \cap E) + \lambda^\star(A \cap E^c)$, pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Proposition 2.8 (Propriétés de $\mathcal{L}$) *$\mathcal{L}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ et $\lambda^\star_{|\mathcal{L}}$ est une mesure. $\mathcal{L}$ et $\lambda^\star$ sont définies dans les définitions 2.18 et 2.19.*

DÉMONSTRATION :
Il est immédiat que $\emptyset \in \mathcal{L}$ et que $\mathcal{L}$ est stable par "passage au complémentaire". On sait aussi que $\lambda^\star(\emptyset) = 0$. Il reste donc à démontrer que $\mathcal{L}$ est stable par union dénombrable et que la restriction de $\lambda^\star$ à $\mathcal{L}$ est une mesure. Ceci se fait en deux étapes décrites ci-après.

Etape 1. On montre, dans cette étape, que $\mathcal{L}$ est stable par union finie et que, si $n \geq 2$ et $(E_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathcal{L}$ est t.q. $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, alors on a :

$$\lambda^\star(A \cap (\cup_{i=1}^n E_i)) = \sum_{i=1}^n \lambda^\star(A \cap E_i), \ \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}). \tag{2.15}$$

(Cette dernière propriété donne l'additivité de $\lambda^\star$ sur $\mathcal{L}$ en prenant $A = \mathbb{R}$, cette propriété d'additivité a déjà été signalée dans la remarque 2.8.)

Par une récurrence facile, il suffit de montrer que $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{L}$ si E_1, $E_2 \in \mathcal{L}$ et de montrer la propriété (2.15) pour $n = 2$. Soit donc E_1, $E_2 \in \mathcal{L}$. On pose $E = E_1 \cup E_2$. Pour montrer que $E \in \mathcal{L}$, il suffit de montrer (voir la remarque 2.9) que $\lambda^\star(A) \geq \lambda^\star(A \cap E) + \lambda^\star(A \cap E^c)$, pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Par $\sigma-$sous additivité de $\lambda^\star$ on a

$$\lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \lambda^\star((A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)) \leq \lambda^\star(A \cap E_1) + \lambda^\star(A \cap E_1^c \cap E_2),$$

et donc

$$\lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)^c)$$
$$\leq \lambda^\star(A \cap E_1) + \lambda^\star(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^\star(A \cap E_1^c \cap E_2^c).$$

Comme $E_2 \in \mathcal{L}$, on a $\lambda^\star(A \cap E_1^c) = \lambda^\star(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^\star(A \cap E_1^c \cap E_2^c)$. Puis, comme $E_1 \in \mathcal{L}$, on a $\lambda^\star(A) = \lambda^\star(A \cap E_1) + \lambda^\star(A \cap E_1^c)$. On en déduit

$$\lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \leq \lambda^\star(A).$$

Ce qui prouve que $E \in \mathcal{L}$.

Pour montrer (2.15) avec $n = 2$ si $E_1, E_2 \in \mathcal{L}$ avec $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, il suffit de remarquer que (pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$) $\lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \lambda^\star((A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)) = \lambda^\star([(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1) + \lambda^\star([(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1^c) = \lambda^\star(A \cap E_1) + \lambda^\star(A \cap E_2)$. (On a utilisé le fait que $E_1 \in \mathcal{L}$.) Ceci termine l'étape 1.

Une conséquence de cette étape (et du fait que $\mathcal{L}$ est stable par passage au complémentaire) est que $\mathcal{L}$ est stable par intersection finie.

Etape 2. On montre, dans cette étape, que $\mathcal{L}$ est stable par union dénombrable et la restriction de $\lambda^\star$ à $\mathcal{L}$ est une mesure (ce qui termine la démonstration de la proposition 2.8).

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ et $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. On veut montrer que $E \in \mathcal{L}$. On commence par remarquer que $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ avec $F_0 = E_0$ et, par récurrence, pour $n \geq 1$, $F_n = E_n \setminus \cup_{p=0}^{n-1} F_p$. L'étape 1 nous donne que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ et, comme $F_n \cap F_m = \emptyset$ si $n \neq m$, on peut utiliser (2.15). Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a donc :

$$\begin{aligned} \lambda^\star(A) &= \lambda^\star(A \cap (\cup_{p=0}^n F_p)) + \lambda^\star(A \cap (\cup_{p=0}^n F_p)^c) \\ &= \sum_{p=0}^n \lambda^\star(A \cap F_p) + \lambda^\star(A \cap (\cup_{p=0}^n F_p)^c). \end{aligned} \tag{2.16}$$

En utilisant le fait que $E^c \subset (\cup_{p=0}^n F_p)^c$ et la monotonie de $\lambda^\star$, on a $\lambda^\star(A \cap (\cup_{p=0}^n F_p)^c) \geq \lambda^\star(A \cap E^c)$. En faisant tendre n vers ∞ dans (2.16) et en utilisant la $\sigma-$sous additivité de $\lambda^\star$, on en déduit alors que $\lambda^\star(A) \geq \lambda^\star(A \cap E)$ $+ \lambda^\star(A \cap E^c)$. Ce qui prouve que $E \in \mathcal{L}$ (voir remarque 2.9) et donc que $\mathcal{L}$ est une tribu.

Il reste à montrer que $\lambda^\star$ est une mesure sur $\mathcal{L}$. Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ t.q. $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Par monotonie de $\lambda^\star$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda^\star(\cup_{p=0}^n E_p) \leq \lambda^\star(E)$ et donc, en utilisant l'additivité de $\lambda^\star$ sur $\mathcal{L}$ (démontrée à l'étape 1, voir (2.15) avec $A = E$), $\sum_{p=0}^n \lambda^\star(E_p) \leq \lambda^\star(E)$. Ce qui donne, passant à limite quand $n \to \infty$, $\sum_{p=0}^\infty \lambda^\star(E_p) \leq \lambda^\star(E)$. D'autre part, $\lambda^\star(E) \leq \sum_{p=0}^\infty \lambda^\star(E_p)$, par $\sigma-$sous additivité de $\lambda^\star$. On a donc $\lambda^\star(E) = \sum_{p=0}^\infty \lambda^\star(E_p)$. Ce qui prouve que $\lambda^\star_{|\mathcal{L}}$ est une mesure.

■

DÉMONSTRATION DE LA PARTIE “EXISTENCE" DU THÉORÈME 2.2 :

Pour montrer la partie “existence" du théorème 2.2, il suffit, grâce aux propositions 2.7 et 2.8, de montrer que $\mathcal{L}$ (définie dans la définition 2.19) contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour cela, il suffit de montrer que $]a, \infty[\subset \mathcal{L}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (car $\{]a, \infty[,\ a \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Soit donc $a \in \mathbb{R}$ et $E =]a, \infty[$. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on veut montrer que $\lambda^\star(A) \geq \lambda^\star(A \cap E) + \lambda^\star(A \cap E^c)$. On peut supposer que $\lambda^\star(A) < \infty$ (sinon l'inégalité est immédiate).

Soit $\varepsilon > 0$. Par la définition de $\lambda^\star(A)$, il existe $(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_A$ t.q. $\lambda^\star(A) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n) - \varepsilon$. Comme $A \cap E \subset (\cup_{n \in \mathbb{N}}(I_n \cap E))$ et $A \cap E^c \subset (\cup_{n \in \mathbb{N}}(I_n \cap E^c))$, la $\sigma-$sous additivité de $\lambda^\star$ donne

$$\lambda^\star(A \cap E) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^\star(I_n \cap E) \quad \text{et} \quad \lambda^\star(A \cap E^c) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^\star(I_n \cap E^c).$$

Comme $I_n \cap E$ et $I_n \cap E^c$ sont des intervalles, la fin de la démonstration de la proposition 2.7 donne $\lambda^\star(I_n \cap E) = \ell(I_n \cap E)$ et $\lambda^\star(I_n \cap E^c) = \ell(I_n \cap E^c)$. On en déduit $\lambda^\star(A \cap E) + \lambda^\star(A \cap E^c) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}}(\ell(I_n \cap E) + \ell(I_n \cap E^c)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$ (car $\ell(I_n \cap E) + \ell(I_n \cap E^c) = \ell(I_n)$) et donc $\lambda^\star(A \cap E) + \lambda^\star(A \cap E^c) \leq \lambda^\star(A) + \varepsilon$. Quand $\varepsilon \to 0$ on trouve l'inégalité recherchée. On a bien montré que $E \in \mathcal{L}$. ■

On va maintenant démontrer un théorème important dont on peut déduire, en particulier, la partie “unicité" du théorème 2.2.

Théorème 2.3 (Régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts)
Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose que m est finie sur les compacts, c'est à dire que $m(K) < \infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}$ (noter qu'un compact est nécessairement dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Alors, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O et un fermé F t.q. $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. En particulier, on a donc, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m(A) = \inf\{m(O), O$ ouvert contenant $A\}$ et $m(A) = \sup\{m(K), K$ compact inclus dans $A\}$.

DÉMONSTRATION :
On appelle T l'ensemble des $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé vérifiant $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. On va montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{C} = \{]a, b[, -\infty < a < b < \infty\}$. Comme $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ceci donnera $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On montre tout d'abord que $\mathcal{C} \subset T$. Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $A =]a, b[$.

Pour tout $n \geq n_0$ avec n_0 t.q. $(2/n_0) < b - a$ on a :

$$[a + (1/n), b - (1/n)] \subset A \subset]a, b[.$$

Pour $n \geq n_0$, on pose $B_n =]a, a + (1/n)[\cup]b - (1/n), b[)$. La suite $(B_n)_{n \geq n_0}$ est une suite décroissante et $\cap_{n \geq n_0} B_n = \emptyset$. Comme m est finie sur les compacts, on a $m(B_n) \leq m([a, b]) < \infty$. En utilisant la continuité décroissante de m (proposition 2.3), on a donc :

$$m(]a, b[\setminus [a + (1/n), b - (1/n)]) = m(]a, a + (1/n)[\cup]b - (1/n), b[) = m(B_n) \to 0,$$

quand $n \to \infty$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$ en prenant n assez grand on a $m(B_n) \leq \varepsilon$. En prenant $O = A$ et $F = [a + (1/n), b - (1/n)]$, on a bien O ouvert, F fermé, $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. Ceci prouve que $]a, b[\in T$.

On montre maintenant que T est une tribu. On remarque tout d'abord que $\emptyset \in T$ (il suffit de prendre $F = O = \emptyset$) et que T est stable par passage au complémentaire (car, si $F \subset A \subset O$, on a $O^c \subset A^c \subset F^c$ et $F^c \setminus O^c = O \setminus F$). Il reste à montrer que T est stable par union dénombrable.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ et $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. On veut montrer que $A \in T$. On va commencer par traiter le cas (simple) où $m(A) < \infty$ puis le cas (plus difficile) où $m(A) = \infty$.

Premier cas. On suppose que $m(A) < \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe O_n ouvert et F_n fermé t.q. $F_n \subset A_n \subset O_n$ et $m(O_n \setminus F_n) \leq (\varepsilon/2^n)$. On pose $O = \cup_{n \in \mathbb{N}} O_n$ et $\tilde{F} = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. On a $\tilde{F} \subset A \subset O$, $m(O \setminus \tilde{F}) \leq 2\varepsilon$, car $(O \setminus \tilde{F}) \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} (O_n \setminus F_n)$, et O ouvert mais $\tilde{F}$ n'est pas nécessairement fermé…

Cependant, puisque $m(A) < \infty$, on a aussi $m(\tilde{F}) < \infty$. Par continuité croissante de m (appliquée à la suite $(\cup_{p=0}^n F_p)_{n \in \mathbb{N}}$) on a $m(\cup_{p=0}^n F_p) \to m(\tilde{F})$, quand $n \to \infty$, d'où (puisque $m(\tilde{F}) < \infty$) $m(\tilde{F}) - m(\cup_{p=0}^n F_p) \to 0$. On prend alors $F = \cup_{p=0}^N F_p$ avec N assez grand pour que $m(\tilde{F} \setminus F) = m(\tilde{F}) - m(F) \leq \varepsilon$. On a bien $F \subset A \subset O$, O ouvert, F fermé et, comme $(O \setminus F) = (O \setminus \tilde{F}) \cup (\tilde{F} \setminus F)$, on a $m(O \setminus F) = m(O \setminus \tilde{F}) + m(\tilde{F} \setminus F) \leq 3\varepsilon$. Ceci prouve que $A \in T$.

Deuxième cas. On suppose maintenant que $m(A) = \infty$ (et le raisonnement précédent n'est plus correct si $m(\tilde{F}) = \infty$). On raisonne en 3 étapes :

1. Soit $p \in \mathbb{Z}$. On remarque d'abord que $A_n \cap [p, p + 1[\in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A_n \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on a donc :

$$F_k = F \cap [p, p + 1 - \frac{1}{k}] \subset A_n \cap [p, p + 1[\subset O_k = O \cap]p - \frac{1}{k}, p + 1[.$$

On a F_k fermé, O_k ouvert et $(O_k \setminus F_k) \subset (O \setminus F) \cup]p - \frac{1}{k}, p[\cup]p+1-\frac{1}{k}, p+1[$. On en déduit :

$$m(O_k \setminus F_k) \leq \varepsilon + m(]p - \frac{1}{k}, p[\cup]p + 1 - \frac{1}{k}, p+1[).$$

Or, la continuité décroissante de m donne que $m((]p-\frac{1}{k}, p[\cup]p+1-\frac{1}{k}, p+1[) \to 0$ quand $k \to \infty$ (on utilise ici le fait que $m([p-1, p+1]) < \infty$ car m est finie sur les compacts). Il existe donc $k \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $m(O_k \setminus F_k) \leq 2\varepsilon$, ce qui donne bien que $A_n \cap [p, p+1[\in T$.

2. Comme $m(A \cap [p, p+1[) < \infty$, on peut maintenant utiliser le premier cas avec $A \cap [p, p+1[= \cup_{n \in \mathbb{N}}(A_n \cap [p, p+1[)$. Il donne que $A \cap [p, p+1[\in T$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
3. On montre enfin que $A \in T$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, il existe un ouvert O_p et un fermé G_p t.q. $G_p \subset A \cap [p, p+1[\subset O_p$ et $m(O_p \setminus G_p) \leq \varepsilon/(2^{|p|})$. On prend $O = \cup_{p \in \mathbb{Z}} O_p$ et $F = \cup_{p \in \mathbb{Z}} G_p$. On obtient $F \subset A \subset O$, $m(O \setminus F) \leq 3\varepsilon$ et O est ouvert. Il reste à montrer que F est fermé.

   Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ t.q. $x_n \to x$ (dans $\mathbb{R}$) quand $n \to \infty$. On veut montrer que $x \in F$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ t.q. $x \in]p-1, p+1[$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n \in]p-1, p+1[$ pour tout $n \geq n_0$. Comme $x_n \in \cup_{q \in \mathbb{Z}} G_q$ et que $G_q \subset [q, q+1[$ pour tout q, on a donc $x_n \in G_p \cup G_{p-1}$ pour tout $n \geq n_0$. Comme $G_p \cup G_{p-1}$ est fermé, on en déduit que $x \in G_p \cup G_{p-1} \subset F$ et donc que F est fermé.

   Ceci montre bien que $A \in T$ et termine la démonstration du fait que T est une tribu. Comme cela a déjà été dit, on en déduit que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On a donc bien montré que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé vérifiant $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

On montre maintenant que $m(A) = \inf\{m(O), O$ ouvert contenant $A\}$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque d'abord que la monotonie d'une mesure donne $m(A) \leq \inf\{m(O), O$ ouvert contenant $A\}$. Puis, l'inégalité inverse est immédiate si $m(A) = \infty$. Enfin, si $m(A) < \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe O ouvert et F fermé vérifiant $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. On a donc $O \setminus A \subset O \setminus F$ et donc (par monotonie de m) $m(O \setminus A) \leq \varepsilon$ et $m(O) = m(A) + m(O \setminus A) \leq m(A) + \varepsilon$. On a donc trouvé un ouvert O contenant A t.q. $m(O) - \varepsilon \leq m(A)$. On en déduit que $\inf\{m(O), O$ ouvert contenant $A\} \leq m(A)$ et finalement que $m(A) = \inf\{m(O), O$ ouvert contenant $A\}$.

De manière semblable, on montre aussi que $m(A) = \sup\{m(K), K$ compact inclus dans $A\}$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. En effet, soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ici aussi, on commence par remarquer que la monotonie d'une mesure donne $m(A) \geq \sup\{m(K), K$ compact inclus dans $A\}$. On montre maintenant l'inégalité inverse. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe F fermé t.q. $F \subset A$ et $m(A \setminus F) \leq \varepsilon$. Si $m(A) = \infty$, on en déduit que $m(F) = \infty$ et donc que $m(K_n) \uparrow \infty$ quand $n \to \infty$ (par continuité croissante de m) avec $K_n = F \cap [-n, n]$. Comme K_n est compact pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $\sup\{m(K), K$ compact inclus dans $A\} = \infty = m(A)$. Si $m(A) < \infty$, on a $m(A) \geq m(F) \geq m(A) - \varepsilon$ et donc, pour n assez grand, $m(K_n) \geq m(F) - \varepsilon \geq m(A) - 2\varepsilon$ (toujours par continuité croissante de m) avec $K_n = F \cap [-n, n]$. Comme K_n est compact pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que ε est arbitraire, on en déduit que $\sup\{m(K), K$ compact inclus dans $A\} \geq m(A)$ et donc, finalement, $m(A) = \sup\{m(K), K$ compact inclus dans $A\}$.

■

Pour démontrer la partie "unicité" du théorème 2.2 avec le théorème 2.3 on aura aussi besoin du petit lemme suivant (plus précis que le lemme 2.1 car dans le lemme 2.1 il n'est pas demandé que les ouverts soient disjoints).

Lemme 2.4 (Ouverts de $\mathbb{R}$) *Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, alors O est une union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2, c'est à dire qu'il existe $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. I_n est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \cap I_m = \emptyset$ si $n \neq m$ et $O = \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.*

DÉMONSTRATION :
Pour $x \in O$ on pose $O_x = \{y \in O;\, I(x,y) \subset O\}$, avec $I(x,y) = \{tx + (1-t)y,\, t \in [0,1]\}$ (on a donc $I(x,y) = [x,y]$ ou $[y,x]$). On remarque que $O = \cup_{x \in O} O_x$ et que O_x est, pour tout $x \in O$, un intervalle ouvert (c'est l'intervalle $]\inf O_x, \sup O_x[$, avec $\inf O_x, \sup O_x \in \overline{\mathbb{R}}$). Il est aussi facile de voir que, pour tout $x, y \in O$, $O_x \cap O_y \neq \emptyset$ implique que $O_x = O_y$. On peut trouver $A \subset O$ t.q. $O = \cup_{x \in A} O_x$ et $O_x \cap O_y = \emptyset$ si $x, y \in A$, $x \neq y$. Comme $O_x \neq \emptyset$ pour tout $x \in A$, on peut donc construire une application de A dans $\mathbb{Q}$ en choisissant pour chaque $x \in A$ un rationnel de O_x (ce qui est possible car tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un rationnel). Cette application est injective car $O_x \cap O_y = \emptyset$ si $x, y \in A$, $x \neq y$. l'ensemble A est donc au plus dénombrable, ce qui termine la démonstration du lemme.

■

Remarque 2.10 Dans la démonstration du lemme 2.4, O_x est la composante connexe de x. Le lemme 2.4 consiste donc à remarquer qu'un ouvert est réunion de ses composantes connexes, que celles ci sont disjointes deux à deux et sont des ouverts connexes et donc des intervalles ouverts (car un connexe dans $\mathbb{R}$ est nécessairement un intervalle).

DÉMONSTRATION DE LA PARTIE "UNICITÉ" DU THÉORÈME 2.2 :

On a construit une mesure, notée λ, sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(]a,b[) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Supposons que m soit aussi une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $m(]a,b[) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On veut montrer que $\lambda = m$ (sur tout $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Nous le montrons ici avec deux méthodes différentes, utilisant le théorème 2.3 ou la proposition 2.5.

Première méthode, avec le théorème 2.3. En utilisant le fait que tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux (lemme 2.4) et les propriétés de $\sigma-$additivité de λ et de m, on montre que $\lambda(O) = m(O)$ pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$. Puis, en utilisant la dernière assertion du théorème de régularité (qui s'applique pour m et pour λ, car m et λ sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les compacts), on obtient $\lambda(A) = m(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, i.e. $m = \lambda$.

Deuxième méthode, avec la proposition 2.5. On utilise la proposition 2.5 avec $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{C} = \{]a,b],\, a, b \in \mathbb{R},\, a \leq b\}$. On sait que $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et il est clair que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie. On prend maintenant $F_n =]n, n+1]$ pour $n \in \mathbb{Z}$. La famille $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est donc une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, disjoints deux à deux et t.q. $\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{Z}} F_n$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, on a, par continuité décroissante de m, $m(]a,b]) = \lim_{p \to \infty} m(]a, b + \frac{1}{p}[) = \lim_{p \to \infty} b - a + \frac{1}{p} = b - a = \lambda(]a,b])$. On a donc $m = \lambda$ sur $\mathcal{C}$ (et $m(F_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$). On peut donc appliquer la proposition 2.5. Elle donne $\lambda = m$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. ■

Remarque 2.11 Nous avons vu que la mesure de Lebesgue, notée λ, était régulière. Ceci ne donne pas, pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, l'égalité de la mesure de A avec la mesure de son intérieur ou de son adhérence. Il suffit, pour s'en convaincre, de prendre, par exemple, $A = \mathbb{Q}$. On a alors $\lambda(A) = 0$ (voir la remarque 2.13) et $\lambda(\overline{A}) = \infty$.

Remarque 2.12 Nous avons donc, dans cette section, construit une application, notée $\lambda^\star$, de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Cette application n'est pas une mesure mais nous avons montré que la restriction de $\lambda^\star$ à la tribu de Lebesgue, notée $\mathcal{L}$, était une mesure. Puis, nous avons démontré que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$ et obtenu ainsi, en prenant la restriction de $\lambda^\star$ à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la mesure que nous cherchions. On peut se demander toutefois quelle est la différence entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Du point de vue des cardinaux, cette différence est considérable car $\mathrm{card}(\mathcal{L}) = \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ alors que $\mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$ mais du point de vue de l'intégration, la différence est dérisoire, comme nous pourrons le voir avec l'exercice 4.18 (plus complet que l'exercice 2.32) car l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda_{|\mathcal{L}})$ est simplement le complété de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_{|\mathcal{B}(\mathbb{R})})$.

On donne maintenant une propriété, spécifique à la mesure de Lebesgue, qui est à la base de toutes les formules de changement de variables pour l'intégrale de Lebesgue.

Proposition 2.9 (Invariance par translation "généralisée") *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on note $\alpha A + \beta = \{\alpha x + \beta, x \in A\}$. On a alors :*

1. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ implique $\alpha A + \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

2. $\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha|\lambda(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour $\alpha = 1$, cette propriété s'appelle "invariance par translation de λ".

DÉMONSTRATION :
Pour la première partie de la proposition, on pose $T = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); \alpha A + \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On montre facilement que T est une tribu contenant les intervalles ouverts, on en déduit que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour la deuxième partie, on pose, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m_1(A) = \lambda(\alpha A + \beta)$ et $m_2(A) = |\alpha|\lambda(A)$. Il est facile de voir que m_1 et m_2 sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les bornés, et qu'elles sont égales sur l'ensemble des intervalles ouverts. On raisonne alors comme dans la démonstration de la partie "unicité" du théorème 2.2, en utilisant le théorème 2.3 ou la proposition 2.5. Par exemple, en utilisant le lemme 2.4 et les propriétés de $\sigma-$additivité de m_1 et de m_2, on montre que $m_1(O) = m_2(O)$ pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$. Puis, en utilisant la dernière assertion du théorème de régularité (qui s'applique pour m_1 et pour m_2), on obtient $m_1(A) = m_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc $\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha|\lambda(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

■

Remarque 2.13 La mesure de Lebesgue est diffuse (c'est-à-dire que $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Donc, si D est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, on a $\lambda(D) = 0$. Ainsi, $\lambda(\mathbb{N}) = \lambda(\mathbb{Z}) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$. La réciproque est fausse. On construit par exemple un ensemble (dit "ensemble de Cantor", K, qui est une partie compacte non dénombrable de [0,1], vérifiant $\lambda(K) = 0$, voir exercice 2.31).

Définition 2.20 (Mesure de Lebesgue sur un borélien de $\mathbb{R}$) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou, plus généralement, $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$) et $T = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); B \subset I\}$ (on peut montrer que $T = \mathcal{B}(I)$, où I est muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$, voir l'exercice 2.3 page 42). Il est facile de voir que T est une tribu sur I et que la restriction de λ (définie dans le théorème 2.2) à T est une mesure sur T, donc sur les boréliens de I (voir 2.16 page 45). On note toujours par λ cette mesure.*

2.6 Indépendance et probabilité conditionnelle

2.6.1 Probabilité conditionnelle

Commençons par expliquer la notion de probabilité conditionnelle sur l'exemple du lancer de dé. On se place dans le modèle équiprobable : soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $T = \mathcal{P}(E)$ et p la probabilité définie par $p(\{x\}) = \frac{1}{6}$, $\forall x \in E$. La probabilité de l'événement A "obtenir 6" est $\frac{1}{6}$. Supposons maintenant que l'on veuille évaluer la chance d'obtenir un 6, alors que l'on sait déjà que le résultat est pair (événement $B = \{2, 4, 6\}$). Intuitivement, on a envie de dire que la "chance" d'obtenir un 6 est alors $\frac{1}{\mathrm{card} B} = \frac{1}{3}$.

Définition 2.21 (Probabilité conditionnelle) *Soient (E, T, p) un espace probabilisé et $A, B \in T$.*

Si $p(B) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de A par rapport à B (on dit aussi probabilité de A par rapport à B), notée $p(A|B)$, est définie par $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Si $p(B) = 0$, la probabilité conditionnelle de A par rapport à B, notée $p(A|B)$, n'est pas définie. C'est un nombre arbitraire entre 0 *et* 1.

De cette définition on déduit la formule de Bayes : soient (E, T, p) un espace probabilisé et $A, B \in T$, alors :

$$p(B)p(A|B) = p(A \cap B) \tag{2.17}$$

Remarque 2.14 Soient (E, T, p) un espace probabilisé et A un événement tel que $p(A) \neq 0$. Alors l'application $p_A : T \to [0, 1]$ définie par :

$$p_A(B) = p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}, \forall B \in T \tag{2.18}$$

est une probabilité sur T. On dit que "la masse de p_A est concentrée en A" : on a en effet : $p_A(B) = 0$, pour tout $B \in T$ t.q. $A \cap B = \emptyset$. On a aussi $p_A(A) = 1$.

Définition 2.22 *Soit (E, T, p) un espace probabilisé, on appelle système de constituants une famille $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ d'ensembles disjoints deux à deux t.q. $\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n = E$.*

On a comme corollaire immédiat de la relation 2.17 :

Proposition 2.10 *Soient (E, T, p) un espace probabilisé, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ un système de constituants de probabilités non nulles et $A \in T$, alors :*

$$p(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p(C_n)p(A|C_n). \tag{2.19}$$

Dans le cas où $p(B) = p(B|A)$, on a envie de dire que A n'influe en rien sur B ; on a dans ce cas : $p(A)p(B) = p(A \cap B)$.

2.6.2 Evènements indépendants, tribus indépendantes

Définition 2.23 (Indépendance de deux évènements)
Soient (E, T, p) on dit que deux événements A et B sont (stochastiquement) indépendants si $p(A)p(B) = p(A \cap B)$.

Remarque 2.15 Attention : il est clair que, lors de la modélisation d'un phénomène aléatoire, si on a des évènements indépendants *a priori*, i.e. tels que la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la réalisation de l'autre, on choisira, pour le modèle probabiliste, une probabilité qui respecte l'indépendance : on dit que l'indépendance *a priori* implique l'indépendance stochastique. Cependant, la notion d'indépendance est liée à la notion de probabilité ; ainsi, pour une probabilité p donnée, deux évènements peuvent être indépendants alors qu'ils ne paraissent pas intuitivement indépendants.

Exemple 2.3 Prenons comme exemple le lancer simultané de deux dés : *a priori*, il parait raisonnable de supposer que les résultats obtenus pour chacun des deux dés n'influent pas l'un sur l'autre, et on va donc chercher une probabilité qui respecte cette indépendance. L'univers des possibles est ici $E = \{(i, j), 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$. Les résultats de chaque lancer simultané des deux dés étant équiprobables, on a donc envie de définir, pour $A \in \mathcal{P}(E)$, $p(A) = \frac{\mathrm{card} A}{36}$. Voyons maintenant si deux évènements *a priori* indépendants sont indépendants pour cette probabilité. Considérons par exemple l'évènement A : "obtenir un double 6" ; on peut écrire : $A = B \cap C$, où B est l'évènement "obtenir un 6 sur le premier dé" et C l'évènement "obtenir un 6 sur le deuxième dé". On doit donc vérifier que : $p(A) = p(B)p(C)$. Or $B = \{(6, j), 1 \leq j \leq 6\}$ et $C = \{(i, 6), 1 \leq i \leq 6\}$. On a donc $p(B) = p(C) = \frac{1}{6}$, et on a bien $p(A) = p(B)p(C)(= \frac{1}{36})$.

On généralise la notion d'indépendance de deux évènements en introduisant la notion d'indépendance de tribus.

Définition 2.24 (Indépendance des tribus) *Soit (E, T, p) un espace probabilisé et $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de tribus incluses dans T.*

1. *Soit $N > 1$. On dit que les N tribus T_k, $k = 1, \ldots, N$, sont indépendantes (on dit aussi que la suite $T_1, \ldots, T_N$ est indépendante) si pour toute famille $(A_1, \ldots, A_N)$ d'événements tels que $A_k \in T_k$ pour $k = 1, \ldots, N$ on a : $p(\cap_{k=1}^N A_k) = p(A_1)p(A_2)\ldots p(A_N)$.*
2. *On dit que la suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ est indépendante (ou que les tribus $T_1, \ldots, T_n, \ldots$ sont indépendantes) si,, pour tout $N \geq 1$, les N tribus T_k, $k = 1, \ldots, N$, sont indépendantes.*

On peut facilement remarquer que si A et B sont deux évènements d'un espace probabilisé (E, T, p), ils sont indépendants (au sens de la définition 2.23) si et seulement si les tribus $T_A = \{\emptyset, E, A, A^c\}$ et $T_B = \{\emptyset, E, B, B^c\}$ sont indépendantes (voir l'exercice 3.17). On en déduit la généralisation de la définition d'indépendance à plusieurs évènements :

Définition 2.25 (Evénements indépendants) *Soient (E, T, p) un espace probabilisé et $(A_k)_{k=1,\ldots,N}$ des événements, on dit que les N événements $(A_k)_{k=1,\ldots,N}$ sont indépendants si les N tribus engendrées par les événements A_k, $k = 1\ldots, N$ (c'est-à-dire les N tribus définies par $T_k = \{A_k, A_k^c, E, \emptyset\}$ pour $k = 1\ldots, N$) sont indépendantes.*

Sous les hypothèses de la définition précédente, on peut remarquer que les événements $A_1, \ldots, A_N$ sont indépendants (c'est-à-dire que les tribus engendrées par $A_1, \ldots, A_N$ sont indépendantes) si et seulement si $P(\cap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i)$ pour tout $I \subset \{1, \ldots, N\}$), voir l'exercice 3.17. Nous terminons ce paragraphe par une proposition sur les tribus indépendantes :

Proposition 2.11 *Soit (E, T, p) un espace probabilisé.*

1. *Soit $N > 1$ et $(T_k)_{k\in\{0,\ldots N\}}$ une suite indépendante de tribus incluses dans T. La tribu T_0 est alors indépendante de la tribu engendrée par les tribus $T_1, \ldots, T_N$.*
2. *(Généralisation) Soit $N > 3$, $q > 1$, $n_0, \ldots, n_q$ t.q. $n_0 = 0$, $n_i < n_{i+1}$ (pour $i = 0, \ldots, q-1$), $n_q = N$ et $(T_k)_{k\in\{1,\ldots N\}}$ une suite indépendante de tribus incluses dans T. Pour $i = 1, \ldots, q$, on note τ_i la tribu engendrée par les tribus T_n pour $n = n_{i-1}, \ldots, n_i$. Alors, les tribus $\tau_1, \ldots, \tau_q$ sont indépendantes.*

DÉMONSTRATION : On montre tout d'abord le premier item de la proposition. On note S la tribu engendrée par les tribus $T_1, \ldots, T_N$. Comme S est la plus petite tribu contenant les tribus T_k ($k = 1, \ldots, N$), elle est incluse dans T. On veut montrer que T_0 et S sont indépendantes, c'est-à-dire que $p(A\cap B) = p(A)p(B)$ pour tout $A \in T_0$ et tout $B \in S$. Pour le montrer, on va utiliser la proposition 2.5 (donnant l'unicité d'une mesure). Soit $A \in T_0$, on définit les mesures m et μ sur T en posant :

$$m(B) = p(A \cap B),\ \mu(B) = p(A)p(B),\ \text{pour } B \in T,$$

et on pose :

$$\mathcal{C} = \{\cap_{k=1}^N A_k,\ A_k \in T_k \text{ pour } k = 1, \ldots, N\}.$$

Pour $B \in \mathcal{C}$, on a $B = \cap_{k=1}^N A_k$ avec $A_k \in T_k$ avec $k = 1, \ldots, N$. On a donc, en utilisant l'indépendance des tribus $T_0, T_1, \ldots, T_N$, $m(B) = p(A \cap B) = p(A)p(A_1)p(A_2)\ldots p(A_N) = p(A)p(B) = \mu(B)$. On a donc $m = \mu$ sur $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ est stable par intersection et que $E \in \mathcal{C}$, la proposition 2.5 nous donne $m = \mu$ sur la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Comme cette tribu contient toutes les tribus T_k ($k = 1, \ldots, N$), elle contient aussi S (en fait, elle est égale à S). On a donc bien montré que $p(A \cap B) = p(A)p(B)$ pour tout $B \in S$ et pour tout $A \in T_0$.

Pour montrer le deuxième item (qui est une généralisation du premier), il suffit de faire une récurrence finie de q étapes et d'utiliser la technique précédente. Par exemple, pour $q = 2$ la technique précédente donne :

$$p((\cap_{k=1}^{n_1} A_k) \cap B_2) = p(\cap_{k=1}^{n_1} A_k) p(B_2),$$

pour $A_k \in T_k$, $k = 1, \ldots, n_1$ et $B_2 \in \tau_2$. Puis en reprenant la technique précénete, on montre $p(B_1 \cap B_2) = p(B_1)p(B_2)$ pour $B_1 \in \tau_1$ et $B_2 \in \tau_2$. Ce qui donne bien l'indépendance de τ_1 et τ_2. ■

2.6.3 Probabilités sur les boréliens de $\mathbb{R}$

Une probabilité est définie sur un espace probabilisable. Très souvent, on ne connait du problème aléatoire que l'on cherche à modéliser ni l'ensemble E ("univers des possibles") ni la tribu T (ensemble des évènements) ni la probabilité p. Par contre, on connait une "image" de la probabilité p par une application (dite mesurable, voir chapitre suivant) X de E dans $\mathbb{R}$. On travaille alors avec l'espace beaucoup plus sympathique (car mieux défini...) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), p_X)$, ou p_X est une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, que les probabilistes appellent "loi de probabilité" (elle dépend de p et de l'application X).
Nous donnons maintenant quelques notions propres aux lois de probabilités (ou probabilités définies sur les boréliens de $\mathbb{R}$), ainsi que quelques exemples concrets utilisés dans la représentation de phénomènes aléatoires.

Définition 2.26 (Fonction de répartition) *Soit p une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de répartition de la probabilité p la fonction F, définie de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ par : $F(t) = p(]-\infty, t])$.*

Proposition 2.12
Soit p une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$ et F sa fonction de répartition. La fonction F est croissante et continue à droite. De plus, on a $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$.

DÉMONSTRATION : La croissance de F est une conséquence de la monotonie de p (proposition 2.3). En effet, soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On a $]-\infty, a[\subset]-\infty, b[$ et donc, par monotonie de p, $F(a) = p(]-\infty, a[) \le p(]-\infty, b[) = F(b)$. Ce qui montre bien la croissance de F.

Pour montrer que F est continue à droite, on utilise la continuité décroissante de p (proposition 2.3). Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q. $a_n \downarrow a$ (c'est-à-dire $a_{n+1} \le a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = a$). On remarque que $]-\infty, a] = \cap_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, a_n]$, $]-\infty, a_{n+1}] \subset]-\infty, a_n]$ et $p(]-\infty, a_n]) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La continuité décroissante de p donne alors $F(a_n) = p(]-\infty, a_n]) \to p(]-\infty, a]) = F(a)$, quand $n \to \infty$. Ce qui montre la continuité à droite de F.

Pour montrer que $\lim_{a\to+\infty} F(a) = 1$, on utilise la continuité croissante de p. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q. $a_n \uparrow +\infty$ (c'est-à-dire $a_{n+1} \ge a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$). On pose $A_n =]-\infty, a_n]$. On a $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$. Par continuité croissante de p (Proposition 2.3), on a donc $F(a_n) = p(A_n) \to p(\mathbb{R}) = 1$ quand $n \to \infty$. Ce qui prouve que $\lim_{a\to+\infty} F(a) = 1$.

Pour montrer que $\lim_{a\to-\infty} F(a) = 0$, on utilise la continuité décroissante de p. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q. $a_n \downarrow -\infty$ (c'est-à-dire $a_{n+1} \le a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$). On pose $B_n =]-\infty, a_n]$. On a $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p(B_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$. Par continuité décroissante de p (Proposition 2.3), on a donc $F(a_n) = p(B_n) \to p(\emptyset) = 0$ quand $n \to \infty$. Ce qui prouve que $\lim_{a\to-\infty} F(a) = 0$. ■

La proposition 2.12 a une réciproque que nous énonçons dans le théorème 2.4.

Théorème 2.4 *Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissante, continue à droite et t.q. $\lim_{t\to-\infty}, F(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$. Alors, il existe une unique probabilité p sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que F soit la fonction de répartition de p.*

La démonstration du téorème 2.4 n'est pas faite ici car ce théorème est essentiellement contenu dans le théorème 2.5 que nous donnons maintenant.

Théorème 2.5 (Lebesgue-Stieltjes)

1. *Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts (on dit "localement finie"). Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $F(t) = m(]a,t])$ si $t \geq a$ et $F(t) = -m(]t,a])$ si $t \leq a$. Alors, la fonction F est continue à droite et croissante.*
2. *Réciproquement, soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissante et continue à droite. Alors,il existe une unique mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$, on ait $m(]a,b]) = F(b) - F(a)$. Cette mesure s'appelle la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à F.*

DÉMONSTRATION La démonstration du premier item est essentiellement la même que celle de la proposition 2.12. Elle n'est pas détaillée ici.

Pour démontrer le deuxième item, on introduit l, application définie de l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ($a < b$) par : $l(]a,b]) = F(b) - F(a)$. La démonstration du fait qu'il existe un prolongement unique de cette application en une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est très voisine à celle du théorème de Carathéodory (théorème 2.2). Elle n'est pas détaillée ici. ■

Donnons, pour clore ce chapitre, quelques exemples de lois de probabilités et leurs fonctions de répartition associées.

Définition 2.27 (Loi discrète) *Soit p une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$. On dit que p est discrète si elle est purement atomique. L'ensemble de ses atomes $\mathcal{A}$ est nécessairement dénombrable (voir l'exercice 2.12). La probabilité p s'écrit alors $p = \sum_{a \in \mathcal{A}} p(\{a\})\delta_a$, où δ_a désigne la mesure de Dirac en a. La fonction de répartition de la probabilité p est définie par : $F(t) = \sum_{a \in \mathcal{A}, a \leq t} p(\{a\})$*

Exemple 2.4 (Exemples de lois discrètes) Donnons quelques exemples de probabilités discrètes, p, sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}$ l'ensemble (dénombrable) de leurs atomes.
– La loi uniforme : $N \in \mathbb{N}^\star$, $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_N\}$, $p(\{a_i\}) = \frac{1}{N}$
– La loi binômiale : $N \in \mathbb{N}^\star$, $\mathcal{A} = \{1, \ldots, N\}$, $P \in]0,1[$, $p(\{k\}) = C_N^k P^k (1-P)^{N-k}$
– La loi de Pascal : $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, $P \in]0,1[$, $p(\{k\}) = P(1-P)^{k-1}$
– La loi de Poisson à paramètre λ : $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, $p(\{k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Définition 2.28 (Loi continue) *Soit p une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$. On dit que p est continue si sa fonction de répartition est continue.*

Exemple 2.5 (Exemple de loi continue)
La plupart des exemples de probabilités continues provient de ce qu'on appelle "les mesures de densité" par rapport à la mesure de Lebesgue, pour lesquelles on a besoin de la notion d'intégrale de Lebesgue qu'on n'a pas encore introduite. On peut toutefois déjà citer l'exemple de la loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$: Soient $-\infty < a < b < +\infty$; pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose $p(A) = \frac{\lambda(A \cap [a,b])}{b-a}$. On vérifie facilement que p est une probabilité appelée probabilité uniforme sur $[a,b]$.

2.7 Exercices

2.7.1 Tribus

Exercice 2.1 (Caractérisation d'une tribu) *Corrigé 9 page 274*

Soit E un ensemble.

1. Soit T une partie de $\mathcal{P}(E)$ stable par union dénombrable, stable par passage au complémentaire et t.q. $\emptyset \in T$. Montrer que T est une tribu, c'est-à-dire qu'elle vérifie aussi $E \in T$ et qu'elle est stable par intersection dénombrable.
2. L'ensemble des parties finies de E est-il une tribu ?

Exercice 2.2 (Tribu engendrée) *Corrigé 10 page 274*
Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.
2. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On note $T_\mathcal{A}$ l'intersection de toutes les tribus sur E contenant $\mathcal{A}$ (une partie de E appartient donc à $T_\mathcal{A}$ si et seulement si elle appartient à toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$, on remarquera qu'il y a toujours au moins une tribu contenant $\mathcal{A}$, c'est la tribu $\mathcal{P}(E)$). Montrer que $T_\mathcal{A}$ est la plus petite des tribus contenant $\mathcal{A}$ (c'est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$).
3. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ et $T_\mathcal{A}$, $T_\mathcal{B}$ les tribus engendrées par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Montrer que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ alors $T_\mathcal{A} \subset T_\mathcal{B}$.

Exercice 2.3 (Exemples de tribus) *Corrigé 11 page 275*

1. Tribu trace
   (a) Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble E et $F \subset E$. Montrer que $\mathcal{T}_F = \{A \cap F;\ A \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F (tribu trace de $\mathcal{T}$ sur F).
   (b) Si E est un espace topologique et $\mathcal{T} = \mathcal{B}(E)$ ($\mathcal{B}(E)$ est la tribu borélienne de E), montrer que la tribu trace sur F, notée T_F, est la tribu engendrée par la topologie trace sur F (tribu borélienne de F, notée $\mathcal{B}(F)$). [Montrer que $\mathcal{B}(F) \subset T_F$. Pour montrer que $T_F \subset \mathcal{B}(F)$, considérer $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(E);\ A \cap F \in \mathcal{B}(F)\}$ et montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu (sur E) contenant les ouverts de E.] Si F est un borélien de E, montrer que T_F est égale à l'ensemble des boréliens de E contenus dans F.
2. Soit E un ensemble infini et $S = \{\{x\}, x \in E\}$. Déterminer la tribu engendrée par S (distinguer les cas E dénombrable et non dénombrable).
3. Soit E un ensemble et f une application de E dans lui-même. Montrer que l'ensemble des parties A de E t.q. $f^{-1}(f(A)) = A$ est une tribu sur E.
4. Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. Trouver la tribu engendrée par $\mathcal{C} = \{B \subset E \mid A \subset B\}$. A quelle condition obtient-on $\mathcal{P}(E)$ ou la tribu grossière ?
5. Soit E un ensemble et f une bijection de E. Montrer que l'ensemble des parties A de E t.q. ($x \in A \iff f(x) \in A$ et $f^{-1}(x) \in A$) est une tribu sur E.
6. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^2$ contenues dans une réunion dénombrable de droites. Décrire la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Est-ce une sous-tribu de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$?

Exercice 2.4 (Tribus images) *Corrigé 12 page 276*
Soient E et F des ensembles. Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ (resp. $\mathcal{P}(F)$) on note $T(\mathcal{A})$ la tribu de E (resp. F) engendrée par $\mathcal{A}$.
Soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que si $\mathcal{T}'$ est une tribu sur F, alors $f^{-1}(\mathcal{T}') = \{f^{-1}(B);\ B \in \mathcal{T}'\}$ est une tribu sur E (tribu image réciproque).
2. Montrer que si $\mathcal{T}$ est une tribu sur E, alors $\mathcal{T}' = \{B \subset F;\ f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F (tribu image directe).

3. Montrer que pour tout ensemble $\mathcal{C}$ de parties de F on a : $T(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(T(\mathcal{C}))$. [On pourra montrer d'abord que $T(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(T(\mathcal{C}))$. Puis, pour montrer que $f^{-1}(T(\mathcal{C})) \subset T(f^{-1}(\mathcal{C}))$, montrer que $T = \{G \subset F;\ f^{-1}(G) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$.]

Exercice 2.5 (π-système, λ-système) *Corrigé 13 page 277*
Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu si et seulement si $\mathcal{F}$ est un π-système (c'est-à-dire stable par intersection finie) et un λ-système (c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable croissante, $\Omega \in \mathcal{F}$ et $A \setminus B \in \mathcal{F}$ si $A, B \in \mathcal{F}$ avec $B \subset A$).
2. On suppose que $\mathcal{F}$ est un λ-système. Soit $C \in \mathcal{F}$. On pose $\mathcal{G} = \{B \subset \Omega \text{ t.q. } C \cap B \in \mathcal{F}\}$. Montrer que $\mathcal{G}$ est un λ-système.

Exercice 2.6 (Tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$) *Corrigé 14 page 277*
On note T la tribu (sur $\mathbb{R}^2$) engendrée par $\{A \times B;\ A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On va montrer ici que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion au plus dénombrable de produits d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. [S'inspirer d'une démonstration analogue faite pour $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}^2$.] En déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset T$.
2. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$ et $T_1 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que T_1 est une tribu (sur $\mathbb{R}$) contenant les ouverts (de $\mathbb{R}$). En déduire que $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $T_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (et donc que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$).

Exercice 2.7 (Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^N$) *Corrigé 15 page 279*

1. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$ est égale à celle engendrée par l'ensemble de toutes les boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$. [On pourra montrer d'abord que tout ouvert de $\mathbb{R}^N$ est réunion dénombrable de boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$.]
2. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$ est égale à celle engendrée par l'ensemble des produits d'intervalles ouverts à extrémités rationnelles.
3. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles $]a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
4. Soit S un sous ensemble dense de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est engendrée par la classe des boules ouvertes (ou bien fermées) telles que les coordonnées du centre et le rayon appartiennent S.

Exercice 2.8 (Une tribu infinie est non dénombrable) $(\star\star)$
Montrer que toute tribu infinie T sur un ensemble (infini) E est non dénombrable. [Si T est dénombrable, on pourra introduire, pour tout élément $x \in E$, l'ensemble $A(x)$ intersection de tous les éléments de T contenant x. Puis, montrer à l'aide de ces ensembles qu'il existe une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans T.]

Exercice 2.9 (Algèbre) *Corrigé 16 page 280*
Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre (cf. définition 2.4) si et seulement si $\mathcal{A}$ vérifie les deux propriétés suivantes :
   (a) $E \in \mathcal{A}$,
   (b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$.
2. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille d'algèbres (sur E). Montrer que $\cap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{P}(E)\,;\, A \in \mathcal{A}_i \text{ pour tout } i \in I\}$ est encore une algèbre.

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, la deuxième question permet donc de définir l'algèbre engendrée par $\mathcal{C}$ comme l'intersection de toutes les algèbres sur E contenant $\mathcal{C}$.

Exercice 2.10 (Suite croissante de tribus)
Soit E un ensemble. Soit $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de tribus de E. Montrer que $\mathcal{A} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_n$ est une algèbre (cf. définition 2.4), mais n'est pas, en général, une tribu. Donner une suite d'algèbres finies de parties de $[0,1]$ dont la réunion engendre $\mathcal{B}([0,1])$.

Exercice 2.11 (Tribu engendrée par une partition)
Soit E un ensemble.

1. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition dénombrable de E. Décrire la tribu engendrée par cette partition, c'est à dire par le sous ensemble de $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont les A_i. Cette tribu est-elle dénombrable ?
2. Montrer que toute tribu finie de parties de E est la tribu engendrée par une partition finie de E. Quel est le cardinal d'une telle tribu ?
3. $(\star)$ Montrer que si E est dénombrable, toute tribu sur E est engendrée par une partition.

Exercice 2.12 *Corrigé 17 page 280*
Soit E un ensemble et $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de E. On suppose que $\emptyset, E \in \mathcal{C}$, que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que le complémentaire de tout élément de $\mathcal{C}$ est une union finie disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire :

$$C \in \mathcal{C} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^\star \text{ et } C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C} \text{ t.q. } C^c = \cup_{p=1}^{n} C_p \text{ et } C_p \cap C_q = \emptyset \text{ si } p \neq q.$$

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $\mathcal{C}$. Une partie de E est donc un élément de $\mathcal{B}$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(A_p)_{p=1,\ldots,n} \subset \mathcal{C}$ t.q. $A_p \cap A_q = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \cup_{p=1}^{n} A_p$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie et par passage au complémentaire.
2. Montrer que l'algèbre (cf. définition 2.4) engendrée par $\mathcal{C}$ est égale à $\mathcal{B}$.

Exercice 2.13 (Classes monotones) *Corrigé 18 page 281*
Soit E un ensemble. Pour $\Sigma \subset \mathcal{P}(E)$, on dit que Σ est une classe monotone (sur E) si Σ vérifie les deux propriétés suivantes (de stabilité par union croissante dénombrable et par intersection décroissante dénombrable) :
– $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$,
– $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

1. Soit $\Sigma \subset \mathcal{P}(E)$. Montrer que Σ est une tribu si et seulement si Σ est une classe monotone et une algèbre (cf. exercice 2.9).
2. Donner un exemple, avec $E = \mathbb{R}$, de classe monotone qui ne soit pas une tribu.
3. Soit $(\Sigma_i)_{i\in I}$ une famille de classes monotones (sur E). Montrer que $\cap_{i\in I}\Sigma_i = \{A \in \mathcal{P}(E)\,;\, A \in \Sigma_i$ pour tout $i \in I\}$ est encore une classe monotone.

   Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, cette question permet donc de définir la classe monotone engendrée par $\mathcal{C}$ comme l'intersection de toutes les classes monotones sur E contenant $\mathcal{C}$.
4. (Lemme des classes monotones) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur E. On note Σ la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}$ et on note T la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.
   (a) Montrer que $\Sigma \subset T$.
   (b) Soit $A \subset E$. On pose $\Sigma_A = \{B \subset E\,;\, A \setminus B \in \Sigma$ et $B \setminus A \in \Sigma\}$. Montrer que Σ_A est une classe monotone.
   (c) (Question plus difficile.) Montrer que Σ est une algèbre. [Utiliser la question (b) et la première question de l'exercice 2.9.] En déduire que $T = \Sigma$.

Exercice 2.14 (Caractérisation de la tribu engendrée) *Corrigé 19 page 283*

Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie si $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{A}$ est stable par différence si :

$$A, B \in \mathcal{A},\ B \subset A \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}.$$

On dit que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable disjointe si :

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A_n \cap A_m = \emptyset \text{ pour } n \neq m \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$.

1. On note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des parties de $\mathcal{P}(E)$ stables par différence et stables par union dénombrable disjointe. Montrer qu'il existe $\mathcal{D} \in \mathcal{Z}$ t.q. $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ et :

$$\mathcal{A} \in \mathcal{Z},\ \mathcal{C} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{D} \subset \mathcal{A}.$$

   Dans la suite, on note toujours $\mathcal{D}$ cette partie de $\mathcal{P}(E)$. On suppose maintenant que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que $E \in \mathcal{C}$.

2. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on note $\mathcal{D}_A = \{D \in \mathcal{D} \text{ t.q. } A \cap D \in \mathcal{D}\}$.
   (a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $\mathcal{D}_A$ est stable par union dénombrable disjointe et stable par différence.
   (b) Soit $A \in \mathcal{C}$. Montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$. En déduire que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$.
   (c) Soit $A \in \mathcal{D}$. Montrer que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$. En déduire que $\mathcal{D}$ est stable par intersection finie.
3. Montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu. En déduire que $\mathcal{D}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

2.7.2 Mesures

Exercice 2.15 (Exemple de mesures) *Corrigé 20 page 285*
Soit E un ensemble infini non dénombrable. Pour toute partie A de E, on pose $m(A) = 0$ si A est au plus dénombrable, et $m(A) = +\infty$ sinon. L'application m est-elle une mesure sur $\mathcal{P}(E)$?

Exercice 2.16 (Mesure trace et restriction d'une mesure) *Corrigé 21 page 285*
Soit (E, T, m) un espace mesuré

1. Soit $F \in T$. Montrer que la tribu trace de T sur F, notée T_F, est incluse dans T (cette tribu est une tribu sur F). Montrer que la restriction de m à T_F est une mesure sur T_F. On l'appellera la *trace* de m sur F. Si $m(F) < \infty$, cette mesure est finie.
2. Soit $\mathcal{A}$ une tribu incluse dans T. La restriction de m à $\mathcal{A}$ est une mesure. Est-elle finie (resp. σ-finie) si m est finie (resp. σ-finie) ?

Exercice 2.17 *Corrigé 22 page 286*
Soit (E, T, m) un espace mesuré fini ("fini" signifie que $m(E) < \infty$) et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'ensembles mesurables tels que $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus B_n)$.
2. Montrer que $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) - m(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (m(A_n) - m(B_n))$.

Exercice 2.18 *Corrigé 23 page 286*
Soit (E, T, m) un espace mesuré fini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(A_n) = m(E)$. Montrer que $m(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = m(E)$.

Exercice 2.19 (Sur la mesure d'une union…) *Corrigé 24 page 286*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré et $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$. On suppose que $m(A_p) < \infty$ pour tout p. Montrer que

$$m(\cup_{p=1}^n (B \cap A_p)) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} m(B \cap (\cap_{j=1}^k A_{i_j})) \right).$$

Exercice 2.20 (Contre exemples…) *Corrigé 25 page 287*

1. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(A) = 0$. A-t-on nécessairement A fermé ?
2. Soit (E, T) un espace mesurable et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ qui engendre T. On considère m_1 et m_2 des mesures sur T. Montrer que $m_1(A) = m_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$ n'implique pas que $m_1 = m_2$ sur T. [*On pourra trouver un exemple (facile) avec* $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *et* m_1*,* m_2 *non finies. Un exemple avec* $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *et* m_1*,* m_2 *finies est aussi possible mais plus difficile à trouver…*]

Exercice 2.21 (Résultat d'unicité) *Corrigé 26 page 287*
Soit (E, T) un espace mesurable et m, μ deux mesures sur T. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. On suppose que $\mathcal{C}$ engendre T et que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie.

On suppose que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$.

1. On suppose que $E \in \mathcal{C}$ et que $m(E) < \infty$. Montrer que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$. [On pourra introduire $\mathcal{D} = \{A \in T, m(A) = \mu(A)\}$ et utiliser l'exercice 2.14.]
2. (Généralisation de la question précédente).
   On suppose qu'il existe une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ t.q. $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$, $m(E_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Montrer que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$.
3. Avec $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donner un exemple pour lequel $E \in \mathcal{C}$ et $m \neq \mu$.

Exercice 2.22 (Existence d'une mesure, De l'algèbre à la σ-algèbre)
Soit Ω un ensemble, $\mathcal{F}_0$ une algèbre sur Ω et m une mesure sur $\mathcal{F}_0$ (c'est-à-dire que m est une application de $\mathcal{F}_0$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, $m(\emptyset) = 0$ et $m(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}_0$ disjoints 2 à 2 et t.q. $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}_0$). On note $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$. Cette exercice montre qu'il est possible de prolonger m en une mesure sur $\mathcal{F}$.

Pour $A \subset \Omega$ on pose

$$m^\star(A) = \inf\{\sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n),\ (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0, A \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n\}.$$

1. Montrer que $m^\star$ vérifie les 3 propriétés suivantes :
   – $m^\star(\emptyset) = 0$,
   – (monotonie de $m^\star$) pour tout $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \subset B \Rightarrow m^\star(A) \le m^\star(B)$,
   – (σ-sous-additivité de $m^\star$) pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $m^\star(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \le \sum_{n \in \mathbb{N}} m^\star(A_n)$.
   N.B. : On dit que $m^\star$ est une mesure extérieure.

   Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.
   On dit que A est $m^\star$-mesurable si on a, pour tout $E \in \mathcal{P}(\Omega)$, $m^\star(E) = m^\star(E \cap A) + m^\star(E \cap A^c)$.
   On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des parties de E $m^\star$-mesurables.
2. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que A est $m^\star$-mesurable si et seulement si on a, pour tout $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ t.q. $m^\star(E) < \infty$, $m^\star(E) \ge m^\star(E \cap A) + m^\star(E \cap A^c)$.

3. Montrer que $\mathcal{M}$ est une algèbre. [On montrera que $\Omega \in \mathcal{M}$, puis que $A \cap B^c \in \mathcal{M}$ pour tout $A, B \in \mathcal{M}$.]
4. Montrer que $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre. [On pourra montrer, par exemple, que $\mathcal{M}$ est stable par union dénombrable.]
5. Montrer que la restriction de $m^\star$ à $\mathcal{M}$ est une mesure.
6. Montrer que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{M}$ et que $m^\star = m$ sur $\mathcal{F}_0$. En déduire que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ et que la restriction de $m^\star$ à $\mathcal{F}$ est une mesure sur $\mathcal{F}$ prolongeant m.

Exercice 2.23 (Un pas vers l'unicité d'une mesure)

Soit Ω un ensemble, $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω et μ_1, μ_2 deux mesures sur $\mathcal{F}$. Soit $A \in \mathcal{F}$ t.q. $\mu_1(A) = \mu_2(A) < \infty$. On pose $\mathcal{L} = \{B \in \mathcal{F} \text{ t.q. } \mu_1(A \cap B) = \mu_2(A \cap B)\}$. Montrer que $\mathcal{L}$ est un λ-système (c'est-à-dire que $\mathcal{L}$ est stable par union dénombrable croissante, $\Omega \in \mathcal{F}$ et $B \setminus C \in \mathcal{F}$ si $B, C \in \mathcal{F}$ avec $C \subset B$).

Exercice 2.24 (Mesure atomique, mesure diffuse) *Corrigé 27 page 288*

Soit (E, T) un espace mesurable t.q. $\{x\} \in T$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est diffuse si $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est purement atomique si il existe $S \in T$ t.q. $m(S^c) = 0$ et $m(\{x\}) > 0$ si $x \in S$.

1. Montrer qu'une mesure purement atomique et diffuse est nulle. Donner, pour $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ un exemple de mesure purement atomique et un exemple de mesure diffuse. [Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est diffuse.]
2. Soit m une mesure diffuse sur T. Montrer que tous les ensembles dénombrables sont de mesure nulle.
3. Soit m une mesure sur T. On suppose que m est σ-finie, c'est à dire qu'il existe $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $m(E_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que l'ensemble des $x \in E$ t.q. $m(\{x\}) > 0$ (de tels x sont appelés "atomes" de m) est au plus dénombrable. [On pourra introduire l'ensemble $A_{n,k} = \{x \in E_n; m(\{x\}) \geq \frac{1}{k}\}$.]

   (b) Montrer qu'il existe une mesure diffuse m_d et une mesure purement atomique m_a sur T telles que $m = m_d + m_a$. Montrer que m_d et m_a sont étrangères, c'est à dire qu'il existe $A \in T$ t.q. $m_d(A) = 0$ et $m_a(A^c) = 0$.

   (c) Montrer que si m est finie il existe un singleton dont la mesure est supérieure ou égale à la mesure de tous les autres singletons. Montrer que ceci peut-être inexact si m n'est que σ-finie.

4. Pour $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donner un exemple de mesure purement atomique finie dont l'ensemble des atomes est infini.

Exercice 2.25 (limites sup et inf d'ensembles) *Corrigé 28 page 291*

Soit (E, T, m) un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On rappelle que $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{p\geq n} A_p$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{p\geq n} A_p$.

1. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $m(\cup_{p\geq n_0} A_p) < \infty$. Montrer que

$$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} m(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} m(A_n) \leq m(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$

2. Donner un exemple (c'est-à-dire choisir (E, T, m) et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$) pour lequel :

$$\limsup_{n\to\infty} m(A_n) > m(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$

3. Donner un exemple avec m finie (c'est-à-dire $m(E) < \infty$) pour lequel

$$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) < \liminf_{n\to\infty} m(A_n) < \limsup_{n\to\infty} m(A_n) < m(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$

4. $(\star)$ (Lemme de Borel-Cantelli) On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) < \infty$.
   Montrer que $m(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

Exercice 2.26 (Petit ouvert dense...) *Corrigé 29 page 292*

On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $\varepsilon > 0$, peut-on construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure inférieure à ε ? [On rappelle qu'une partie A de R est dense dans $\mathbb{R}$ si $\overline{A} = \mathbb{R}$ ou encore si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ t.q. $|x - a| < \varepsilon$.]

Exercice 2.27 (Non existence de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$) *Corrigé 30*

On définit la relation d'équivalence sur $[0, 1[$: xRy si $x - y \in \mathbb{Q}$. En utilisant l'axiome du choix, on construit un ensemble $A \subset [0, 1[$ tel que A contienne un élément et un seul de chaque classe d'équivalence. Pour $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$, on définit $A_q = \{y \in [0, 1[\,; y = x + q \text{ ou } y = x + q - 1, x \in A\}$, c'est-à-dire $A_q = \{y \in [0, 1[\,; y - q \in A \text{ ou } y - q + 1 \in A\}$.

1. Montrer que $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} A_q = [0, 1[$.
2. Montrer que si m est une application de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, invariante par translation et vérifiant $m([0, 1[) = 1$, m ne peut pas être σ- additive. En déduire la non-existence d'une mesure m, sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et t.q. $m([a, b]) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. En particulier, montrer que l'application $\lambda^\star$, définie en cours, ne peut pas être une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 2.28 (Non existence d'une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ donnant la longueur)

Cet exercice est plus général que le précédent car on veut montrer qu'il n'existe pas de mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $m([a, b]) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sans l'hypothèse d'invariance par translation de l'exercice précédent.

Soit E un ensemble non dénombrable, sur lequel on suppose qu'il existe un ordre total, noté $\leq$, tel que pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{y \in E; y \leq x\}$ est dénombrable, c'est-à-dire qu'il existe une application f_x injective de cet ensemble dans $\mathbb{N}$. Si $E = \mathbb{R}$ ou $E = [0, 1]$, on peut démontrer l'existence d'un tel ordre (ceci est une conséquence de l'axiome du continu). Soit m une mesure sur $\mathcal{P}(E)$; on suppose que m est finie, i.e. $m(E) < +\infty$, et diffuse. On se propose de montrer que m est nulle, i.e. $m(A) = 0$, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$. On pose, pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, $A_{x,n} = \{y \in E; y \geq x \text{ et } f_y(x) = n\}$.

1. Montrer que pour tout $x, y \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, $A_{x,n} \cap A_{y,n} = \emptyset$.
   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{x \in E; m(A_{x,n}) \neq 0\}$ est au plus dénombrable (utiliser le fait que m est finie).
2. Montrer qu'il existe $x \in E$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(A_{x,n}) = 0$.
3. En déduire que m est nulle (montrer pour cela que $m(E) = 0$ en utilisant la question précédente et le fait que m est diffuse).
4. Montrer qu'il n'existe pas de mesure m sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $m(]a, b[) = b - a$ pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Exercice 2.29 *Corrigé 31 page 293*

Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. pour tout intervalle I et tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $m(I) = m(I + x)$ (avec $I + x = \{a + x, a \in I\}$) et $m([0, 1]) = 1$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m(\{x\}) = 0$ (i.e. m est diffuse). En déduire que m est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. [On pourra découper $[0, 1[$ en q intervalles de longueur $1/q$.]

Exercice 2.30 (Support d'une mesure sur les boréliens) *Corrigé 32 page 294*
Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe un plus grand ouvert de mesure nulle pour m. L'ensemble fermé complémentaire de cet ouvert s'appelle *le support* de m. [On pourra, par exemple, considérer les pavés à extrémités rationnelles qui sont de mesure nulle pour m.]

Exercice 2.31 (Ensemble de Cantor) *Corrigé 33 page 295*
On considère l'espace mesuré $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$.
On pose $C_0 = [0,1]$, $a_1^0 = 0$, $b_1^0 = 1$, et $\alpha_0 = 1$. Pour $n \geq 0$, on construit $C_{n+1} \subset [0,1]$ de la manière suivante : on suppose $C_n = \bigcup_{p=1}^{2^n}[a_p^n, b_p^n]$ connu, et on définit $C_{n+1} = \bigcup_{p=1}^{2^{n+1}}[a_p^{n+1}, b_p^{n+1}]$ où, pour $p = 1, \ldots, 2^n$, $a_{2p-1}^{n+1} = a_p^n$, $b_{2p-1}^{n+1} = a_p^n + \alpha_{n+1}$, $a_{2p}^{n+1} = b_p^n - \alpha_{n+1}$ et $b_{2p}^{n+1} = b_p^n$, avec $\alpha_{n+1} = \frac{\rho_n \alpha_n}{2}$, et $0 < \rho_n < 1$. On pose $C = \cap_{n\geq 0} C_n$ (C s'appelle "ensemble de Cantor", l'exemple le plus classique est obtenu avec $\rho_n = \frac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

1. Montrer que $C_{n+1} \subset C_n$.
2. Montrer que C est compact et $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.
3. (Question plus difficile.) Montrer que C est non dénombrable.
4. Montrer que si ρ_n ne dépend pas de n, alors $\lambda(C) = 0$. En déduire que si $A \in \mathcal{B}([0,1])$, $\lambda(A) = 0$ n'entraîne pas que A est dénombrable.
5. Soit $0 < \epsilon < 1$. Montrer qu'il existe une suite $(\rho_n)_{n\geq 0} \subset]0,1[$ t.q. $\lambda(C) = \epsilon$.
6. Soit f lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si A est un compact de $[0,1]$ t.q. $\lambda(A) = 0$, alors $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$ t.q. $\lambda(f(A)) = 0$.
7. Construire une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. si A est un compact de $[0,1]$ t.q. $\lambda(A) = 0$, on n'a pas forcément $\lambda(f(A)) = 0$ (mais $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$). [Utiliser un ensemble de Cantor de mesure nulle (cf question 4) et un ensemble de Cantor de mesure $\epsilon > 0$ (cf question 5).]

Exercice 2.32 (Mesure complète) *Corrigé 34 page 298*
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Une partie B de E est dite "négligeable" si elle est incluse dans un élément de T de mesure nulle. On note $\mathcal{N}_m$ l'ensemble des parties négligeables. On pose $\overline{T} = \{A \cup N;\, A \in T,\, N \in \mathcal{N}_m\}$.

1. Montrer que $\overline{T}$ est une tribu et que $T \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.
2. Soit $A_1, A_2 \in T$ et $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_m$ t.q. $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$. Montrer que $m(A_1) = m(A_2)$.

   Pour $B \in \overline{T}$, soit $A \in T$ et $N \in \mathcal{N}_m$ t.q. $B = A \cup N$, on pose $\overline{m}(B) = m(A)$. (La question précédente montre que cette définition est cohérente.)
3. Montrer que $\overline{m}$ est une mesure sur $\overline{T}$ et $\overline{m}_{|_T} = m$. Montrer que $\overline{m}$ est la seule mesure sur $\overline{T}$ égale à m sur T.
4. Montrer que $\mathcal{N}_{\overline{m}} = \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

L'exercice 4.18 page 101 montre la différence "dérisoire", du point de vue de l'intégration, entre (E, T, m) et son complété $(E, \overline{T}, \overline{m})$.

Exercice 2.33 (Série commutativement convergente dans $\mathbb{R}$) *Corrigé 35 page 300*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de montrer que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$ est convergente pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est absolument convergente.

Pour montrer ce résultat, on suppose, par exemple, que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^+ = \infty$. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, bijective, t.q. $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \to \infty$ quand $n \to \infty$. Conclure.

Exercice 2.34 (Régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les bornés)
Cet exercice redémontre le théorème de régularité (théorème 2.3).

I. Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. On pose : $T = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\forall \varepsilon > 0, \exists O$ ouvert de $\mathbb{R}$, et F fermé de $\mathbb{R}$, tels que $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon\}$.
   1. Soient a et $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Montrer que $]a, b[\in T$.
   2. Montrer que T est une tribu. En déduire que m est régulière.
   3. En déduire que, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m(A) = \inf\{m(O), O \supset A, O$ ouvert de $\mathbb{R}\}$.

II. Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour toute partie B bornée de $\mathbb{R}$ t.q. $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a : $m(B) < +\infty$.
   Pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose : $\nu_B(A) = m(A \cap B)$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
   1. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ une partie bornée de $\mathbb{R}$; montrer que ν_B est une mesure finie.
   2. Soient $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un ouvert O_n de $\mathbb{R}$ tel que $O_n \supset A\cap]n, n+1]$ et $m(O_n) \leq m(A\cap]n, n+1]) + \frac{\varepsilon}{2^{|n|}}$. [*Appliquer* I.3 *avec* ν_{B_n}*,* B_n *ouvert borné contenant* $]n, n+1]$*, et* $A\cap]n, n+1]$*.*]
   3. a) Soient $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe O_n ouvert de $\mathbb{R}$ et F_n fermé de $\mathbb{R}$ t.q. $F_n \subset A\cap]n, n+1] \subset O_n$ et $m(O_n \setminus F_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{|n|}}$.
      b) Montrer que m est régulière. [*On pourra remarquer, en le démontrant, que si* F_n *est fermé et* $F_n \subset]n, n+1] \forall n \in \mathbb{Z}$*, alors* $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n$ *est fermé.*]
      c) Montrer que $m(A) = \inf\{m(O), A \subset O, O$ ouvert de $\mathbb{R}\}$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

III. On note λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathcal{R}$. On pose $\alpha A + \beta = \{\alpha x + \beta, x \in A\}$. Montrer que $\alpha A + \beta \in \mathcal{R}$ et que $\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha|\lambda(A)$. [*On pourra commencer par étudier le cas où* A *est un ouvert de* $\mathbb{R}$*.*] (Nous appellerons cette propriété : “invariance par translation généralisée pour la mesure de Lebesgue".)

Exercice 2.35 (Mesure sur S^1) *Corrigé 36 page 301*

On considère $S^1 = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2, |x|^2 + |y|^2 = 1\}$ (S^1 est donc le cercle unité de $\mathbb{R}^2$). Pour $z = (x, y)^t \in S^1$, il existe un unique $\theta_z \in [0, 2\pi[$ t.q. $x = \cos(\theta_z)$ et $y = \sin(\theta_z)$. Pour $\alpha \in [0, 2\pi[$ et $z \in S^1$ on pose $R_\alpha(z) = (\cos(\theta_z + \alpha), \sin(\theta_z + \alpha))^t$. Noter que R_α est une bijection de S^1 sur S^1 (c'est la rotation d'angle α).

Définir une tribu T sur S^1, t.q. T contienne les parties de la forme $\{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \theta \in]\alpha, \beta[\}$ avec $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, et une mesure μ sur T de sorte que (S^1, T, μ) soit un espace mesuré avec $\mu(S^1) = 1$ et t.q. μ soit invariante par rotation (c'est à dire que, pour tout $A \in T$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$, on ait $R_\alpha(A) = \{R_\alpha(z), z \in A\} \in T$ et $\mu(R_\alpha(A)) = \mu(A)$). [On pourra utiliser la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.]

2.7.3 Probabilités

Exercice 2.36 (Exemple de probabilité)

Soit $E = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ un ensemble infini dénombrable et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [0, 1]^{\mathbb{N}}$ t.q. $p_k \geq 0 \, \forall k \in \mathbb{N}$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k = 1$.

1. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \neq \emptyset$, on peut définir $p(A) = \sum_{k;x_k\in A} p_k$. On pose $p(\emptyset) = 0$.
2. Montrer que p définie en 1. est une probabilité

Exercice 2.37 (Lemme de Borel-Cantelli) *Corrigé 37 page 302*

Soient (E, T, p) un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On pose $B_n = \cup_{k\geq n} A_k$ et $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ (on rappelle que $A = \limsup_{n\to\infty} A_n$).

1. Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) < +\infty$ alors $p(A) = 0$.
2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants. On suppose aussi que $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) = \infty$. Montrer que $p(A) = 1$.

Exercice 2.38 Soient E une “population", c'est-à-dire un ensemble fini,et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de "sous-populations", c'est-à-dire un système de constituants de l'espace probabilisable $(E, \mathcal{P}(E))$. Soit P_n la probabilité qu'un individu de la population appartienne à la sous-population C_n, c'est-à-dire $p(C_n)$, où p est une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$. Sachant que dans chaque sous-population la probabilité d'être gaucher est Q_n, trouver la probabilité qu'un gaucher appartienne à C_n.

Exercice 2.39 Soient S_1 (resp. S_2) un seau contenant n_1 cailloux noirs et b_1 cailloux blancs (resp. n_2 cailloux noirs et b_2 cailloux blancs). On tire au hasard, de manière équiprobable, un des deux seaux, et on tire ensuite au hasard, de manière équiprobable, un caillou dans ce seau. Sachant qu'on a tiré un caillou noir, quelle est la probabilité de l'avoir tiré du seau S_1 ?

Exercice 2.40 Soient p une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et F la fonction de répartition de p. Montrer que F est continue ssi $p(\{a\}) = 0$. En déduire que F est continue si F ne charge pas les points.

Chapitre 3

Fonctions mesurables, variables aléatoires

3.1 Introduction, topologie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$

Nous allons, dans ce chapitre, introduire différents outils nécessaires à la définition de l'intégrale de Lebesgue. De la même manière que les fonctions en escalier ont été introduites lors de la définition de l'intégrale des fonctions réglées, nous introduisons maintenant le concept de fonction étagée sur un espace mesurable (E, T). Nous introduirons ensuite les concepts de fonction mesurable et de variable aléatoire, ainsi que les premières notions de convergence de ces fonctions. La notion de variable aléatoire est fondamentale en calcul des probabilités : c'est en général par la connaissance de la variable aléatoire (et par sa "loi de probabilité") que se construit le modèle probabiliste, l'espace probabilisé (E, T, p) restant souvent mal connu.

Remarque 3.1

1. L'objectif est d'intégrer des fonctions de E (espace de départ) dans F (espace d'arrivée). Pour construire ainsi une notion d'intégrale, il faut un espace mesuré au départ et un espace topologique à l'arrivée, car nous aurons besoin dans l'espace d'arrivée d'une notion de convergence (pour les procédés de passage à la limite dans la définition de l'intégrale). Les espaces d'arrivée usuels sont (pour la théorie de l'intégration) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^N$ ou un espace de Banach. Le procédé de construction dû à Lebesgue donne un rôle fondamental aux fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (et à la notion de convergence "croissante") et nous aurons besoin d'utiliser la topologie de $\overline{\mathbb{R}}_+$ (voir la définition 3.1).
2. On rappelle qu'un espace topologique est la donnée d'un ensemble F muni d'une famille de parties de F, appelées "ouverts de F", contenant $\emptyset$ et F, stable par union (quelconque) et stable par intersection finie. On rappelle aussi que, dans un espace topologique, $x_n \to x$, quand $n \to \infty$, signifie que, pour tout O ouvert contenant x, il existe n_0 t.q. $x_n \in O$ pour tout $n \geq n_0$.
3. Soit F un espace topologique et $G \subset F$. On appelle topologie trace sur G, ou topologie induite sur G, la topologie définie par l'ensemble des restrictions à G des ouverts de F. Si $O \subset G$, O est un ouvert de G si et seulement si il existe U ouvert de F t.q. $O = U \cap G$. Noter donc que O peut ne pas être un ouvert de F si G n'est pas un ouvert de F. Par contre, il est important de remarquer que si G est un borélien de F (c'est-à-dire $G \in \mathcal{B}(F)$, $\mathcal{B}(F)$ étant la tribu engendrée par les ouverts de F), l'ensemble des boréliens de G est exactement l'ensemble des boréliens de F inclus dans G, c'est-à-dire $\mathcal{B}(G) = \{B \subset G\,;\, B \in \mathcal{B}(F)\}$, ceci est démontré dans l'exercice 2.3 page 42.
4. Un exemple fondamental de topologie sur l'ensemble F est celui de la topologie donnée par une distance sur F. Dans le cas de $F = \mathbb{R}$, nous considérerons toujours $\mathbb{R}$ muni de la topologie donnée par la structure métrique de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire par l'application "distance" définie par $d(a, b) = |b - a|$.

Définition 3.1 (Topologie et tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$

1. Soit $O \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. O est un ouvert si pour tout $a \in O$ on a :

(a) Si $0 < a < \infty$, alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset O$,

(b) si $a = 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $[0, \alpha[\subset O$,

(c) si $a = \infty$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ t.q. $]\alpha, \infty] \subset O$.

2. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ est la tribu (sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) engendrée par les ouverts de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Soit $B \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on peut montrer (voir la remarque 3.2 ci après) que $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ si et seulement si $B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$).

Remarque 3.2

1. La topologie sur $\mathbb{R}_+$ est la topologie induite par celle de $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est aussi la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$. L'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}_+$ est donc égal à l'ensemble des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}_+$ inclus dans $\mathbb{R}_+$ et c'est aussi l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{R}_+$ (voir la remarque 3.1). On remarque aussi que $\{\infty\} \in B(\overline{\mathbb{R}}_+)$ (car $\{\infty\}$ est, par exemple, une intersection dénombrable d'ouverts de $\overline{\mathbb{R}}_+$). On en déduit que, si $B \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on a $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ si et seulement si $B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (noter que $B \cap \mathbb{R} = B \cap \mathbb{R}_+$).
2. Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, A est donc un borélien de $\overline{\mathbb{R}}_+$ si et seulement si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou si $A = B \cup \{\infty\}$, avec $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. La définition de la topologie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ donne bien que, pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on a $x_n \to \infty$ (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, quand $n \to \infty$) si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, il existe n_0 t.q. $x_n \in]\alpha, \infty]$ pour tout $n \geq n_0$ (ce qui est la définition usuelle de convergence vers ∞).
4. On peut aussi montrer (exercice…) que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}_1 = \{]a, \infty];\ a \in \mathbb{R}_+\}$. C'est aussi la tribu engendrée par $\mathcal{C}_2 = \{]a, \infty[\cap \mathbb{R}_+;\ a \in \mathbb{R}\}$. Par contre, ce n'est pas la tribu engendrée (sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) par $\mathcal{C}_3 = \{]a, \infty[;\ a \in \mathbb{R}_+\}$ (on a donc $T(\mathcal{C}_3) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et $T(\mathcal{C}_3) \neq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$).

3.2 Fonctions étagées

Définition 3.2 (Fonction caractéristique) *Soient (E, T) un espace mesurable et soit $A \in T$. On appelle fonction caractéristique mesurable de l'ensemble A, et on note 1_A (ou χ_A) la fonction définie par : $1_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $1_A(x) = 0$ si $x \in A^c$.*

Définition 3.3 (Fonction étagée) *Soient (E, T) un espace mesurable et $f\ ;\ E \to \mathbb{R}$.*

1. On dit que f est étagée (ou T-étagée) si f est une combinaison linéaire (finie) de fonctions caractéristiques mesurables, c'est-à-dire s'il existe une famille finie $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ et n réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$.

2. On dit que f est étagée positive si f est étagée et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions étagées et $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives.

La notion de fonction étagée positive va nous permettre de définir l'intégrale à partir de la notion de mesure. On se limite pour l'instant aux fonctions positives afin de donner un sens à l'addition de mesures infinies. Notons que, dans la définition d'une fonction étagée, les ensembles A_i peuvent être d'intersection non vide. On aura besoin, pour introduire facilement la notion d'intégrale d'une fonction étagée positive, de considérer une décomposition de la fonction étagée sur des ensembles d'intersection vide. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 3.1 (Décomposition canonique d'une fonction étagée positive)
Soit (E, T) un espace mesurable, et soit $f \in \mathcal{E}_+$ une fonction étagée positive, non identiquement nulle. Alors il existe une unique famille finie $(a_i, A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}_+^\star \times T$ t.q. $0 < a_1 < \ldots < a_n$, $A_i \neq \emptyset$, pour tout i, $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$, et $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$.

DÉMONSTRATION : Soient $(B_i)_{i=1,\ldots,p} \subset T$, $(b_i)_{i=1,\ldots,p} \subset \mathbb{R}$ et $f = \sum_{i=1}^p b_i 1_{B_i}$ une fonction étagée positive non nulle. L'ensemble $\mathrm{Im} f$ des valeurs prises par f est donc fini. Comme $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}_+$, on a donc $\mathrm{Im} f \setminus \{0\} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ avec $0 < a_1, \ldots < a_n$. En posant $A_i = \{x \in E; f(x) = a_i\}$, on a donc $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ avec $A_i \neq \emptyset$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$. (Noter aussi que $\{x \in E; f(x) = 0\} = (\cup_{i=1}^n A_i)^c$.) Il reste à montrer que $A_i \in T$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $I_i = \{K \subset \{1, \ldots, p\}\ ;\ a_i = \sum_{k \in K} b_k\}$. On a alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $A_i = \cup_{K \in I_i} C_K$, avec $C_K = \cap_{j=1}^p D_j$, $D_j = B_j$ si $j \in K$ et $D_j = B_j^c$ si $j \notin K$. Les propriétés de stabilité d'une tribu nous donnent alors que $A_i \in T$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a donc trouvé la décomposition voulue de f. Le fait que cette décomposition est unique est immédiat car on a nécessairement $\{a_1, \ldots, a_n\} = \mathrm{Im} f \setminus \{0\}$ et $A_i = \{x \in E; f(x) = a_i\}$. ■

On aurait envie à partir de la notion de fonction étagée positive décomposée sous la forme précédente, de définir l'intégrale de f comme $\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i)$.
En fait, on pourra même (cf définition 4.1) définir l'intégrale d'une fonction étagée avec une décomposition plus générale (non unique) grâce au lemme suivant :

Lemme 3.2 *Soit (E, T, m) un espace mesuré et soit $f \in \mathcal{E}_+$ une fonction étagée positive non nulle, t.q. $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$ et $f = \sum_{i=1}^{p} b_i 1_{B_i}$ où $a_1, ..., a_n$, $b_1, ..., b_p$ sont des réels strictement positifs, $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ et $(B_i)_{i=1,\ldots,p} \subset T$ sont des familles de parties disjointes deux à deux, i.e. telles que $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Alors :*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i) = \sum_{j=1}^{p} b_j m(B_j). \tag{3.1}$$

DÉMONSTRATION : On pose, pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, p$, $C_{ij} = A_i \cap B_j$. En remarquant que $\{x; f(x) > 0\} = \cup_{i=1}^n A_i = \cup_{j=1}^p B_j$, on écrit $A_i = \cup_{j=1}^p C_{ij}$ et $B_j = \cup_{i=1}^n C_{ij}$. On peut donc écrire

$$\sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_i m(C_{ij}) \tag{3.2}$$

et

$$\sum_{j=1}^{p} b_j m(B_j) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} b_j m(C_{ij}) \tag{3.3}$$

On remarque alors que $a_i = b_j$ dès que $C_{ij} \neq \emptyset$, d'où l'égalité 3.1. ■

Lemme 3.3 (Décomposition d'une fonction étagée avec une partition)
Soit (E, T) un espace mesurable, et soit $f \in \mathcal{E}$ une fonction étagée. Alors il existe une unique famille finie $(a_i, A_i)_{i=0,\ldots,n} \subset \mathbb{R} \times T$ t.q. $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, $A_i \neq \emptyset$, pour tout i, $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$, $E = \cup_{i=0}^n A_i$ et $f = \sum_{i=0}^n a_i 1_{A_i}$.

DÉMONSTRATION :
La démonstration est très voisine de celle donnée pour la décomposition d'une fonction étagée positive (lemme 3.1). L'ensemble $\{a_i, i \in \{0, \ldots, n\}\}$ est l'ensemble de toutes les valeurs prises par f (et pas seulement les valeurs non nulles) et $A_i = \{x \in E\ ;\ f(x) = a_i\}$.

■

Enfin, on conclut ce paragraphe en remarquant que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.1 (Structure vectorielle de $\mathcal{E}$) *Soit (E, T) un espace mesurable, l'ensemble des fonctions étagées, $\mathcal{E}$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De plus, si $f, g \in \mathcal{E}$, on a aussi $fg \in \mathcal{E}$.*

DÉMONSTRATION :
Soit $f, g \in \mathcal{E}$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On utilise la décomposition de f et g donnée dans le lemme 3.3. Elle donne $f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{A_i}$ et $g = \sum_{j=0}^{m} b_j 1_{B_i}$. Comme les familles $(A_i)_{\{i\in\{0,\ldots,n\}\}}$ et $(B_j)_{\{j\in\{0,\ldots,m\}\}}$ forment des partitions de E, on a :

$f = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i 1_{A_i\cap B_j}$ et $g = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} b_j 1_{A_i\cap B_j}$,

de sorte que $\alpha f + \beta g = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (\alpha a_i + \beta b_i) 1_{A_i\cap B_j}$, ce qui montre que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}$, et donc que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

D'autre part, on remarque aussi que $fg = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_i 1_{A_i\cap B_j}$, ce qui montre que $fg \in \mathcal{E}$.

■

On montrera aussi les propriétés de linéarité et de monotonie de l'intégrale des fonctions étagées (voir proposition 4.1).

3.3 Fonctions mesurables et variables aléatoires

Afin d'étendre le concept d'intégrale à une classe de fonctions plus générale que celle des fonctions étagées (positives), on introduit les fonctions mesurables (positives). On pourra ensuite utiliser une technique de "passage à la limite" pour définir l'intégrale de telles fonctions.

On va tout d'abord définir la notion de mesurabilité pour une fonction f de E dans F. L'espace de départ, E, est muni d'une tribu et l'espace d'arrivée, F, est, en général, muni d'une topologie (et donc de sa tribu de Borel, les exemples fondamentaux sont $F = \mathbb{R}$ ou $F = \overline{\mathbb{R}}_+$). On peut aussi considérer le cas où F est muni d'une tribu (non donnée par une topologie sur F).

Définition 3.4 (Fonction mesurable) *Soient (E, T) un espace mesurable et F un ensemble muni d'une topologie (par exemple : $F = \mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$). Une fonction f, définie de E dans F, est une fonction T-mesurable si $f^{-1}(A) \in T$, pour tout $A \in \mathcal{B}(F)$. (Ce qui est équivalent à dire que la tribu $f^{-1}(\mathcal{B}(F)) = \{f^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(F)\}$ est incluse dans T ou encore que la tribu $T_f = \{B \in \mathcal{P}(F)\,;\ f^{-1}(B) \in T\}$ contient $\mathcal{B}(F)$, voir l'exercice 2.4 sur les tribus image directe et image réciproque.) En l'absence d'ambiguïté possible on dira "mesurable" au lieu de "T-mesurable".*

Plus généralement, si F n'est pas muni d'une topologie (et donc de la tribu $\mathcal{B}(F)$) mais est muni directement d'une tribu $\mathcal{T}$ (on a alors deux espaces mesurables : (E, T) et $(F, \mathcal{T})$), une fonction f, définie de E dans F, est une fonction $(T, \mathcal{T})$-mesurable si $f^{-1}(A) \in T$, pour tout $A \in \mathcal{T}$. (Ce qui est équivalent à dire que la tribu $f^{-1}(\mathcal{T}) = \{f^{-1}(B),\ B \in \mathcal{T}\}$ est incluse dans T ou encore que la tribu $T_f = \{B \in \mathcal{P}(F)\,;\ f^{-1}(B) \in T\}$ contient $\mathcal{T}$.) En l'absence d'ambiguïté possible on dira "mesurable" au lieu de "$(T, \mathcal{T})$-mesurable".

Remarque 3.3 Une fonction étagée est toujours mesurable. En effet, soit (E, T) un espace mesurable. Soit $f \in \mathcal{E}$ (donc f est une application de E dans $\mathbb{R}$). D'après la proposition 3.3, il existe $(A_0, \ldots, A_n)$, partition de E, et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ t.q. $f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{A_i}$ et $A_i \in T$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. Pour tout $B \subset \mathbb{R}$, on a donc $f^{-1}(B) = \cup_{\{i;\, a_i\in B\}} A_i \in T$. Ce qui prouve que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}$.

Noter que si $f \in \mathcal{E}_+$, on a donc aussi f mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (voir l'exercice 3.4).

La terminologie probabiliste utilise les termes "variable aléatoire" ou " élément aléatoire" (au lieu de "fonction mesurable" ou "application mesurable").

Définition 3.5 (Variable aléatoire, élément aléatoire)

1. *Soit (E,T) un espace probabilisable, on appelle variable aléatoire une fonction X définie de E dans $\mathbb{R}$ et T-mesurable, i.e. t.q. $X^{-1}(A) \in T$, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*
2. *Soit (E,T) et $(F,\mathcal{T})$ deux espaces probabilisables. Une fonction X, définie de E dans F, est un élément aléatoire si c'est une fonction $(T,\mathcal{T})$-mesurable (c'est-à-dire si $X^{-1}(A) \in T$, pour tout $A \in \mathcal{T}$). Lorsque F est un espace vectoriel, on dit que X est une variable aléatoire vectorielle ou un "vecteur aléatoire".*

Remarque 3.4 Comme cela a été dit dans la proposition 3.4, on dit, en l'absence d'ambiguïté, "mesurable" au lieu de "T-mesurable". On remarque d'ailleurs que le terme probabiliste "variable aléatoire" ne mentionne pas la dépendance par rapport à la tribu. Dans la définition 3.5, on a noté X la variable aléatoire plutôt que f car c'est l'usage dans la littérature probabiliste.

Définition 3.6 (Tribu engendrée par une fonction mesurable)
Soient (E,T) un espace mesurable (resp. probabilisable) et f (resp. X) une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$ (resp. une variable aléatoire) alors l'ensemble $\{f^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ (resp. $\{X^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$) est une tribu sur E qu'on appelle tribu engendrée par la fonction mesurable f (resp. la variable aléatoire X). Cette tribu est aussi la tribu image réciproque de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par f (resp. X).

Définition 3.7 (espaces $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$) *Soit (E,T) un espace mesurable, on note :*
– $\mathcal{M}(E,T) = \{f : E \to \mathbb{R}$, mesurable $\}$,
– $\mathcal{M}_+(E,T) = \{f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$, mesurable $\}$.
En l'absence d'ambiguïté, on notera $\mathcal{M} = \mathcal{M}(E,T)$ et $\mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(E,T)$.

Proposition 3.2 (Première caractérisation de la mesurabilité)
Soient (E,T) un espace mesurable et $f : E \to F$, avec $F = \mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$. Soit $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{P}(F)$ engendrant la tribu borélienne de F. On a alors : f est mesurable si et seulement $f^{-1}(C) \in T$ pour tout $C \in \mathcal{C}$. En particulier, f est mesurable si et seulement si f vérifie l'une des deux propriétés suivantes :

1. *$f^{-1}(]\alpha,\beta[) \in T$, pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$,*
2. *$f^{-1}(]\alpha,\infty[) \in T$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Dans cette caractérisation, l'ensemble $]\alpha,\beta[$ (ou $]\alpha,\infty[$) désigne, bien sûr, l'ensemble des éléments de F appartenant à $]\alpha,\beta[$ (ou $]\alpha,\infty[$).

La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 3.1. Le lecteur pourra trouver lui-même d'autres caractérisations de la mesurabilité, en utilisant la proposition ci-dessus. Par exemple, soit f de E (muni de la tribu T) dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, la fonction f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(]\alpha,\infty]) \in T$ pour tout $\alpha > 0$ (par contre, $f^{-1}(]\alpha,\infty[) \in T$ pour tout $\alpha \geq 0$ n'implique pas que f est mesurable).

La proposition suivante nous permettra de définir l'intégrale des fonctions appartenant à $\mathcal{M}_+$ (comme limite d'intégrales de fonctions étagées, voir le chapitre suivant). Par contre, on ne pourra pas donner un sens, dans le cas général, à l'intégrale des fonctions appartenant à $\mathcal{M}$.

Proposition 3.3 (Mesurabilité positive) *Soient (E,T) un espace mesurable et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors $f \in \mathcal{M}_+$ si et seulement si il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$, t.q. :*

1. *Pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$,*
2. *$f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, pour tout $x \in E$, et tout $n \in \mathbb{N}$.*

les 2 conditions précédentes seront dénotées dans la suite sous la forme $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$.

DÉMONSTRATION : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$. On remarque que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(]\alpha, +\infty]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]\alpha, +\infty[). \tag{3.4}$$

Comme f_n est mesurable, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir la remarque 3.3), on a $f_n^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, par stabilité de T par union dénombrable, $f^{-1}(]\alpha, +\infty]) \in T$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on en déduit, comme $\{]\alpha, +\infty], \alpha \geq 0\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, que f est mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}_+$.

Réciproquement, on suppose que $f \in \mathcal{M}+$. On va construire $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$.
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{p}{2^n} \text{ si } f(x) \in [\dfrac{p}{2^n}, \dfrac{p+1}{2^n}[, \text{ avec } p \in \{0, \ldots, n2^n - 1\}, \\ n \text{ si } f(x) \geq n, \end{cases} \tag{3.5}$$

de sorte que

$$f_n = n 1_{\{x\in E;\, f(x)\geq n\}} + \sum_{p=0}^{n2^n-1} \frac{p}{2^n} 1_{\{x\in E;\, f(x)\in[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}[\}}.$$

Comme $f \in \mathcal{M}_+$, on a $\{x \in E;\, f(x) \geq n\} \in T$ et $\{x \in E;\, f(x) \in [\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}[\} \in T$ pour tout n et tout p, on a donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{E}_+$.

On montre maintenant que, pour tout $x \in E$, on a $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$. Soit $x \in E$. On distingue deux cas :
Premier cas. On suppose $f(x) < \infty$. On a alors, pour $n \geq f(x)$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. On a donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$.
Deuxième cas. On suppose $f(x) = \infty$. On a alors $f_n(x) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$.

On montre enfin que, pour tout $x \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. Soit $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On distingue trois cas :
Premier cas. On suppose $f(x) \geq n + 1$. On a alors $f_{n+1}(x) = n + 1 > n = f_n(x)$.
Deuxième cas. On suppose $n \leq f(x) < n + 1$. Il existe alors $i \in \{n2^{n+1}, \ldots, (n + 1)2^{n+1} - 1\}$ t.q. $f(x) \in [\frac{i}{2^{n+1}}, \frac{i+1}{2^{n+1}}]$. On a alors $f_n(x) = n \leq \frac{i}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$.
Troisième cas. On suppose $f(x) < n$. Il existe alors $p \in \{0, \ldots, n2^n - 1\}$ t.q. $f(x) \in [\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}[= [\frac{2p}{2^{n+1}}, \frac{2(p+1)}{2^{n+1}}[$. Si $f(x) \in [\frac{2p}{2^{n+1}}, \frac{2p+1}{2^{n+1}}[$, on a $f_n(x) = \frac{p}{2^n} = \frac{2p}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$. Si $f(x) \in [\frac{2p+1}{2^{n+1}}, \frac{2(p+1)}{2^{n+1}}[$, on a $f_n(x) = \frac{p}{2^n} < \frac{2p+1}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$. On a toujours $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

On a bien ainsi construit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$.

■

Proposition 3.4 (Mesurabilité sans signe) *Soient (E, T) un espace mesurable, et $f : E \to \mathbb{R}$. On suppose que f est mesurable. Il existe alors une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q., pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$.*

DÉMONSTRATION :
On définit la fonction $f^+ : E \to \mathbb{R}_+$ par $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ pour tout $x \in E$. On remarque que $f^+ \in \mathcal{M}_+$ (et $f^+ \in \mathcal{M}$, voir l'exercice 3.4). En effet, f^+ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $(f^+)^{-1}(]\alpha, \infty]) = f^{-1}(]\alpha, \infty[) \in T$

si $\alpha > 0$. On conclut en remarquant que $\{]\alpha, \infty], \alpha > 0\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. On définit également $f^- = (-f)^+$, de sorte que $f = f^+ - f^-$. On a donc aussi $f^- \in \mathcal{M}_+$. La proposition 3.3 donne l'existence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f^+$ et $g_n \uparrow f^-$ quand $n \to \infty$. On pose $h_n = f_n - g_n$, de sorte que $h_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in E$. D'autre part, comme $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel (voir la proposition 3.1 page 55), on a $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$.

■

La proposition précédente nous donnera, avec les propriétés de stabilité de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$ (voir la proposition 3.5) une deuxième caractérisation de la mesurabilité, voir la proposition 3.6.

L'ensemble des fonctions mesurables est un ensemble très “stable", c'est-à-dire que des opérations “usuelles" (comme “addition", “multiplication", “limite"...) sur des fonctions mesurables donnent encore des fonctions mesurables, ceci est précisé dans la proposition suivante. Dans le cas (fondamental) de $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, il est “difficile" de trouver des fonctions non mesurables (comme il est “difficile" de trouver des parties non boréliennes, bien que le cardinal de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ soit égal au cardinal de $\mathbb{R}$ et donc strictement inférieur au cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$). En pratique, on peut en gros supposer que les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont *toutes* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurables (bien qu'il y ait “beaucoup" de fonctions non mesurables...).

Proposition 3.5 (Stabilité de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$) *Soit (E, T) un espace mesurable.*

1. *Soit $I \subset \mathbb{N}$.*

   Soit $(f_n)_{n\in I} \subset \mathcal{M}_+$, alors $\sup_{n\in I} f_n \in \mathcal{M}_+$ et $\inf_{n\in I} f_n \in \mathcal{M}_+$.

   Soit $(f_n)_{n\in I} \subset \mathcal{M}$. Si $\sup_{n\in I} f_n$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\sup_{n\in I} f_n \in \mathcal{M}$. De même, si $\inf_{n\in I} f_n$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\inf_{n\in I} f_n \in \mathcal{M}$.
2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, alors $\limsup_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$ et $\liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$.*

   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. Si $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}$. De même, si $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}$.
3. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. On suppose que $f_n(x) \to f(x)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, pour tout $x \in E$. Alors $f \in \mathcal{M}_+$.*

   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. On suppose que $f_n(x) \to f(x)$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in E$. Alors $f \in \mathcal{M}$.
4. *$\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et si $f, g \in \mathcal{M}$, alors $fg \in \mathcal{M}$.*

DÉMONSTRATION :

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. Il est clair que $f = \sup_{n\in I} f_n$ est bien définie et prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Puis, Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $f^{-1}(]\alpha, \infty]) = \cup_{n\in I} f_n^{-1}(]\alpha, \infty]) \in T$. Comme $\{]\alpha, \infty] \cap \overline{\mathbb{R}}_+, \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, on en déduit que f est mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}_+$.

   De même la fonction $f = \inf_{n\in I} f_n$ est aussi bien définie et prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (elle prend même ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ si les f_n prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ceci n'est pas vrai avec la fonction $\sup_{n\in I} f_n$). On remarque ensuite que $f^{-1}([-\infty, \alpha[) = \cup_{n\in I} f_n^{-1}([-\infty, \alpha[)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme $\{[-\infty, \alpha[\cap \overline{\mathbb{R}}_+, \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, on en déduit que f est mesurable de E dans $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}_+$.

   Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. La fonction $f = \sup_{n\in I} f_n$ est bien définie si on la considère comme étant à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ car elle peut prendre la valeur $+\infty$ en certains points. On la suppose maintenant à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut alors raisonner comme précédemment en remarquant que $f^{-1}(]\alpha, \infty[) = \cup_{n\in I} f_n^{-1}(]\alpha, \infty[)$ et que $\{]\alpha, \infty[, \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. De même, La fonction $f = \inf_{n\in I} f_n$ est bien définie si on la considère comme étant à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ car elle peut prendre la valeur $-\infty$ en certains points. On la suppose maintenant à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut alors raisonner comme précédemment en remarquant que $f^{-1}(]-\infty, \alpha[) = \cup_{n\in I} f_n^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ et que $\{]-\infty, \alpha[, \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. On pose $f = \limsup_{n\to\infty} f_n$, la fonction f est bien définie à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Pour tout $x \in E$, on a
$$f(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}(\sup_{p\geq n} f_p(x)) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p(x)),$$
c'est-à-dire $f = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p)$. En utilisant les résultats précédents (avec sup puis inf), on a donc $f \in \mathcal{M}_+$. Un raisonnement similaire donne $\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{p\geq n} f_p) \in \mathcal{M}_+$.
Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. On suppose que
$$f = \limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p)$$
(qui est bien définie dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$) prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme les f_n prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut alors remarquer que la fonction $\sup_{p\geq n} f_p$ prend aussi ses valeurs dans $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, avec la propriété démontrée en 1, $\sup_{p\geq n} f_p \in \mathcal{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, utilisant encore la propriété démontrée en 1, $f = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p) \in \mathcal{M}$. Un raisonnement analogue donne $\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{p\geq n} f_p) \in \mathcal{M}$ dès que l'on suppose que $\liminf_{n\to\infty} f_n$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.
3. Cette question est immédiate grâce à la précédente. Il suffit de remarquer que dès que la limite de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ existe, elle est nécessairement égale à la limite supérieure (ou la limite inférieure) de cette même suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ (pour tout $x \in E$). Ici on remarque donc simplement que $f = \limsup_{n\to\infty} f_n$ et on applique la propriété 2.
4. Soit $f, g \in \mathcal{M}$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ On pose $h = \alpha f + \beta g$. D'après la proposition 3.4, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n(x) \to f(x)$ et $g_n(x) \to g(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in E$. On pose $h_n = \alpha f_n + \beta g_n$, de sorte que $h_n(x) \to h(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in E$. La proposition 3.1 donne que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on a donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$. Comme $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ (voir la remarque 3.3), la propriété 3 ci dessus donne alors que $h \in \mathcal{M}$. L'ensemble $\mathcal{M}$ est donc un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$).

   Soit $f, g \in \mathcal{M}$. On pose $h = fg$. On raisonne comme ci dessus, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n(x) \to f(x)$ et $g_n(x) \to g(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in E$. On pose $h_n = f_n g_n$, de sorte que $h_n(x) \to h(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in E$. La proposition 3.1 donne aussi $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{M}$. La propriété 3 ci dessus donne alors que $h \in \mathcal{M}$.

■

Proposition 3.6 (Deuxième caractérisation de la mesurabilité) *Soit (E, T) un espace mesurable et $f : E \to \mathbb{R}$. Alors, f est mesurable si et seulement si il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q., pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$.*

DÉMONSTRATION :
Cette caractérisation est donnée par la proposition 3.4 pour le sens “seulement si" et par la propriété 3 de la proposition 3.5 pour le sens “si".

■

On rappelle aussi qu'une fonction f de E (muni de la tribu T) dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est mesurable (c'est-à-dire appartient à $\mathcal{M}_+$) si et seulement si il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ (voir la proposition 3.3).

Remarque 3.5 Il est intéressant de remarquer que la proposition 3.6 peut être fausse si on prend pour F un espace topologique quelconque (elle reste vraie, par exemple, si F est un espace vectoriel normé de dimension finie) avec une définition immédiate de $\mathcal{E}$ généralisant celle donnée pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Définition 3.8 *Soient E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$. Pour tout $x \in E$, on pose :*
– $f^+(x) = \max(f(x), 0)$,
– $f^-(x) = -\min(f(x), 0) = (-f)^+(x)$,
– $|f|(x) = |f(x)|$.

Proposition 3.7 *Soient (E, T) un espace mesurable et $f \in \mathcal{M}$. On a alors $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ et f^+, f^-, $|f| \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{M}$.*

DÉMONSTRATION :
Le fait que $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$ est immédiat. On a déjà vu, dans la démonstration de la proposition 3.4, que $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+$ et donc que $f^+, f^- \in \mathcal{M}$ (voir l'exercice 3.4). La proposition 3.5 donne que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On a donc $|f| \in \mathcal{M}$ et donc aussi $|f| \in \mathcal{M}_+$ car $|f| \geq 0$.

■

3.4 Mesure image, loi d'une v.a., v.a. indépendantes

Soit (E, T) et $(F, \mathcal{T})$ deux espaces mesurables (l'exemple fondamental est $(F, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$) et f une fonction mesurable de E vers F. Si m est une mesure sur T, alors on peut définir, à partir de f et m, une mesure sur $\mathcal{T}$ de la manière suivante :

Proposition 3.8 (Mesure image) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(F, \mathcal{T})$ un espace mesurable et f une fonction mesurable de E vers F (c'est-à-dire $(T, \mathcal{T})$-mesurable). Alors, l'application m_f définie de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}_+$ par : $m_f(A) = m(f^{-1}(A))$, pour tout $A \in \mathcal{T}$, est une mesure sur $\mathcal{T}$, appelée mesure image par f.*

DÉMONSTRATION : Il suffit de remarquer que m_f est bien définie, que $m_f(\emptyset) = 0$ et que m_f est $\sigma-$additive, ce qui découle naturellement des propriétés de m. ■

Définition 3.9 (Loi de probabilité et fonction de répartition d'une v.a.)
Soient (E, T, p) un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle (c'est-à-dire une fonction mesurable de E, muni de la tribu T, dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne). On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X la probabilité p_X image de p par X (cette probabilité est donc définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction de répartition de la probabilité p_X.

Dans de nombreux cas, les modèles probabilistes seront déterminés par une loi de probabilité d'une variable aléatoire. Une conséquence immédiate du théorème 2.4 est que la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle est entièrement déterminée par sa fonction de répartition. Ceci est énoncé dans la proposition suivante.

Proposition 3.9 (Egalité de deux lois) *Soient (E, T, p) et (E', T', p') des espaces probabilisés, X une variable aléatoire réelle sur E (c'est-à-dire une fonction mesurable de E, muni de T, dans $\mathbb{R}$ muni de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) et X' une variable aléatoire réelle sur E'. On a alors $p_X = p_Y$ si et seulement si $p(\{X \leq t\}) = p'(\{Y \leq t\})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a aussi $p_X = p_Y$ si et seulement si $p(\{s \leq X \leq t\}) = p'(\{s \leq Y \leq t\})$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, $s < t$. (Les inégalités strictes peuvent remplacées par des inégalités larges.)*

DÉMONSTRATION : Cette proposition est une conséquence des théorèmes 2.4 et 2.5. Il suffit de remarquer que $p(\{X \leq t\}) = p_X(]-\infty, t])$ et $p(\{s \leq X \leq t\}) = p_X([s, t])$ (et les mêmes égalités avec Y au lieu de X).

■

On rappelle que la notation $p(\{X \leq t\})$ (si X est une v. a. réelle sur l'espace probabilisé (E, T, p)) signifie $p(\{\omega \in E ; X(\omega) \leq t\})$. Cette notation sera abrégée sous la forme $p(X \leq t)$.

Définition 3.10 (Variables aléatoires équidistribuées)
Soient (E, T, p) *et* (E', T', p') *des espaces probabilisés,* X *(resp.* X'*) une variable aléatoire de* (E, T, p) *(resp.* (E', T', p')*) dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, on dit que les variables aléatoires* X *et* X' *sont équidistribuées si elles ont même loi de probabilité.*

Définition 3.11 (Variable aléatoire discrète, entière, continue) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle sur* (E, T, p)*,* p_X *la loi de la variable aléatoire* X *et* F_X *sa fonction de répartition ;*

1. *Si* $X(E)$ *est dénombrable, on dit que la variable aléatoire* X *est discrète.*
2. *Si* $X(E) \subset \mathbb{N}$*, on dit que la variable aléatoire* X *est entière.*
3. *Si la fonction de répartition* F_X *définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $[0, 1]$ *est continue, on dit que la variable aléatoire est continue.*

Définition 3.12 (Variables aléatoires indépendantes)
Soit $(E, T, p))$ *un espace probabilisé.*

1. *Soit* $N > 1$ *et* $X_1, \ldots, X_N$ *une famille de variables aléatoires réelles. On dit que* $X_1, \ldots, X_N$ *sont indépendantes (ou que la famille (* $X_1, \ldots, X_N$*) est indépendante) si les tribus engendrées par* $X_1, \ldots, X_N$ *(on notera souvent* $\tau(X)$ *ou* $\sigma(X)$ *la tribu engendrée par la variable aléatoire* X*) sont indépendantes.*
2. *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *une suite de variables aléatoires réelles. On dit cette suite est indépendante (ou que les v.a.* X_1*,* $\ldots, X_n, \ldots$ *sont indépendantes) si, pour tout* $N > 1$*, les v.a.* $X_1, \ldots, X_N$ *sont indépendantes.*

On appellera "suite de v.a.r.i.i.d. " une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées (ce dernier point signifiant que toutes les v.a. de la suite ont même loi).

Soit $(E, T, p))$ un espace probabilisé et X_1, X_2, X_3 trois v.a.r. (c'est-à-dire variables aléatoires réelles). Le fait que X_1 soit indépendante de X_2 et X_3 n'implique pas que X_1 soit indépendante de (par exemple) $X_2 + X_3$, même si X_2 et X_3 sont indépendantes. Mais, on a bien X_1 indépendante de $X_2 + X_3$ si la famille (X_1, X_2, X_3) est indépendante. Ceci est une conséquence da la proposition suivante.

Proposition 3.10 (Indépendance et composition)
Soit $(E, T, p))$ *un espace probabilisé,* $n \geq 1$*,* $m \geq 1$ *et* $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ *des v.a.r. indépendantes. Soit* φ *une fonction borélienne de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* ψ *une fonction borélienne de* $\mathbb{R}^m$ *dans* $\mathbb{R}$*. Alors, les v.a.r.* $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ *et* $\psi(Y_1, \ldots, Y_m)$ *sont indépendantes. Nous avons ici décomposé la famille initiale de v.a.r. indépendantes en 2 groupes. la proposition peut se généraliser à une décomposition en un nombre quelconque de groupes.*

DÉMONSTRATION : La notation $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ est un peu incorrecte (mais est toujours utilisée). Elle désigne (comme on le devine facilement) la composition de φ (qui va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$) avec l'application de E dans $\mathbb{R}^n$ donnée par les X_i, $i = 1, \ldots, n$.

La démonstration de cette proposition (et de sa généralisation à un nombre quelconque de groupes) est une conséquence simple de la proposition 2.11 dés que l'on remarque que la tribu engendrée par $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ est incluse dans la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$, ce que nous démontrons maintenant.

On note τ la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$ et X l'application de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à $\omega \in E$ associe $(X_1(\omega), \ldots,$ $X_n(\omega))^t$. Il est facile de voir que $\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ t.q. $X^{-1}(A) \in \tau\}$ est une tribu (sur $\mathbb{R}^n$). Si $A = \prod_{i=1}^n A_i$ avec $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $X^{-1}(A) = \cap_{i=1}^n X_i^{-1}(A_i) \in \tau$ (car $X_i^{-1}(A_i)$ appartient à $\tau(X_i)$ et donc à τ). Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est engendrée par l'ensemble des produits de boréliens de $\mathbb{R}$ (et même par l'ensemble des produits d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, voir l'exercice 2.7), on en déduit que $\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ t.q. $X^{-1}(A) \in \tau\}$ contient $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a donc $(\varphi(X))^{-1}(B) = X^{-1}(\varphi^{-1}(B)) \in \tau$ car $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (puisque φ est borélienne). ce qui prouve bien que la tribu engendrée par $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ est incluse dans la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$. ■

Nous verrons au chapitre 7 la conséquence principale de l'indépendance. Cette conséquence est que, si X, Y sont des v.a.r. indépendantes, la loi du couple (X, Y) est le produit des lois P_X et P_Y (c'est-à-dire , avec les notations du Chapitre 7, $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$). Une propriété analogue est vraie pour une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de v.a.r. indépendantes.

Nous terminons ce paragraphe par un théorème très utile en probabilités sur la représentation d'une v.a. mesurable par rapport à une autre v.a..

Théorème 3.1 (V.a. mesurable par rapport à une autre v.a.)
Soient X et Y deux v.a. réelles définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Alors, la v.a. Y est mesurable par rapport à la tribu engendrée par X (notée $\tau(X)$) si et seulement si il existe une fonction borélienne f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$.

DÉMONSTRATION : La démonstration de ce résultat fait l'objet de l'exercice 3.15 (corrigé 48). Il est intéressant de remarquer que le démonstration de ce théorème faite dans le corrigé 48 donne les informations complémentaires suivantes :
– Y est $\tau(X)$-mesurable bornée si et seulement si il existe f borélienne bornée t.q. $Y = f(X)$,
– Y est $\tau(X)$-mesurable positive si et seulement si il existe f borélienne positive t.q. $Y = f(X)$.
La partie "si" de ces deux résultats est immédiate. Pour la partie "seulement si", il suffit de remarquer que la démonstration faite dans le corrigé 48 donne f t.q.

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(t),\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Im}(Y) \cup \{0\},\ \text{avec } \mathrm{Im}(Y) = \{Y(\omega),\, \omega \in \Omega\}.$$

■

3.5 Convergence p.p., p.s., en mesure, en probabilité

On introduit ici plusieurs notions de convergence de fonctions définies sur un espace mesuré à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}_+$) et on donne des liens entre ces différentes convergences. On introduit les notions équivalentes pour les variables aléatoires en langage probabiliste.

Définition 3.13 (Egalité presque partout) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, F un ensemble et f et g des fonctions définies de E dans F ($F = \mathbb{R}$ ou $F = \overline{\mathbb{R}}_+$, par exemple) ; on dit que $f = g$ m-presque partout (et on note $f = g$ m-p.p.) si l'ensemble $\{x \in E\,;\ f(x) \neq g(x)\}$ est négligeable, c'est à dire qu'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A^c$.*

On peut remarquer que si f et g sont des fonctions mesurables de E (muni de la tribu T et de la mesure m) dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}_+$), l'ensemble $\{x \in E\,;\ f(x) \neq g(x)\}$ (noté aussi $\{f \neq g\}$) appartient à T. Le fait que $f = g\, m$ p.p. revient donc à dire que $m(\{f \neq g\}) = 0$. Dans la cas où f ou g n'est pas mesurable, l'ensemble $\{f \neq g\}$ peut être négligeable sans appartenir à T (il appartient nécessairement à T si la mesure est complète, voir la définition 2.15).

En l'absence de confusion possible, on remplace m-p.p. par p.p.. Cette définition se traduit en langage probabiliste par :

Définition 3.14 (Egalité presque sûre) *Soient (E, T, p) un espace probabilisé, X et Y des variables aléatoires réelles. On dit que $X = Y$ presque sûrement (et on note $X = Y$ p.s.), si l'ensemble $\{x \in E\,;\ X(x) \neq Y(x)\}$ est négligeable.*

Définition 3.15 (Convergence presque partout) *Soient* (E,T,m) *un espace mesuré,* F *un ensemble,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* E *dans* F *et* f *une fonction de* E *dans* F *(*$F=\mathbb{R}$ *ou* $F=\overline{\mathbb{R}}_+$*, par exemple) ; on dit que* f_n *converge presque partout vers* f *(*$f_n\to f$ *p.p.) si il existe une partie* A *de* E*, négligeable, t.q., pour tout élément* x *de* A^c*, la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(x)$*.*

Noter que la convergence simple entraîne la convergence presque partout.

La définition 3.15 se traduit en langage probabiliste par :

Définition 3.16 (Convergence presque sure) *Soient* $(E,\,T,\,p)$ *un espace probabilisé,* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles et* X *une variable aléatoire réelle. On dit que* X_n *converge presque sûrement vers* X *(*$X_n\to X$ *p.s.) si il existe une partie* A *de* E*, négligeable, t.q., pour tout élément* x *de* A^c*, la suite* $(X_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $X(x)$*.*

Définition 3.17 (Convergence presque uniforme) *Soient* (E,T,m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{M}$ *et* $f\in\mathcal{M}$*. On dit que* f_n *converge presque uniformément vers* f *(*$f_n\to f$ *p.unif.) si, pour tout* $\varepsilon>0$*, il existe* $A\in T$ *t.q.* $m(A)\le\varepsilon$ *et* f_n *converge uniformément vers* f *sur* A^c*.*

La convergence presque uniforme entraîne la convergence presque partout (voir exercice 3.24).
Attention, la convergence “presque uniforme" ne donne pas la convergence “uniforme en dehors d'un ensemble de mesure nulle". La convergence “uniforme en dehors d'un ensemble de mesure nulle" est reliée à la convergence “essentiellement uniforme", c'est-à-dire la convergence pour le “sup essentiel", défini ci-après, ou pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ que nous verrons dans la section 6.1.2.

Définition 3.18 (sup essentiel) *Soient* (E,T,m) *un espace mesuré et* $f\in\mathcal{M}$*. On dit que* f *est essentiellement bornée si il existe* $C\in\mathbb{R}_+$ *tel que* $|f|\le C$ *p.p.. On appelle alors “sup essentiel de* $|f|$*", et on le note* $\|f\|_\infty$*, l'infimum des valeurs* C *telles que* $|f|\le C$ *p.p.. Si* f *n'est pas essentiellement bornée, on pose* $\|f\|_\infty=\infty$*.*

Remarquons que dans le cas où $(E,T,m)=(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, le sup essentiel d'une fonction continue est la borne supérieure de sa valeur absolue (ceci fait l'objet de la proposition 6.4).

Définition 3.19 (Convergence essentiellement uniforme) *Soit* (E,T,m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathcal{M}$ *et* $f\in\mathcal{M}$*. On dit que* f_n *converge essentiellement uniformément vers* f *(*$f_n\to f$ *ess. unif.) si* $\|f_n-f\|_\infty\to 0$ *lorsque* $n\to+\infty$*.*

Il est facile de voir que la convergence essentiellement uniforme entraîne la convergence presque uniforme, mais la réciproque est fausse (voir l'exercice 3.25). Le théorème suivant donne, dans le cas où la mesure est finie, un résultat très important qui fait le lien entre la convergence presque partout et la convergence presque uniforme.

Théorème 3.2 (Egorov) *Soient* (E,T,m) *un espace mesuré, tel que* $m(E)<+\infty$*,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{M}$ *et* $f\in\mathcal{M}$*. On suppose que* $f_n\to f$ *p.p.. Alors, pour tout* $\varepsilon>0$*, il existe* $A\in T$ *tel que* $m(A)\le\varepsilon$ *et* f_n *converge uniformément vers* f *sur* A^c*. (Autrement dit, la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque uniformément vers* f*.)*

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 3.25. Attention, lorsque $m(E)=+\infty$, on peut trouver des suites de fonctions qui convergent presque partout et non presque uniformément.

Définition 3.20 (Convergence en mesure)
Soient (E,T,m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{M}$ *et* $f\in\mathcal{M}$*. On dit que* f_n *converge en mesure vers* f *si :*

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \lim_{n\to+\infty} m(\{x\in E\ ;|f(x)-f_n(x)|\ge\varepsilon\})=0. \tag{3.6}$$

Cette définition se traduit en langage probabiliste par :

Définition 3.21 (Convergence stochastique ou en probabilité) *Soient (E, T, p) un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire . On dit que X_n converge stochastiquement, ou en probabilité, vers X si :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} p(\{x \in X_n \;; |X(x) - X_n(x)| \geq \varepsilon\}) = 0. \tag{3.7}$$

On peut montrer (cf exercice 3.23) que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $f = g$ p.p.. On montre aussi que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$, et, si m est une mesure finie, $(f_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f\,g \in \mathcal{M}$.
On montre à l'aide du théorème d'Egorov que si f_n converge vers f presque partout, et si $m(E) < +\infty$, alors f_n converge vers f en mesure. Réciproquement, si f_n converge vers f en mesure, alors il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f presque uniformément (et donc presque partout). Ce second résultat est vrai même si $m(E) = +\infty$ (voir exercice 3.26).

On donne maintenant un résumé des différents types de convergence connus jusqu'à présent avec les relations existantes entre eux. Les relations entre convergence presque partout et convergence en mesure (resp. convergence presque sure et convergence stochastique) sont étudiées dans l'exercice 3.26. (On en introduira bientôt encore quelques-unes…)

Terminologie "analyste"	**Terminologie "probabiliste"**
convergence simple (cs)	
convergence uniforme (cu)	
convergence presque partout (cpp)	convergence presque sure (cps)
convergence presque uniforme (cpu)	
convergence en mesure (cm)	convergence stochastique (cst)

On a les implications suivantes :

Terminologie "analyste"	**Terminologie "probabiliste"**
(cu) ⇒ (cs) ⇒ (cpp)	
(cu) ⇒ (cpu) ⇒ (cpp)	
(cpp) ⇒ (cpu) si la mesure est finie	
(cm) ⇒ (cpu) pour une sous-suite	(cst) ⇒ (cps) pour une sous-suite
(cpp) ⇒ (cm) si la mesure est finie	(cps) ⇒ (cst) si la mesure est finie
(cpu) ⇒ (cm)	

3.6 Exercices

Exercice 3.1 (Caractérisation des fonctions mesurables) $(\star)$*Corrigé 38 page 303*
Soient (E, T) un espace mesurable et f une application de E dans $\mathbb{R}$;

1. Montrer que $T_f = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\,;\, f^{-1}(B) \in T\}$ est une tribu.

2. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) f est mesurable,
   (ii) $f^{-1}(C) \in T$, pour tout $C \in \mathcal{C}$.

Exercice 3.2 (Mesurabilité pour f à valeurs dans $\mathbb{R}$)
Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F}$ une σ-algèbre sur Ω. Soit f une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne.

1. Montrer que f est mesurable si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega,\, f(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$.
2. Montrer que f est mesurable si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega,\, f(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$.

Exercice 3.3 (Composition de fonctions mesurables) *Corrigé 39 page 303*
Soit (E, T) et (F, S) deux espaces mesurables. Soit $f : E \to F$ et $\varphi : F \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours, de la tribu borélienne). On suppose que f et φ sont mesurables. Montrer que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

Exercice 3.4 ($\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+ \ldots$) *Corrigé 40 page 303*
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne. Montrer que φ est mesurable (on dit aussi borélienne) si et seulement si φ est mesurable quand on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ ($\overline{\mathbb{R}}_+$ étant aussi muni de la tribu borélienne).

Exercice 3.5 (Stabilité de $\mathcal{M}$) *Corrigé 41 page 304*

1. Soient (E, T), (E', T'), (E'', T'') des espaces mesurables, f (resp. g) une application de E dans E' (resp. de E' dans E''). On suppose que f et g sont mesurables. Montrer que $g \circ f$ est une application mesurable de E dans E''.
2. Soit (E, T) un espace mesurable, on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; soient f et g des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $f^+ (= \sup(f, 0))$, $f^- (= -\inf(f, 0))$ sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $f + g$, fg et $|f|$ sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.
3. Soient (E, T) un espace mesurable, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge (dans $\mathbb{R}$) pour tout $x \in E$. On pose $f(x) = lim_{n \to +\infty} f_n(x)$ (pour tout $x \in E$). Montrer que f est une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.
4. Soit (E, T) un espace mesurable, on suppose qu'il existe $A \in T$ dont les sous-ensembles ne soient pas tous mesurables. Il existe donc $B \subset A$ t.q. $B \notin T$. Montrer que $h = 1_B - 1_{A \setminus B}$ n'est pas mesurable (de E dans $\mathbb{R}$), alors que $|h|$ l'est.

Exercice 3.6 (Mesurabilité des fonctions continues) *Corrigé 42 page 305*
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne

1. On suppose f continue. Montrer que f est mesurable (on dit aussi que f est borélienne).
2. On suppose f continue à droite (resp. gauche). Montrer que f est mesurable.
3. On suppose f croissante. Montrer que f est mesurable.

Exercice 3.7 (Mesurabilité de $1_{\mathbb{Q}}$)
On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. La fonction $1_{\mathbb{Q}}$ est-elle mesurable ?

Exercice 3.8
Soit (E, T, p) un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur (E, T) ;

1. On prend pour X la variable aléatoire nulle, c'est-à-dire $X : E \to \mathbb{R}$, $X(x) = 0$, pour tout $x \in E$. Calculer la loi de probabilité p_X de X. En déduire que la connaissance de p_X ne permet pas en général de déterminer la probabilité p sur E.

2. Montrer que p_X détermine p de manière unique si la tribu engendrée par X (voir la définition 3.6), notée T_X, est égale à T. Cette condition est-elle nécessaire ?

Exercice 3.9
Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble E et $A \in \mathcal{A}$ tel que : $B \in \mathcal{A}$ et $B \subset A$ implique $B = \emptyset$ ou $B = A$. Montrer que toute fonction mesurable (de E dans $\mathbb{R}$) est constante sur A. En particulier si $\mathcal{A}$ est engendrée par une partition, une fonction mesurable est constante sur chaque élément de la partition. Donner une fonction constante sur tout élément d'une partition mais qui ne soit pas mesurable. [Prendre comme partition de $\mathbb{R}$ tous les singletons. . .]

Exercice 3.10 (Egalité presque partout) *Corrigé 43 page 305*

1. Soient f et g des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue ; montrer que $f = g$ λ p.p. si et seulement si $f = g$.
2. Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et δ_0 la mesure de Dirac en 0 ; montrer que $f = g$ δ_0 p.p. si et seulement si $f(0) = g(0)$.

Exercice 3.11 *Corrigé 44 page 306*
Soit $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}^p$ de sa tribu borélienne (pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$). On suppose que f est mesurable par rapport à $x \in \mathbb{R}^N$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, et que f est continue a gauche par rapport a $y \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.
Pour $n > 1$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose : $a_p^n = \frac{p}{n}$, $p \in \mathbb{Z}$; on définit la fonction f_n, $n > 1$, de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x, y) = f(x, a_p^n), \text{ si } y \in [a_p^n, a_{p+1}^n[$$

1. Montrer que f_n converge simplement vers f lorsque $n \to +\infty$.
2. Montrer que f_n est mesurable. [On pourra utiliser, sans le démontrer, le fait que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N+1})$ si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci est démontré dans l'exercice 2.6 page 43 pour $N = 1$ et dans l'exercice 7.1 pour $N > 1$.]
3. Montrer que f est mesurable.

[On pourra se contenter du cas $N = 1$. . .]

Exercice 3.12 (Tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) *Corrigé 45 page 307*

1. Montrer que $\{[0, \beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^\star\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.
2. Montrer que $\{[0, \beta[, \beta \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^\star\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.
3. (Question plus difficile.) Montrer que $\{]0, \beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^\star\}$ n'engendre pas $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Exercice 3.13 *Corrigé 46 page 308*
Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On se propose de montrer que le graphe de f est un borélien de $\mathbb{R}^2$. On admettra le résultat suivant, vu dans l'exercice 2.6 :

$$A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

On munit aussi $\mathbb{R}^2$ de sa tribu borélienne. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $F(x, y) = f(x)$ et $H(x, y) = y$.

1. Montrer que F et H sont mesurables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
2. On pose $G(f) = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \,;\, y = f(x)\}$ ($G(f)$ est donc le graphe de f). Montrer que $G(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 3.14 (mesurabilité au sens de Lusin) *Corrigé 47 page 308*

Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts de $\mathbb{R}^N$. On rappelle (cf. cours) que m est nécessairement régulière (c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F fermé et O ouvert t.q. $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) < \varepsilon$).

Soit $f \in \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. On dit que f est "mesurable au sens de Lusin" si pour tout compact K et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K_1 compact, $K_1 \subset K$, t.q. $m(K \setminus K_1) \leq \varepsilon$ et $f_{|K_1} \in C(K_1, \mathbb{R})$.

1. On suppose, dans cette question, que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Montrer que f est mesurable au sens de Lusin. [Construire K_1 avec K, F et O, où F et O sont donnés par la régularité de m appliquée à l'ensemble A.]
2. On suppose, dans cette question, que f est étagée (c'est-à-dire $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$). Montrer que f est mesurable au sens de Lusin.
3. On suppose que f est mesurable (c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$). Montrer que f est mesurable au sens de Lusin. [On rappelle qu'une fonction mesurable est limite simple de fonctions étagées. On pourra utiliser le théorème d'Egorov, Théorème 3.2, et la question précédente.]

Exercice 3.15 (V.a. mesurable par rapport à une autre v.a.) *Corrigé 48 page 309*
Dans cet exercice, on démontre le théorème 3.1. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On veut veut montrer que Y est mesurable par rapport à la tribu engendrée par X (notée $\tau(X)$ si et seulement si il existe une fonction borélienne f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$ (c'est-à-dire , plus précisément, que $Y = f \circ X$).

1. Montrer que si Y est de la forme $Y = f(X)$ où f est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors Y est $\tau(X)$-mesurable.

   On suppose maintenant que Y est $\tau(X)$-mesurable.

2. On suppose, dans cette question, qu'il existe une suite de réels (a_j) tels que $a_j \neq a_k$ pour $j \neq k$ et une suite d'événements (A_j) disjoints deux à deux tels que
$$Y = \sum_j a_j 1_{A_j}.$$
   On suppose aussi que $\cup_j A_j = \Omega$. Montrer que, pour tout j, $A_j \in \tau(X)$ et qu'il existe une fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$.
3. Soit n un entier. On définit la fonction $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $\phi_n(x) = \frac{1}{n}[nx]$ où $[\cdot]$ désigne la partie entière. ($[x]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.)
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi_n(x)$ converge vers x, quand $n \to \infty$.
   (b) On pose $Y_n = \phi_n(Y)$. Montrer que Y_n est $\tau(X)$ mesurable.
4. Terminer la preuve du théorème.
   Maintenant, on se demande dans quelle mesure la fonction f est unique. On note P_X la loi de X.
5. Soit f et g deux fonctions boréliennes t.q. $Y = f(X) = g(X)$. Montrer que
$$P_X(f = g) = 1.$$

Exercice 3.16 (Composition de v.a.) *Corrigé 49 page 311*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables alélatoires réelles. (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu des boréliens). On définit Z par
$$\forall \omega \in \Omega\,, \quad Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega).$$
Montrer que Z est une variable aléatoire.

Exercice 3.17 (Evénements, tribus et v.a. indépendantes) *Corrigé 50 page 312*
Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (Indépendance de 2 évènements) Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Montrer que A_1 et A_2 sont indépendants (c'est-à-dire $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$) si et seulement si les tribus $\tau(\{A_1\})$ et $\tau(\{A_2\})$ sont indépendantes (c'est-à-dire $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2)$ pour tout $B_1 \in \tau(\{A_1\})$ et $B_2 \in \tau(\{A_2\})$).
2. (Indépendance de n évènements, $n \geq 2$) Soit $n \geq 2$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que les événements $A_1, \ldots, A_n$ vérifient "$P(\cap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$ pour tout $I \subset \{1, \ldots, n\}$" si et seulement si les tribus $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_n\})$ sont indépendantes (c'est-à-dire $P(\cap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i)$ pour tout $B_i \in \tau(\{A_i\}), i \in \{1, \ldots, n\}$).
3. En donnant un exemple (avec $n \geq 3$), montrer que l'on peut avoir n évévements, notés $A_1, \ldots, A_n$, indépendants deux à deux, sans que les événements $A_1, \ldots, A_n$ soient indépendants.
4. Soit $A \in \mathcal{A}$.

   (a) On suppose que $A \in \mathcal{A}_1$ et $A \in \mathcal{A}_2$ et que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus indépendantes (et contenues dans $\mathcal{A}$). Montrer que $P(A) \in \{0, 1\}$.

   (b) Montrer que $P(A) \in \{0, 1\}$ si et seulement si A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$.
5. Soit $n \geq 1$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants si et seulement si les v.a. $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ sont indépendantes.

Exercice 3.18 (Indépendance 3 par 3 et dépendance globale)
Trouver un espace de probabilités et 4 v.a.r. prenant leurs valeurs dans $\{-1, 1\}$ t.q. les 4 v.a. soient 3 par 3 indépendantes mais ne soient pas indépendantes. [On pourra considérer des produits de v.a. indépendantes.]

Exercice 3.19 (De loi uniforme à loi donnée) *Corrigé 51 page 314*
Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, X une v.a.r. et U une v.a.r. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$. Soit F la fonction de répartition de X (i.e. $F(x) = P(X \leq x)$ pour $x \in \mathbb{R}$). Pour $u \in \mathbb{R}$, on définit $G(u)$ de la manière suivante :

$$G(u) = \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq u\},\ \text{si } u \in]0, 1[,$$
$$G(u) = 0,\ \text{si } u \notin]0, 1[.$$

On pose $Y = G(U)$ (c'est-à-dire $Y(\omega) = G(U(\omega))$ pour tout $\omega \in E$).

1. Soit $u \in]0, 1[$, montrer que

$$\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq u\} \neq \emptyset,\ \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq u\} \in \mathbb{R} \text{ et } \{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq u\} = [G(u), +\infty[.$$

2. Montrer que Y est une v.a.r..
3. Montrer que Y a la même loi que X. [On pourra montrer que $P(G(U) \leq x) = P(U \leq F(x))$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.]

Exercice 3.20 (Limite croissante d'une suite de v.a.r.)
Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, Y une v.a.r., $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une application de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $X_n \uparrow X$, quand $n \to \infty$, et que X_n et Y sont indépendantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que X est une v.a.r. et que X et Y sont indépendantes. (N.B. La conclusion est encore vraie sans la croissance de la suite X_n.)

Exercice 3.21 (Construction de v.a. i. de lois uniformes)
Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités.

1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, une suite de v.a.r.i.i.d. avec $P(U_n = 0) = P(U_n = 1) = 1/2$. Montrer que V, définie par $V = \sum_{n\geq 1} U_n 2^{-n}$ est une v.a. de loi $\mathcal{U}([0,1])$.
2. Soit $U_{n,k}$, $n,k \geq 1$, des v.a.r.i.i.d. avec $P(U_{n,k} = 0) = P(U_{n,k} = 1) = 1/2$. Montrer les v. a. V_n, $n \geq 1$ définies par $V_n = \sum_{k\geq 1} U_{n,k} 2^{-k}$ sont des v.a.r.i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0,1])$.

Exercice 3.22 (Loi du "produit de la loi exponentielle par ± 1")
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. indépendantes. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$), c'est-à-dire que P_X est une mesure de densité par rapport à la mesure de Lebesgue et cette densité est la fonction f définie par $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{]0,+\infty[}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On suppose que Y est t. q. $P(Y = 1) = P(Y = -1) = 1/2$. Donner la loi de XY.

Exercice 3.23 (Convergence en mesure) $(\star\star)$*Corrigé 52 page 314*
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si il existe f et g fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ telles que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f et g, alors $f = g$ p.p..
   [*On pourra commencer par montrer que, pour tout* $\delta > 0$, $m(\{x \in E\,;\, |f(x) - g(x)| > \delta\}) = 0$].
2. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$.
3. On suppose maintenant que m est une mesure finie. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers g, alors $(f_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f\,g \in \mathcal{M}$.
   [*On pourra commencer par montrer que, si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *converge en mesure vers* $f \in \mathcal{M}$*, alors, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* n_0 *et* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tels que, si* $n \geq n_0$ *et* $k \geq k_0$*, on a* $m(\{x \in E\,;\, |f_n(x)| \geq k\}) \leq \varepsilon$]. Donner un contre-exemple au résultat précédent lorsque $m(E) = \infty$.

Exercice 3.24 (Convergence p.u. et convergence p.p.) *Corrigé 53 page 316*
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ (c'est-à-dire une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$) et $f \in \mathcal{M}$. On suppose que $f_n \to f$ presque uniformément (c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \in T$ t.q. $m(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c). Montrer que $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

Exercice 3.25 (Théorème d'Egorov) $(\star\star)$ *Corrigé 54 page 316*
Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ p.p., lorsque $n \to +\infty$.
Pour $j \in \mathbb{N}^\star$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$A_{n,j} = \{x\,;\, |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{j}\}, \text{ et } B_{n,j} = \bigcup_{p\geq n} A_{p,j} \tag{3.8}$$

1. Montrer que à j fixé, $\lim_{n\to+\infty} m(B_{n,j}) = 0$.
2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A tel que $m(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c lorsque $n \to +\infty$. En déduire le théorème d'Egorov (théorème 3.2).
   [*On cherchera* A *sous la forme :* $\bigcup_{j\in\mathbb{N}^\star} B_{n_j,j}$*, avec un choix judicieux de* n_j.]
3. Montrer, par un contre exemple, qu'on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$ dans la question précédente.
4. Montrer, par un contre exemple, que le résultat du théorème d'Egorov est faux lorsque $m(E) = +\infty$.

Exercice 3.26 (Convergence en mesure et convergence p.p.) *Corrigé 55 page 318*

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On rappelle que, par définition, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f si :

$$\forall\,\varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0. \tag{3.9}$$

1. On suppose ici que $m(E) < +\infty$.
   (a) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f presque partout, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f en mesure [*Utiliser le théorème d'Egorov.*]
   (b) (Question plus difficile.) Montrer par un contrexemple que la réciproque de la question précédente est fausse.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy en mesure si :
$$\forall\,\varepsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists n \in \mathbb{N}; p, q \geq n \Rightarrow m(\{x \in E; |f_p(x) - f_q(x)| > \varepsilon\}) \leq \delta. \tag{3.10}$$
   Montrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy en mesure.
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy en mesure ; montrer qu'il existe une fonction mesurable g et une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, telles que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in T$ vérifiant $m(A) \leq \varepsilon$ et tel que $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur A^c. [*On pourra construire la sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de telle sorte que $m(A_k) \leq 2^{-k}$, avec $A_k = \{x \in E; |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| > 2^{-k}\}$, et chercher A sous la forme $\bigcup_{k\geq p} A_k$, où p est convenablement choisi.*]
4. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f, il existe une sous-suite qui converge vers f presque partout. [*On pourra commencer par montrer que la suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ construite à la question précédente converge presque partout et en mesure.*]

Exercice 3.27 (Conv. en mesure et fonctions continues) *Corrigé 56 page 319*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ et X une fonction mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$. On suppose que $X_n \to X$ en mesure, quand $n \to \infty$.

1. Soit φ une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en mesure, quand $n \to \infty$.
2. On suppose, dans cette question, que m est une probabilité (on a donc $m(\Omega) = 1$, les fonctions mesurables sont des v.a.r. et la convergence en mesure est la convergence en probabilité). Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en probabilité, quand $n \to \infty$. [On pourra commencer par remarquer que $\lim_{a\to+\infty} m(\{|X| \geq a\}) = 0$.]
3. On prend ici $(\Omega, \mathcal{A}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement X_n et X), qu'on peut avoir $X_n \to X$ en mesure (quand $n \to \infty$) et $\varphi(X_n) \not\to \varphi(X)$ en mesure pour certaines fonctions φ continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.28

Soient (E, T, m) un espace mesuré fini. On pose, pour f et g fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $f, g \in \mathcal{M}$) :

$$d(f, g) = \int \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} dm.$$

1. Montrer que d est bien définie et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (c'est-à-dire que $\frac{|f-g|}{1+|f-g|} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ pour tout $f,g \in \mathcal{M}$) et que d est une semi-distance sur $\mathcal{M}$ (c'est-à-dire que $d(f,g) = d(g,f)$, pour tout $f,g \in \mathcal{M}$, et que $d(f,h) \le d(f,g) + d(g,h)$, pour tout $f,g,h \in \mathcal{M}$).
2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \subset \mathcal{M}$. Montrer que f_n converge en mesure vers f lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} d(f_n,f) = 0$. [Il est probablement utile de considérer, pour $\varepsilon > 0$, les ensembles $A_n = \{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$.]

Exercice 3.29 (Mesurabilité d'une limite p.p.)
Soient (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(E,T)$ et $f : E \to \mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ p.p.. Montrer que $f \in \mathcal{M}(E,\overline{T})$, où $(E,\overline{T},\overline{m})$ est le compété de (E,T,m) (voir le théorème 2.1). En donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement (E,T,m), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f), montrer qu'on peut avoir $f \notin \mathcal{M}(E,T)$.

Exercice 3.30 (Ess. uniforme versus p.u.) *Corrigé 57 page 319*
Soit (E,T,m) un espace mesuré. Pour $f \in \mathcal{M}$, on pose $A_f = \{C \in \mathbb{R}, |f| \le C \text{ p.p.}\}$. Si $A_f \neq \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \inf A_f$. Si $A_f = \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \infty$.

1. Soit $f \in \mathcal{M}$ t.q. $A_f \neq \emptyset$. Montrer que $\|f\|_\infty \in A_f$.
2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}$.
   (a) On suppose, dans cette question, que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$ (on dit que $f_n \to f$ essentiellement uniformément). Montrer que $f_n \to f$ presque uniformément.
   (b) En donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement (E,T,m), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f), montrer qu'on peut avoir $f_n \to f$ presque uniformément, quand $n \to \infty$, et $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$.

Exercice 3.31
Soit $\mathcal{A}$ la classe des sous-ensembles de $\mathbb{Z}$ tels que

$$\text{pour } n > 0, \quad 2n \in A \Longleftrightarrow 2n+1 \in A.$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu.
2. Montrer que l'application $\varphi : n \mapsto n+2$ est une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, mesurable quand $\mathbb{Z}$ est muni (au départ et à l'arrivée) de la tribu $\mathcal{A}$ (c'est à dire t.q. que $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$). Montrer que l'inverse de φ n'est pas mesurable.

Exercice 3.32
On considère des applications f de E dans $\mathbb{R}$. On note $\sigma(f) = \{f^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ ($\sigma(f)$ est la tribu image réciproque de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par f).

1. Décrire $\sigma(f)$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = x$ ou $f(x) = x^2$ ou $f(x) = |x|$.
   (b) $E = \mathbb{R}^2$ et $f(x,y) = x + y$.
2. Montrer que les singletons sont tous dans $\sigma(f)$ si et seulement si f est injective.
3. Dans le cas général, montrer qu'une fonction g de E dans $\mathbb{R}$ est $\sigma(f)$-mesurable si et seulement si il existe une fonction borélienne φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $g = \varphi \circ f$. [On pourra commencer par le cas où g est étagée, puis utiliser un argument de limite].
4. Montrer que l'on a toujours une fonction bornée g t.q. $\sigma(g) = \sigma(f)$.

Exercice 3.33 (Mesurabilité des troncatures) *Corrigé 58 page 320*

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours quand on ne le précise pas, de la tribu borélienne). Pour $a > 0$, on définit la fonction "tronquée" :

$$f_a(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad f(x) > a \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leq a \\ -a & \text{si} \quad f(x) < -a \end{cases}$$

Montrer que f_a est mesurable.

Exercice 3.34

Soit (E, T) un espace mesurable (on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, comme toujours). Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et A l'ensemble des points $x \in E$ tels que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas de Cauchy. Montrer que A est mesurable (i.e. $A \in T$).

Exercice 3.35

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f_\varphi(x) = \varphi(x, x)$.

1. Montrer que f_φ est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable.
2. Soient φ et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurables. Montrer que $\varphi = \psi$ λ_2-p.p. $\not\Rightarrow$ $f_\varphi = f_\psi$ λ-p.p.. (λ_2 est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ dont on suppose l'existence).
3. Soient φ et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurables t.q. :

   (a) $\varphi(x, .)$ et $\psi(x, .)$ sont continues p.p. en $x \in \mathbb{R}$

   (b) $\varphi(, .y)$ et $\psi(., y)$ sont mesurables pour tout $y \in \mathbb{R}$

   (Ces fonctions sont dites de "Carathéodory".)

   (a) Montrer que φ et ψ sont $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurables.

   (b) Montrer que $\varphi = \psi$ λ_2-p.p. $\Rightarrow$ $\varphi(x, .) = \psi(x, .)$ partout, p.p. en $x \in \mathbb{R}$. En déduire que si $\varphi = \psi$ λ_2-p.p, alors $f_\varphi = f_\psi$ λ-p.p..

Exercice 3.36 (Exemple de tribu engendrée) *Corrigé 59 page 321*

Dans cet exercice, on s'intéresse à la tribu $\tau(X)$ engendrée par la variable aléatoire X définie sur Ω, muni de la tribu $\mathcal{A}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne.

1. (Cas d'un lancer de dé) Dans cette question, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$) et X est la variable aléatoire définie par $X(\omega) = 1$ lorsque ω est pair, $X(\omega) = 0$ sinon. Montrer que $\tau(X)$ est formé de 4 éléments.
2. (Cas de n tirages à pile ou face) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $\Omega = \{0, 1\}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$) et $k \in \{1, \cdots, n\}$. La variable aléatoire X représente le k-ième tirage, X est donc l'application $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \mapsto \omega_k$. Montrer que $\tau(X)$ est ici aussi formé de 4 éléments.
3. Dans cette question, on prend $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \omega - [\omega]$, où $[\omega]$ désigne la partie entière de ω (c'est-à-dire $[\omega] = \max\{n \in \mathbb{Z}$, t.q. $n \leq \omega\}$. Si C est un borélien inclus dans $[0, 1[$ (ce qui est équivalent à dire $C \in \mathcal{B}([0, 1[)$), on pose $\varphi(C) = \cup_{k\in\mathbb{Z}} C_k$, avec $C_k = \{x + k, x \in C\}$. Montrer que $\tau(X) = \{\varphi(C), C \in \mathcal{B}([0, 1[)\}$.

Exercice 3.37 (Tribu et partition)

Soit Ω un ensemble. On appelle partition de Ω une famille finie ou dénombrable de parties non vides de Ω et disjointes deux à deux et dont l'union est égale à Ω. Les éléments d'une partition sont appelés atomes.

1. Soit $a = \{A_i \,;\, i \in I\}$ une partition de Ω et soit $\tau(a)$ la tribu engendrée par a. Montrer que

$$\tau(a) = \{\bigcup_{j \in J} A_j \text{ } o\grave{u} \text{ } J \subset I\}\,.$$

   En déduire qu'une v.a. réelle est $\tau(a)$-mesurable si et seulement si elle est constante sur tous les atomes de a.

   Une partition a est dite plus fine qu'une partition b si tous les atomes de b s'écrivent comme union d'atomes de a.

2. Montrer que si a est plus fine que b et si b est plus fine que a alors a et b sont égales.
3. Montrer que si a et b sont deux partitions telles que $\tau(a) = \tau(b)$ alors a et b sont égales.

Exercice 3.38 (Fonctions constantes) *Corrigé 60 page 322*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire (réelle). Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(a) = P(X^{-1}(]-\infty, a]))$ (on note souvent $X^{-1}(]-\infty, a]) = \{X \leq a\}$). La fonction φ est donc la fonction de répartition de la probabilité P_X.

1. Montrer que φ est une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $\lim_{a \to +\infty} \varphi(a) = 1$, $\lim_{a \to -\infty} \varphi(a) = 0$.

   On suppose maintenant que, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $P(X^{-1}(B)) = 0$ ou 1.

2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $X = \alpha$ p.s..

Chapitre 13

Tribus et mesures

13.1 Tribus

Corrigé 9 (Caractérisation d'une tribu)
Soit E un ensemble.

1. Soit T une partie de $\mathcal{P}(E)$ stable par union dénombrable, stable par passage au complémentaire et t.q. $\emptyset \in T$. Montrer que T est une tribu, c'est-à-dire qu'elle vérifie aussi $E \in T$ et qu'elle est stable par intersection dénombrable.

corrigé

– $E \in T$ car $E = \emptyset^c$ et que T est stable par passage au complémentaire.
– T est stable par intersection dénombrable car, si $(A_n) \subset T$, on a $(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \in T$ (car T est stable par passage au complémentaire et par union dénombrable) et donc $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$ (car T est stable par passage au complémentaire).

---

2. L'ensemble des parties finies de E est-il une tribu ?

corrigé

– Si E est fini, l'ensemble des parties finies de E est une tribu, c'est la tribu $\mathcal{P}(E)$.
– Si E est infini, l'ensemble des parties finies de E n'est pas une tribu, car il n'est pas stable par passage au complémentaire (le complémentaire d'une partie finie est infinie...).

Corrigé 10 (Tribu engendrée)
Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.

corrigé

Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur I (I est un ensemble quelconque). On pose $T = \{A \subset E\,;\, A \in T_i$ pour tout $i \in I\}$ (T est bien l'intersection des tribus T_i, $i \in I$). On montre que T est une tribu :
– $\emptyset \in T$ car $\emptyset \in T_i$ pour tout $i \in I$.
– T est stable par complémentaire car, si $A \subset T$, on a $A \in T_i$ pour tout $i \in I$, donc $A^c \in T_i$ pour tout $i \in I$ (car T_i est stable par passage au complémentaire), donc $A^c \in T$.

– T est stable par union dénombrable car, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, on a $A_n \in T_i$ pour tout $i \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T_i$ pour tout $i \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$ (car T_i est stable par union dénombrable), donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$,

d'après l'exercice précédent, on en déduit que T est une tribu.

---

2. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On note $T_{\mathcal{A}}$ l'intersection de toutes les tribus sur E contenant $\mathcal{A}$ (une partie de E appartient donc à $T_{\mathcal{A}}$ si et seulement si elle appartient à toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$, on remarquera qu'il y a toujours au moins une tribu contenant $\mathcal{A}$, c'est la tribu $\mathcal{P}(E)$). Montrer que $T_{\mathcal{A}}$ est la plus petite des tribus contenant $\mathcal{A}$ (c'est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$).

—————————————**corrigé**—————————————

D'après la question précédente, $T_{\mathcal{A}}$ est bien une tribu. La définition de $T_{\mathcal{A}}$ donne que toute tribu contenant $\mathcal{A}$ doit contenir $T_{\mathcal{A}}$. $T_{\mathcal{A}}$ est donc la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$.

---

3. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ et $T_{\mathcal{A}}$, $T_{\mathcal{B}}$ les tribus engendrées par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Montrer que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ alors $T_{\mathcal{A}} \subset T_{\mathcal{B}}$.

—————————————**corrigé**—————————————

$T_{\mathcal{B}}$ est une tribu contenant $\mathcal{B}$, donc contenant $\mathcal{A}$. Donc $T_{\mathcal{A}} \subset T_{\mathcal{B}}$.

Corrigé 11 (Exemples de tribus)

1. Tribu trace

(a) Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble E et $F \subset E$. Montrer que $\mathcal{T}_F = \{A \cap F,\ A \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F (tribu trace de $\mathcal{T}$ sur F).

—————————————**corrigé**—————————————

– $\emptyset \in \mathcal{T}_F$ car $\emptyset = \emptyset \cap F$ et $\emptyset \in \mathcal{T}$.
– Soit $A \in \mathcal{T}_F$. Il existe $B \in \mathcal{T}$ t.q. $A = B \cap F$. On a donc $F \setminus A = (E \setminus B) \cap F \in \mathcal{T}_F$ car $E \setminus B \in \mathcal{T}$. $\mathcal{T}_F$ est donc stable par passage au complémentaire.
– Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $B_n \in T$ t.q. $A_n = B_n \cap F$. On a donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \cap F \in \mathcal{T}_F$ car $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}$. $\mathcal{T}_F$ est donc stable par union dénombrable.

Ceci est suffisant pour dire que $\mathcal{T}_F$ est une tribu sur F.

(b) Si E est un espace topologique et $\mathcal{T} = \mathcal{B}(E)$ ($\mathcal{B}(E)$ est la tribu borélienne de E), montrer que la tribu trace sur F, notée T_F, est la tribu engendrée par la topologie trace sur F (tribu borélienne de F, notée $\mathcal{B}(F)$). [Montrer que $\mathcal{B}(F) \subset T_F$. Pour montrer que $T_F \subset \mathcal{B}(F)$, considérer $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(E);\ A \cap F \in \mathcal{B}(F)\}$ et montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu (sur E) contenant les ouverts de E.] Si F est un borélien de E, montrer que T_F est égale à l'ensemble des boréliens de E contenus dans F.

—————————————**corrigé**—————————————

On note $\mathcal{O}_F$ l'ensemble des ouverts de F, et $\mathcal{O}_E$ l'ensemble des ouverts de E. Par définition de la topologie trace, $\mathcal{O}_F = \{O \cap F, O \in \mathcal{O}_E\}$.

Comme $\mathcal{O}_E \subset \mathcal{B}(E)$, on a $\mathcal{O}_F \subset T_F = \{B \cap F, B \in \mathcal{B}(E)\}$ (Noter que $T_F = \mathcal{B}(E)_F$, avec les notations de la question précédente). On en déduit que $\mathcal{B}(F) \subset T_F$ car T_F est une tribu sur F contenant $\mathcal{O}_F$ qui engendre $\mathcal{B}(F)$.

On montre maintenant que $T_F \subset \mathcal{B}(F)$. On pose $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(E);\ A \cap F \in \mathcal{B}(F)\}$. $\emptyset \in \mathcal{C}$ car $\emptyset \cap F = \emptyset \in \mathcal{B}(F)$. $\mathcal{C}$ est stable par passage au complémentaire car, si $A \in \mathcal{C}$, on a $(E \setminus A) \cap F = F \setminus A = F \setminus (A \cap F) \in$

$\mathcal{B}(F)$, donc $(E \setminus A) \in \mathcal{C}$. Enfin, pour montrer que $\mathcal{C}$ est stable par union dénombrable, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$, on a $(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap F = \cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap F) \in \mathcal{B}(F)$, ce qui donne $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$ et la stabilité de $\mathcal{C}$ par union dénombrable. $\mathcal{C}$ est donc une tribu. Il est clair que $\mathcal{O}_E \subset \mathcal{C}$ car si $O \in \mathcal{O}_E$, on a $O \cap F \in \mathcal{O}_F \subset \mathcal{B}(F)$. La tribu $\mathcal{C}$ contient $\mathcal{O}_E$, ce qui prouve que $\mathcal{C}$ contient $\mathcal{B}(E)$ et donc que $A \cap F \in \mathcal{B}(F)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$. Ceci donne exactement $T_F \subset \mathcal{B}(F)$. On a bien montré finalement que $T_F = \mathcal{B}(F)$ (on rappelle que $T_F = \mathcal{B}(E)_F$, avec les notations de la question précédente).

On suppose maintenant que F est un borélien de E, c'est-à-dire que $F \in \mathcal{B}(E)$. On a alors $T_F \subset \mathcal{B}(E)$ (car $A \cap F \in \mathcal{B}(E)$ si $A \in \mathcal{B}(E)$). Puis, soit $A \subset F$ t.q. $A \in \mathcal{B}(E)$, on peut écrire $A = A \cap F$, donc $A \in T_F$. On a bien montré que $T_F = \{A \subset F\,;\, A \in \mathcal{B}(E)\}$.

---

2. Soit E un ensemble infini et $S = \{\{x\}, x \in E\}$. Déterminer la tribu engendrée par S (distinguer les cas E dénombrable et non dénombrable).

corrigé

On note $T(S)$ la tribu engendrée par S.

– On suppose que E est au plus dénombrable (c'est-à-dire dire fini ou dénombrable). D'après la stabilité de $T(S)$ par union dénombrable, la tribu $T(S)$ doit contenir toutes les parties au plus dénombrables. Comme toutes les parties de E sont au plus dénombrables, on en déduit $T(S) = \mathcal{P}(E)$.

– On suppose maintenant que E est infini non dénombrable. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de E au plus dénombrables et $\mathcal{B} = \{A^c, A \in \mathcal{A}\}$. D'après la stabilité de $T(S)$ par union dénombrable, la tribu $T(S)$ doit contenir $\mathcal{A}$. Par stabilité de $T(S)$ par passage au complémentaire, $T(S)$ doit aussi contenir $\mathcal{B}$.

  on va montrer maintenant que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est une tribu (on en déduit que $T(S) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$). On a $\emptyset \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ et il est clair que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire (car $A \in \mathcal{A}$ implique $A^c \in \mathcal{B}$ et $A \in \mathcal{B}$ implique $A^c \in \mathcal{A}$). Enfin, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, on distingue 2 cas :

  1er cas. Si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

  2eme cas. Si il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $A_n \in \mathcal{B}$ on a alors $A_n^c \in \mathcal{A}$, donc A_n^c est au plus dénombrable et $(\cup_{p\in\mathbb{N}} A_p)^c = \cap_{p\in\mathbb{N}} A_p^c \subset A_n^c$ est aussi au plus dénombrable,ce qui donne $(\cup_{p\in\mathbb{N}} A_p)^c \in \mathcal{A}$ et $\cup_{p\in\mathbb{N}} A_p \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

  On a bien montré que $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Ce qui prouve la stabilité par union dénombrable de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Finalement, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est donc une tribu contenant S et contenu dans $T(S)$, ceci donne $T(S) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Corrigé 12 (Tribu image)

Soient E et F des ensembles. Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ (resp. $\mathcal{P}(F)$) on note $T(\mathcal{A})$ la tribu de E (resp. F) engendrée par $\mathcal{A}$.

Soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que si $\mathcal{T}'$ est une tribu sur F, alors $f^{-1}(\mathcal{T}') = \{f^{-1}(B);\, B \in \mathcal{T}'\}$ est une tribu sur E (tribu image réciproque).

corrigé

On démontre que $f^{-1}(\mathcal{T}')$ est une tribu sur E en remarquant que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $E \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(F \setminus A)$ (pour tout $A \subset F$) et $f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$ (pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(F)$).

---

2. Montrer que si $\mathcal{T}$ est une tribu sur E, alors $\mathcal{T}' = \{B \subset F;\, f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F (tribu image directe).

---corrigé---

Ici aussi, on montre que $\mathcal{T}'$ est une tribu sur F en remarquant que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$ (pour tout $A \subset F$) et $f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$ (pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(F)$).

Noter que, en général, $\{f(B),\, B \in \mathcal{T}\}$ n'est pas une tribu sur F (par exemple, si f est non surjective, $F \notin \{f(B),\, B \in \mathcal{T}\}$).

---

3. Montrer que pour tout ensemble $\mathcal{C}$ de parties de F on a : $T(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(T(\mathcal{C}))$. [On pourra montrer d'abord que $T(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(T(\mathcal{C}))$. Puis, pour montrer que $f^{-1}(T(\mathcal{C})) \subset T(f^{-1}(\mathcal{C}))$, montrer que $T = \{G \subset F;\ f^{-1}(G) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$.]

---corrigé---

$f^{-1}(T(\mathcal{C}))$ est une tribu sur E (d'après la première question) contenant $f^{-1}(\mathcal{C})$ (car $T(\mathcal{C}) \supset \mathcal{C}$), elle contient donc $T(f^{-1}(\mathcal{C}))$, ce qui donne $f^{-1}(T(\mathcal{C})) \supset T(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

Pour montrer l'inclusion inverse, c'est-à-dire $f^{-1}(T(\mathcal{C})) \subset T(f^{-1}(\mathcal{C}))$. On pose $T = \{G \subset F;\ f^{-1}(G) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$. On montre d'abord que T est une tribu :
- $\emptyset \in T$ car $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$
- T est stable par passage au complémentaire car, si $A \in T$, on a $f^{-1}(A) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$ et $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$, donc $(F \setminus A) \in T$.
- T est stable par union dénombrable car, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, on a $f^{-1}(A_n) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$, donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$.

On a bien montré que T est une tribu. Il est immédiat que $T \supset \mathcal{C}$ (car $f^{-1}(B) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$ pour tout $B \in \mathcal{C}$). On en déduit que T contient $T(\mathcal{C})$, c'est-à-dire que $f^{-1}(B) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$ pour tout $B \in T(\mathcal{C})$. Ceci signifie exactement que $f^{-1}(T(\mathcal{C})) \subset T(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

Les 2 inclusions nous donnent bien $f^{-1}(T(\mathcal{C})) = T(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

Corrigé 13 (π-système, λ-système)

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu si et seulement si $\mathcal{F}$ est un π-système (c'est-à-dire stable par intersection finie) et un λ-système (c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable croissante, $\Omega \in \mathcal{F}$ et $A \setminus B \in \mathcal{F}$ si $A, B \in \mathcal{F}$ avec $B \subset A$).
2. On suppose que $\mathcal{F}$ est un λ-système. Soit $C \in \mathcal{F}$. On pose $\mathcal{G} = \{B \subset \Omega$ t.q. $C \cap B \in \mathcal{F}\}$. Montrer que $\mathcal{G}$ est un λ-système.

---corrigé---

En attente

Corrigé 14 (Tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$)

On note T la tribu (sur $\mathbb{R}^2$) engendrée par $\{A \times B;\ A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On va montrer ici que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion au plus dénombrable de produits d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. [S'inspirer d'une démonstration analogue faite pour $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}^2$.] En déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset T$.

---corrigé---

On s'inspire ici de la démonstration du lemme 2.1 (on peut reprendre aussi la démonstration de l'exercice 15).

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $x = (x_1, x_2)^t \in O$, il existe $r > 0$ t.q. $]x_1 - r, x_1 + r[\times]x_2 - r, x_2 + r[\subset O$. Comme les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$, on peut trouver $y_1 \in \mathbb{Q}\cap]x_1 - r, x_1[$, $z_1 \in \mathbb{Q}\cap]x_1, x_1 + r[$, $y_2 \in \mathbb{Q}\cap]x_2 - r, x_2[$ et $z_2 \in \mathbb{Q}\cap]x_2, x_2 + r[$. On a donc $x \in]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[\subset O$.

On note alors $I = \{(y_1, z_1, y_2, z_2) \in \mathbb{Q}^4\,;\,]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[) \subset O\}$. Pour tout $x \in O$, il existe donc $(y_1, z_1, y_2, z_2) \in I$ t.q. $x \in]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[$. On en déduit que

$$O = \cup_{(y_1,z_1,y_2,z_2)\in I}]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[.$$

Comme I est au plus dénombrable (car $\mathbb{Q}^4$ est dénombrable), on en déduit que $O \in T$. On a ainsi montré que T est une tribu contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^2$, et donc contenant la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$). Donc, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset T$.

---

2. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$ et $T_1 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que T_1 est une tribu (sur $\mathbb{R}$) contenant les ouverts (de $\mathbb{R}$). En déduire que $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

corrigé

- $\emptyset \in T_1$ car $A \times \emptyset = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
- On montre ici que T_1 est stable par passage au complémentaire.

  Soit $B \in T_1$, on a donc $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \times B^c = A \times (\mathbb{R} \setminus B) = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B)$. Or, $(A \times \mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (car A et $\mathbb{R}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$), on a donc $(A \times \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. D'autre part, $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (car $B \in T_1$). Donc, $A \times B^c = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Ce qui prouve que $B^c \in T_1$ et donc que T_1 est stable par passage au complémentaire.
- Enfin, T_1 est stable par union dénombrable. En effet, si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$, on a $A \times (\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} A \times B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (car $A \times B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Donc, $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in T_1$.

On a donc montré que T_1 est une tribu, il reste à montrer que T_1 contient les ouverts de $\mathbb{R}$.

Soit B un ouvert de $\mathbb{R}$. On a donc $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et, comme $A \times B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on a $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On a donc $B \in T_1$.

T_1 est donc une tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}$, donc contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Donc, $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

La conséquence de cette question est donc :

$$A \text{ ouvert de } \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2). \tag{13.1}$$

---

3. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $T_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

corrigé

On commence par remarquer que la question précédente donne que T_2 contient les ouverts de $\mathbb{R}$. En effet, soit A un ouvert de $\mathbb{R}$, la propriété (13.1) donne $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, et donc $A \in T_2$.

On montre maintenant que T_2 est une tribu (on en déduira que $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$).

- $\emptyset \in T_2$ car $\emptyset \times B = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
- On montre ici que T_2 est stable par passage au complémentaire.

  Soit $A \in T_2$, on a $A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A^c \times B = (\mathbb{R} \times B) \setminus (A \times B)$. La propriété (13.1) donne $(\mathbb{R} \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ car $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. D'autre part, $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (car $A \in T_2$). Donc, $A^c \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Ce qui prouve que $A^c \in T_2$ et donc que T_2 est stable par passage au complémentaire.
- Enfin, T_2 est stable par union dénombrable. En effet, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$, on a $(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \times B = \cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (car $A_n \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Donc, $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T_2$.

T_2 est donc une tribu (sur $\mathbb{R}$) contenant les ouverts de $\mathbb{R}$, ce qui prouve que $T_2 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc, finalement, $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

---

4. Montrer que $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (et donc que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$).

corrigé

La question précédente donne :

$$A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

On a donc $\{A \times B;\, A,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On en déduit $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Avec la question 1, on a finalement $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Corrigé 15 (Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^N$)

1. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$ est égale à celle engendrée par l'ensemble de toutes les boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$. [On pourra montrer d'abord que tout ouvert de $\mathbb{R}^N$ est réunion dénombrable de boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$.]

corrigé

Soit T la tribu engendrée par l'ensemble de toutes les boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$. Comme les boules ouvertes sont des ouverts, on a $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

On montre maintenant l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset T$. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ t.q. $B(x, r) \subset O$ (où $B(x, r)$ déisgne la boule ouverte de centre x et rayon r). Comme les rationnels sont denses $\mathbb{R}$, on peut donc trouver $y \in \mathbb{Q}^N$ et $s \in \mathbb{Q}_+^\star = \{t \in \mathbb{Q}\,;\, t > 0\}$, t.q. $x \in B(y, s) \subset O$. On note alors $I = \{(y, s) \in \mathbb{Q}^N \times \mathbb{Q}_+^\star\,;\, B(y, s) \subset O\}$. On a alors $O = \cup_{(y,s) \in I} B(y, s)$. Comme I est au plus dénombrable (car $\mathbb{Q}^{N+1}$ est dénombrable), on en déduit que $O \in T$ et donc que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset T$ (car T est une tribu contenant tous les ouverts).

Le raisonnement précédent montre même que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est aussi la tribu engendrée par l'ensemble des boules ouvertes à rayons rationnels et centre à coordonnées rationnelles.

---

2. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$ est égale à celle engendrée par l'ensemble des produits d'intervalles ouverts à extrémités rationnelles.

corrigé

On reprend le même raisonnement que dans la question précédente en remplaçant $B(x, r)$ par $P(x, r) = \prod_{i=1}^N]x_i - r, x_i + r[$, avec $x = (x_1, \ldots, x_N)^t$.

---

3. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles $]a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

corrigé

Soit $\mathcal{C} = \{]a, b],\, a, b \in \mathbb{R},\, a < b\}$ et $T(\mathcal{C})$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Comme $]a, b] = \cap_{n>0}]a, b + \frac{1}{n}[$, on voit que $]a, b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Donc, on a $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $T(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On montre maintenant l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C})$. Soit $I =]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On peut écrire $I = \cup_{n \geq n_0}]a, b - \frac{1}{n}]$, avec n_0 t.q. $\frac{1}{n_0} < b - a$. On en déduit que $I \in T(\mathcal{C})$. Puis, comme tout ouvert non vide peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts à extrémités finies (voir le lemme 2.1 page 21), on obtient que tout ouvert appartient à $T(\mathcal{C})$. Ceci permet de conclure que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C})$ et finalement que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = T(\mathcal{C})$.

---

4. Soit S un sous ensemble dense de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est engendrée par la classe des boules ouvertes (ou bien fermées) telles que les coordonnées du centre et le rayon appartiennent S.

corrigé

On reprend le même raisonnement que dans la première question en remplaçant $\mathbb{Q}^N$ par S^N (qui est dense dans $\mathbb{R}^N$) et $\mathbb{Q}_+^\star$ par $S_+^\star = \{s \in S\,; s > 0\}$ (qui est dense dans $\mathbb{R}_+^\star$).

Corrigé 16

Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre (cf. définition 2.4) si et seulement si $\mathcal{A}$ vérifie les deux propriétés suivantes :

(a) $E \in \mathcal{A}$,
(b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$.

corrigé

– On suppose que $\mathcal{A}$ est une algèbre. Il est clair que (a) est vérifiée. Pour montrer (b) il suffit d'utiliser la stabilité par intersection finie et par passage au complémentaire, cela donne bien que $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$ si $A, B \in \mathcal{A}$.
– On suppose maintenant que $\mathcal{A}$ vérifie (a) et (b).

On a alors $\emptyset = E \setminus E \in \mathcal{A}$, et donc $\emptyset, E \in \mathcal{A}$.

On remarque ensuite que, grâce à (b), $A^c = E \setminus A \in E$ si $A \in \mathcal{A}$. On a donc la stabilité de $\mathcal{A}$ par passage au complémentaire.

Soit maintenant $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. On a $A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus A_2^c$, on en déduit que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ par (b) et la stabilité de $\mathcal{A}$ par passage au complémentaire. Une récurrence sur n donne alors que $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie.

Enfin, la stabilité de $\mathcal{A}$ par union finie découle de la stabilité de $\mathcal{A}$ par intersection finie et par passage au complémentaire car $(\cup_{p=0}^n A_p)^c = \cap_{p=0}^n A_p^c$.

On a bien montré que $\mathcal{A}$ est une algèbre.

---

2. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille d'algèbres (sur E). Montrer que $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{P}(E)\,; A \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I\}$ est encore une algèbre.

corrigé

On peut montrer que $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ est une algèbre en utilisant diretement la définition d'une algèbre. Onb peut aussi le montrer en utilisant la première question, ce que nous faisons ici. On montre donc que $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ vérifie (a) et (b) :
– $E \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ car $E \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I$.
– Soit $A, B \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$. Pour tout $i \in I$, on a $A, B \in \mathcal{A}_i$. On en déduit $A \setminus B \in \mathcal{A}_i$ (car $\mathcal{A}_i$ est une algèbre) et donc $A \setminus B \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$.

On a bien montré que $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ est une algèbre.

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, la deuxième question permet donc de définir l'algèbre engendrée par $\mathcal{C}$ comme l'intersection de toutes les algèbres sur E contenant $\mathcal{C}$.

Corrigé 17

Soit E un ensemble et $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de E. On suppose que $\emptyset, E \in \mathcal{C}$, que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que le complémentaire de tout élément de $\mathcal{C}$ est une union finie disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire :

$$C \in \mathcal{C} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^\star \text{ et } C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C} \text{ t.q. } C^c = \cup_{p=1}^n C_p \text{ et } C_p \cap C_q = \emptyset \text{ si } p \neq q.$$

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $\mathcal{C}$. Une partie de E est donc un élément de $\mathcal{B}$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(A_p)_{p=1,\ldots,n} \subset \mathcal{C}$ t.q. $A_p \cap A_q = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \cup_{p=1}^n A_p$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie et par passage au complémentaire.

corrigé

On montre tout d'abord la stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie. Soit $A, B \in \mathcal{B}$. Il existe $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ et $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{C}$ t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, si $i \neq j$, $A = \cup_{i=1}^n A_i$ et $B = \cup_{j=1}^m B_j$. On a alors $A \cap B = (\cup_{i=1}^n A_i) \cap (\cup_{j=1}^m B_j) = \cup_{i=1}^n \cup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$. Comme $A_i \cap B_j \in \mathcal{C}$ (car $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie) pour tout i, j et que $(A_i \cap B_j) \cap (A_k \cap B_l) = \emptyset$ si $(i, j) \neq (k, l)$, on en déduit que $A \cap B \in \mathcal{B}$.

Une récurrence sur n donne alors la stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie.

On montre maintenant la stabilité de $\mathcal{B}$ par passage au complémentaire. Soit $A \in \mathcal{B}$. Il existe $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $A = \cup_{i=1}^n A_i$. On a alors $A^c = \cap_{i=1}^n A_i^c$. Comme A_i^c est une réunion finie disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$, on a bien $A_i^c \in \mathcal{B}$. La stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie donne alors que $A^c \in \mathcal{B}$. On a donc bien montré la stabilité de $\mathcal{B}$ par passage au complémentaire.

---

2. Montrer que l'algèbre engendrée par $\mathcal{C}$ est égale à $\mathcal{B}$.

corrigé

On note $\mathcal{A}$ l'agèbre engendrée par $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{A}$ est stable par union finie et contient $\mathcal{C}$, il est clair que $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ contient $\mathcal{C}$, pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre (car $\mathcal{A}$ est l'intersection de toutes les algèbres contenant $\mathcal{C}$). On montre donc maintenant que $\mathcal{B}$ est une algèbre.

Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre, on montre que $\mathcal{B}$ vérifie les quatre propriétés d'une algèbre.

– $E, \emptyset \in \mathcal{B}$ car $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ et $E, \emptyset \in \mathcal{C}$.
– La question précédente montre que $\mathcal{B}$ est stable par par intersection finie et par passage au complémentaire.
– La stabilité de $\mathcal{B}$ par union finie découle facilement de la stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie et par passage au complémentaire, car $\cup_{i=1}^n A_i = (\cap_{i=1}^n A_i^c)^c$.

On a bien montré que $\mathcal{B}$ est une algèbre. Comme $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$, on a donc $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ et finalement $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Corrigé 18

Soit E un ensemble. Pour $\Sigma \subset \mathcal{P}(E)$, on dit que Σ est une classe monotone (sur E) si Σ vérifie les deux propriétés suivantes (de stabilité par union croissante dénombrable et par intersection décroissante dénombrable) :
– $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$,
– $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

1. Soit $\Sigma \subset \mathcal{P}(E)$. Montrer que Σ est une tribu si et seulement si Σ est une classe monotone et une algèbre (cf. exercice 2.9).

corrigé

– Si Σ est une tribu, Σ est stable par union dénombrable et intersection dénombrable. On en déduit immédiatement que Σ est une algèbre et une classe monotone.
– On suppose maintenant que Σ est une algèbre et une classe monotone. Comme Σ est une algèbre, pour montrer que Σ est une tribu, il suffit de montrer que Σ est stable par union dénombrable.

  Soit donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ et $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On veut montrer que $A \in \Sigma$. On remarque que $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ avec $B_n = \cup_{p=0}^n A_n$. Comme Σ est une algèbre, on a $B_n \in \Sigma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, comme Σ est de stable par union croissante (noter que $B_n \subset B_{n+1}$) dénombrable, on en déduit que $A \in \Sigma$. On a bien montré que Σ est stable par union dénombrable et donc que Σ est une tribu.

Noter que l'hypothèse de stabilité de Σ par intersection décroissante dénombrable n'a pas été utilisé. Elle sera utile à la question 4.

2. Donner un exemple, avec $E = \mathbb{R}$, de classe monotone qui ne soit pas une tribu.

corrigé

Il y a beaucoup d'exemples de classes monotones qui ne sont pas des tribus. En voici un : $\Sigma = \{\mathbb{R}\}$.

3. Soit $(\Sigma_i)_{i\in I}$ une famille de classes monotones (sur E). Montrer que $\cap_{i\in I}\Sigma_i = \{A \in \mathcal{P}(E)\,;\, A \in \Sigma_i$ pour tout $i \in I\}$ est encore une classe monotone.

corrigé

– Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \cap_{i\in I}\Sigma_i$ t.q. $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, pour tout $i \in I$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_i$ et donc, puisque Σ_i est une classe monotone, $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n \in \Sigma_i$. On en déduit que $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n \subset \cap_{i\in I}\Sigma_i$.

– Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \cap_{i\in I}\Sigma_i$ t.q. $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, pour tout $i \in I$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_i$ et donc, puisque Σ_i est une classe monotone, $\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n \in \Sigma_i$. On en déduit que $\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n \subset \cap_{i\in I}\Sigma_i$.

Ceci montre bien que $\cap_{i\in I}\Sigma_i$ est une classe monotone.

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, cette question permet donc de définir la classe monotone engendrée par $\mathcal{C}$ comme l'intersection de toutes les classes monotones sur E contenant $\mathcal{C}$.

4. (Lemme des classes monotones) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur E. On note Σ la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}$ et on note T la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

(a) Montrer que $\Sigma \subset T$.

corrigé

Σ est l'intersection de toutes les classes monotones sur $\mathcal{A}$. Une tribu étant aussi une classe monotone, la tribu T (engendrée par $\mathcal{A}$) est donc une classe monotone contenant $\mathcal{A}$. On en déduit que $\Sigma \subset T$.

(b) Soit $A \subset E$. On pose $\Sigma_A = \{B \subset E\,;\, A \setminus B \in \Sigma$ et $B \setminus A \in \Sigma\}$. Montrer que Σ_A est une classe monotone.

corrigé

– Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_A$, $B_n \subset B_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $B = \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n$. On va montrer que $B \in \Sigma_A$.

  On a $A \setminus B = A \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n = \cap_{n\in\mathbb{N}}(A \setminus B_n)$. La suite $(A \setminus B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de Σ. Comme Σ est une classe monotone, on en déduit $A \setminus B = \cap_{n\in\mathbb{N}}(A \setminus B_n) \in \Sigma$.

  On montre aussi que $B \setminus A \in \Sigma$. En effet, $B \setminus A = \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n \setminus A = \cup_{n\in\mathbb{N}}(B_n \setminus A) \in \Sigma$ par la stabilité de Σ par union croissante dénombrable.

  On a donc bien montré que $B \in \Sigma_A$. Ce qui donne la stabilité de Σ par union croissante dénombrable.

– De manière analogue, on va montrer la stabilité de Σ par intersection décroissante dénombrable. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_A$, $B_n \supset B_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $B = \cap_{n\in\mathbb{N}}B_n$.

  Comme $A \setminus B = \cup_{n\in\mathbb{N}}(A \setminus B_n)$, on obtient $A \setminus B \in \Sigma$ en utilisant la stabilité de Σ par union croissante dénombrable.

  Comme $B \setminus A = \cap_{n\in\mathbb{N}}(B_n \setminus A)$, on obtient $B \setminus A \in \Sigma$ en utilisant la stabilité de Σ par intersection décroissante dénombrable.

  On a donc $B \in \Sigma_A$. Ce qui donne la stabilité de Σ par intersection décroissante dénombrable.

On a bien montré que Σ_A est une classe monotone.

(c) (Question plus difficile.) Montrer que Σ est une algèbre. [Utiliser la question (b) et la première question de l'exercice 2.9.] En déduire que $T = \Sigma$.

corrigé

Pour montrer que Σ est une algèbre, il suffit de montrer que Σ vérifie les propriétés (a) et (b) de la première question de l'exercice 2.9. Il est immédiat que la propriété (a) est vérifiée car $E \in \mathcal{A} \in \Sigma$. Pour montrer (b), on utilise la classe monotone Σ_A définie à la question 4 pour $A \subset E$.

Soit $A \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est une algèbre, on a donc $\mathcal{A} \subset \Sigma_A$. La classe monotone Σ_A contient $\mathcal{A}$, elle contient donc Σ qui est l'intersection de toutes les classes monotones contenant $\mathcal{A}$. On a donc :

$$A \in \mathcal{A},\ B \in \Sigma \Rightarrow B \in \Sigma_A. \tag{13.2}$$

On remarque maintenant que, pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on a :

$$A \in \Sigma_B \Leftrightarrow B \in \Sigma_A.$$

On déduit donc de (13.2) :

$$A \in \mathcal{A},\ B \in \Sigma \Rightarrow A \in \Sigma_B.$$

Si $B \in \Sigma$, la classe monotone Σ_B contient donc $\mathcal{A}$. Elle contient alors aussi Σ (qui est l'intersection de toutes les classes monotones sur E contenant $\mathcal{A}$). On a donc montré :

$$B \in \Sigma,\ A \in \Sigma \Rightarrow A \in \Sigma_B.$$

On en déduit que $A \setminus B \in \Sigma$ si $A, B \in \Sigma$.

On a bien montré que Σ vérifie la propriété (b) de la première question de l'exercice 2.9 et donc que Σ est une algèbre.

Pour conclure, on remarque Σ est une classe monotone et une algèbre. C'est donc une tribu (par la question 1) contenant $\mathcal{A}$. Elle contient donc T (qui est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$) et on a bien, finalement, $\Sigma = T$.

Corrigé 19 (Caractérisation de la tribu engendrée)

Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie si $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{A}$ est stable par différence si :

$$A, B \in \mathcal{A},\ B \subset A \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}.$$

On dit que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable disjointe si :

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A_n \cap A_m = \emptyset \text{ pour } n \neq m \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$.

1. On note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des parties de $\mathcal{P}(E)$ stables par différence et stables par union dénombrable disjointe. Montrer qu'il existe $\mathcal{D} \in \mathcal{Z}$ t.q. $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ et :

$$\mathcal{A} \in \mathcal{Z},\ \mathcal{C} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{D} \subset \mathcal{A}.$$

corrigé

On note $\mathcal{Z}_r$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{Z}$ contenant $\mathcal{C}$. On remarque tout d'abord que $\mathcal{Z}_r \neq \emptyset$ car $\mathcal{P}(E) \in \mathcal{Z}_r$. Puis, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des parties de E appartenant à tous les éléments de $\mathcal{Z}_r$ (c'est-à-dire que, pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on a $A \in \mathcal{D}$ si, pour tout $\mathcal{B} \in \mathcal{Z}_r$, $A \in \mathcal{B}$).

Il est facile de voir que $\mathcal{D}$ est stable par différence, stable par union dénombrable disjointe et que $\mathcal{D}$ contient $\mathcal{C}$ (car tous les éléments de $\mathcal{Z}_r$ vérifient ces trois propriétés). Enfin, $\mathcal{A} \in \mathcal{Z}_r \Rightarrow \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$, ce qui est bien la propriété demandée.

Dans la suite, on note toujours $\mathcal{D}$ cette partie de $\mathcal{P}(E)$. On suppose maintenant que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que $E \in \mathcal{C}$.

2. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on note $\mathcal{D}_A = \{D \in \mathcal{D}$ t.q. $A \cap D \in \mathcal{D}\}$.

(a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $\mathcal{D}_A$ est stable par union dénombrable disjointe et stable par différence.

corrigé

Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_A$ avec $D_n \cap D_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On va montrer que $\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}_A$. On remarque tout d'abord que $\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$ car $D_n \in \mathcal{D}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe. Puis, $A \cap (\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}}(D_n \cap A) \in \mathcal{D}$ car $D_n \cap A \in \mathcal{D}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(D_n \cap A) \cap (D_m \cap A) = \emptyset$, si $n \neq m$, et $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe. On a donc montré que $\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}_A$. Ce qui prouve que $\mathcal{D}_A$ est stable par union dénombrable disjointe.

Soit maintenant $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_A$, avec $D_1 \subset D_2$. On va montrer que $D_2 \setminus D_1 \in D_{\mathcal{A}}$. Pour cela, on remarque que $D_2 \setminus D_1 \in \mathcal{D}$ car $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}$ est stable par différence. Puis, $A \cap (D_2 \setminus D_1) = (A \cap D_2) \setminus (A \cap D_1) \in \mathcal{D}$ car $A \cap D_1$, $A \cap D_2 \in D$, $(A \cap D_1) \subset (A \cap D_2)$ et $\mathcal{D}$ est stable par différence. On a donc montré que $D_2 \setminus D_1 \in D_{\mathcal{A}}$. Ce qui prouve que $\mathcal{D}_A$ est stable par différence.

(b) Soit $A \in \mathcal{C}$. Montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$. En déduire que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$.

corrigé

Soit $B \in \mathcal{C}$. On a $B \in \mathcal{D}$ (car $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$) et $A \cap B \in \mathcal{C}$ (car $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie), donc $A \cap B \in \mathcal{D}$. Ceci montre que $B \in \mathcal{D}_A$ et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$.

Comme $\mathcal{D}_A$ est stable par différence, stable par union dénombrable disjointe et que $\mathcal{D}_A$ contient $\mathcal{C}$, la question 1 donne $\mathcal{D}_A \supset \mathcal{D}$ et, finalement, $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$.

(c) Soit $A \in \mathcal{D}$. Montrer que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$. En déduire que $\mathcal{D}$ est stable par intersection finie.

corrigé

Soit $B \in \mathcal{C}$. On a $B \in \mathcal{D}$ (car $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$). Comme $B \in \mathcal{C}$, la question précédente donne $\mathcal{D} = \mathcal{D}_B$ et donc $A \in \mathcal{D}_B$. On a donc $A \cap B \in \mathcal{D}$. Ceci montre que $B \in \mathcal{D}_A$ et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$.

On en déduit, comme à la question précédente, que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$.

Soit maintenant $B \in \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D} = \mathcal{D}_A$, on a $B \in \mathcal{D}_A$ et donc $A \cap B \in \mathcal{D}$. L'intersection de deux éléments de $\mathcal{D}$ est donc aussi dans $\mathcal{D}$. Ceci prouve bien la stabilité de $\mathcal{D}$ par intersection finie (une récurrence facile donne que l'intersection d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{D}$ est aussi dans $\mathcal{D}$).

---

3. Montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu. En déduire que $\mathcal{D}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

corrigé

On remarque que $E \in \mathcal{D}$ (car $E \in \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$) et que $\mathcal{D}$ est stable par complémentaire car, si $A \in \mathcal{D}$, on a $E \setminus A \in \mathcal{D}$ car $\mathcal{D}$ est stable par différence (et $E, A \in \mathcal{D}$ avec $A \subset E$). Pour montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu, il suffit de montrer que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable (non nécessairement disjointe).

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D}$ est stable par complémentaire, on aussi $A_n^c \in \mathcal{D}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$B_n = A_n \cap (\cap_{i=0}^{n-1} A_i^c).$$

On a $B_n \in \mathcal{D}$ car $\mathcal{D}$ est stable par inteserction finie et $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$ (en notant que $B_n \subset A_n$ et $B_m \subset A_n^c$ si $m > n$). Comme $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe, on en déduit $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}$ et donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$ (car $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$). Ceci prouve que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable et donc que $\mathcal{D}$ est une tribu.

On a ainsi montré que $\mathcal{D}$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$ et donc contenant la tribu engendrée par $\mathcal{C}$, notée $\tau(\mathcal{C})$. D'autre part, il est facile de voir que toute tribu contenant $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{Z}_r$ (défini à la question 1) et donc que $\tau(\mathcal{C})$ contient $\mathcal{D}$. On a bien montré finalement que $\mathcal{D} = \tau(\mathcal{C})$.

Remarque : l'hypothèse "$E \in \mathcal{C}$" n'a été utilisée qu'une seule fois. Elle n'a été utilisée que pour montrer que $E \in \mathcal{D}$ (dans la question 3). On peut remplacer cette hypothèse par "il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ t.q. $E_n \cap E_m = \emptyset$, si $n \neq m$, et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$". En effet, de cette hypothèse, on déduit aussi $E \in \mathcal{D}$ car $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe et $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. La suite du raisonnement de la question 3 donne alors aussi que $\mathcal{D}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

13.2 Mesures

Corrigé 20 (Exemples de mesures)
Soit E un ensemble infini non dénombrable. Pour toute partie A de E, on pose $m(A) = 0$ si A est au plus dénombrable, et $m(A) = +\infty$ sinon. L'application m est-elle une mesure sur $\mathcal{P}(E)$?

———————————corrigé———————————

Oui, l'application m est une mesure sur $\mathcal{P}(E)$. En effet, on a bien $m(\emptyset) = 0$ et si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E)$ on a $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) = 0$ si A_n est au plus dénombrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (car une réunion d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable) et $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) = \infty$ si il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. A_n est infini non dénombrable. On a donc toujours $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n)$ (noter d'ailleurs qu'il est inutile de supposer les A_n disjoints 2 à 2).

Corrigé 21 (Mesure trace et restriction d'une mesure)
Soit (E, T, m) un espace mesuré

1. Soit $F \in T$. Montrer que la tribu trace de T sur F, notée T_F, est incluse dans T (cette tribu est une tribu sur F). Montrer que la restriction de m à T_F est une mesure sur T_F. On l'appellera la *trace* de m sur F. Si $m(F) < \infty$, cette mesure est finie.

   ———————————corrigé———————————

   Soit $B \in T_F$, il existe donc $A \in T$ t.q. $B = A \cap F$. Comme $F \in T$, on a donc aussi $B \in T$.

   On note m_F la restriction de m à T_F, on a donc $m_F(B) = m(B)$ pour tout $B \in T_F$. Il est alors immédiat de voir que $m_F(\emptyset) = 0$ et que m_F est σ-additive sur T_F, m_F est donc une mesure sur T_F. Si $m(F) < \infty$, on a $m_F(F) = m(F) < \infty$, la mesure m_F est donc finie (mais la mesure m peut ne pas être finie, c'est-à-dire que l'on peut avoir $m(E) = \infty$).

---

2. Soit $\mathcal{A}$ une tribu incluse dans T. La restriction de m à $\mathcal{A}$ est une mesure. Est-elle finie (resp. σ-finie) si m est finie (resp. σ-finie) ?

---corrigé---

On note m_a la restriction de m à $\mathcal{A}$, on a donc $m_a(B) = m(B)$ pour tout $B \in \mathcal{A}$. Il est clair que m_a est une mesure sur $\mathcal{A}$.

– Si m est finie, on a $m_a(E) = m(E) < \infty$, m_a est donc aussi une mesure finie.
– Si m est σ-finie, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n = E$ et $m(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais, comme les A_n ne sont pas nécessairement dans $\mathcal{A}$, la mesure m_a peut ne pas être σ-finie. On peut construire un exemple facilement de la manière suivante :
  On suppose que m est σ-finie mais n'est pas finie (on peut prendre, par exemple $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$) et on prend $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$. La mesure m_a n'est pas σ-finie…

Corrigé 22

Soit (E, T, m) un espace mesuré fini ("fini" signifie que $m(E) < \infty$) et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'ensembles mesurables tels que $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n \subset \cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus B_n)$.

---corrigé---

Soit $x \in (\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n$, on a donc $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ et $x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n$, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ t.q. $x \in A_p$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \notin B_n$. On a donc $x \in A_p \setminus B_p$, ce qui prouve que $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus B_n)$ et donc que $(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n \subset \cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus B_n)$.

---

2. Montrer que $m(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) - m(\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n) - m(B_n))$.

---corrigé---

Puisque $m(E) < \infty$, on a, pour tout $A, B \in T$ t.q. $B \subset A$, $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$. La monotonie de m, la σ-sous additivité de m (et la question précédente) nous donne alors :

$$
\begin{aligned}
&m(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) - m(\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n) = m((\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n))\\
&\leq m(\cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus B_n)) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n \setminus B_n) = \sum_{n=0}^{+\infty}(m(A_n) - m(B_n)).
\end{aligned}
$$

Corrigé 23

Soit (E, T, m) un espace mesuré fini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(A_n) = m(E)$. Montrer que $m(\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n) = m(E)$.

---corrigé---

Comme $m(E) < \infty$, on a $m(A^c) = m(E) - m(A)$ pour tout $A \in T$. De $m(A_n) = m(E)$, on déduit alors $m(A_n^c) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par σ-sous additivité de m, on a alors $m(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n^c) = 0$. Comme $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n^c = (\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n)^c$, on a donc $m((\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n)^c) = 0$ et donc $m(\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n) = m(E)$.

Corrigé 24 (Sur la mesure d'une union…)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré et $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$. On suppose que $m(A_p) < \infty$ pour tout p. Montrer que

$$m(\cup_{p=1}^n (B \cap A_p)) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} m(B \cap (\cap_{j=1}^k A_{i_j})) \right).$$

corrigé

En attente

Corrigé 25 (Contre exemples...)

1. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(A) = 0$. A-t-on nécessairement A fermé ?

   corrigé

   Non, A n'est pas nécessairement fermé. On peut prendre, par exemple $A = \{\frac{1}{n}, n \ge 1\}$. On a $\lambda(A) = 0$ et A n'est pas fermé (car 0 appartient à l'adhérence de A sans être dans A).

   ---

2. Soit (E, T) un espace mesurable et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ qui engendre T. On considère m_1 et m_2 des mesures sur T. Montrer que $m_1(A) = m_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$ n'implique pas que $m_1 = m_2$ sur T. [*On pourra trouver un exemple (facile) avec* $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *et* m_1, m_2 *non finies. Un exemple avec* $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *et* m_1, m_2 *finies est aussi possible mais plus difficile à trouver...*]

   corrigé

   on prend $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

   – Exemple “facile" (avec m_1, m_2 non finies).
   On prend $\mathcal{C}_1 = \{]a, \infty[, \ a \in \mathbb{R}\}$. On a bien $T(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $\mathcal{C}_1$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (voir la proposition 2.2). On prend alors $m_1 = \lambda$ et $m_2 = 2\lambda$ (c'est-à-dire $m_2(B) = 2\lambda(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$). On a bien $m_1(B) = m_2(B)$ pour tout $B \in \mathcal{C}_1$ (car on a alors $m_1(B) = m_2(B) = \infty$). Mais $m_1 \ne m_2$ puisque, par exemple, $m_1(]0,1[) = 1$ et $m_2(]0,1[) = 2$.

   – Exemple “difficile" (avec m_1, m_2 finies).
   On prend maintenant $\mathcal{C}_2 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,;\, \{-1,0,1\} \cap B = \emptyset\} \cup \{\{-1,0\}\} \cup \{\{0,1\}\}$ (un élément de $\mathcal{C}_2$ est donc un borélien ne contenant ni -1 ni 0 ni 1, ou bien la partie $\{-1,0\}$, ou bien la partie $\{0,1\}$). On montre d'abord que $T(\mathcal{C}_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Il est clair que $T(\mathcal{C}_2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour montrer l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C}_2)$, on remarque que $\{0\} = \{-1,0\} \cap \{0,1\} \in T(\mathcal{C}_2)$ et donc que $\{-1\} = \{-1,0\} \setminus \{0\} \in T(\mathcal{C}_2)$, $\{1\} = \{0,1\} \setminus \{0\} \in T(\mathcal{C}_2)$. Finalement on voit alors que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C}_2)$ car tout borélien s'écrit comme un borélien ne contenant ni -1 ni 0 ni 1 (qui appartient donc à $T(\mathcal{C}_2)$), auquel on ajoute éventuellement 1, 2 ou 3 autre(s) élément(s) de $T(\mathcal{C}_2)$ (qui sont les parties $\{0\}$, $\{-1\}$ et $\{1\}$, on conclut alors avec la stabilité par union finie de la tribu $T(\mathcal{C}_2)$).

   On rappelle que, pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de dirac sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc, pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_a(B) = 1$ si $a \in B$ et $\delta_a(B) = 0$ si $a \notin B$. On prend alors $m_1 = \delta_{-1} + \delta_0 + \delta_1$ et $m_2 = 2\delta_{-1} + 2\delta_1$. On a clairement $m_1 = m_2$ sur $\mathcal{C}_2$ car $m_1(B) = m_2(B) = 0$ si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est t.q. $\{-1,0,1\} \cap B = \emptyset$ et $m_1(\{-1,0\}) = m_2(\{-1,0\}) = m_1(\{0,1\}) = m_2(\{0,1\}) = 2$. Enfin, on a $m_1 \ne m_2$ puisque, par exemple, $m_1(\{0\}) = 1$ et $m_2(\{0\}) = 0$.

Corrigé 26 (Résultat d'unicité)

Soit (E, T) un espace mesurable et m, μ deux mesures sur T. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. On suppose que $\mathcal{C}$ engendre T et que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie.

On suppose que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$.

1. On suppose que $E \in \mathcal{C}$ et que $m(E) < \infty$. Montrer que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$. [On pourra introduire $\mathcal{D} = \{A \in T, m(A) = \mu(A)\}$ et utiliser l'exercice 2.14.]

———————————————**corrigé**———————————————

On pose $\mathcal{D} = \{A \in T, m(A) = \mu(A)\}$. La $\sigma-$additivité de m et μ montre que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe. Comme $m(E) < \infty$, on peut aussi montrer que $\mathcal{D}$ est stable par différence (au sens de l'exercice 2.14). En effet, si $A, B \in \mathcal{D}$, avec $B \subset A$, on a (par additivité de m et μ) $m(B) + m(A \setminus B) = m(A)$ et $\mu(B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A)$. Comme $m(A) < \infty$ et $\mu(A) < \infty$, on a donc $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$ et $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$, ce qui prouve que $m(A \setminus B) = \mu(A \setminus B)$ et donc que $A \setminus B \in \mathcal{D}$.

On utilise maintenant l'exercice 2.14. Comme $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et $E \in \mathcal{C}$, la question 3 de l'exercice 2.14 permet de montrer $\mathcal{D} = \tau(\mathcal{C}) = T$. (Plus précisément, comme $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$, on a $\mathcal{D} \in \mathcal{Z}_r$, où $\mathcal{Z}_r$ est défini dans le corrigé 19. Puis, en utilisant que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que $E \in \mathcal{C}$, la dernière question de l'exercice 2.14 donne que $\mathcal{D} \supset \tau(\mathcal{C})$.)

On a donc bien montré que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$.

———————————————————————————————

2. (Généralisation de la question précédente).

On suppose qu'il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ t.q. $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$, $m(E_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Montrer que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$.

———————————————**corrigé**———————————————

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $A \in T$, on pose $m_n(A) = m(A \cap E_n)$ et $\mu_n(A) = \mu(A \cap E_n)$ (noter que $A \cap E_n \in T$, car $A, E_n \in T$). On obtient ainsi deux mesures sur T, m_n et μ_n. Ces deux mesures sont égales sur $\mathcal{C}$ (car $A \cap E_n \in \mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie).

On raisonne alors comme à la question précédente. On pose $\mathcal{D} = \{A \in T, m_n(A) = \mu_n(A)\}$ et le raisonnement de la question récédente donne que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe et (grâce à $m_n(E) < \infty$) que $\mathcal{D}$ est stable par différence (au sens de l'exercice 2.14). On utilise maintenant la remarque de la fin de la question 3 de l'exercice 2.14. Comme $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et E est une union dénombrable disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$, cette remarque donne $\mathcal{D} = \tau(\mathcal{C}) = T$. On a donc, pour tout $A \in T$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$m(A \cap E_n) = m_n(A) = \mu_n(A) = \mu(A \cap E_n).$$

On en déduit que $m(A) = \mu(A)$, pour tout $A \in T$, car, par $\sigma-$additivité de m et μ, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A \cap E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap E_n) = \mu(A)$.

———————————————————————————————

3. Avec $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donner un exemple pour lequel $E \in \mathcal{C}$ et $m \neq \mu$.

———————————————**corrigé**———————————————

Un exemple simple est obtenu en prenant pour $\mathcal{C}$ lensemble des ouverts de $\mathbb{R}$, $\mu = 2m$ et m définie sur T par $m(A) =$card(A) si A a un nombre fini d'éléments et $m(A) = +\infty$ sinon.

———————————————————————————————

Corrigé 27 (Mesure atomique, mesure diffuse)

Soit (E, T) un espace mesurable t.q. $\{x\} \in T$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est diffuse si $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est purement atomique si il existe $S \in T$ t.q. $m(S^c) = 0$ et $m(\{x\}) > 0$ si $x \in S$.

1. Montrer qu'une mesure purement atomique et diffuse est nulle. Donner, pour $(E,T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ un exemple de mesure purement atomique et un exemple de mesure diffuse. [Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est diffuse.]

———————————————**corrigé**———————————————

Soit m une mesure purement atomique et soit $S \in T$ t.q. $m(S^c) = 0$ et $m(\{x\}) > 0$ si $x \in S$. Si m est diffuse, on a $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$, donc $S = \emptyset$ et $m = 0$.

On rappelle que, pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de dirac sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc, pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_a(B) = 1$ si $a \in B$ et $\delta_a(B) = 0$ si $a \notin B$. La mesure δ_a est (pour tout $a \in \mathbb{R}$) purement atomique, il suffit de prendre $S = \{a\}$, on a bien $\delta_a(S^c) = 0$ et $\delta_a(\{a\}) = 1 > 0$.

Un exemple de mesure diffuse sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est donné par la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

———————————————————————————————

2. Soit m une mesure diffuse sur T. Montrer que tous les ensembles dénombrables sont de mesure nulle.

———————————————**corrigé**———————————————

Soit A une partie dénombrable de E. Il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ t.q. $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$. On a donc $A \in T$ (car $\{x_n\} \in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que T est stable par union dénombrable) et $m(A) \le \sum_{n=0}^{+\infty} m(\{x_n\}) = 0$ car m est diffuse.

———————————————————————————————

3. Soit m une mesure sur T. On suppose que m est σ-finie, c'est à dire qu'il existe $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $m(E_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que l'ensemble des $x \in E$ t.q. $m(\{x\}) > 0$ (de tels x sont appelés “atomes" de m) est au plus dénombrable. [On pourra introduire l'ensemble $A_{n,k} = \{x \in E_n; m(x) \ge \frac{1}{k}\}$.]

———————————————**corrigé**———————————————

On pose $A = \{x \in E; m(\{x\}) > 0\}$. Si $x \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $x \in E_n$ et il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $m(\{x\}) \ge \frac{1}{k}$. On a donc $x \in A_{n,k}$. Ceci montre que $A = \cup_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^\star} A_{n,k}$. Pour montrer que A est au plus dénombrable, il suffit de montrer que $A_{n,k}$ est au plus dénombrable (car une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable). Soit donc $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$. Soit $x_1, \ldots, x_p$ p éléments distincts de $A_{n,k}$. Par monotonie et additvité de m, on a $\frac{p}{k} \le \sum_{n=1}^{p} m(\{x_n\}) = m(\{x_1, \ldots, x_p\}) \le m(E_n) < \infty$. On en déduit que $p \le km(E_n) < \infty$ et donc que $A_{n,k}$ a un nombre fini d'éléments (ce nombre est inférieur ou égal à $km(E_n)$). On en déduit donc que A est au plus dénombrable.

———————————————————————————————

(b) Montrer qu'il existe une mesure diffuse m_d et une mesure purement atomique m_a sur T telles que $m = m_d + m_a$. Montrer que m_d et m_a sont étrangères, c'est à dire qu'il existe $A \in T$ t.q. $m_d(A) = 0$ et $m_a(A^c) = 0$.

———————————————**corrigé**———————————————

On considère toujours $A = \{x \in E; m(\{x\}) > 0\}$. On remarque tout d'abord que $A \in T$ (car A est au plus dénombrable, d'après la question précédente, et que les singletons, c'est-à-dire les parties réduites à un seul élément, sont dans T). On pose alors, pour tout $B \in T$:

$$m_a(B) = m(B \cap A), \;\; m_d(B) = m(B \cap A^c).$$

Il est facile de voir que m_d et m_a sont des mesures sur T et que, par additivité de m, on a bien $m = m_a + m_d$.

La mesure m_d est diffuse car, si $x \in E$, on a $m_d(\{x\}) = m(\{x\}) = 0$ si $x \in A^c$ (car A contient tous les points t.q. $m(\{x\}) > 0$) et $m_d(\{x\}) = m(\emptyset) = 0$ si $x \in A$ (car $\{x\} \cap A^c = \emptyset$).

La mesure m_a est purement atomique. Il suffit de prendre $S = A$, on a bien $m_a(S^c) = m(A^c \cap A) = 0$ et $m_a(\{x\}) = m(\{x\}) > 0$ si $x \in S = A$.

Enfin, m_a et m_d sont étrangères car $m_d(A) = 0$ et $m_a(A^c) = 0$.

(c) Montrer que si m est finie il existe un singleton dont la mesure est supérieure ou égale à la mesure de tous les autres singletons. Montrer que ceci peut-être inexact si m n'est que σ-finie.

corrigé

On suppose que m est finie. Soit $M = \sup\{m(\{x\}), x \in E\}$. On veut montrer qu'il existe $x \in E$ t.q. $M = m(\{x\})$. On suppose $M > 0$ (sinon, il suffit de prendre n'importe quel $x \in E$ pour avoir $m(\{x\}) = M$). On va raisonner par l'absurde, on suppose donc que $m(\{x\}) < M$ pour tout $x \in E$. Par définition de M, Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ t.q. $m(\{x_n\}) \to M$ quand $n \to \infty$. Comme $m(\{x_n\}) < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut même supposer (quitte à extraire une sous suite) que $m(\{x_n\}) < m(\{x_{n+1}\}) < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quitte à supprimer les premiers termes de la suite, on peut aussi supposer que $m(\{x_0\}) > \frac{M}{2}$. Les points x_n sont alors tous distincts, ce qui donne $\sum_{n=0}^{+\infty} m(\{x_n\}) = m(\{x_n, n \in \mathbb{N}\}) \le m(E)$. Ceci est impossible car $m(E) < \infty$ et $m(\{x_n\}) > \frac{M}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (donc $\sum_{n=0}^{+\infty} m(\{x_n\}) = \infty$).

Exemple de mesure σ-finie pour laquelle M n'est pas atteint.

Sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ on définit m par $m(B) = \sum_{n=2}^{\infty}(1 - \frac{1}{n})\delta_n(B)$ (où δ_n est le mesure de Dirac au point $n \in \mathbb{N}$).

Pour montrer que m est une mesure, on peut remarquer, en posant $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N}\,;\, n \ge 2\}$, que $m(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}_2; n\in B}(1 - \frac{1}{n})$. Si $B = \cup_{p\in\mathbb{N}} B_p$ avec $B_p \cap B_q = \emptyset$ si $p \ne q$, on a

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} m(B_p) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}_2; n\in B_p} (1 - \frac{1}{n}) = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}_2\times\mathbb{N}; n\in B_p} (1 - \frac{1}{n})$$

(on utilise ici le lemme 2.3 page 31). Comme les B_p sont disjoints 2 à 2, n appartient à B_p pour au plus 1 p, et comme $B = \cup_{p\in\mathbb{N}} B_p$, on obtient

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}_2\times\mathbb{N}; n\in B_p} (1 - \frac{1}{n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}_2\times\mathbb{N}; n\in B} (1 - \frac{1}{n}) = m(B).$$

Ceci prouve la σ-additivité de m. Le fait que $m(\emptyset) = 0$ est immédiat. On a donc bien montré que m est une mesure.

La mesure m est bien σ-finie, il suffit de remarquer que $m([-n, n]) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{N}}[-n, n]$. enfin, pour cette mesure m, on a $M = \sup\{m(\{x\}), x \in E\} = 1$ et il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ t.q. $m(\{x\}) = 1$. En fait, m est purement atomique car $m((\mathbb{N}_2)^c) = 0$ et on a $0 < m(\{x\})$, pour tout $x \in \mathbb{N}_2$.

---

4. Pour $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donner un exemple de mesure purement atomique finie dont l'ensemble des atomes est infini.

corrigé

Un tel exemple est obtenu en modifiant légérement la mesure construite à la question précédente. Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on définit m par $m(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\delta_n(B)$. Une démonstration analogue à celle faite à la question précédente montre que m est bien une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, m est finie (on a $m(\mathbb{R}) = \frac{\pi^2}{6} < \infty$), m est atomique car $m((\mathbb{N}^\star)^c) = 0$ et $0 < m(\{x\}) < 1$, pour tout $x \in \mathbb{N}^\star$. L'ensemble des atomes de m est infini, c'est $\mathbb{N}^\star$.

Corrigé 28 (limites sup et inf d'ensembles)
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On rappelle que $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{p\geq n} A_p$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{p\geq n} A_p$.

1. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $m(\cup_{p\geq n_0} A_p) < \infty$. Montrer que

$$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} m(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} m(A_n) \leq m(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$

corrigé

– La propriété de continuité croissante d'une mesure (voir la proposition 2.3) donne :

$$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} m(\cap_{p\geq n} A_p).$$

La monotonie de m donne $m(\cap_{p\geq n} A_p) \leq m(A_q)$ pour tout $q \geq n$. On a donc

$$m(\cap_{p\geq n} A_p) \leq \inf_{p\geq n} m(A_p)$$

et donc $\lim_{n\to\infty} m(\cap_{p\geq n} A_p) \leq \lim_{n\to\infty}(\inf_{p\geq n} m(A_p))$, c'est-à-dire :

$$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} m(A_n).$$

– De $\inf_{p\geq n} m(A_p) \leq \sup_{p\geq n} m(A_p)$, on déduit

$$\liminf_{n\to\infty} m(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} m(A_n).$$

– Comme il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $m(\cup_{p\geq n_0} A_p) < \infty$, la propriété de continuité décroissante d'une mesure (voir la proposition 2.3) donne $m(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} m(\cup_{p\geq n} A_p)$. La monotonie de m donne $m(\cup_{p\geq n} A_p) \geq m(A_q)$ pour tout $q \geq n$. On a donc

$$m(\cup_{p\geq n} A_p) \geq \sup_{p\geq n} m(A_p)$$

et donc $\lim_{n\to\infty} m(\cup_{p\geq n} A_p) \geq \lim_{n\to\infty}(\sup_{p\geq n} m(A_p))$, c'est-à-dire :

$$m(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to\infty} m(A_n).$$

---

2. Donner un exemple (c'est-à-dire choisir (E, T, m) et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$) pour lequel :

$$\limsup_{n\to\infty} m(A_n) > m(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$

corrigé

On prend $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $A_n = [n, n+1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient alors :

$$\limsup_{n\to\infty} m(A_n) = 1 > 0 = m(\emptyset) = m(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$

---

3. Donner un exemple avec m finie (c'est-à-dire $m(E) < \infty$) pour lequel

$$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) < \liminf_{n\to\infty} m(A_n) < \limsup_{n\to\infty} m(A_n) < m(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$

———————————————**corrigé**———————————————

On prend (E, T, m)=$([0,4], \mathcal{B}([0,4]), \lambda)$ (plus précisément, λ est ici la restriction à $\mathcal{B}([0,4])$ de λ qui est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) et $A_{2n} = [0,2]$, $A_{2n+1} = [1,4]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient $\limsup_{n\to\infty} A_n = [0,4]$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n = [1,2]$. On a ainsi :

$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) = 1$, $\liminf_{n\to\infty} m(A_n) = 2$, $\limsup_{n\to\infty} m(A_n) = 3$ et $m(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 4$.

———————————————————————————————

4. $(\star)$ (Lemme de Borel-Cantelli) On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) < \infty$.
Montrer que $m(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

———————————————**corrigé**———————————————

De $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) < \infty$ on déduit que $\sum_{p=n}^{\infty} m(A_p) \to 0$ quand $n \to \infty$ et donc que $m(\cup_{p\geq n} A_p) \to 0$ quand $n \to \infty$ (car, par σ-sous additivté de m, on a $m(\cup_{p\geq n} A_p) \leq \sum_{p=n}^{\infty} m(A_p)$). Par continuité décroissante de m, on en déduit alors $m(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

———————————————————————————————

Corrigé 29 (Petit ouvert dense…) $(\star\star)$
On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $\varepsilon > 0$, peut-on construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure inférieure à ε ? [On rappelle qu'une partie A de R est dense dans $\mathbb{R}$ si $\overline{A} = \mathbb{R}$ ou encore si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ t.q. $|x - a| < \varepsilon$.]

———————————————**corrigé**———————————————

La réponse est "oui"…. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, bijective. On considère alors $O = \cup_{n\in\mathbb{N}}]\varphi(n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, \varphi(n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[$. O est bien un ouvert (comme réunion d'ouverts), dense dans $\mathbb{R}$ (car $O \supset \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$) et, par σ-sous additivité d'une mesure, on a $\lambda(O) \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \varepsilon$.

———————————————————————————————

Corrigé 30 (Non existence d'une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ exprimant la longueur) $(\star\star)$
On définit la relation d'équivalence sur $[0,1[$: xRy si $x - y \in \mathbb{Q}$. En utilisant l'axiome du choix, on construit un ensemble $A \subset [0,1[$ tel que A contienne un élément et un seul de chaque classe d'équivalence. Pour $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$, on définit $A_q = \{y \in [0,1[; y = x + q$ ou $y = x + q - 1, x \in A\}$, c'est-à-dire $A_q = \{y \in [0,1[\,; y - q \in A$ ou $y - q + 1 \in A\}$.

1. Montrer que $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} A_q = [0,1[$.

———————————————**corrigé**———————————————

Soit $y \in [0,1[$, il existe $x \in A$ t.q. yRx (car A contient un élément dans chaque classe d'équivalence), c'est-à-dire $y - x \in \mathbb{Q}$. Comme $y - x \in]-1,1[$ (car $x, y \in [0,1[$), on a donc $y - x = q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$ ou $y - x + 1 = q \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$. Ceci donne $y \in A_q$. On a donc $[0,1[\subset \cup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} A_q$. Comme $A_q \subset [0,1[$ pour tout $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$, on a finalement $[0,1[= \cup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} A_q$.

Il est important aussi de remarquer que les A_q sont disjoints 2 à 2. En effet, si $y \in A_q \cap A_{q'}$, il existe $x, x' \in A$ t.q. $y - x = q$ ou $(q-1)$ et $y - x' = q'$ ou $(q'-1)$. On en déduit $x - x' \in \mathbb{Q}$ et donc $x = x'$ (car A contient un seul élément de chaque classe d'équivalence). Ceci donne $q = q' = y - x$ (si $y - x \in [0,1[$) ou $q = q' = y - x + 1$ (si $y - x \in]-1,0[$).

———————————————————————————————

2. Montrer que si m est une application de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, invariante par translation et vérifiant $m([0,1[) = 1$, m ne peut pas être σ- additive. En déduire la non-existence d'une mesure m, sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et t.q. $m([a,b]) = b-a$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. En particulier, montrer que l'application $\lambda^\star$, définie en cours, ne peut pas être une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

corrigé

On suppose que m est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ vérifiant $m([0,1[) = 1$. La σ- additivité de m donne alors, avec la première question,

$$1 = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} m(A_q). \tag{13.3}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on note $B + x = \{y + x, y \in B\}$. On suppose que m est invariante par translation, on a donc $m(B + x) = m(B)$ pour tout $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

On remarque maintenant que $A_q = ((A+q)\cap[0,1[) \cup ((A+q-1)\cap[0,1[)$ pour tout $q \in \mathbb{Q}\cap[0,1[$. De plus, si $y \in ((A+q)\cap[0,1[) \cap ((A+q-1)\cap[0,1[)$, il existe $x,x' \in A$ t.q. $y = x+q = x'+q-1$, donc $x'-x = 1$, ce qui est impossible. Ceci montre que $((A+q)\cap[0,1[) \cap ((A+q-1)\cap[0,1[) = \emptyset$. On a donc, en utilisant l'additivité de m, l'invariance par translation de m et le fait que $A+q \subset [0,2[$, $m(A_q) = m((A+q)\cap[0,1[) + m((A+q-1)\cap[0,1[) = m((A+q)\cap[0,1[) + m((A+q)\cap[1,2[) = m(A+q) = m(A)$, pour tout $q \in \mathbb{Q}\cap[0,1[$. On en déduit $\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} m(A_q) = 0$ si $m(A) = 0$ et $\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} m(A_q) = \infty$ si $m(A) > 0$, et donc $\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} m(A_q) \neq 1$, en contradiction avec (13.3). Il n'existe donc pas de mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et t.q. $m([0,1[) = 1$.

Si m est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et t.q. $m([a,b]) = b-a$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. On montre que $m[0,1[= 1$ en utilisant la continuité croissante de m et le fait que $[0,1[= \cup_{n\geq 1}[0,1-\frac{1}{n}]$. Il est donc impossible de trouver une telle mesure.

L'application $\lambda^\star$ définie en cours sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) est invariante par translation et vérifie $\lambda^\star([a,b])$ $= b-a$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Elle n'est donc pas σ-additive sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Corrigé 31

Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. pour tout intervalle I et tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $m(I) = m(I+x)$ (avec $I+x = \{a+x, a \in I\}$) et $m([0,1]) = 1$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m(\{x\}) = 0$ (i.e. m est diffuse). En déduire que m est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. [On pourra découper $[0,1[$ en q intervalles de longueur $1/q$.]

corrigé

On pose $m(\{0\}) = \alpha$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On prend $I = \{0\}$ (I est bien un intervalle) de sorte que $I + x = \{x\}$. On a alors $\alpha = m(\{0\}) = m(I) = m(I+x) = m(\{x\})$. On a donc montré que $m(\{x\}) = \alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour montrer que $\alpha = 0$, il suffit, par exemple, de remarquer que, en utilisant la σ-additivité de m :

$$1 = m([0,1]) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(\{\frac{1}{n}\}) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha.$$

On en déduit $\alpha = 0$ (sinon, le membre de droite de la précédente inégalité est égal à $+\infty$ et l'inégalité est alors fausse).

On a donc bien montré que $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci donne, en particulier que $1 = m([0,1]) = m([0,1[) + m(\{1\}) = m([0,1[)$.

Soit maintenant $q \in \mathbb{N}^\star$. On a $m([\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[) = m([0, \frac{1}{q}[)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, q-1\}$, car $[\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[= [0, \frac{1}{q}[+\frac{i}{q}$. On en déduit :

$$1 = m([0,1[) = \sum_{i=0}^{q-1} m([\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[) = qm([0, \frac{1}{q}[),$$

et donc $m([0, \frac{1}{q}[) = \frac{1}{q}$. Ceci donne aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m([x, x+\frac{1}{q}[) = \frac{1}{q}$, car $[x, x+\frac{1}{q}[= [0, \frac{1}{q}[+x$.
En utilisant l'additivité de m, on a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$:

$$m([0, \frac{p}{q}[) = \sum_{i=0}^{p-1} m([\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[) = \frac{p}{q}. \tag{13.4}$$

De (13.4), on va déduire $m([\alpha, \beta[) = \beta - \alpha$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha < \beta$. En effet, soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha < \beta$. Comme $[\alpha, \beta[= [0, \gamma[+\alpha$, avec $\gamma = \beta - \alpha$, on a $m([\alpha, \beta[) = m([0, \gamma[)$. Il existe alors deux suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}_+^\star$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}_+^\star$ t.q. $r_n \uparrow \gamma$ et $s_n \downarrow \gamma$ quand $n \to \infty$. Comme $[0, r_n[\subset [0, \gamma[\subset [0, s_n[$, on a, grâce à (13.4), $r_n = m([0, r_n[) \le m([0, \gamma[) \le m([0, s_n[) = s_n$. Eh faisant $n \to \infty$, on en déduit que $m([0, \gamma[) = \gamma$ et donc $m([\alpha, \beta[) = \beta - \alpha$.
Enfin, comme $m(\{\alpha\}) = 0$, on a aussi

$$m(]\alpha, \beta[) = \beta - \alpha, \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha < \beta.$$

La partie “unicité" du théorème de Carathéodory donne alors $m = \lambda$.

Corrigé 32 (Support d'une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$)
Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe un plus grand ouvert de mesure nulle pour m. L'ensemble fermé complémentaire de cet ouvert s'appelle *le support* de m. [On pourra, par exemple, considérer les pavés à extrémités rationnelles qui sont de mesure nulle pour m.]

corrigé

On note A l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^d$ de mesure nulle pour m. L'ensemble A est non vide (car l'ensemble vide est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de mesure nulle). On pose :

$$O = \cup_{\omega \in A} \omega.$$

L'ensemble O est donc la réunion de tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$ de mesure nulle. Il est clair que O est ouvert (car c'est une réunion d'ouverts) et qu'il contient tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$ de mesure nulle. Pour montrer que O est le plus grand ouvert de mesure nulle, il suffit donc de montrer que O est de mesure nulle. Pour cela, on va montrer que O est une réunion dénombrable d'ouverts de mesure nulle.
Soit $x = (x_1, \ldots, x_d)^t \in O$. Il existe $\omega \in A$ t.q. $x \in \omega$. Comme ω est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ t.q. :

$$\prod_{i=1}^{d}]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\subset \omega.$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$ il existe $\gamma_{i,x} \in]x_i - \varepsilon, x_i[\cap \mathbb{Q}$ et $\delta_{i,x} \in]x_i, x_i + \varepsilon[\cap \mathbb{Q}$. On a donc :

$$x \in \prod_{i=1}^{d}]\gamma_{i,x}, \delta_{i,x}[\subset \omega \subset O.$$

Par monotonie d'une mesure, on a $m(\prod_{i=1}^{d}]\gamma_{i,x},\delta_{i,x}[) \leq m(\omega) = 0$, et donc

$$m(\prod_{i=1}^{d}]\gamma_{i,x},\delta_{i,x}[) = 0.$$

Comme $O = \cup_{x\in O}\{x\}$, on a aussi :

$$O = \cup_{x\in O}\prod_{i=1}^{d}]\gamma_{i,x},\delta_{i,x}[= \cup_{x\in O}P_{\gamma_x,\delta_x}, \tag{13.5}$$

en posant $\gamma_x = (\gamma_{1,x},\ldots,\gamma_{d,x})^t$, $\delta_x = (\delta_{1,x},\ldots,\delta_{d,x})^t$ et $P_{\gamma,\delta} = \prod_{i=1}^{d}]\gamma_i,\delta_i[$ (si $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_d)^t$ et $\delta = (\delta_1,\ldots,\delta_d)^t$).

On remarque maintenant que, pour tout $x \in O$, $\gamma_x,\delta_x \in \mathbb{Q}^d$. L'égalité (13.5) donne donc :

$$O = \cup_{(\gamma,\delta)\in B}P_{\gamma,\delta},$$

où B est une partie de $\mathbb{Q}^{2d}$ et $m(P_{\gamma,\delta}) = 0$ pour tout $(\gamma,\delta) \in B$. Comme $\mathbb{Q}^{2d}$ est dénombrable, la partie B est au plus dénombrable et la $\sigma-$sous additivité d'une mesure donne alors que $m(O) = 0$.

Corrigé 33 (Ensemble de Cantor)

On considère l'espace mesuré $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$.

On pose $C_0 = [0,1]$, $a_1^0 = 0$, $b_1^0 = 1$, et $\alpha_0 = 1$. Pour $n \geq 0$, on construit $C_{n+1} \subset [0,1]$ de la manière suivante : on suppose $C_n = \bigcup_{p=1}^{2^n}[a_p^n,b_p^n]$ connu, et on définit $C_{n+1} = \bigcup_{p=1}^{2^{n+1}}[a_p^{n+1},b_p^{n+1}]$ où, pour $p = 1,\ldots,2^n$, $a_{2p-1}^{n+1} = a_p^n$, $b_{2p-1}^{n+1} = a_p^n + \alpha_{n+1}$, $a_{2p}^{n+1} = b_p^n - \alpha_{n+1}$ et $b_{2p}^{n+1} = b_p^n$, avec $\alpha_{n+1} = \frac{\rho_n\alpha_n}{2}$, et $0 < \rho_n < 1$. On pose $C = \cap_{n\geq 0}C_n$ (C s'appelle "ensemble de Cantor", l'exemple le plus classique est obtenu avec $\rho_n = \frac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

1. Montrer que $C_{n+1} \subset C_n$.

corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1,\ldots,2^n\}$, la longueur de l'intervalle $[a_p^n,b_p^n]$ est α_n. Comme $\alpha_{n+1} < \frac{\alpha_n}{2}$ et que $a_{2p-1}^{n+1} = a_p^n$ et $b_{2p}^{n+1} = b_p^n$, on a $[a_{2p-1}^{n+1},b_{2p-1}^{n+1}] \cup [a_{2p}^{n+1},b_{2p}^{n+1}] \subset [a_p^n,b_p^n]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1,\ldots,2^n\}$. En prenant l'union sur $p \in \{1,\ldots,2^n\}$, on en déduit $C_{n+1} \subset C_n$.

---

2. Montrer que C est compact et $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

corrigé

L'ensemble C est fermé (dans $\mathbb{R}$) car c'est une intersection de fermés (chaque C_n est fermé). D'autre part $C \subset [0,1]$, C est donc compact (car fermé et borné dans $\mathbb{R}$).

Comme $\alpha_{n+1} < \frac{\alpha_n}{2}$, on a toujours $b_p^n < a_{p+1}^n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1,\ldots,2^n - 1\}$). Les intervalles composant C_n sont donc disjoints 2 à 2 et de longueur α_n. Ceci montre que $x,y \in [0,1]$, $(y-x) > \alpha_n$ implique $]x,y[\not\subset C_n$. Comme $\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$ (noter que $\alpha_n \leq \frac{1}{2^n}$), on en déduit que $C = \cap_{n\in\mathbb{N}}C_n$ ne contient aucun intervalle ouvert (non vide) et donc que $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

---

3. Montrer que C est non dénombrable.

corrigé

On commence par définir, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$, des points x_c pour $c \in \{1,2\}^n$.

Pour $n = 1$, $x_{(1)} = a_1^0$ et $x_{(2)} = b_1^0$.

Soit $n \geq 1$. Supposons que x_c est construit pour tout $c \in \{1,2\}^n$ et que pour chaque $c \in \{1,2\}^n$, $x_c \in \{b_p^{n-1}, p = 1,\ldots,2^{n-1}\} \cup \{a_p^{n-1}, p = 1,\ldots,2^{n-1}\}$. On construit maintenant x_c pour $c \in \{1,2\}^{n+1}$. Soit donc $c \in \{1,2\}^{n+1}$, on pose $c = \{\overline{c}, b\}$ avec $\overline{c} \in \{1,2\}^n$ et $d \in \{1,2\}$ et on distingue 4 cas :

(a) $x_{\overline{c}} = b_p^{n-1}$, avec $p \in \{1,\ldots,2^{n-1}\}$, $d = 1$. On pose alors $x_c = a_{2p}^n$,

(b) $x_{\overline{c}} = b_p^{n-1}$, avec $p \in \{1,\ldots,2^{n-1}\}$, $d = 2$. On pose alors $x_c = b_{2p}^n$,

(c) $x_{\overline{c}} = a_p^{n-1}$, avec $p \in \{1,\ldots,2^{n-1}\}$, $d = 1$. On pose alors $x_c = a_{2p-1}^n$,

(d) $x_{\overline{c}} = a_p^{n-1}$, avec $p \in \{1,\ldots,2^{n-1}\}$, $d = 2$. On pose alors $x_c = b_{2p-1}^n$.

Il est intéressant de noter, avec ces formules, que $|x_c - x_{\overline{c}}| \leq \alpha_n \leq \frac{1}{2^n}$ et que $x_c \in C$.

On note S l'ensemble des suites indéxées par $\mathbb{N}^\star$, prenant leurs valeurs dans $\{1,2\}$. Si $c \in S$, on note c_n l'élément de $\{1,2\}^n$ formé par les n premiers termes de la suite et on note $x_n = x_{c_n}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (car $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^n}$) et incluse dans C, elle converge donc vers un point $x_c \in C$. On remarque que si c et c' sont deux suites différentes, alors $x_c \neq x_{c'}$. En effet soit $n \in \mathbb{N}$ t.q. $c_n = c'_n$ et $c_{n+1} \neq c'_{n+1}$, on alors $|x_{c_m} - x_{c'_m}| \geq (1-\rho_n)\alpha_n$ pour tout $m > n$ et donc, en passant à la limite quand $m \to \infty$, $|x_c - x_{c'}| \geq (1-\rho_n)\alpha_n$, ce qui donne $x_c \neq x_{c'}$. L'application $c \mapsto x_c$ est donc une injection de S dans C. Ceci montre que C est infini non dénombrable (car S est infini non dénombrable).

---

4. Montrer que si ρ_n ne dépend pas de n, alors $\lambda(C) = 0$. En déduire que si $A \in \mathcal{B}([0,1])$, $\lambda(A) = 0$ n'entraîne pas que A est dénombrable.

corrigé

La construction des points a_p^n et b_p^n donne

$$\lambda([a_{2p-1}^{n+1}, b_{2p-1}^{n+1}] \cup [a_{2p}^{n+1}, b_{2p}^{n+1}]) = 2\alpha_{n+1} = \rho_n\alpha_n = \rho_n\lambda([a_p^n, b_p^n]).$$

En prenant l'union sur $p \in \{1,\ldots,2^n\}$, on en déduit $\lambda(C_{n+1}) = \rho_n\lambda(C_n)$.

Si ρ_n ne dépend pas de n, c'est-à-dire $\rho_n = \rho$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 < \rho < 1$, on a donc $\lambda(C_{n+1}) = \rho\lambda(C_n)$. Ceci donne, comme $\lambda(C_0) = 1$, $\lambda(C_n) = \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par continuité décroissante de λ, on en déduit $\lambda(C) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n) = 0$.

---

5. Soit $0 < \epsilon < 1$. Montrer qu'il existe une suite $(\rho_n)_{n\geq 0} \subset]0,1[$ t.q. $\lambda(C) = \epsilon$.

corrigé

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]\varepsilon, 1]$ t.q. $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon_n \to \varepsilon$ quand $n \to \infty$ (on peut prendre, par exemple, $\varepsilon_n = \varepsilon - \frac{1-\varepsilon}{n+1}$).

On prend $\rho_n = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a bien $0 < \rho_n < 1$ et, comme $\lambda(C_{n+1}) = \rho_n\lambda(C_n)$ (ceci a été démontré à la question précédente), on a donc $\lambda(C_n) = \varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par continuité décroissante de λ, on en déduit $\lambda(C) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n) = \varepsilon$.

---

6. Soit f lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si A est un compact de $[0,1]$ t.q. $\lambda(A) = 0$, alors $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$ t.q. $\lambda(f(A)) = 0$.

———————————————**corrigé**———————————————

Comme f est continue, f transforme les compacts en compacts. Donc, $f(A)$ est bien un compact de $\mathbb{R}$ (et donc appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

On montre maintenant que $\lambda(f(A)) = 0$.

Soit $L \in \mathbb{R}$ t.q. $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. On commence par montrer un petit résultat préliminaire. Soit $I = [a,b]$ un intervalle fermé de $[0,1]$ (I est donc compact). Comme f est continue sur $[a,b]$, il existe $x, y \in [a,b]$ t.q. $f(x) = m = \min\{f(z), z \in [a,b]\}$ et $f(y) = M = \max\{f(z), z \in [a,b]\}$. On a donc $f(I) \subset [m,M]$ (en fait, $f(I) = [m,M]$), d'où :

$$\lambda(f(I)) \leq M - m = f(y) - f(x) \leq L|y - x| = L\lambda(I). \tag{13.6}$$

Soit $\eta > 0$. Comme $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, d'après la régularité de λ (voir le théorème 2.3), il existe O, ouvert de $\mathbb{R}$, t.q. $A \subset O$ et $\lambda(0) \leq \eta$. D'après le lemme 2.4 page 35, O est une union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2. En prenant éventuellement la restriction à $[0,1]$ de ces intervalles, on obtient donc une famille dénombrable, notée $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'intervalles inclus dans $[0,1]$, disjoints 2 à 2 t.q. $A \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset O$. On en déduit $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(I_n) = \lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}} I_n) \leq \eta$ et $f(A) \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} f(I_n) \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} f(\overline{I}_n)$. On a donc $\lambda(f(A)) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(f(\overline{I}_n))$. En utilisant (13.6), on a donc $\lambda(f(A)) \leq L\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(\overline{I}_n) = L\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(I_n) \leq L\eta$. Comme η est arbitrairement petit, on a donc $\lambda(f(A)) = 0$.

———————————————————————————————

7. Construire une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. si A est un compact de $[0,1]$ t.q. $\lambda(A) = 0$, on n'a pas forcément $\lambda(f(A)) = 0$ (mais $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$). [Utiliser un ensemble de Cantor de mesure nulle (cf question 4) et un ensemble de Cantor de mesure $\epsilon > 0$ (cf question 5).]

———————————————**corrigé**———————————————

On note C l'ensemble obtenu dans la question 4, c'est-à-dire avec $\rho_n = \rho$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 < \rho < 1$ (par exemple, $\rho = \frac{2}{3}$). On note a_n^p, b_n^p, C_n les points et ensembles utilisés pour construire C et on note aussi $D = \{a_n^p, n \in \mathbb{N}, p \in \{1,\ldots,2^n\}\} \cup \{b_n^p, n \in \mathbb{N}, p \in \{1,\ldots,2^n\}\}$. (Noter que $D \subset C$.)

Soit $\varepsilon > 0$. On note $\tilde{C}$ l'ensemble C obtenu à la question 5. On a donc $\lambda(C) = \varepsilon$. On note $\tilde{a}_n^p$, $\tilde{b}_n^p$, $\tilde{C}_n$ les points et ensembles utilisés pour construire $\tilde{C}$ et on note aussi $\tilde{D} = \{\tilde{a}_n^p, n \in \mathbb{N}, p \in \{1,\ldots,2^n\}\} \cup \{\tilde{b}_n^p, n \in \mathbb{N}, p \in \{1,\ldots,2^n\}\}$. (Noter que $\tilde{D} \subset \tilde{C}$.)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1,\ldots,2^n\}$. On construit f sur l'intervalle $[b_{2p-1}^{n+1}, a_{2p}^{n+1}]$ en prenant f affine et t.q. $f(b_{2p-1}^{n+1}) = \tilde{b}_{2p-1}^{n+1}$ et $f(a_{2p-1}^{n+1}) = \tilde{a}_{2p-1}^{n+1}$. On remarque que f est ainsi contruit de $(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$ dans $(\cup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{C}_n^c) \cup \tilde{D}$ et est strictement croissante. Comme $(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c)^c = C$ et que C est d'intérieur vide, f est définie sur une partie dense de $[0,1]$ et, comme $(\cup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{C}_n^c)^c = \tilde{C}$ et que $\tilde{C}$ est d'intérieur vide, l'image de f est dense dans $[0,1]$.

Il est maintenant facile de définir f par densité sur tout $[0,1]$. En effet, soit $x \in [0,1] \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$, il existe une suite de points de $(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$, notée $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergeant en croissant vers x et une suite de points de $(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$, notée $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergeant en décroissant vers x (en fait, ces points peuvent même être pris dans D). Comme f et croissante, la suite $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc en croissant vers un certain $\gamma \in [0,1]$ et la suite $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers un certain $\delta \in [0,1]$ (la croissance de f donne aussi que ces limites ne dépendent que du choix de x et non du choix des suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Comme f est croissante, on a $\gamma \leq \delta$ et comme l'image de f (définie pour l'instant seulement sur $(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$) est dense dans $[0,1]$, on a nécessairement $\gamma = \delta$ (l'intervalle γ, δ ne rencontre pas l'image de f). On peut donc poser $f(x) = \gamma = \delta$.

La fonction f est donc maintenant définie sur tout $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. Elle est strictement croissante et son image est dense dans $[0,1]$, elle est donc continue (par le même raisonnement que celui fait pour définir $f(x)$ en tout point $x \in [0,1] \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$). Comme une application continue transforme un compact en compact, on a donc $f([0,1]) = [0,1]$ et ceci prouve en particulier que $f([0,1] \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D) = [0,1] \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{C}_n^c) \cup \tilde{D}$. Comme $f(D) = \tilde{D}$, on a aussi $f(C) = \tilde{C}$. Pour que f soit définie sur $\mathbb{R}$ et continue, on ajoute $f(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f(x) = 1$ pour $x > 1$. On a toujours $f(C) = \tilde{C}$. Ceci donne bien le résultat désiré car $\lambda(C) = 0$ et $\lambda(\tilde{C}) = \varepsilon > 0$.

Corrigé 34 (Mesure complète)
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Une partie B de E est dite "négligeable" si elle est incluse dans un élément de T de mesure nulle. On note $\mathcal{N}_m$ l'ensemble des parties négligeables. On pose $\overline{T} = \{A \cup N;\, A \in T,\, N \in \mathcal{N}_m\}$.

1. Montrer que $\overline{T}$ est une tribu et que $T \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

corrigé

(a) On montre d'abord que $\overline{T}$ est une tribu.
- $\emptyset \in \overline{T}$ car $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ et $\emptyset$ appartient à T et $\mathcal{N}_m$ (car il est de mesure nulle).
- $\overline{T}$ est stable par passage au complémentaire :

  Soit $C \in \overline{T}$. Il existe $A \in T$ et $N \in \mathcal{N}_m$ t.q. $C = A \cup N$. Comme $N \in \mathcal{N}_m$, il existe $B \in T$ t.q. $N \subset B$ et $m(B) = 0$.

  On remarque alors que $C^c = (A \cup N)^c = A^c \cap N^c = (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap N^c \cap B)$. Comme $A^c \cap B^c \in T$ (par les propriétés de stabilité de T) et $(A^c \cap N^c \cap B) \in \mathcal{N}_m$ (car inclus dans B), on en déduit que $C^c \in \overline{T}$. Donc, $\overline{T}$ est stable par passage au complémentaire.
- $\overline{T}$ est stable par union dénombrable :

  Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{T}$. Il existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_m$ t.q. $C_n = A_n \cup N_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_n \in \mathcal{N}_m$, il existe $B_n \in T$ t.q. $N_n \subset B_n$ et $m(B_n) = 0$.

  On a alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n = (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} N_n)$. On remarque que $\cup_{n\in\mathbb{N}} N_n \subset B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in T$ et $m(B) = 0$ par σ-sous additivité de m. Donc, $\cup_{n\in\mathbb{N}} N_n \in \mathcal{N}_m$. comme $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$, on a finalement $\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \overline{T}$. Ce qui prouve bien que $\overline{T}$ est stable par union dénombrable.

On a bien montré que $\overline{T}$ est une tribu sur E.

(b) On montre maintenant que $T \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.
- Si $A \in T$, on a $A = A \cup \emptyset$. Comme $\emptyset \in \mathcal{N}_m$, on en déduit $A \in \overline{T}$. Donc, $T \subset \overline{T}$.
- Si $N \in \mathcal{N}_m$, on a $N = \emptyset \cup N$. Comme $\emptyset \in T$, on en déduit $N \in \overline{T}$. Donc, $\mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

Finalement, on a bien $T \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

---

2. Soit $A_1, A_2 \in T$ et $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_m$ t.q. $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$. Montrer que $m(A_1) = m(A_2)$.

corrigé

Soit $B_2 \in T$ t.q. $N_2 \subset B_2$ et $m(B_2) = 0$. On a :

$$A_1 \subset A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \subset A_2 \cup B_2.$$

Donc, par monotonie et sous additivité de m, $m(A_1) \leq m(A_2 \cup B_2) \leq m(A_2) + m(B_2) = m(A_2)$. En changeant les rôles de A_1 et A_2, on a aussi $m(A_2) \leq m(A_1)$. On a donc $m(A_1) = m(A_2)$.

Pour $B \in \overline{T}$, soit $A \in T$ et $N \in \mathcal{N}_m$ t.q. $B = A \cup N$, on pose $\overline{m}(B) = m(A)$. (La question précédente montre que cette définition est cohérente.)

3. Montrer que $\overline{m}$ est une mesure sur $\overline{T}$ et $\overline{m}_{|_T} = m$. Montrer que $\overline{m}$ est la seule mesure sur $\overline{T}$ égale à m sur T.

corrigé

(a) On montre d'abord que $\overline{m}$ est une mesure sur $\overline{T}$.

Comme $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ et $\emptyset \in T \cap \mathcal{N}_m$, on a $\overline{m}(\emptyset) = m(\emptyset) = 0$.

Soit maintenant $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{T}$ t.q. $C_n \cap C_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Il existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_m$ t.q. $C_n = A_n \cup N_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_n \in \mathcal{N}_m$, il existe $B_n \in T$ t.q. $N_n \subset B_n$ et $m(B_n) = 0$.

On a donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n = (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} N_n)$. On a déjà vu que $\cup_{n\in\mathbb{N}} N_n \in \mathcal{N}_m$. Par définition de $\overline{m}$, on a donc $\overline{m}(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n) = m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. Comme $C_n \cap C_m = \emptyset$ si $n \neq m$, on a aussi $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$ (car $A_p \subset C_p$ pour tout p). La σ-additivité de m (et la définition de $\overline{m}(C_n)$) donne(nt) alors :

$$\overline{m}(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n) = m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{m}(C_n).$$

Ce qui prouve la σ-additivité de $\overline{m}$.

(b) On montre maintenant que $\overline{m}_{|_T} = m$.

Si $A \in T$, on a $A = A \cup \emptyset$. Comme $\emptyset \in \mathcal{N}_m$, on a donc ($A \in \overline{T}$, on le savait déjà, et) $\overline{m}(A) = m(A)$. Donc, $\overline{m}_{|_T} = m$.

(c) Enfin, on montre que $\overline{m}$ est la seule mesure sur $\overline{T}$ égale à m sur T.

Soit $\tilde{m}$ une mesure sur $\overline{T}$ égale à m sur T.

Soit $C \in \overline{T}$. Il existe $A \in T$ et $N \in \mathcal{N}_m$ t.q. $C = A \cup N$. Comme $N \in \mathcal{N}_m$, il existe $B \in T$ t.q. $N \subset B$ et $m(B) = 0$. On a alors $A \subset C \subset A \cup B$. La monotonie de $\tilde{m}$, le fait que $\tilde{m} = m$ sur T et la sous additivité de m donnent :

$$m(A) = \tilde{m}(A) \leq \tilde{m}(C) \leq \tilde{m}(A \cup B) = m(A \cup B) \leq m(A) + m(B) = m(A).$$

On a donc $\tilde{m}(C) = m(A) = \overline{m}(C)$. Ce qui prouve que $\tilde{m} = \overline{m}$.

---

4. Montrer que $\mathcal{N}_{\overline{m}} = \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

corrigé

On a déjà vu (à la question 1) que $\mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

- Il est facile de voir que $\mathcal{N}_m \subset \mathcal{N}_{\overline{m}}$. En effet, soit $N \in \mathcal{N}_m$. Il existe $B \in T$ t.q. $N \subset B$ et $m(B) = 0$. Comme $T \subset \overline{T}$ et que $\overline{m} = m$ sur T, on a donc aussi $B \in \overline{T}$ et $\overline{m}(B) = 0$. Ce qui prouve que $N \in \mathcal{N}_{\overline{m}}$.
- Soit maintenant $N \in \mathcal{N}_{\overline{m}}$. Il existe $C \in \overline{T}$ t.q. $N \subset C$ et $\overline{m}(C) = 0$. Comme $C \in \overline{T}$, il existe $A \in T$, $M \in \mathcal{N}_m$ et $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$ et $C = A \cup M \subset A \cup B$. la définition de $\overline{m}$ donne que $\overline{m}(C) = m(A)$, on a donc $m(A) = 0$. On en déduit $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B) = 0$, et donc, comme $C \subset A \cup B$, on a bien $C \in \mathcal{N}_m$.

On a bien montré que $\mathcal{N}_{\overline{m}} = \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

L'exercice 4.18 page 101 montre la différence "dérisoire", du point de vue de l'intégration, entre (E, T, m) et son complété $(E, \overline{T}, \overline{m})$.

Corrigé 35 (Série commutativement convergente dans $\mathbb{R}$)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de montrer que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$ est convergente pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est absolument convergente.

Pour montrer ce résultat, on suppose, par exemple, que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^+ = \infty$. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, bijective, t.q. $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \to \infty$ quand $n \to \infty$. Conclure.

———————————————**corrigé**———————————————

On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ n'est pas absolument convergente.
La suite $(\sum_{p=0}^{n} |a_p|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc en croissant vers ∞. Comme $|a_p| = a_p^+ + a_p^-$ et que $a_p^+ = \max\{a_p, 0\} \geq 0$ et $a_p^- = \max\{-a_p, 0\} \geq 0$, les deux suites $(\sum_{p=0}^{n} a_p^+)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sum_{p=0}^{n} a_p^-)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc aussi croissantes et l'une des deux, au moins, converge vers ∞.
On suppose que la suite $(\sum_{p=0}^{n} a_p^+)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ∞ (un raisonnement analogue à ce qui suit permettrait de traiter le cas où la suite $(\sum_{p=0}^{n} a_p^-)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ∞). On va construire ci-après une bijection φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \to \infty$ quand $n \to \infty$. Ceci prouvera que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$ est non convergente pour au moins une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

On note $P = \{n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0\}$ et $N = \{n \in \mathbb{N}, a_n < 0\}$ (de sorte que $P \cap N = \emptyset$ et $P \cup N = \mathbb{N}$). Soit φ_1 et φ_2 les deux applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. $P = \{\varphi_1(n), n \in \mathbb{N}\}$ et $N = \{\varphi_2(n), n \in \mathbb{N}\}$.
On commence par montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ t.q. $a_0 = 0$ et :

$$a_{\varphi_2(n)} + \sum_{p=a_n}^{a_{n+1}-1} a_{\varphi_1(p)} \geq 1. \tag{13.7}$$

Pour montrer l'existence d'une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose $a_0 = 0$. Puis, on raisonne par récurrence sur n. Si $a_0, \ldots, a_n$ sont contruits, l'existence de a_{n+1} découle du fait que $\sum_{p=a_n}^{\infty} a_{\varphi_1(p)} = \sum_{p=\varphi_1(a_n)}^{\infty} a_p^+ = \infty$.

la construction de la suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ se fait alors en prenant $\varphi_1(a_0), \ldots, \varphi_1(a_1 - 1)$ puis $\varphi_2(0)$ puis $\varphi_1(a_1), \ldots, \varphi_1(a_2 - 1)$ puis $\varphi_2(1)\ldots$ puis $\varphi_1(a_n), \ldots, \varphi_1(a_{n+1} - 1)$ puis $\varphi_2(n)\ldots$
Pour décrire précisément cette application φ, on pose $b_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = b_n + a_{n+1} - a_n + 1$ (la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend donc vers ∞ quand $n \to \infty$). On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(q)$ losrque $q \in \{b_n, \ldots b_{n+1} - 1\}$ par :

$$\begin{aligned}&\varphi(b_n + p) = \varphi_1(a_n + p) \text{ pour } p \in \{0, \ldots, a_{n+1} - a_n - 1\},\\ &\varphi(b_{n+1} - 1) = \varphi_2(n).\end{aligned}$$

On a bien ainsi défini une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ car $b_{n+1} - 1 = b_n + p$, pour $p = a_{n+1} - a_n$. L'application φ est surjective car $\{\varphi(q), q \in \mathbb{N}\} = P \cup N\}$. Elle est injective car chaque valeur de φ_1 et φ_2 n'est prise qu'une seule fois par φ. Enfin, on a bien $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \to \infty$ quand $n \to \infty$. En effet, on remarque que, grâce à (13.7) :

$$\sum_{q=0}^{b_{n+1}-1+p} a_{\varphi(q)} \geq \sum_{q=0}^{b_{n+1}-1} a_{\varphi(q)} \geq n,$$

pour tout $p \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Ce qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\liminf_{p\to\infty} \sum_{q=0}^{p} a_{\varphi(q)} \geq n$, et donc

$$\sum_{q=0}^{p} a_{\varphi(q)} \to \infty, \text{ quand } p \to \infty.$$

Corrigé 36 (Mesure sur S^1)

On considère $S^1 = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2, |x|^2 + |y|^2 = 1\}$ (S^1 est donc le cercle unité de $\mathbb{R}^2$). Pour $z = (x,y)^t \in S^1$, il existe un unique $\theta_z \in [0, 2\pi[$ t.q. $x = \cos(\theta_z)$ et $y = \sin(\theta_z)$. Pour $\alpha \in [0, 2\pi[$ et $z \in S^1$ on pose $R_\alpha(z) = (\cos(\theta_z + \alpha), \sin(\theta_z + \alpha))^t$. Noter que R_α est une bijection de S^1 sur S^1 (c'est la rotation d'angle α).

Définir une tribu T sur S^1, t.q. T contienne les parties de la forme $\{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \theta \in]\alpha, \beta[\}$ avec $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, et une mesure μ sur T de sorte que (S^1, T, μ) soit un espace mesuré avec $\mu(S^1) = 1$ et t.q. μ soit invariante par rotation (c'est à dire que, pour tout $A \in T$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$, on ait $R_\alpha(A) = \{R_\alpha(z), z \in A\} \in T$ et $\mu(R_\alpha(A)) = \mu(A)$). [On pourra utiliser la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.]

corrigé

On note Θ l'application $z \mapsto \theta_z$ de S^1 dans $\mathbb{R}$ (cette application est bijective de S^1 dans $[0, 2\pi[$). On prend alors $T = \{\Theta^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. C'est bien une tribu sur S^1 (voir l'exercice 2.4).

Soit $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ et $E = \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \theta \in]\alpha, \beta[\}$. On a $E \subset S^1$ et, si $z \in S^1$, on a $z \in E$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ t.q. $\theta_z + 2k\pi \in]\alpha, \beta[$. Ceci prouve que

$$E = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \Theta^{-1}(]\alpha - 2k\pi, \beta - 2k\pi[),$$

et donc que $E \in T$ car $\Theta^{-1}(]\alpha - 2k\pi, \beta - 2k\pi[) \in T$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On définit maintenant μ. Soit $A \in T$. On pose $\Theta_A = \{\theta_z, z \in A\}$. Comme $A \in T$, il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $A = \Theta^{-1}(B)$, et donc $A = \Theta^{-1}(B \cap [0, 2\pi[)$. Comme Θ est une bijection de S^1 dans $[0, 2\pi[$, on a alors $\Theta_A = B \cap [0, 2\pi[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $\mu(A) = \frac{1}{2\pi}\lambda(\Theta_A)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

μ est bien une mesure sur T. En effet, on a $2\pi\mu(\emptyset) = \lambda(\Theta_\emptyset) = \lambda(\emptyset) = 0$. Puis, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de T, disjoints 2 à 2, la suite $(\Theta_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, disjoints 2 à 2. La $\sigma-$additvité de μ découle alors de celle de λ.

Il reste à montrer que μ est invariante par rotation. Soit $\alpha \in [0, 2\pi[$ et $A \in T$. Comme on l'a vu précédemment, il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $A = \Theta^{-1}(B \cap [0, 2\pi[)$. On a donc $A = \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \theta \in B \cap [0, 2\pi[\}$. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, on note $B_\beta = \{\theta + \beta, \theta \in B\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} R_\alpha(A) &= \{(\cos(\theta + \alpha), \sin(\theta + \alpha))^t, \theta \in B \cap [0, 2\pi[\} \\ &= \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \theta \in B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi + \alpha[\} \\ &= \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \theta \in B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[\} \cup \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \theta \in B_{\alpha - 2\pi} \cap [0, \alpha[\} \\ &= \Theta^{-1}(B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[) \cup \Theta^{-1}(B_{\alpha - 2\pi} \cap [0, \alpha[). \end{aligned}$$

La propriété d'invariance par translation de λ permet de dire que $B_\beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$. On a donc $R_\alpha(A) \in T$ et, par additivité d'une mesure et définition de μ,

$$2\pi\mu(R_\alpha(A)) = \lambda(B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[) + \lambda(B_{\alpha - 2\pi} \cap [0, \alpha[).$$

L'invariance par translation de λ donne $\lambda(B_{\alpha - 2\pi} \cap [0, \alpha[) = \lambda(B_\alpha \cap [2\pi, \alpha + 2\pi[)$ et donc :

$$\begin{aligned} 2\pi\mu(R_\alpha(A)) = \lambda(B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[) + \lambda(B_\alpha \cap [2\pi, \alpha + 2\pi[) &= \lambda(B_\alpha \cap [\alpha, \alpha + 2\pi[) \\ &= \lambda(B \cap [0, 2\pi[). \end{aligned}$$

Ce qui donne bien $\mu(R_\alpha(A)) = \mu(A)$.

13.3 Probabilités

Corrigé 37 (Lemme de Borel-Cantelli)

Soient (E, T, p) un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On pose $B_n = \cup_{k\geq n} A_k$ et $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ (on rappelle que $A = \limsup_{n\to\infty} A_n$).

1. Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) < +\infty$ alors $p(A) = 0$.

corrigé

Cette question a été corrigée dans le corrigé 28.

---

2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants. On suppose aussi que $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) = \infty$. Montrer que $p(A) = 1$.

corrigé

Comme cela a été vu dans le corrigé 28, la propriété de continuité décroissante d'une mesure (voir la proposition 2.3) domme $p(A) = \lim_{n\to\infty} p(B_n)$. Il suffit donc de montrer que $p(B_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si il existe $k \geq n$ t.q. $p(A_k) = 1$, on a, par monotonie de p, que $p(B_n) \geq p(A_k) = 1$ et donc $p(B_n) = 1$. On suppose maintenant que $p(A_k) < 1$ pour tout $k \geq n$. Comme $B_n^c = \cap_{k\geq n} A_k^c$, la continuité décroissante de p et l'indépendance des A_k donne :

$$p(B_n^c) = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} p(A_k^c) = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} (1 - p(A_k)).$$

Comme $\ln(1-x) \leq -x$ pour tout $x < 1$ (ou, de manière équivalente, $\ln(u) \leq u - 1$ pour tout $u > 0$, ceci est une conséquence, par exemple, de la concavité de la fonction $\ln$), on a, pour $m > n$:

$$\ln(\prod_{k=n}^{m} (1 - p(A_k))) = \sum_{k=n}^{m} \ln(1 - p(A_k)) \leq -\sum_{k=n}^{m} p(A_k).$$

De l'hypothèse $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) = \infty$, on déduit $\lim_{m\to\infty} \ln(\prod_{k=n}^{m}(1 - p(A_k))) = -\infty$, et donc $p(B_n^c) = 0$. Ceci donne bien $p(B_n) = 1$ et termine la démonstration.

Chapitre 14

Fonctions mesurables, variables aléatoires

14.1 Fonctions mesurables

Corrigé 38 (Caractérisation des fonctions mesurables) $(\star)$
Soient (E,T) un espace mesurable et f une application de E dans $\mathbb{R}$;

1. Montrer que $T_f = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\,;\ f^{-1}(B) \in T\}$ est une tribu.

corrigé

Cette question est un cas particulier (avec $F = \mathbb{R}$) de la question 2 de l'exercice 2.4, voir le corrige 12 page 276.

---

2. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est mesurable,
(ii) $f^{-1}(C) \in T$, pour tout $C \in \mathcal{C}$.

corrigé

On remarque que f mesurable signifie simplement que T_f (définie à la question précédente) contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Le sens (i) $\Rightarrow$ (ii) est immédiat car $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour le sens (ii) $\Rightarrow$ (i), on remarque que T_f est une tribu. Donc, si T_f contient $\mathcal{C}$, on a aussi T_f contient $T(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci donne f mesurable. Donc, on a bien (ii) $\Rightarrow$ (i)

Corrigé 39 (Composition de fonctions mesurables)
Soit (E,T) et (F,S) deux espaces mesurables. Soit $f\,:\,E \to F$ et $\varphi\,:\,F \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours, de la tribu borélienne). On suppose que f et φ sont mesurables. Montrer que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

corrigé

E est muni de la tribu T, F est muni de la tribu S et $\mathbb{R}$ est muni de la tribu borélienne.

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on remarque que $(\varphi \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(\varphi^{-1}(B))$. Comme $\varphi^{-1}(B) \in S$ car φ est mesurable (de F dans $\mathbb{R}$), on a donc $f^{-1}(\varphi^{-1}(B)) \in T$ car f est mesurable (de E dans F). Ceci montre bien que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

Corrigé 40 ($\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+\ldots$)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne. Montrer que φ est mesurable (on dit aussi borélienne) si et seulement si φ est mesurable quand on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ ($\overline{\mathbb{R}}_+$ étant aussi muni de la tribu borélienne).

corrigé

On suppose φ mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit B un borélien de $\overline{\mathbb{R}}_+$, on a donc $B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (voir la définition 3.1 page 53). Comme φ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et que φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a donc $\varphi^{-1}(B) = \varphi^{-1}(B \cap \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci donne donc que φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Réciproquement, on suppose maintenant φ mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (mais φ ne prend jamais la valeur ∞, on peut donc la considérer comme étant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc aussi $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et donc $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ceci prouve que φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé 41 (Stabilité de $\mathcal{M}$)

1. Soient (E, T), (E', T'), (E'', T'') des espaces mesurables, f (resp. g) une application de E dans E' (resp. de E' dans E''). On suppose que f et g sont mesurables. Montrer que $g \circ f$ est une application mesurable de E dans E''.

   corrigé

   Cette question est identique à celle de l'exercice 3.3 (voir le corrigé 39) avec E'' au lieu de $\mathbb{R}$. La démonstration est semblable :

   Soit $B \in T''$, on remarque que $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$. Comme $g^{-1}(B) \in T'$ car g est mesurable (de E' dans E''), on a donc $f^{-1}(g^{-1}(B)) \in T$ car f est mesurable (de E dans E'). Ceci montre bien que $g \circ f$ est mesurable (de E dans E").

   ---

2. Soit (E, T) un espace mesurable, on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; soient f et g des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $f^+(= \sup(f, 0))$, $f^-(= -\inf(f, 0))$ sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

   corrigé

   Cette question est démontrée dans la proposition 3.7 page 60.

   (b) Montrer que $f + g$, fg et $|f|$ sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

   corrigé

   Le fait que $f + g$, $fg \in \mathcal{M}$ est démontré dans la proposition 3.5 et le fait que $|f| \in \mathcal{M}$ est démontré dans la proposition 3.7 (car $|f|$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et $|f| \in \mathcal{M}_+$, on conclut avec l'exercice 3.4, corrigé 40).

   ---

3. Soient (E, T) un espace mesurable, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\mathbb{R}$) pour tout $x \in E$. On pose $f(x) = lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (pour tout $x \in E$). Montrer que f est une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.

   corrigé

   La démonstration de cette question est donnée dans la proposition 3.5 page 58 (propriété 3).

   ---

4. Soit (E, T) un espace mesurable, on suppose qu'il existe $A \in T$ dont les sous-ensembles ne soient pas tous mesurables. Il existe donc $B \subset A$ t.q. $B \notin T$. Montrer que $h = 1_B - 1_{A \setminus B}$ n'est pas mesurable (de E dans $\mathbb{R}$), alors que $|h|$ l'est.

——————————————**corrigé**——————————————

$\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors que $h^{-1}(\{1\}) = B \notin T$, donc h n'est pas mesurable. Par contre $|h| = 1_A$ est mesurable car $A \in T$.

———————————————————————————————————

Corrigé 42 (Mesurabilité des fonctions continues)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne

1. On suppose f continue. Montrer que f est mesurable (on dit aussi que f est borélienne).

——————————————**corrigé**——————————————

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Comme f est continue, $f^{-1}(O)$ est aussi un ouvert de $\mathbb{R}$, donc $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme l'ensemble des ouverts des ouverts engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on en déduit que f est mesurable (on utilise ici le caractérisation de la mesurabilité donnée à la proposition 3.2 page 56).

———————————————————————————————————

2. On suppose f continue à droite (resp. gauche). Montrer que f est mesurable.

——————————————**corrigé**——————————————

On suppose f continue à droite. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit f_n par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le -n, \\ f(\frac{p}{n}) & \text{si} \quad \frac{p-1}{n} < x \le \frac{p}{n},\ p \in \{-n^2+1, \ldots, n^2\} \\ 0 & \text{si} \quad x > n, \end{cases}$$

de sorte que

$$f_n = \sum_{p=-n^2+1}^{n^2} f(\frac{p}{n}) 1_{]\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n}]}.$$

On a $f_n \in \mathcal{E}$ car $]\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n}] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout n et p. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n > |x|$, on a $f_n(x) = f(\frac{p}{n})$ avec $\frac{p}{n} - \frac{1}{n} \le x \le \frac{p}{n}$ (p dépend de n, x est fixé). Comme f est continue à droite en x, on a donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$ (car $\frac{p}{n} \to x$, avec $\frac{p}{n} \ge x$). La deuxième caractérisation de la mesurabilité (proposition 3.6 page 59) donne alors $f \in \mathcal{M}$.

———————————————————————————————————

3. On suppose f croissante. Montrer que f est mesurable.

——————————————**corrigé**——————————————

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $A = f^{-1}([\alpha, \infty[)$. On suppose $A \neq \emptyset$ (si $A = \emptyset$, on a bien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$). Si $x \in A$, on a $f(x) \ge \alpha$ et, comme f est croissante, on a aussi $f(y) \ge \alpha$ pour tout $y \ge x$. Donc, $[x, \infty[\subset A$. En posant $a = \inf A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, on en déduit que $]a, \infty[\subset A \subset [a, \infty[$. A est donc nécessairement un intervalle (dont la borne supérieure est ∞), ce qui prouve que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme $\{[\alpha, \infty[, \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on en déduit que f est mesurable. (On a utilisé ici de nouveau la caractérisation de la mesurabilité donnée à la proposition 3.2 page 56).

———————————————————————————————————

Corrigé 43 (Egalité presque partout)

1. Soient f et g des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue ; montrer que $f = g$ λ p.p. si et seulement si $f = g$.

——————————————**corrigé**——————————————

Si $f = g$ (c'est-à-dire $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), on a bien $f = g$ λ p.p. car $f = g$ sur $\emptyset^c$ et $\lambda(\emptyset) = 0$.

Pour la réciproque, on va utiliser le fait qu'un ouvert non vide est toujours de mesure de Lebesgue strictement positive. En effet, si O est un ouvert non vide, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha < \beta$ et $]\alpha, \beta[\subset O$, on a donc $0 < \beta - \alpha = \lambda(]\alpha, \beta[) \leq \lambda(O)$.

On suppose maintenant que $f = g$ λ p.p., il existe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(A) = 0$ et $f = g$ sur A^c. On a alors $\{f(x) \neq g(x)\} \subset A$. Or, $\{f(x) \neq g(x)\} = (f - g)^{-1}(\mathbb{R}^\star)$ est un ouvert car $(f - g)$ est continue (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et $\mathbb{R}^\star$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc $\{f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et la monotonie de λ donne $\lambda(\{f(x) \neq g(x)\}) \leq \lambda(A) = 0$. On en déduit que $\{f(x) \neq g(x)\} = \emptyset$ (car un ouvert non vide est toujours de mesure de Lebesgue strictement positive) et donc $f = g$.

————————————————————————————

2. Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et δ_0 la mesure de Dirac en 0 ; montrer que $f = g$ δ_0 p.p. si et seulement si $f(0) = g(0)$.

——————————————**corrigé**——————————————

Si $f(0) = g(0)$, on prend $A = \{0\}^c$. On a bien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_0(A) = 0$ et $f = g$ sur A^c car $A^c = \{0\}$. Donc, $f = g$ δ_0 p.p..

Réciproquement, on suppose maintenant que $f = g$ δ_0 p.p., il existe donc $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $f = g$ sur A^c et $\delta_0(A) = 0$. Comme $\delta_0(A) = 0$, on a donc $0 \notin A$, c'est-à-dire $0 \in A^c$ et donc $f(0) = g(0)$.

————————————————————————————

Corrigé 44

Soit $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}^p$ de sa tribu borélienne (pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$). on suppose que f est mesurable par rapport à $x \in \mathbb{R}^N$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, et que f est continue a gauche par rapport a $y \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.
Pour $n > 1$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose : $a_p^n = \frac{p}{n}$, $p \in \mathbb{Z}$; on définit la fonction f_n, $n > 1$, de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x, y) = f(x, a_p^n), \text{ si } y \in [a_p^n, a_{p+1}^n[$$

On se limite à $N = 1$.

1. Montrer que f_n converge simplement vers f lorsque $n \to +\infty$.

——————————————**corrigé**——————————————

Soit $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a donc $f_n(x, y) = f(x, \frac{p}{n})$ avec $\frac{p}{n} \leq y < \frac{p}{n} + \frac{1}{n}$. Noter que x et y sont fixés et que p dépend de n. Quand $n \to \infty$, on a donc $\frac{p}{n} \to y$ avec $\frac{p}{n} \leq y$. Comme $f(x, \cdot)$ est continue à gauche en y, on a donc $f(x, \frac{p}{n}) \to f(x, y)$ quand $n \to \infty$, c'est-à-dire $f_n(x, y) \to f(x, y)$ quand $n \to \infty$.

————————————————————————————

2. Montrer que f_n est mesurable. [On pourra utiliser, sans le démontrer, le fait que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ si $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci est démontré dans l'exercice 2.6 page 43.]

——————————————**corrigé**——————————————

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $p \in \mathbb{Z}$, on pose $g_p = f(\cdot, \frac{p}{n})$. On a donc, par hypothèse, g_p mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$. Il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ t.q. $y \in [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[$. On a alors $f_n(x, y) = g_p(x)$ et donc $f_n(x, y) \in C$ si et seulement $g_p(x) \in C$. On en déduit que :

$$f_n^{-1}(C) = \cup_{p\in\mathbb{Z}}(g_p^{-1}(C) \times [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[).$$

Comme g_p est mesurable, on a $g_p^{-1}(C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a aussi $[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $g_p^{-1}(C) \times [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (ceci est démontré dans l'exercice 2.6 page 43). Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est stable par union dénombrable, on en déduit $f_n^{-1}(C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et donc f_n mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

---

3. Montrer que f est mesurable.

corrigé

Comme f_n mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et que $f_n(x,y) \to f(x,y)$, quand $n \to \infty$, pour tout $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$, la propriété 3 de la proposition 3.5 donne que f est mesurable (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$).

Corrigé 45 (Tribu de Borel sur $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$)

1. Montrer que $\{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^\star\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

corrigé

On note $\mathcal{C}_1 = \{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^\star\}$.

- Comme $[0,\beta[$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et donc $T(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.
- Par stabilité d'une tribu par passage au complémentaire, on a $\{[\beta,\infty], \beta \in \mathbb{R}_+^\star\} \subset T(\mathcal{C}_1)$.
  Comme $[0,\infty] = [0,1[\cup[1,\infty] \in T(\mathcal{C}_1)$, on a aussi $\{[\alpha,\infty], \alpha \in \mathbb{R}_+\} \subset T(\mathcal{C}_1)$.
  Par stabilité d'une tribu par intersection, on a alors $\{[\alpha,\beta[, \alpha,\beta \in \mathbb{R}_+, \alpha < \beta\} \subset T(\mathcal{C}_1)$.
  Par stabilité d'une tribu par union dénombrable, on montre alors que $\{]\alpha,\beta[, \alpha,\beta \in \mathbb{R}_+, \alpha < \beta\} \subset T(\mathcal{C}_1)$ et $\{]\beta,\infty], \beta \in \mathbb{R}_+\} \subset T(\mathcal{C}_1)$.
  Comme tout ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles du type $]\alpha,\beta[$ (avec $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$), $[0,\beta[$ (avec $\beta \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$) et $]\beta,\infty]$ (avec $\beta \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$), on en déduit que tout ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ est dans $T(\mathcal{C}_1)$ et donc $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) \subset T(\mathcal{C}_1)$.

On a bien montré que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) = T(\mathcal{C}_1)$.

---

2. Montrer que $\{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^\star\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

corrigé

On note $\mathcal{C}_2 = \{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^\star\}$. Si $\beta \in \mathbb{R}_+^\star$, on remarque que $[0,\beta[= \cup_{\alpha\in\mathbb{Q}\cap\mathbb{R}_+^\star, \alpha<\beta}[0,\alpha[$. On en déduit que $[0,\beta[\in T(\mathcal{C}_2)$. On a donc $\mathcal{C}_1 \subset T(\mathcal{C}_2)$ et $T(\mathcal{C}_1) \subset T(\mathcal{C}_2)$.

Comme $T(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, on a aussi $T(\mathcal{C}_2) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

---

3. Montrer que $\{]0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^\star\}$ n'engendre pas $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

corrigé

On prend un ensemble E (ayant au moins 2 éléments) et une tribu T sur E différente de $\mathcal{P}(E)$ (par exemple, $T = \{\emptyset, E\}$). Soit alors $A \subset E$, $A \notin T$. On définit f de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par $f(x) = \infty$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ si $x \notin A$. Comme $A \notin T$, la fonction f est non mesurable. On a pourtant $f^{-1}(]0,\beta[) = \emptyset \in T$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^\star$. Ceci montre que $\{]0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^\star\}$ n'engendre pas $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Corrigé 46

Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On se propose de montrer que le graphe de f est un borélien de $\mathbb{R}^2$. On admettra le résultat suivant, vu en TD :

$$A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2). \tag{14.1}$$

On munit aussi $\mathbb{R}^2$ de sa tribu borélienne. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $F(x,y) = f(x)$ et $H(x,y) = y$.

1. Montrer que F et H sont mesurables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

corrigé

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a $F^{-1}(A) = f^{-1}(A) \times \mathbb{R}$. Comme f est mesurable, $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, (14.1) donne $f^{-1}(A) \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et donc $F^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On a donc F mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Le fait que H est mesurable se démontre de manière semblable en remarquant que $H^{-1}(A) = \mathbb{R} \times A$ (ou en utilisant la continuité de H).

---

2. On pose $G(f) = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2\,;\, y = f(x)\}$ ($G(f)$ est donc le graphe de f). Montrer que $G(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

corrigé

L'ensemble de fonctions mesurables est un espace vectoriel, on a donc $F - H$ mesurable. On en déduit que $G(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ en remarquant que $G(f) = (F-H)^{-1}(\{0\})$ et $\{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Corrigé 47 (mesurabilité au sens de Lusin)

Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts de $\mathbb{R}^N$. On rappelle (cf. cours) que m est nécessairement régulière (c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F fermé et O ouvert t.q. $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) < \varepsilon$).

Soit $f \in \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. On dit que f est "mesurable au sens de Lusin" si pour tout compact K et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K_1 compact, $K_1 \subset K$, t.q. $m(K \setminus K_1) \le \varepsilon$ et $f_{|_{K_1}} \in C(K_1, \mathbb{R})$.

1. On suppose, dans cette question, que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Montrer que f est mesurable au sens de Lusin. [Construire K_1 avec K, F et O, où F et O sont donnés par la régularité de m appliquée à l'ensemble A.]

corrigé

Soit K compact et $\varepsilon > 0$. Par la régularité de m, il existe F fermé et O ouvert t.q. $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) < \varepsilon$. On prend $K_1 = (K \cap F) \cup (K \cap O^c)$.

Les ensembles $K \cap F$ et $K \cap O^c$ sont fermés (car l'intersection d'un compact et d'un fermé est un compact). L'ensemble K_1 est donc compact car il est l'union de deux compacts. Comme $K_1 = K \setminus (O \setminus F)$, on a bien $K_1 \subset K$ et $(K \setminus K_1) \subset (O \setminus F)$. On en déduit $m(K \setminus K_1) \le m(O \setminus F) \le \varepsilon$.

On montre maintenant que $f_{|_{K_1}} \in C(K_1, \mathbb{R})$. Soit $x \in K_1$. On distingue deux cas :

Premier cas. Si $x \in K \cap F$, on a alors $x \in O$. Comme O est ouvert il existe δ t.q. $B(x,\delta) \subset O$ (où $B(x,\delta)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon δ). On a donc $K_1 \cap B(x,\delta) \subset K \cap F \subset A$. Ce qui prouve que $f_{|_{K_1}}$ est constante et égale à 1 sur $K_1 \cap B(x,\delta)$ et donc $f_{|_{K_1}}$ est continue en x (car constante dans un voisinage de x).

Deuxième cas. Si $x \in K \cap O^c$, on raisonne de manière similaire. On a $x \in F^c$. Comme F^c est ouvert il existe δ t.q. $B(x,\delta) \subset F^c$. On a donc $K_1 \cap B(x,\delta) \subset K \cap O^c \subset A^c$. Ce qui prouve que $f_{|_{K_1}}$ est constante et égale à 0 sur $K_1 \cap B(x,\delta)$ et donc $f_{|_{K_1}}$ est continue en x.

---

2. On suppose, dans cette question, que f est étagée (c'est-à-dire $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$). Montrer que f est mesurable au sens de Lusin.

————————————————**corrigé**————————————————

Il existe $n \in \mathbb{N}^\star$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. On pose $f_i = 1_{A_i}$, de sorte que $f = \sum_{i=1}^n a_i f_i$.

Soit K compact et $\varepsilon > 0$. Par la question 1, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $K_1^{(i)}$ compact, $K_1^{(i)} \subset K$, t.q. $m(K \setminus K_1^{(i)}) \leq \varepsilon/n$ et $(f_i)_{|_{K_1^{(i)}}} \in C(K_1^{(i)}, \mathbb{R})$. On prend alors :

$$K_1 = \cap_{i=1}^n K_1^{(i)}.$$

On a bien K_1 compact (car intersection de compacts), $K_1 \subset K$. On a aussi $(K \setminus K_1) = \cup_{i=1}^n (K \setminus K_1^{(i)})$ et donc :

$$m(K \setminus K_1) \leq \sum_{i=1}^n m(K \setminus K_1^{(i)}) \leq \varepsilon.$$

Enfin, $f_{|K_1}$ est continue car $f_{|K_1} = \sum_{i=1}^n a_i (f_i)_{|K_1}$ et $(f_i)_{|K_1}$ est continue (puisque $(f_i)_{K_1^{(i)}}$ est continue et $K_1 \subset K_1^{(i)}$).

————————————————————————————————

3. On suppose que f est mesurable (c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$). Montrer que f est mesurable au sens de Lusin. [On rappelle qu'une fonction mesurable est limite simple de fonctions étagées. On pourra utiliser le théorème d'Egorov, Théorème 3.2, et la question précédente.]

————————————————**corrigé**————————————————

Comme $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ t.q. $f_n \to f$ p.p..

Soit K compact et $\varepsilon > 0$. Par la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $K_1^{(n)}$ compact, $K_1^{(n)} \subset K$, t.q. $m(K \setminus K_1^{(n)}) \leq 2^{-n}$ et $(f_n)_{|_{K_1^{(n)}}} \in C(K_1^{(n)}, \mathbb{R})$. On prend tout d'abord :

$$K_2 = \cap_{n \in \mathbb{N}} K_1^{(n)}.$$

On a bien K_2 compact (car intersection de compacts), $K_2 \subset K$. On a aussi $(K \setminus K_2) = \cup_{n \in \mathbb{N}} (K \setminus K_1^{(n)})$ et donc $m(K \setminus K_2) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m(K \setminus K_1^{(n)}) \leq 2\varepsilon$. Enfin, $(f_n)_{|K_2}$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour trouver K_1, on utilise maintenant théorème d'Egorov. Comme $f_n \to f$ p.p. sur K_2 et que $m(K_2) < \infty$, il existe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ t.q. $A \subset K_2$, $m(K_2 \setminus A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A. En utilisant la régularité de m , on trouve aussi $F \subset A$, F fermé et $m(A \setminus F) \leq \varepsilon$. On prend alors $K_1 = F$.

On a bien K_1 compact (car K_1 est fermé dans le compact K_2), $K_1 \subset K$. On a $(K \setminus K_1) = (K \setminus K_2) \cup (K_2 \setminus A) \cup (A \setminus F)$ et donc $m(K \setminus K_1) \leq 4\varepsilon$. Enfin $f_{|K_1}$ est continue car $f_{|K_1}$ est limite uniforme de la suite de fonctions continues $((f_n)_{|K_1})_{n \in \mathbb{N}}$.

————————————————————————————————

Corrigé 48 (V.a. mesurable par rapport à une autre v.a.)

Dans cet exercice, on démontre le théorème 3.1. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On veut veut montrer que Y est mesurable par rapport à la tribu engendrée par X (notée $\tau(X)$ si et seulement si il existe une fonction borélienne f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$ (c'est-à-dire , plus précisément, que $Y = f \circ X$).

1. Montrer que si Y est de la forme $Y = f(X)$ où f est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors Y est $\tau(X)$-mesurable.

corrigé

On rappelle que la tribu engendrée par X est $\tau(X) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $Y^{-1}(B) = X^{-1}(f^{-1}(B))$. Comme f est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ est muni de la tribu borélienne), on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \tau(X)$. Ce qui prouve que T est $\tau(X)$-mesurable.

On suppose maintenant que Y est $\tau(X)$-mesurable.

2. On suppose, dans cette question, qu'il existe une suite de réels (a_j) tels que $a_j \neq a_k$ pour $j \neq k$ et une suite d'événements (A_j) disjoints deux à deux tels que

$$Y = \sum_j a_j 1_{A_j}.$$

On suppose aussi que $\cup_j A_j = \Omega$. Montrer que, pour tout j, $A_j \in \tau(X)$ et qu'il existe une fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$.

corrigé

Soit $j \in \mathbb{N}$. Comme les A_i sont disjoints deux à deux, $a_i \neq a_k$ si $i \neq k$ et $\cup_i A_i = \Omega$, on a $A_j = Y^{-1}(\{a_j\})$. Comme $\{a_j\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et Y est τ-mesurable, on en déduit que $A_j \in \tau(X)$. (On rappelle aussi que $\tau(X) \subset \mathcal{A}$ car X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.)

Pour tout i, il existe $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $A_i = X^{-1}(B_i)$ (car $A_i \in \tau(X)$). Comme les A_i sont disjoints deux à deux, on a, si $i \neq j$, $B_i \cap B_j \cap \mathrm{Im}(X) = \emptyset$ (avec $\mathrm{Im}(X) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$). On peut donc supposer les B_i disjoints deux à deux en remplaçant chaque B_i ($i > 0$) par $B_i \setminus \cup_{j<i} B_j$.

On pose $f = \sum_i a_i 1_{B_i}$. La fonction f est bien une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $\omega \in \Omega$, il existe i t.q. $\omega \in A_i$ (car $\Omega = \cup_i A_i$), on a donc $X(w) \in B_i$ et donc $f(X(\omega)) = a_i = Y(\omega)$. Ce qui donne bien $f(X) = Y$.

---

3. Soit n un entier. On définit la fonction $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $\phi_n(x) = \frac{1}{n}[nx]$ où $[\cdot]$ désigne la partie entière. ($[x]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.)

   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi_n(x)$ converge vers x, quand $n \to \infty$.

   corrigé

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $0 \leq nx - [nx] < 1$ et donc $0 \leq x - \phi_n(x) < \frac{1}{n}$. Ce qui prouve que $\phi_n(x) \to x$ quand $n \to \infty$.

   (b) On pose $Y_n = \phi_n(Y)$. Montrer que Y_n est $\tau(X)$ mesurable.

   corrigé

   On remarque tout d'abord que ϕ_1 est borélienne. En effet, pour $p \in \mathbb{Z}$, on a $\phi_1^{-1}(\{p\}) = [p, p+1[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Puis, pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\phi_1^{-1}(B) = \cup_{p \in \mathbb{Z} \cap B} [p, p+1[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme $x \mapsto nx$ est continue, c'est une application borélienne. Par composition (et produit par $(1/n)$), on en déduit que la fonction ϕ_n est borélienne. On montre alors que Y_n est $\tau(X)$-mesurable, comme dans la première question car, pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $Y_n^{-1}(B) = Y^{-1}(\phi_n^{-1}(B)) \in \tau(X)$.

---

4. Terminer la preuve du théorème.

corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme l'ensemble des valeurs prises par Y_n (définie dans la troisième question) est au plus dénombrable, on peut appliquer la deuxième question. On obtient l'existence de $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, borélienne, t.q. $Y_n = f_n(X)$.

On note A l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente. A est donc aussi l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est de Cauchy. On en déduit que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car A peut s'écrire :

$$A = \cap_{n\in\mathbb{N}^\star} \cup_{N\in\mathbb{N}^\star} \cap_{p,q\geq N} (f_p - f_q)^{-1}([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]).$$

On pose maintenant $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ si $x \in A^c$. La fonction f est borélienne car f est limite simple des fonction boréliennes $f_n 1_{A^c}$ quand $n \to \infty$.

Enfin, si $\omega \in \Omega$, on a $Y_n(\omega) = f_n(X(\omega))$. La troisième question donne que $Y_n(\omega) = \phi_n(Y(\omega)) \to Y(\omega)$. On a donc $X(\omega) \in A$ et donc $f_n(X(\omega)) \to f(X(\omega))$. Ceci donne $Y(\omega) = f(X(\omega))$. On a bien montré que $Y = f(X)$ avec f borélienne.

Maintenant, on se demande dans quelle mesure la fonction f est unique. On note P_X la loi de X.

5. Soit f et g deux fonctions boréliennes t.q. $Y = f(X) = g(X)$. Montrer que

$$P_X(f = g) = 1.$$

corrigé

Soit $B = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)\}$. On a $B = (f-g)^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Si $\omega \in \Omega$, on a $f(X(\omega)) = g(X(\omega)) = Y(\omega)$ et donc $X(\omega) \in B$. Ceci prouve que $X^{-1}(B) = \Omega$ et donc que $P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = 1$, c'est-à-dire $P_X(f = g) = 1$.

Corrigé 49 (Composition de v.a.)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables alélatoires réelles. (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu des boréliens). On définit Z par

$$\forall \omega \in \Omega\,, \quad Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega).$$

Montrer que Z est une variable aléatoire.

corrigé

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$A_n = \{N = n\} = \{\omega \in \Omega,\, N(\omega) = n\}$$

et

$$B_n = Y_n^{-1}(B) = \{Y_n \in B\} = \{\omega \in \Omega,\, Y_n(\omega) \in B\}.$$

(Notre que l'ensemble des $A_n, n \in \mathbb{N}^\star$, forme une partition de Ω.) On va montrer que $Z^{-1}(B) = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}(A_n \cap B_n)$. En effet, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\omega \in A_{N(\omega)}$ et, si $\omega \in Z^{-1}(B)$, on a $Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega) \in B$. On a donc $\omega \in A_{N(\omega)} \cap B_{N(\omega)}$, ce qui donne bien $\omega \in \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}(A_n \cap B_n)$.
Réciproquement, si $\omega \in \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}(A_n \cap B_n)$, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\omega \in A_n \cap B_n$. On a donc $Z(\omega) = Y_n(\omega) \in B$. On a bien montré que $Z^{-1}(B) = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}(A_n \cap B_n)$.

Comme N et Y_n sont des v.a.r., on a $A_n, B_n \in \mathcal{A}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On en déduit que $Z^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Ceci donne bien que Z est mesurable.

N.B. : Une autre démonstration possible est de remarquer que $Z = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} 1_{A_n} Y_n$.

Corrigé 50 (Evénements, tribus et v.a. indépendantes)
Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (Indépendance de 2 évènements) Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Montrer que A_1 et A_2 sont indépendants (c'est-à-dire $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$) si et seulement si les tribus $\tau(\{A_1\})$ et $\tau(\{A_2\})$ sont indépendantes (c'est-à-dire $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2)$ pour tout $B_1 \in \tau(\{A_1\})$ et $B_2 \in \tau(\{A_2\})$).

   corrigé

   On a $\tau(\{A_1\}) = \{\emptyset, A_1, A_1^c, E\}$ et $\tau(\{A_2\}) = \{\emptyset, A_2, A_2^c, E\}$.

   Si les tribus $\tau(\{A_1\})$ et $\tau(\{A_2\})$ sont indépendantes on donc :

   $$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2) \text{ pour tout } B_1 \in \{\emptyset, A_1, A_1^c, E\} \text{ et tout } \{\emptyset, A_2, A_2^c, E\}. \tag{14.2}$$

   En prenant, dans (14.2), $B_1 = A_1$ et $B_2 = A_2$, on en déduit que A_1 et A_2 sont indépendants.

   Réciproquement, on suppose que A_1 et A_2 sont indépendants. Pour montrer que $\tau(\{A_1\})$ et $\tau(\{A_2\})$ sont indépendantes, il suffit de montrer (14.2). On remarque tout d'abord que (14.2) est vraie si $B_1 = \emptyset$ ou E et si $B_2 = \emptyset$ ou E (l'hypothèse d'indépendance de A_1 et A_2 est même inutile). Puis, on remarque que l'hypothèse d'indépendance de A_1 et A_2 donne que (14.2) est vraie si $B_1 = A_1$ et $B_2 = A_2$. Enfin, on remarque que C_1 et C_2 indépendants implique que C_1 et C_2^c sont indépendants. En effet, on a :

   $$P(C_1 \cap C_2^c) = P(C_1 \setminus (C_1 \cap C_2)) = P(C_1) - P(C_1 \cap C_2).$$

   Comme C_1 et C_2 sont indépendants, on en déduit :

   $$P(C_1 \cap C_2^c) = P(C_1) - P(C_1)P(C_2) = P(C_1)(1 - P(C_2)) = P(C_1)P(C_2^c).$$

   En appliquant cette propriété avec $C_1 = A_1$ et $C_2 = A_2$, on montre donc que A_1 et A_2^c sont indépendants. En prenant maintenant $C_1 = A_2^c$ et $C_2 = A_1$, on montre alors que A_1^c et A_2^c sont indépendants. Enfin, En prenant $C_1 = A_2$ et $C_2 = A_1$, on montre que A_1^c et A_2 sont indépendants. On a ainsi montré que (14.2) est vraie, c'est-à-dire que les tribus $\tau(\{A_1\})$ et $\tau(\{A_2\})$ sont indépendantes.

   ---

2. (Indépendance de n évènements, $n \geq 2$) Soit $n \geq 2$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que les événements $A_1, \ldots, A_n$ vérifient "$P(\cap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i)$ pour tout $I \subset \{1, \ldots, n\}$" si et seulement si les tribus $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_n\})$ sont indépendantes (c'est-à-dire $P(\cap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i)$ pour tout $B_i \in \tau(\{A_i\}), i \in \{1, \ldots, n\}$).

   corrigé

   Pour $p \in \{0, \ldots, n\}$, on introduit la propriété $\mathcal{P}_p$ suivante :

   $$P(\cap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i) \text{ si } B_i \in \tau(\{A_i\}) \text{ pour } i \leq p \text{ et}$$
   $$B_i \in \{\emptyset, A_i, E\} \text{ pour } i > p.$$

Il est facile de voir que la propriété $\mathcal{P}_0$ est équivalente à "$P(\cap_{i\in I}A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i)$ pour tout $I \subset \{1,\ldots,n\}$". La propriété $\mathcal{P}_n$ signifie que les tribus $\tau(\{A_1\}),\ldots,\tau(\{A_n\})$ sont indépendantes.

Le fait que $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_0$ est immédiat. On suppose maintenant que $\mathcal{P}_0$ est vérifiée et va montrer que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée. Pour cela, on raisonne par récurrence sur p. On suppose donc que $\mathcal{P}_{p-1}$ est vérifiée pour un $p \in \{1,\ldots,n\}$ et on doit montrer que $\mathcal{P}_p$ est vérifiée. Pour montrer que $\mathcal{P}_p$ est vérifiée, il suffit de prendre les B_i t.q. $B_i \in \tau(\{A_i\})$ pour $i \le p-1$, $B_p = A_p^c$ et $B_i \in \{\emptyset, A_i, E\}$ pour $i < p$ et de montrer que $P(\cap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i)$ (car les autres choix de B_p sont directement donnés par $\mathcal{P}_{p-1}$). Or, on a, pour ce choix des B_i :

$$P(\cap_{i=1}^n B_i) = P(\cap_{i=1}^n C_i) - P(\cap_{i=1}^n D_i),$$

avec $C_i = D_i = B_i$ si $i \ne p$, $C_p = E$ et $D_p = A_p$. En utilisant $\mathcal{P}_{p-1}$ on a $P(\cap_{i=1}^n C_i) = \prod_{i=1}^n P(C_i)$ et $P(\cap_{i=1}^n D_i) = \prod_{i=1}^n P(D_i)$ et donc :

$$\begin{aligned} P(\cap_{i=1}^n B_i) &= (\prod_{i\ne p} P(B_i))(P(E) - P(A_p)) \\ &= (\prod_{i\ne p} P(B_i))P(A_p^c) = \prod_{i=1}^n P(B_i). \end{aligned}$$

On a ainsi montré que $\mathcal{P}_p$ est vérifiée. Par récurrence (finie) sur p, on montre donc que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée, ce qui prouve que les tribus $\tau(\{A_1\}),\ldots,\tau(\{A_n\})$ sont indépendantes.

---

3. En donnant un exemple (avec $n \ge 3$), montrer que l'on peut avoir n évévements, notés $A_1,\ldots,A_n$, indépendants deux à deux, sans que les événements $A_1,\ldots,A_n$ soient indépendants.

corrigé

On prend, par exemple, $E = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$ et P donnée par $P(\{i\}) = \frac{1}{4}$, pour $i \in \{1,2,3,4\}$. Puis, on choisit $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,3\}$ et $A_3 = \{2,3\}$. Les trois évévements A_1, A_2, A_3 sont bien indépendants deux à deux (car $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) = \frac{1}{4}$ si $i,j \in \{1,2,3\}$, $i \ne j$) mais ne sont pas indépendants car $0 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \ne \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

---

4. Soit $A \in \mathcal{A}$.

(a) On suppose que $A \in \mathcal{A}_1$ et $A \in \mathcal{A}_2$ et que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus indépendantes (et contenues dans $\mathcal{A}$). Montrer que $P(A) \in \{0,1\}$.

corrigé

Comme $A \in \mathcal{A}_1$, $A \in \mathcal{A}_2$ et que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus indépendantes, on doit avoir $P(A \cap A) = P(A)P(A)$, c'est-à-dire $P(A)(1 - P(A)) = 0$ et donc $P(A) \in \{0,1\}$.

(b) Montrer que $P(A) \in \{0,1\}$ si et seulement si A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$.

corrigé

Si A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$, A est indépendant avec lui même. On en déduit, comme à la question précédente que $P(A) \in \{0,1\}$.

Réciproquement, on suppose maintenant que $P(A) \in \{0,1\}$ et on distingue deux cas.

Premier cas. On suppose que $P(A) = 0$. On a alors pour tout $B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \subset A$ et donc (par monotonie de P) $0 \le P(A \cap B) \le P(A) = 0$. On en déduit $P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$. Ce qui prouve que A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$.

Deuxième cas. On suppose que $P(A) = 1$. On a alors $P(A^c) = 0$ et, pour tout $B \in \mathcal{A}$, $P(A \cap B) = 1 - P((A \cap B)^c) = 1 - P(A^c \cup B^c)$. Or (par monotonie et σ-sous addivité de P) $P(B^c) \le P(A^c \cup B^c) \le P(A^c)+P(B^c) = P(B^c)$. Donc, $P(A^c \cup B^c) = P(B^c)$ et donc $P(A \cap B) = 1-P(B^c) = P(B) = P(A)P(B)$. Ce qui prouve que A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$.

---

5. Soit $n \ge 1$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants si et seulement si les v.a. $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ sont indépendantes.

—————————————corrigé—————————————

Si X est une v.a.r., la tribu engendrée par X est $\tau(X) = \{X^{-1}(B),\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Pour $A \in \mathcal{A}$, on a donc $\tau(1_A) = \{\emptyset, A, A^c, E\}$, c'est-à-dire $\tau(1_A) = \tau(\{A\})$. L'indépendance des événements $A_1, \ldots, A_n$ correspond (par la définition 2.25) à l'indépendance des tribus $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_1\})$. L'indépendance des v.a.r. $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ correspond (par la définition 3.12)) à l'indépendance des tribus $\tau(1_{A_1}), \ldots, \tau(1_{A_n})$. Comme $\tau(\{A_i\}) = \tau(1_{A_i})$, pour tout i, on en déduit que les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants si et seulement si les v.a. $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ sont indépendantes.

Corrigé 51 (De loi uniforme à loi donnée)

Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, X une v.a.r. et U une v.a.r. de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Soit F la fonction de répartition de X (i.e. $F(x) = P(X \le x)$ pour $x \in \mathbb{R}$). Pour $u \in \mathbb{R}$, on définit $G(u)$ de la manière suivante :

$$G(u) = \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \ge u\},\ \text{si } u \in]0,1[,$$
$$G(u) = 0,\ \text{si } u \notin]0,1[.$$

On pose $Y = G(U)$ (c'est-à-dire $Y(\omega) = G(U(\omega))$ pour tout $\omega \in E$).

1. Soit $u \in]0,1[$, montrer que

$$\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \ge u\} \ne \emptyset,\ \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \ge u\} \in \mathbb{R} \text{ et } \{x \in \mathbb{R};\ F(x) \ge u\} = [G(u), +\infty[.$$

2. Montrer que Y est une v.a.r..
3. Montrer que Y a la même loi que X. [On pourra montrer que $P(G(U) \le x) = P(U \le F(x))$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.]

—————————————corrigé—————————————

En attente

Corrigé 52 (Convergence en mesure) $(\star\star)$

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si il existe f et g fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ telles que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f et g, alors $f = g$ p.p..

   [*On pourra commencer par montrer que, pour tout* $\delta > 0$, $m(\{x \in E\,;\, |f(x) - g(x)| > \delta\}) = 0$].

—————————————corrigé—————————————

Pour $h\ :\ E \to \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, on note toujours $\{h > \delta\} = \{x \in E\,;\, h(x) > \delta\}$, $\{h \ge \delta\} = \{x \in E\,;\, h(x) \ge \delta\}$, $\{h < \delta\} = \{x \in E\,;\, h(x) < \delta\}$ et $\{h \le \delta\} = \{x \in E\,;\, h(x) \le \delta\}$.

Soit $\delta > 0$. Pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f(x) - g(x)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)|$. On en déduit $\{|f - f_n| \le \frac{\delta}{2}\} \cap \{|f_n - g| \le \frac{\delta}{2}\} \subset \{|f - g| \le \delta\}$ et donc, en passant au complémentaire,

$$\{|f-g|>\delta\} \subset \{|f-f_n|>\frac{\delta}{2}\} \cup \{|f_n-g|>\frac{\delta}{2}\}. \tag{14.3}$$

Par sous additivité de m, on a donc $m(\{|f-g|>\delta\}) \le m(\{|f-f_n|>\frac{\delta}{2}\}) + m(\{|f_n-g|>\frac{\delta}{2}\})$. En passant à la limite quand $n \to \infty$, on en déduit $m(\{|f-g|>\delta\}) = 0$.

On remarque maintenant que $\{x \in E\,;\, f(x) \neq g(x)\} = \{|f-g|>0\} = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}\{|f-g|>\frac{1}{n}\}$ et donc, par σ-sous additivité de m, on obtient $m(\{x \in E\,;\, f(x) \neq g(x)\}) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(\{|f-g|>\frac{1}{n}\}) = 0$ et donc $f = g$ p.p..

---

2. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n+g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f+g \in \mathcal{M}$.

——————————————**corrigé**——————————————

Soit $\delta > 0$. En reprenant la démonstration de (14.3), on montre que

$$\{|f+g-(f_n+g_n)|>\delta\} \subset \{|f-f_n|>\frac{\delta}{2}\} \cup \{|g-g_n|>\frac{\delta}{2}\}.$$

Par sous additivité de m, ceci donne $m(\{|f+g-(f_n+g_n)|>\delta\}) \le m(\{|f-f_n|>\frac{\delta}{2}\}) + m(\{|g-g_n|>\frac{\delta}{2}\})$ et donc que $m(\{|f+g-(f_n+g_n)|>\delta\}) \to 0$ quand $n \to \infty$. On a bien montré que $f_n+g_n \to f+g$ en mesure quand $n \to \infty$.

---

3. On suppose maintenant que m est une mesure finie. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers g, alors $(f_n\,g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f\,g \in \mathcal{M}$. [*On pourra commencer par montrer que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que, si $n \ge n_0$ et $k \ge k_0$, on a $m(\{x \in E\,;\,|f_n(x)| \ge k\}) \le \varepsilon$*]. Donner un contre-exemple au résultat précédent lorsque $m(E) = \infty$.

——————————————**corrigé**——————————————

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, la démonstration de (14.3) donne ici $\{|f_n|>k\} \subset \{|f|>\frac{k}{2}\} \cup \{|f_n-f|>\frac{k}{2}\}$ et donc

$$m(\{|f_n|>k\}) \le m(\{|f|>\frac{k}{2}\}) + m(\{|f_n-f|>\frac{k}{2}\}. \tag{14.4}$$

On pose $A_k = \{|f|>\frac{k}{2}\}$. On a $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T$, $A_{k+1} \subset A_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\cap_{k\in\mathbb{N}}A_k = \emptyset$ (car f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$). Comme E est de mesure finie, on a $m(A_k) < \infty$ (pour tout k) et on peut appliquer la continuité décroissante de m. Elle donne :

$$m(A_k) \to 0, \text{ quand } n \to \infty. \tag{14.5}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par (14.5), il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $m(A_{k_0}) \le \frac{\varepsilon}{2}$. Par la convergence en mesure de f_n vers f, il existe alors n_0 t.q. $m(\{|f_n-f|>\frac{k_0}{2}\} \le \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \ge n_0$ et l'inégalité (14.4) donne $m(\{|f_n|>k_0\}) \le \varepsilon$ si $n \ge n_0$. On en déduit (comme $\{|f_n|>k\} \subset \{|f_n|>k_0\}$ si $k \ge k_0$) :

$$n \ge n_0,\ k \ge k_0 \Rightarrow m(\{|f_n|>k\}) \le \varepsilon. \tag{14.6}$$

On montre maintenant que $f_ng_n \to fg$ en mesure.

Soit $\delta > 0$, on veut montrer que $m(\{|f_n g_n - fg| > \delta\} \to 0$ quand $n \to \infty$. Pour cela, on remarque que $|f_n g_n - fg| \leq |f_n||g_n - g| + |g||f_n - f|$. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on a donc

$$\{|f_n| \leq k\} \cap \{|g_n - g| \leq \frac{\delta}{2k}\} \cap \{|g| \leq k\} \cap \{|f_n - f| \leq \frac{\delta}{2k}\} \subset \{|f_n g_n - fg| \leq \delta\}$$

et, en passant au complémentaire,

$$\{|f_n g_n - fg| > \delta\} \subset \{|f_n| > k\} \cup \{|g_n - g| > \frac{\delta}{2k}\} \cup \{|g| > k\} \cup \{|f_n - f| > \frac{\delta}{2k}\},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} m(\{|f_n g_n - fg| > \delta\}) &\leq m(\{|f_n| > k\}) + m(\{|g_n - g| > \frac{\delta}{2k}\}) \\ &\quad + m(\{|g| > k\}) + m(\{|f_n - f| > \frac{\delta}{2k}\}). \end{aligned} \tag{14.7}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe k_0 et n_0 de manière à avoir (14.6). En utilisant (14.5) avec g au lieu de f, il existe aussi k_1 t.q. $m(\{|g| > k\}) \leq \varepsilon$ pour $k \geq k_1$. On choisit alors $k = \max\{k_0, k_1\}$. En utilisant la convergence en mesure de f_n vers f et de g_n vers g, il existe n_1 t.q. $m(\{|g_n - g| > \frac{\delta}{2k}\}) \leq \varepsilon$ et $m(\{|f_n - f| > \frac{\delta}{2k}\}) \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_1$. Finalement, avec $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ on obtient :

$$n \geq n_2 \Rightarrow m(\{|f_n g_n - fg| > \delta\}) \leq 4\varepsilon.$$

Ce qui prouve la convergence en mesure de $f_n g_n$ vers fg, quand $n \to \infty$.

Pour obtenir un contre-exemple à ce résultat si $m(E) = \infty$, on prend $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \geq 1$ on définit f_n par $f_n(x) = \frac{1}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on définit g_n par $g_n(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il est clair que $f_n \to 0$ en mesure, $g_n \to g$ en mesure, avec $g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f_n g_n \not\to 0$ en mesure car $m(\{|f_n g_n| > \delta\}) = \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $\delta > 0$.

Corrigé 53 (Convergence presque uniforme et convergence p.p.)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ (c'est-à-dire une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$) et $f \in \mathcal{M}$. On suppose que $f_n \to f$ presque uniformément (c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \in T$ t.q. $m(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c). Montrer que $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

———————————corrigé———————————

Soit $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) \leq \frac{1}{n}$ et $f_n \to f$ uniformément sur A_n^c. On pose $A = \cap_{n\in\mathbb{N}^\star} A_n$, de sorte que $A \in T$ et $m(A) = 0$ car $m(A) \leq m(A_n) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Soit $x \in A^c$, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $x \in A_n$ et on a donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$. Comme $m(A) = 0$, ceci donne bien $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

Corrigé 54 (Théorème d'Egorov) $(\star\star)$
Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ p.p., lorsque $n \to +\infty$.
Pour $j \in \mathbb{N}^\star$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$A_{n,j} = \{x\,;\, |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{j}\}, \text{ et } B_{n,j} = \bigcup_{p\geq n} A_{p,j} \tag{14.8}$$

1. Montrer que à j fixé, $\lim_{n\to+\infty} m(B_{n,j}) = 0$.

corrigé

On remarque d'abord que $A_{n,j} = (|f - f_n|)^{-1}([\frac{1}{j}, \infty[) \in T$ car $|f - f_n| \in \mathcal{M}$. On a donc aussi $B_{n,j} \in T$.

D'autre part, comme $f_n \to f$ p.p., lorsque $n \to +\infty$, il existe $C \in T$ t.q. $m(C) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in C^c$.

On va montrer que $m(B_{n,j}) \to 0$, quand $n \to \infty$ (on rappelle que $j \in \mathbb{N}^\star$ est fixé), en utilisant la continuité décroissante de m. On remarque en effet que $m(B_{n,j}) < \infty$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) car $m(E) < \infty$ (et c'est seulement ici que cette hypothèse est utile), puis que $B_{n+1,j} \subset B_{n,j}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La continuité de décroissante de m donne donc

$$m(B_{n,j}) \to m(\cap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}).$$

Or, si $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}$, on a $x \in B_{n,j}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ t.q. $x \in A_{n,j}$, c'est-à-dire $|f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{j}$. Comme j est fixé, ceci montre que $f_n(x) \not\to f(x)$ quand $n \to \infty$, et donc que $x \in C$. On en déduit que $\cap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j} \subset C$ et donc que $m(\cap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}) = 0$ et finalement que $m(B_{n,j}) \to 0$, quand $n \to \infty$.

---

2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A tel que $m(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c lorsque $n \to +\infty$. En déduire le théorème d'Egorov (théorème 3.2).
[*On cherchera A sous la forme : $\bigcup_{j\in\mathbb{N}^\star} B_{n_j,j}$, avec un choix judicieux de n_j.*]

corrigé

Soit $\varepsilon > 0$. pour tout $j \in \mathbb{N}^\star$, la question précédente donne qu'il existe $n(j) \in \mathbb{N}$ t.q. $m(B_{n,j}) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$. On pose $B = \cup_{j\in\mathbb{N}^\star} B_{n(j),j}$, de sorte que $B \in T$ et, par σ-sous additivité de m :

$$m(B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(B_{n(j),j}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

On montre maintenant que $f_n \to f$ uniformémement sur B^c (ce qui conclut la question en prenant $A = B$).

Comme $B = \cup_{j\in\mathbb{N}^\star}(\cup_{p\geq n(j)} A_{p,j})$, on a, en passant au complémentaire, $B^c = \cap_{j\in\mathbb{N}^\star}(\cap_{p\geq n(j)} A^c_{p,j})$.

Soit $\eta > 0$. Il existe $j \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\frac{1}{j} \leq \eta$. Soit $x \in B^c$, comme $x \in \cap_{p\geq n(j)} A^c_{p,j}$, on a donc $x \in A^c_{p,j}$ pour tout $p \geq n(j)$, c'est-à-dire :

$$p \geq n(j) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{j} \leq \eta.$$

Comme $n(j)$ ne dépend que de j (et donc que de η) et pas de $x \in B^c$, ceci prouve la convergence uniforme de f_n vers f sur B^c.

---

3. Montrer, par un contre exemple, qu'on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$ dans la question précédente.

corrigé

On prend, par exemple, $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[, \lambda)$ (plus précisément, λ est ici la restriction à $\mathcal{B}(]0,1[)$ de λ, qui est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on prend $f_n = 1_{]0,\frac{1}{n}[}$, de sorte que $f_n \to 0$ p.p., quand $n \to \infty$ (et même, $f_n(x) \to 0$ pour tout $x \in]0,1[$).

Soit maintenant $B \in \mathcal{B}(]0,1[)$ t.q. $\lambda(B) = 0$. On va montrer que f_n ne peut pas tendre uniformément vers 0 sur B^c (ceci prouve bien qu'on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$ dans la question précédente, c'est-à-dire $\varepsilon = 0$ dans le théorème d'Egorov).

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, Il est clair que $B^c \cap]0, \frac{1}{n}[\neq \emptyset$ (car sinon, $]0, \frac{1}{n}[\subset B$ et donc $\frac{1}{n} = \lambda(]0, \frac{1}{n}[) \leq \lambda(B) = 0$). Il existe donc $x \in B^c$ t.q. $f_n(x) = 1$. On a donc

$$\sup_{x \in B^c} |f_n(x)| = 1,$$

ce qui prouve bien que f_n ne tends pas uniformément vers 0 sur B^c, quand $n \to \infty$.

---

4. Montrer, par un contre exemple, que le résultat du théorème d'Egorov est faux lorsque $m(E) = +\infty$.

corrigé

On prend, par exemple, $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\lambda)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on prend $f_n = 1_{]n,n+1[}$, de sorte que $f_n \to 0$ p.p., quand $n \to \infty$ (et même, $f_n(x) \to 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Soit maintenant $0 < \varepsilon < 1$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(B) \leq \varepsilon$. On va montrer que f_n ne peut pas tendre uniformément vers 0 sur B^c (ceci prouve bien que théorème d'Egorov peut être mis en défaut si $m(E) = \infty$).

Soit $n \in \mathbb{N}$, Il est clair que $B^c \cap]n, n+1[\neq \emptyset$ (car sinon, $]n, n+1[\subset B$ et donc $1 = \lambda(]n, n+1[) \leq \lambda(B) \leq \varepsilon$, en contradiction avec $\varepsilon < 1$). Il existe donc $x \in B^c$ t.q. $f_n(x) = 1$. On a donc

$$\sup_{x \in B^c} |f_n(x)| = 1,$$

ce qui prouve bien que f_n ne tends pas uniformément vers 0 sur B^c, quand $n \to \infty$.

Corrigé 55 (Convergence en mesure et convergence p.p.)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On rappelle que, par définition, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en mesure vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} m(\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0. \tag{14.9}$$

1. On suppose ici que $m(E) < +\infty$.

(a) Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers f presque partout, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers f en mesure [*Utiliser le théorème d'Egorov.*]

corrigé

Soit $\varepsilon > 0$, on veut montrer que $m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = m(\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \to 0$, quand $n \to \infty$, c'est-à-dire que

$$\begin{array}{l} \forall \delta > 0, \ \exists n_0, \ \text{t.q.} \\ n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq \delta. \end{array} \tag{14.10}$$

Soit donc $\delta > 0$. D'après le théorème d'Egorov (théorème 3.2 page 63), il existe $A \in T$ t.q. $m(A) \leq \delta$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c. La convergence uniforme sur A^c nous donne donc l'existence de n_0 t.q., $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in A^c$, si $n \geq n_0$. On a donc, pour $n \geq n_0$, $\{|f_n - f| > \varepsilon\} \subset A$, et donc $m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq m(A) \leq \delta$. On a bien montré (14.10) et donc la convergence en mesure de f_n vers f, quand $n \to \infty$.

(b) Montrer par un contrexemple que la réciproque de la question précédente est fausse.

———————————————corrigé———————————————

On reprend ici un exemple vu au début de la section 4.7 pour montrer que la convergence dans L^1 n'entraîne pas la convergence presque partout.

On prend $(E, T, m) = ([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), \lambda)$ (on a bien $m(E) < \infty$) et on construit ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe un unique $p \in \mathbb{N}^\star$ et $\frac{(p-1)p}{2} \le n < \frac{p(p+1)}{2}$. On pose alors $k = n - \frac{(p-1)p}{2}$ et on prend $f_n = 1_{[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}[}$. Il faut noter ici que $k + 1 \le \frac{p(p+1)}{2} - \frac{(p-1)p}{2} = p$ et donc $\frac{k+1}{p} \le 1$.

Lorsque $n \to \infty$, on a $p \to \infty$ et donc $m(\{|f_n| > 0\}) = \frac{1}{p} \to 0$. Ce qui prouve, en particulier, que $f_n \to 0$ en mesure, quand $n \to \infty$.

Enfin, on remarque que, pour tout $x \in [0, 1[$, $f_n(x) \not\to 0$ quand $n \to \infty$. En effet, soit $x \in [0, 1[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On choisit $p \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\frac{(p-1)p}{2} \ge n$, il existe alors $k \in \mathbb{N}$ t.q. $0 \le k \le p-1$ et $x \in [\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}[$, de sorte que $f_{\varphi(n)}(x) = 1$ en choisissant $\varphi(n) = \frac{(p-1)p}{2} + k$. On a ainsi construit $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, sous suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car $\varphi(n) \ge n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) t.q. $f_{\varphi(n)}(x) \not\to 0$ quand $n \to \infty$. ceci montre bien que $f_n(x) \not\to 0$ quand $n \to \infty$.

———————————————————————————————

Corrigé 56 (Convergence en mesure et fonctions continues)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ et X une fonction mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$. On suppose que $X_n \to X$ en mesure, quand $n \to \infty$.

1. Soit φ une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en mesure, quand $n \to \infty$.

   ———————————————corrigé———————————————

   En attente

   ———————————————————————————————

2. On suppose, dans cette question, que m est une probabilité (on a donc $m(\Omega) = 1$, les fonctions mesurables sont des v.a.r. et la convergence en mesure est la convergence en probabilité). Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en probabilité, quand $n \to \infty$. [On pourra commencer par remarquer que $\lim_{a\to+\infty} m(\{|X| \ge a\}) = 0$.]

   ———————————————corrigé———————————————

   En attente

   ———————————————————————————————

3. On prend ici $(\Omega, \mathcal{A}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement X_n et X), qu'on peut avoir $X_n \to X$ en mesure (quand $n \to \infty$) et $\varphi(X_n) \not\to \varphi(X)$ en mesure pour certaines fonctions φ continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   ———————————————corrigé———————————————

   En attente

   ———————————————————————————————

Corrigé 57 (Essentiellement uniforme versus presque uniforme)

Soit (E, T, m) un espace mesuré. Pour $f \in \mathcal{M}$, on pose $A_f = \{C \in \mathbb{R}, |f| \le C \text{ p.p.}\}$. Si $A_f \neq \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \inf A_f$. Si $A_f = \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \infty$.

1. Soit $f \in \mathcal{M}$ t.q. $A_f \neq \emptyset$. Montrer que $\|f\|_\infty \in A_f$.

corrigé

Comme $A_f \neq \emptyset$ et $\|f\|_\infty = \inf A_f$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_f$ t.q. $a_n \downarrow \|f\|_\infty$ quand $n \to \infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, de $a_n \in A_f$ on déduit qu'il existe $B_n \in T$ t.q. $m(B_n) = 0$ et $|f(x)| \leq a_n$ pour tout $x \in B_n^c$.

On pose $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. On a donc $B \in T$ et, par σ-additivité de m, $m(B) = 0$ (car $m(B) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n)$). Enfin, pour tout $x \in B^c = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n^c$, on a $|f(x)| \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant $n \to \infty$, on en déduit que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$. On a donc $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p., c'est-à-dire $\|f\|_\infty \in A_f$.

---

2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}$.

(a) On suppose, dans cette question, que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$ (on dit que $f_n \to f$ essentiellement uniformément). Montrer que $f_n \to f$ presque uniformément.

corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $|(f_n - f)(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$ pour tout $x \in A_n^c$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On a donc $A \in T$, $m(A) = 0$, $|(f_n - f)(x) \leq \|f_n - f\|_\infty$ pour tout $x \in A^c$. Comme $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$, on en déduit que $f_n \to f$ uniformément sur A^c. Enfin, comme $m(A) \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré la convergence presque uniforme de f_n vers f.

(b) En donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement (E, T, m), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f), montrer qu'on peut avoir $f_n \to f$ presque uniformément, quand $n \to \infty$, et $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$.

corrigé

On prend, par exemple, $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $f = 0$ et $f_n = 1_{[0,\frac{1}{n}]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $A = [0, \varepsilon]$, de sorte que $m(A) = \varepsilon$. On a bien $f_n \to 0$ uniformément sur A^c, quand $n \to \infty$, car $f_n = 0$ sur A^c pour tout n t.q. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Donc, $f_n \to f$ presque uniformément quand $n \to \infty$.

Mais f_n ne tends pas vers 0 essentiellement uniformément, quand $n \to \infty$, car $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ (en effet, $f_n \leq 1$ sur tout $\mathbb{R}$, $f_n = 1$ sur $[0, \frac{1}{n}]$) et $\lambda([0, \frac{1}{n}]) > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$).

Corrigé 58 (Mesurabilité des troncatures)

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours quand on ne le précise pas, de la tribu borélienne). Pour $a > 0$, on définit la fonction "tronquée" :

$$f_a(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad f(x) > a \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leq a \\ -a & \text{si} \quad f(x) < -a \end{cases}$$

Montrer que f_a est mesurable.

corrigé

Soit $a > 0$. On définit T_a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$T_a(s) = \begin{cases} a & \text{si} \quad s > a \\ s & \text{si} \quad |s| \leq a \\ -a & \text{si} \quad s < -a \end{cases}$$

La fonction T_a peut aussi s'écrire $T_a(s) = \max\{-a, \min\{a, s\}\}$ pour $s \in \mathbb{R}$. On remarque que la fonction T_a est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est donc borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne).

Comme $f_a = T_a \circ f$, on en déduit que f_a est mesurable car c'est la composée d'applications mesurables.

Corrigé 59 (Exemple de tribu engendrée)
Dans cet exercice, on s'intéresse à la tribu $\tau(X)$ engendrée par la variable aléatoire X définie sur Ω, muni de la tribu $\mathcal{A}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne.

1. (Cas d'un lancer de dé) Dans cette question, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega))$ et X est la variable aléatoire définie par $X(\omega) = 1$ lorsque ω est pair, $X(\omega) = 0$ sinon. Montrer que $\tau(X)$ est formé de 4 éléments.

   corrigé

   Par la définition de la tribu engendrée (Définition 3.6) on a $\tau(X) = \{X^{-1}(A),\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } X(\omega) \in A\}$, $X^{-1}(A)$ ne peut prendre que 4 valeurs, selon que 0 et 1 appartiennent ou non à A. Plus précisément, on distingue 4 cas possibles :

   Cas 1. $1, 0 \in A$ (c'est le cas, par exemple, si $A = \{0, 1\}$). On a alors $X^{-1}(A) = \Omega$.
   Cas 2. $1 \in A$ et $0 \notin A$ (c'est le cas, par exemple, si $A = \{1\}$). On a alors $X^{-1}(A) = \{2, 4, 6\}$.
   Cas 3. $0 \in A$ et $1 \notin A$ (c'est le cas, par exemple, si $A = \{0\}$). On a alors $X^{-1}(A) = \{1, 3, 5\}$.
   Cas 4. $1 \notin A$ et $0 \notin A$ (c'est le cas, par exemple, si $A = \emptyset$). On a alors $X^{-1}(A) = \emptyset$.

   On a ainsi montré que $\tau(X) = \{\Omega, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \emptyset\}$.

   ---

2. (Cas de n tirages à pile ou face) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $\Omega = \{0, 1\}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega))$ et $k \in \{1, \cdots, n\}$. La variable aléatoire X représente le k-ième tirage, X est donc l'application $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \mapsto \omega_k$. Montrer que $\tau(X)$ est ici aussi formé de 4 éléments.

   corrigé

   Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme à la question précédente $X^{-1}(A)$ dépend du fait que 0 et 1 appartiennent ou non à A.
   On pose $B = \{\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \Omega \text{ t.q. } \omega_k = 1\}$. On a ainsi :
   $X^{-1}(A) = \Omega$, si $0, 1 \in A$ (c'est le cas, par exemple, si $A = \{0, 1\}$),
   $X^{-1}(A) = B$, si $1 \in A$ et $0 \notin A$ (c'est le cas, par exemple, si $A = \{1\}$),
   $X^{-1}(A) = B^c$, si $0 \in A$ et $1 \notin A$ (c'est le cas, par exemple, si $A = \{0\}$),
   $X^{-1}(A) = \emptyset$, si $1 \notin A$ et $0 \notin A$ (c'est le cas, par exemple, si $A = \{2\}$).
   On a donc ici $\tau(X) = \{\Omega, B, B^c, \emptyset\}$.

   ---

3. Dans cette question, on prend $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \omega - [\omega]$, où $[\omega]$ désigne la partie entière de ω (c'est-à-dire $[\omega] = \max\{n \in \mathbb{Z}, \text{ t.q. } n \leq \omega\}$. Si C est un borélien inclus dans $[0, 1[$ (ce qui est équivalent à dire $C \in \mathcal{B}([0, 1[)$), on pose $\varphi(C) = \cup_{k \in \mathbb{Z}} C_k$, avec $C_k = \{x + k,\, x \in C\}$. Montrer que $\tau(X) = \{\varphi(C), C \in \mathcal{B}([0, 1[)\}$.

   corrigé

   Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La v.a. X prend ses valeurs dans $[0, 1[$. On a donc $X^{-1}(A) = X^{-1}(C)$ avec $C = A \cap [0, 1[$. Comme $B([0, 1[) = \{A \cap [0, 1[, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ (ceci est démontré, par exemple, dans l'exercice 2.3) on a donc :

   $$\tau(X) = \{X^{-1}(C),\, C \in \mathcal{B}([0, 1[)\}.$$

   Pour terminer la démonstration, Il suffit donc de démontrer que $X^{-1}(C) = \varphi(C)$ si $C \in \mathcal{B}([0, 1[)$.

   Soit $C \in \mathcal{B}([0, 1[)$. Pour $\omega \in \Omega$ on a $X(\omega) \in C$ si et seulement $\omega - [\omega] \in C$, c'est-à-dire si et seulement si $\omega = n + z$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in C$ (on utilise ici le fait que $C \subset [0, 1[$). Ceci montre bien que $X(\omega) \in C$ si et seulement $\omega \in \varphi(C)$. On a donc $X^{-1}(C) = \varphi(C)$, ce qui termine la démonstration.

Corrigé 60 (Fonctions constantes)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire (réelle). Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(a) = P(X^{-1}(]-\infty, a]))$ (on note souvent $X^{-1}(]-\infty, a]) = \{X \leq a\}$). La fonction φ est donc la fonction de répartition de la probabilité P_X.

1. Montrer que φ est une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $\lim_{a\to+\infty} \varphi(a) = 1$, $\lim_{a\to-\infty} \varphi(a) = 0$.

corrigé

Ces propriétés ont été vues au paragraphe 2.6.3 en utilisant les propriété de monotonie et de continuité croissante et décroissante de P_X (proposition 2.3). On les redémontre ici avec les mêmes propriétés de monotonie et de continuité croissante et décroissante utilisées avec P au lieu de P_X (mais cela ne change fondamentalement la démonstration !).

Soit $a < b$, on a $\{X \leq a\} \subset \{X \leq b\}$ et donc, par monotonie de P, $\varphi(a) = P(\{X \leq a\}) \leq P(\{X \leq a\}) = \varphi(b)$. Ce qui montre bien la monotonie de φ.

Pour montrer que $\lim_{a\to+\infty} \varphi(a) = 1$, on utilise la continuité croissante de P. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q. $a_n \uparrow +\infty$ (c'est-à-dire $a_{n+1} \geq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$). On pose $A_n = \{X \leq a_n\}$. On a $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$. Par continuité croissante de P (Proposition 2.3), on a donc $\varphi(a_n) = P(A_n) \to P(\Omega) = 1$ quand $n \to \infty$. Ce qui prouve que $\lim_{a\to+\infty} \varphi(a) = 1$.

Pour montrer que $\lim_{a\to-\infty} \varphi(a) = 0$, on utilise la continuité décroissante de P. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q. $a_n \downarrow -\infty$ (c'est-à-dire $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$). On pose $B_n = \{X \leq a_n\}$. On a $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(B_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$. Par continuité décroissante de P (Proposition 2.3), on a donc $\varphi(a_n) = P(B_n) \to P(\emptyset) = 0$ quand $n \to \infty$. Ce qui prouve que $\lim_{a\to-\infty} \varphi(a) = 0$.

On suppose maintenant que, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $P(X^{-1}(B)) = 0$ ou 1.

2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $X = \alpha$ p.s..

corrigé

On pose $A = \{a \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \varphi(a) \leq \frac{1}{2}\}$. L'ensemble A est non vide, car $\lim_{a\to-\infty} \varphi(a) = 0$. Il est majoré car $\lim_{a\to+\infty} \varphi(a) = 1$. L'ensemble A admet donc une borne supérieure que nous notons α. Comme φ est croissante, on a $\varphi(a) \leq \frac{1}{2}$ si $a < \alpha$ et $\varphi(a) > \frac{1}{2}$ si $a > \alpha$.

On utilise maintenant le fait que $P(X^{-1}(B)) = 0$ ou 1 pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on en déduit que $\varphi(a) = 0$ ou 1 pour tout $a \in \mathbb{R}$ et donc que $\varphi(a) = 0$ si $a < \alpha$ et $\varphi(a) = 1$ si $a > \alpha$. Par continuité décroissante de P, on montre alors que $\varphi(\alpha) = P(\{X \leq \alpha\}) = 1$ (car $\{X \leq \alpha\} = \cap_{n\in\mathbb{N}^\star}\{X \leq \alpha + 1/n\}$) et, par continuité croissante de P, on montre que $P(\{X < \alpha\}) = 0$ (car $\{X < \alpha\} = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}\{X \leq \alpha - 1/n\}$). On a donc $P(\{X = \alpha\}) = P(\{X \leq \alpha\}) - P(\{X < \alpha\}) = 1$, c'est-à-dire $X = \alpha$ p.s..
