Centre de Télé-Enseignement Sciences
Université de Provence

MASTER SCIENCES
Mention Mathématiques et Applications -- (2M1MAP)

Expédition dans la semaine n°	Etape	Code UE	N° d'envoi de l'UE
	2M1MAP	2TMAP14	2

Nom de l'UE : Théorie de la mesure et Probabilités (UE 1-4)

– **Contenu de l'envoi : Polycopié, chapitres 4 et 5. Corrigés des exercices des chapitres 4 et 5. Le polycopié est très volumineux mais il contient beaucoup de résultats vus en Licence.**

- Guide du travail à effectuer

Semaine 1 :
Etudier le chapitre 4, sections 1-3 (Intégrale, convergence monotone, lemme de Fatou)
Exercices proposés (avec corrigés) : 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6

Semaine 2 :
Etudier le chapitre 4, section 4-6 (Espace L1)
Exercices proposés (avec corrigés) : 4.9, 4.10, 4.12, 4.13, 4.14, 4.22

Semaine 3 :
Etudier le chapitre 4, sections 7-10 (Théorèmes de convergence, Espérance d'une v.a.)
Exercices proposés (avec corrigés) : 4.25, 4.29, 4.39, 4.42, 4.44
L'exercice 4.40 fait partie du premier devoir

Semaine 4 :
Etudier le chapitre 5, sections 1-4 (Mesures sur les boréliens de R)
Exercices proposés (avec corrigés) : 5.7, 5.14, 5.18 (difficile), 5.19
L'exercice 5.10 fait partie du premier devoir

Le premier devoir est à rendre à la réception du troisième envoi

- Coordonnées de l'enseignant responsable de l'envoi

Thierry Gallouet, LATP-CMI, 39 rue Joliot Curie, 13453 marseille cedex 13.
email : gallouet@cmi.univ-mrs.fr
fax : 04 91 11 35 52

Vous pouvez aussi consulter la page web: http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/tele.d
et me poser des questions par email.

Chapitre 4

Fonctions intégrables

Maintenant qu'on a construit un espace mesuré (E, T, m) (dont un exemple fondamental est $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on voudrait généraliser la notion d'intégrale à cet espace, c'est-à-dire introduire une application qui à f, fonction de E dans $\mathbb{R}$, associe un réel, dépendant de la mesure m, que nous noterons $\int f dm$, tel que :

– Si $f = 1_A,\ \ A \in T$, alors $\int f dm = m(A)$,
– L'application ainsi définie soit linéaire, c'est-à-dire que pour toutes fonctions f et g définies de E dans $\mathbb{R}$, $\int(\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm,\ \ \forall\ \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

En fait, on ne peut pas définir une telle application sur *toutes* les fonctions de E dans $\mathbb{R}$, nous allons la définir seulement sur les fonctions que nous appellerons "intégrables".

4.1 Intégrale d'une fonction étagée positive

Soit (E, T, m) un espace mesuré. On rappelle que $\mathcal{E}_+$ est l'ensemble des fonctions étagées de E dans $\mathbb{R}$, ne prenant que des valeurs positives ou nulles. Si $f \in \mathcal{E}_+$, f non nulle, le lemme 3.1 nous donne, en particulier, l'existence de $(a_i, A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}_+^\star \times T$ t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, et $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. D'autre part, le lemme 3.2 nous permet d'affirmer que, pour une fonction étagée positive qu'on écrit sous la forme : $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$, où les A_i sont deux à deux disjoints et les a_i sont strictement positifs, la valeur $\sum_{i=1}^n a_i m(A_i)$ est indépendante de la décomposition choisie. On peut donc définir l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ de la manière suivante :

Définition 4.1 (Intégrale d'une fonction de $\mathcal{E}_+$) *Soit (E, T, m) un espace mesuré et soit f de E dans $\mathbb{R}$ une fonction étagée positive non nulle (c'est-à-dire $f \in \mathcal{E}_+$). Soient $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ une famille de parties disjointes deux à deux (i.e. t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) et n réels $a_1, \ldots, a_n$ strictement positifs tels que $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. On définit l'intégrale de f, qu'on note $\int f dm$, par : $\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i)$ (on a donc $\int f dm \in \overline{\mathbb{R}}_+$). D'autre part, si $f = 0$, on pose $\int f dm = 0$.*

Remarque 4.1 En adoptant la convention $0 \times +\infty = 0$, on peut aussi remarquer que si $f = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i} \in \mathcal{E}_+$, où la famille $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ est t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et où les réels $a_1, \ldots, a_n$ sont supposés positifs seulement, on a encore :

$$\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i). \tag{4.1}$$

Proposition 4.1 (Propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$) *Soient f et $g \in \mathcal{E}_+$, α et $\beta \in \mathbb{R}_+^\star$, alors :*

– *linéarité positive :* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}_+$, *et* $\displaystyle\int (\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm$,
– *monotonie :* $f \geq g \Rightarrow \int f dm \geq \int g dm$.

DÉMONSTRATION :
Il est facile de montrer que si $f \in \mathcal{E}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ on a $\alpha f \in \mathcal{E}_+$ et $\int \alpha f dm = \alpha \int f dm$. Pour montrer la linéarité positive, il suffit donc de considérer le cas $\alpha = \beta = 1$ et f et g non nulles. Soit donc f, $g \in \mathcal{E}_+$, non nulles. D'après le lemme sur la décomposition canonique des fonctions étagées positives non nulles (lemme 3.1), on peut écrire $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ et $g = \sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}$ avec $0 < a_1 < \ldots < a_n$, $A_i \neq \emptyset$ pour tout i, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $0 < b_1 < \ldots < b_m$, $B_j \neq \emptyset$ pour tout j, $B_j \cap B_i = \emptyset$ si $j \neq i$. En posant $a_0 = b_0 = 0$, $A_0 = (\cup_{i=1}^n A_i)^c$ et $B_0 = (\cup_{j=1}^n B_j)^c$, on a aussi $f = \sum_{i=0}^n a_i 1_{A_i}$, $g = \sum_{j=0}^m b_j 1_{B_j}$ et on peut écrire $f + g = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_i + b_j) 1_{A_i \cap B_j} = \sum_{(i,j) \in K} (a_i + b_j) 1_{A_i \cap B_j}$, avec $K = \{(i,j) \in \{0, \ldots, n\} \times \{0, \ldots, m\} \setminus (0,0)\}$. On a donc $f + g \in \mathcal{E}_+$ et $\int (f+g) dm = \sum_{(i,j) \in K} (a_i + b_j) m(A_i \cap B_j)$. On en déduit $\int (f+g) dm = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m a_i m(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^n b_j m(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i) + \sum_{j=1}^m b_j m(B_j)$ (car $(A_0, \ldots, A_n)$ et $(B_0, \ldots, B_m)$ sont des partitions de E). On a donc bien montré $\int (f+g) dm = \int f dm + \int g dm$.

Il reste à montrer la monotonie. Soit $f, g \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f \geq g$. On a donc $f - g \in \mathcal{E}_+$ (on rappelle que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, voir la proposition 3.1) et donc la linéarité positive nous donne que $\int f dm = \int (f-g) dm + \int g dm \geq \int g dm$ car $\int (f-g) dm \geq 0$.

■

Remarque 4.2

1. Une conséquence directe de la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ est que, si $f \in \mathcal{E}_+$, pour n'importe quelle décomposition de f : $f = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i} \in \mathcal{E}_+$, $a_1, ..., a_n \geq 0$ et $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ (on ne suppose plus $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), on a encore, par linéarité positive :
$$\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i \int 1_{A_i} = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i), \tag{4.2}$$
en posant $a_i m(A_i) = 0$ si $a_i = 0$.
2. Une conséquence de la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ est que, pour tout $f \in \mathcal{E}_+$, on a :
$$\int f dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\}.$$

4.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive

On donne maintenant un petit lemme fondamental qui va permettre de définir l'intégrale des fonctions de $\mathcal{M}_+$.

Lemme 4.1 *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$, et $g \in \mathcal{E}_+$, tels que :*
– *$f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in E$,*
– *$\lim_{n \to \infty} f_n(x) \geq g(x)$, pour tout $x \in E$,*
alors
$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \, dm \geq \int g \, dm. \tag{4.3}$$
Noter que la suite $(\int f_n dm)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\overline{\mathbb{R}}_+$, donc sa limite existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

DÉMONSTRATION : Pour $x \in E$, on pose $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (cette limite existe et appartient à $\overline{\mathbb{R}}_+$). Il se peut que $f \notin \mathcal{E}_+$, mais on a toujours $f \in \mathcal{M}_+$ et les hypothèses du lemme donne $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$.

Soit $\alpha \in]0,1[$, on définit, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \{x \in E\,;\, \alpha g(x) \le f_n(x)\}. \tag{4.4}$$

On a donc $A_n = (f_n - \alpha g)^{-1}([0,\infty[) \in T$, $A_n \subset A_{n+1}$ (car $f_n \le f_{n+1}$) et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. En effet, si $x \in E$, on distingue 2 cas :

1. Si $g(x) = 0$, alors $x \in A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$,
2. Si $g(x) > 0$, on a alors $\alpha g(x) < g(x) \le \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Il existe donc n_x (dépendant de x) t.q. $x \in A_n$ pour $n \ge n_x$. Donc, $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

On a donc bien montré que $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. (Comme $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut aussi remarquer que la suite de fonctions $(\alpha g 1_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et en croissant vers la fonction αg.)

On remarque maintenant que $\alpha g 1_{A_n} \in \mathcal{E}_+$, $f_n \in \mathcal{E}_+$ et que, grâce à la définition de A_n, on a $\alpha g 1_{A_n} \le f_n$. La monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ donne donc :

$$\int \alpha g 1_{A_n} dm \le \int f_n dm. \tag{4.5}$$

En utilisant la décomposition canonique de g (lemme 3.1) il existe $(b_i, B_i)_{i=1,\ldots,p}$ t.q. $0 < b_1 < \ldots < b_p$, $B_i \ne \emptyset$ pour tout i, $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \ne j$ et $g = \sum_{i=1}^p b_i 1_{B_i}$. On a donc $\alpha g 1_{A_n} = \sum_{i=1}^p \alpha b_i 1_{B_i\cap A_n}$ et donc :

$$\int \alpha g 1_{A_n} dm = \sum_{i=1}^p \alpha b_i m(B_i \cap A_n).$$

Comme $\cup_{n\in\mathbb{N}}(B_i \cap A_n) = B_i \cap (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = B_i \cap E = B_i$, la continuité croissante de m donne $m(B_i \cap A_n) \to m(B_i)$, quand $n \to \infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \int \alpha g 1_{A_n} dm = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^p \alpha b_i m(B_i \cap A_n) = \sum_{i=1}^p \alpha b_i m(B_i) = \int \alpha g dm.$$

On peut donc passer à la limite, quand $n \to \infty$, dans (4.5) et obtenir :

$$\int \alpha g dm \le \lim_{n\to\infty} \int f_n dm.$$

Enfin, la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ donne $\int \alpha g dm = \alpha \int g dm$. On conclut la démonstration du lemme en faisant tendre α vers 1.

■

Remarque 4.3 Dans la démonstration précédente, on a besoin de $\alpha < 1$ pour pouvoir écrire $\alpha g(x) \le f_n(x)$ pour $n \ge n_x$, avec $n_x \in \mathbb{N}$ pouvant dépendre de x. Un tel n_x pourrait ne pas exister en prenant $\alpha = 1$.

Le lemme suivant est une conséquence simple du lemme 4.1.

Lemme 4.2
Soient (E,T,m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Soient deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}_+$ convergeant simplement et en croissant vers f. On a alors :

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n dm = \lim_{n\to\infty}\int g_n dm. \tag{4.6}$$

DÉMONSTRATION :
On applique le lemme 4.1 avec $g = g_p$, p fixé. On obtient $\int g_p dm \le \lim_{n\to\infty}\int f_n dm$. Puis, passant à la limite quand $p\to\infty$, $\lim_{p\to\infty}\int g_p dm \le \lim_{n\to\infty}\int f_n dm$. On obtient enfin (4.6) en changeant les rôles de f_n et g_p.

■

Le lemme 4.2 permet donc de définir l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ de la manière suivante :

Définition 4.2 (Intégrale sur $\mathcal{M}_+$) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}_+$. D'après la proposition sur la mesurabilité positive, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n\to\infty$, c'est-à-dire :*
– Pour tout $x\in E$, $f_n(x)\to f(x)$, quand $n\to\infty$,
– $f_{n+1}(x)\ge f_n(x)$, pour tout $x\in E$, et tout $n\in\mathbb{N}$.
On définit l'intégrale de f en posant :

$$\int f dm = \lim_{n\to\infty}\int f_n dm \ \ (\in \overline{\mathbb{R}}_+). \tag{4.7}$$

On a aussi la caractérisation suivante, parfois bien utile, de l'intégrale d'une fonction mesurable positive à partir d'intégrales de fonctions étagées positives :

Lemme 4.3 *Soient (E,T,m) un espace mesuré et $f\in\mathcal{M}_+$. Alors*

$$\int f dm = \sup\{\int g dm, g\in\mathcal{E}_+, g\le f\}.$$

DÉMONSTRATION : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{E}_+$ telle que $f_n\uparrow f$ quand $n\to\infty$.
La monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ donne que $\int f_n dm = \sup\{\int g dm, g\in\mathcal{E}_+, g\le f_n\}$ (voir la remarque 4.2). Comme $f_n\le f$, on a donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\int f_n dm = \sup\{\int g dm, g\in\mathcal{E}_+, g\le f_n\} \le \sup\{\int g dm, g\in\mathcal{E}_+, g\le f\}.$$

La définition de $\int f dm$ donne alors : $\int f dm \le \sup\{\int g dm, g\in\mathcal{E}_+, g\le f\}$.

Pour montrer l'inégalité inverse, soit $g\in\mathcal{E}_+$ t.q. $g\le f$. Comme $f_n\uparrow f$, le lemme 4.1 donne $\int g dm \le \lim_{n\to\infty}\int f_n dm = \int f dm$. On a donc $\sup\{\int g dm, g\in\mathcal{E}_+, g\le f\}\le\int f dm$.

■

Proposition 4.2 (Propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$) *Soient f et $g\in\mathcal{M}_+$, α et $\beta\in\mathbb{R}_+^\star$, alors :*
– linéarité positive : $\alpha f+\beta g\in\mathcal{M}_+$, et $\displaystyle\int(\alpha f+\beta g)dm = \alpha\int f dm + \beta\int g dm$,
– monotonie : $f\ge g \Rightarrow \int f dm \ge \int g dm$.

DÉMONSTRATION :
La linéarité positive se démontre de manière très simple à partir de la linéarité positive sur $\mathcal{E}_+$ (proposition 4.1). et de la définition 4.2.

La monotonie est une conséquence immédiate du lemme 4.3.

■

Remarque 4.4 (A propos de $0 \times \infty \ldots$**)** Soient (E, T, m) un espace mesuré et $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$. On note I_A la fonction indicatrice de l'ensemble A. Cette fonction est définie de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par : $I_A(x) = +\infty$ si $x \in A$ et $I_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Cette fonction est souvent notée aussi $\infty 1_A$. Il est clair que $I_A \in \mathcal{M}_+$ et que I_A est la limite croissante de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ définie par $f_n = n1_A$. On en déduit, en utilisant la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, que $\int I_A dm = 0$.

Une conséquence de cette remarque est le lemme suivant :

Lemme 4.4 *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré.*

1. *Soit* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* $A \in T$*. On note* $f1_A \in \mathcal{M}_+$ *la fonction définie par* $f1_A(x) = f(x)$ *si* $x \in A$ *et* $f1_A(x) = 0$ *si* $x \in A^c$*. On définit* $\int_A f dm$ *par* $\int f1_A dm$*. On suppose que* $m(A) = 0$*. Alors,* $\int_A f dm = 0$*.*
2. *Soit* $f, g \in \mathcal{M}_+$ *t.q.* $f = g$ *p.p.. Alors,* $\int f dm = \int g dm$*.*
3. *Soit* $f \in \mathcal{M}_+$ *t.q.* $f = 0$ *p.p.. Alors* $\int f dm = 0$*.*

DÉMONSTRATION :

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$ et $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$. Soit I_A la fonction indicatrice de l'ensemble A (définie dans la remarque 4.4). On a évidemment $f1_A \le I_A$ et donc, par monotonie, $\int f1_A dm = 0$.
2. Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p.. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f1_{A^c} = g1_{A^c}$. On a donc $f1_{A^c}, g1_{A^c} \in \mathcal{M}_+$ et $\int f1_{A^c} dm = \int g1_{A^c} dm$. D'autre part, comme $\int f1_A dm = \int g1_A dm = 0$, on a aussi, par linéarité positive $\int f dm = \int f1_{A^c} dm + \int f1_A dm = \int f1_{A^c} dm$ (et de même pour g). Donc, $\int f dm = \int g dm$.
3. Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = 0$ p.p.. Alors $\int f dm = \int 0 dm = 0$.

■

Ce lemme nous permet d'étendre la définition de l'intégrale à certaines fonctions non mesurables :

Définition 4.3 *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré et* f *définie sur* A^c*, à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *(resp.* $\overline{\mathbb{R}}_+$*), avec* $A \in T$*,* $m(A) = 0$ *(on dit que* f *est définie p.p., car* f *n'est pas définie sur* A*).*

1. f *est* m*-mesurable (resp.* m*-mesurable positive) si il existe* $g \in \mathcal{M}$ *(resp.* $g \in \mathcal{M}_+$*) t.q.* $f = g$ *p.p.. (c'est-à-dire qu'il existe* $B \in T$ *t.q.* $m(B) = 0$*,* $B \supset A$ *et* $f = g$ *sur* B^c*).*
2. *Soit* f m*-mesurable positive. On pose* $\int f dm = \int g dm$*, avec* $g \in \mathcal{M}_+$ *t.q.* $f = g$ *p.p. (noter que cette intégrale ne dépend pas du choix de* g*, grâce au lemme 4.4).*

Remarque 4.5 Soit (E, T, m) un espace mesuré. Il est facile de montrer les résultats suivants :

1. Soit f de E dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, $f \in \mathcal{E}_+$ si et seulement si $f \in \mathcal{M}_+$, $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{card}(\mathrm{Im} f) < \infty$.
2. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et f de A^c dans $\mathbb{R}$. Alors, f est m-mesurable si et seulement si il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n \to f$ p.p. (voir l'exercice 4.17).
3. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et f de A^c dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, f est m-mesurable positive si et seulement si il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \to f$ p.p..

Le résultat suivant sera souvent utile par la suite. En particulier, les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebichev (voir la section 4.9) en découlent immédiatement.

Lemme 4.5 *Soient (E,T,m) un espace mesuré, $f \in \mathcal{M}_+$ et $t \in \mathbb{R}_+^\star$; alors :*

$$m(\{f \geq t\}) \leq \frac{1}{t}\int f dm. \tag{4.8}$$

DÉMONSTRATION : On définit $A_t = \{f \geq t\} = \{x \in E\,;\, f(x) \geq t\}$. On a $A_t \in T$ et $f \geq t1_{A_t}$. Par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit l'inégalité 4.8. ■

4.3 Théorème de convergence monotone et lemme de Fatou

Théorème 4.1 (Convergence Monotone (1)) *Soit (E,T,m) un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_+$ t.q. $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$. On pose, pour tout $x \in E$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors $f \in \mathcal{M}_+$ et : $\displaystyle\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to +\infty$.*

DÉMONSTRATION :
Noter que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$, le fait que $\int f_n dm \to \int f dm$, lorsque $n \to +\infty$, est donné par la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$. La difficulté est donc ici de travailler avec $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_+$ au lieu de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$.

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ converge simplement et en croissant vers f, la proposition 3.5 donne $f \in \mathcal{M}_+$. Puis, par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n dm \leq \int f\, dm. \tag{4.9}$$

Il reste donc à montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n dm \geq \int f\, dm. \tag{4.10}$$

Pour montrer (4.10), on va construire une suite de fonctions $(g_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q $g_p \uparrow f$, quand $p \to \infty$, et $g_p \leq f_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{M}_+$; il existe une suite de fonctions $(f_{n,p})_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_{n,p} \uparrow f_n$ lorsque p tend vers $+\infty$. On définit alors :

$$g_p = \sup_{n\leq p} f_{n,p} \tag{4.11}$$

On note que :

1. $g_p \in \mathcal{E}_+$ car g_p est le sup d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}_+$ (donc g_p est mesurable, $\mathrm{Im}(g_p) \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{card}(\mathrm{Im}(g_p)) < \infty$, ce qui donne $g_p \in \mathcal{E}_+$).
2. $g_{p+1} \geq g_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, comme $f_{n,p+1} \geq f_{n,p}$ (pour tout n et p), on a

$$g_{p+1} = \sup\{f_{p+1,p+1}, \sup_{n\leq p} f_{n,p+1}\} \geq \sup_{n\leq p} f_{n,p+1} \geq \sup_{n\leq p} f_{n,p} = g_p.$$

   On peut donc définir, pour $x \in E$, $g(x) = \lim_{p\to\infty} g_p(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ (car la suite $(g_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante dans $\overline{\mathbb{R}}_+$).

3. $g = f$. En effet, on remarque que $g_p \geq f_{n,p}$ si $n \leq p$. On fixe n et on fait tendre p vers l'infini, on obtient $g \geq f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant $n \to \infty$ on en déduit $g \geq f$. D'autre part, on a $f_{n,p} \leq f_n \leq f$ pour tout n et tout p. On a donc $g_p \leq f$ pour tout p. En faisant $p \to \infty$ on en déduit $g \leq f$. On a bien montré que $f = g$.
4. $g_p \leq f_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, $f_{n,p} \leq f_n \leq f_p$ si $n \leq p$. On a donc $g_p = \sup_{n \leq p} f_{n,p} \leq f_p$.

Les points 1 à 3 ci dessus donnent $(g_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ et $g_p \uparrow f$ quand $p \to \infty$. Donc, la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne $\int f dm = \lim_{p\to\infty} \int g_p dm$.

Le point 4 donne (par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$) $\int g_p dm \leq \int f_p dm$, on en déduit

$$\int f dm = \lim_{p\to\infty} \int g_p dm \leq \lim_{p\to\infty} \int f_p dm.$$

Finalement, on obtient bien $\int f dm = \lim_{p\to\infty} \int f_p dm$.

■

On utilisera souvent une légère extension (facile) du théorème de convergence monotone :

Théorème 4.2 (Convergence Monotone (2)) *Soit (E, T, m) un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. On suppose que $f_n \uparrow f$ p.p. (c'est-à-dire que il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \uparrow f(x)$ pour tout $x \in A^c$). La fonction f (définie p.p.) est alors $m-$mesurable positive (c'est-à-dire que il existe $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p.) et $\displaystyle\int f_n dm \to \int f dm$. On rappelle que, par définition (voir la définition 4.3), $\int f dm = \int g dm$ avec $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p..*

DÉMONSTRATION :
Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n \uparrow f$ sur A^c, quand $n \to \infty$. On pose $g_n = f_n 1_{A^c}$ (c'est-à-dire $g_n(x) = f_n(x)$ si $x \in A^c$ et $g_n(x) = 0$ si $x \in A$). On a $g_n \in \mathcal{M}_+$ et $g_n \uparrow g$ avec $g = f 1_{A^c}$ (c'est-à-dire $g(x) = f(x)$ si $x \in A^c$ et $g(x) = 0$ si $x \in A$). Comme $g \in \mathcal{M}_+$ et $f = g$ p.p., on a donc f $m-$mesurable positive. Puis, le théorème 4.1 donne $\int g_n dm \to \int g dm$ quand $n \to \infty$. D'autre part, on a $\int g_n dm = \int f_n dm$ (car $f_n = g_n$ p.p.) et $\int g dm = \int f dm$ (par définition de $\int f dm$), donc

$$\int f_n dm \to \int f dm.$$

■

Corollaire 4.1 (Séries à termes positifs ou nuls) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$; on pose, pour tout $x \in E$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) (\in \overline{\mathbb{R}}_+)$. Alors $f \in \mathcal{M}_+$ et $\displaystyle\int f dm = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n dm$.*

DÉMONSTRATION : On applique le théorème de convergence monotone (théorème 4.1) à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$g_n = \sum_{p=0}^{n} f_p.$$

On a $g_n \in \mathcal{M}_+$ et $g_n \uparrow f$. Donc $f \in \mathcal{M}_+$ et

$$\sum_{p=0}^{n} \int f_p dm = \int g_n dm \to \int f dm.$$

■

Lemme 4.6 (Fatou) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. On pose pour tout $x \in E$: $f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}(\inf_{p\geq n} f_p(x)) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors $f \in \mathcal{M}_+$ et :*

$$\int f dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n dm = \lim_{n\to+\infty}(\inf_{p\geq n} \int f_p dm). \tag{4.12}$$

DÉMONSTRATION : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = \inf_{p\geq n} f_p(x)$ (pour tout $x \in E$), de sorte que $g_n \in \mathcal{M}_+$ (cf. proposition 3.5) et $g_n \uparrow f$. Le théorème de convergence monotone (théorème 4.1) donne que $f \in \mathcal{M}_+$ et $\int g_n dm \to \int f dm$.

Or, $g_n \leq f_p$ si $p \geq n$. On a donc $\int g_n dm \leq \int f_p dm$ si $p \geq n$ et donc (en fixant n) $\int g_n dm \leq \inf_{p\geq n} \int f_p dm$. On en déduit

$$\int f dm = \lim_{n\to\infty} \int g_n dm \leq \lim_{n\to\infty}(\inf_{p\geq n} \int f_p dm) = \liminf_{n\to\infty} \int f_n dm.$$

■

Le lemme de Fatou est souvent utilisé avec des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ telles que la suite $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour presque tout $x \in E$. Il permet alors de montrer que la limite (au sens de la convergence p.p.) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est “intégrable" (voir les paragraphes suivants). On utilise pour cela le corollaire (immédiat) suivant :

Corollaire 4.2 *Soient (E,T,m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ t.q. $f_n(x) \to f(x)$, pour presque tout $x \in E$, lorsque $n \to +\infty$. On suppose qu'il existe $C \geq 0$ t.q. $\int f_n \, dm \leq C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, f est $m-$mesurable positive et $\int f \, dm \leq C$.*

DÉMONSTRATION : Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_+$ et $f_n \to f$ p.p., on a bien f m-mesurable positive. On pose $g = \liminf_{n\to\infty} f_n$ (c'est-à-dire $g(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in E$). On a donc $g \in \mathcal{M}_+$ et $f = g$ p.p. donc $\int f dm = \int g dm$ par définition de l'intégrale des fonctions m-mesurables (définition 4.3).

Le lemme de Fatou donne $\int f dm = \int g dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n dm$ et donc $\int f dm \leq C$ car $\int f_n dm \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■

4.4 Mesures et probabilités de densité

4.4.1 Définitions

A partir d'une mesure et d'une fonction mesurable positive, on peut définir une autre mesure de la manière suivante :

Définition 4.4 (Mesure de densité)
Soient (E,T,m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Pour $A \in T$, on rappelle que $f1_A$ est la fonction (de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) définie par $f1_A(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $f1_A(x) = 0$ si $x \in A^c$ (cette fonction appartient à $\mathcal{M}_+$) et on définit $\int_A f dm$ par $\int f1_A dm$.

On définit alors $\mu : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$\mu(A) = \int f1_A dm = \int_A f dm, \ \ \forall A \in T. \tag{4.13}$$

L'application μ ainsi définie est une mesure sur T (ceci est démontré dans l'exercice 4.22), appelée mesure de densité f par rapport à m, et notée $\mu = fm$.

Proposition 4.3 *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $f \in \mathcal{M}_+$ et μ la mesure de densité f par rapport à m. Alors, la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure m, c'est-à-dire que si $A \in T$ est tel que $m(A) = 0$, alors $\mu(A) = 0$.*

DÉMONSTRATION : Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$. On a alors $f1_A = 0$ m-p.p. et donc $\mu(A) = \int f1_A dm = 0$ d'après le lemme 4.4. ■

On déduit de cette proposition que la mesure de Dirac définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par :

$$\begin{aligned} \delta(A) = 1 \text{ si } 0 \in A \\ \delta(A) = 0 \text{ si } 0 \in A^c. \end{aligned} \tag{4.14}$$

n'est pas une mesure de densité par rapport à la mesure de Lebesgue (on peut montrer que ces deux mesures sont étrangères (voir définition 2.16 et proposition 2.4).
Notons que l'on peut aussi définir des mesures signées de densité, voir la définition 6.15.

4.4.2 Exemples de probabilités de densité

Définition 4.5 (Probabilité de densité) *Soit p une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on dit que p est une probabilité de densité (par rapport à Lebesgue) s'il existe $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $\int f d\lambda = 1$ et $p(A) = \int f1_A d\lambda = \int_A f d\lambda$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*
Les lois de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, de densité par rapport à la mesure de Lebesgue, données dans la proposition suivante seront souvent utilisées dans le calcul des probabilités (On rappelle qu'une loi de probabilité est, par définition, une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

Définition 4.6 (Quelques lois de densité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$)

1. *Loi uniforme, $\mathcal{U}(a, b)$ Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, la loi uniforme sur $[a, b]$ est la loi de densité $\frac{1}{b-a}1_{[a,b]}$: $p(A) = \frac{1}{b-a}\int 1_{[a,b]}1_A d\lambda$, $\forall A \in \mathcal{T}$.*
2. *Loi exponentielle, $\mathcal{E}(\tau)$ Soit $\tau > 0$; la loi exponentielle est définie par la densité f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \tau e^{-\tau x} & si \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{4.15}$$

3. *Loi de Gauss, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ Soit $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$; la loi de Gauss de paramètre (μ, σ) est définie par la densité f définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\big) \tag{4.16}$$

4.5 L'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables

Soit $f \in \mathcal{M}$, La proposition 3.7 donne que $|f|$, f^+, $f^- \in \mathcal{M}_+$ et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne $\int f^+ dm \leq \int |f| dm$ et $\int f^- dm \leq \int |f| dm$. Ceci va nous permettre de définir l'espace $\mathcal{L}^1$ et l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ à partir de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ (définition 4.2 page 77).

Définition 4.7 (Espace $\mathcal{L}^1$ et Intégrale de Lebesgue)
Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}$. On dit que f est intégrable (ou intégrable au sens de Lebesgue) si $\int |f|dm < +\infty$. Dans ce cas, on a aussi $\int f^+dm < +\infty$ et $\int f^-dm < +\infty$. On pose alors :

$$\int fdm = \int f^+dm - \int f^-dm \ \ (\in \mathbb{R}). \tag{4.17}$$

On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (ou plus simplement $\mathcal{L}^1$) l'ensemble des fonctions intégrables.

Soit $f \in \mathcal{M}$, la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne $\int |f|dm = \int f^+dm + \int f^-dm$. On voit donc que $f \in \mathcal{L}^1$ si et seulement si $\int f^+dm < \infty$ et $\int f^-dm < \infty$.

Proposition 4.4 (Propriétés de $\mathcal{L}^1$ et de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$)
Soit (E, T, m) un espace mesuré. On a alors :

1. *$\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
2. *L'application $f \mapsto \displaystyle\int fdm$ est une application linéaire de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}$.*
3. *Monotonie : soient f et $g \in \mathcal{L}^1$ telles que $f \le g$; alors $\displaystyle\int fdm \le \int gdm$*
4. *Pour tout $f \in \mathcal{L}^1$, $|\int fdm| \le \int |f|dm$.*

DÉMONSTRATION :

1. On sait déjà que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (proposition 3.5). Pour montrer que $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, il suffit de remarquer, en utilisant la linéarité positive et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, que $\int |\alpha f|dm = |\alpha| \int |f|dm$ et $\int |f + g|dm \le \int |f|dm + \int |g|dm$, pour tout $f, g \in \mathcal{M}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.(a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^1$. On veut montrer que

$$\int \alpha fdm = \alpha \int fdm. \tag{4.18}$$

Cas 1. Si $\alpha = 0$, (4.18) est bien vraie.
Cas 2. Si $\alpha > 0$, on remarque que $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ et $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit $\int \alpha fdm = \int (\alpha f)^+dm - \int (\alpha f)^-dm = \alpha(\int f^+dm - \int f^-dm) = \alpha \int fdm$.
Cas 3. Si $\alpha < 0$, on remarque que $(\alpha f)^+ = (-\alpha)f^-$ et $(\alpha f)^- = (-\alpha)f^+$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit $\int \alpha fdm = \int (\alpha f)^+dm - \int (\alpha f)^-dm = (-\alpha)(\int f^-dm - \int f^+dm) = \alpha \int fdm$.

(b) Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$. On veut montrer que

$$\int (f + g)dm = \int fdm + \int gdm.$$

On utilise les deux décompositions de $f + g$: $f + g = (f + g)^+ - (f + g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$. On en déduit $(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit

$$\int (f + g)^+dm + \int f^-dm + \int g^-dm = \int (f + g)^-dm + \int f^+dm + \int g^+dm.$$

On en déduit (noter que tous les termes de l'égalité précédente sont dans $\mathbb{R}_+$)

$$\int (f+g)^+ dm - \int (f+g)^- dm = \int f^+ dm - \int f^- dm + \int g^+ dm - \int g^- dm,$$

et donc $\int (f+g)dm = \int f dm + \int g dm$.

On a bien montré que l'application $f \mapsto \displaystyle\int f dm$ est une application linéaire de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}$.

3. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f \leq g$. On remarque que $f^+ - f^- \leq g^+ - g^-$, donc $f^+ + g^- \leq g^+ + f^-$. En utilisant la linéarité positive et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit $\int f^+ dm + \int g^- dm \leq \int g^+ dm + \int f^- dm$ et donc $\int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm \leq \int g^+ dm - \int g^- dm = \int g dm$.
4. Soit $f \in \mathcal{L}^1$. On a $|\int f dm| = |\int f^+ dm - \int f^- dm| \leq \int f^+ dm + \int f^- dm = \int |f| dm$.

■

On peut définir sur $\mathcal{L}^1$ une semi-norme de la manière suivante :

Définition 4.8 (Semi-norme sur $\mathcal{L}^1$) *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1$. On pose :*

$$\|f\|_1 = \int |f| dm \tag{4.19}$$

L'application de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $f \mapsto \|f\|_1$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}_1$.

On a bien $\|f\|_1 \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1$. Le fait que $f \mapsto \|f\|_1$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^1$ découle alors de la partie 1 de la démonstration de la proposition 4.4, c'est-à-dire du fait que $\int |\alpha f| dm = |\alpha| \int |f| dm$ et $\int |f+g| dm \leq \int |f| dm + \int |g| dm$, pour tout $f, g \in \mathcal{M}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Par contre, $\|\cdot\|_1$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^1$ car $\|f\|_1 = 0$ n'entraîne pas $f = 0$ mais seulement $f = 0$ p.p., comme cela est démontré à la proposition 4.5.

Proposition 4.5 *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Alors $\int f dm = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p..
2. Soit $f \in \mathcal{L}^1$. Alors $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p..
3. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p.. Alors $\int f dm = \int g dm$.

DÉMONSTRATION :

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$.
   (a) On suppose que $f = 0$ p.p. . On a alors $\int f dm = \int 0 dm = 0$ (ceci est donné par le troisième point du lemme 4.4.)
   (b) on suppose que $\int f dm = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, le lemme 4.5 page 79 donne $\int f dm \geq \frac{1}{n} m(\{f \geq \frac{1}{n}\})$. On a donc $m(\{f \geq \frac{1}{n}\}) = 0$ et $m(\{f > 0\}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^\star} m(\{f \geq \frac{1}{n}\}) = 0$ (on a utilisé ici la σ-sous additivité de m). Comme $\{f = 0\}^c = \{f > 0\}$, on en déduit $f = 0$ p.p..
2. Soit $f \in \mathcal{L}^1$. La propriété démontrée ci dessus donne $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $|f| = 0$ p.p., et donc $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p.
3. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p.. On a $|\int f dm - \int g dm| = |\int (f-g) dm| \leq \int |f-g| dm = 0$ (On a utilisé le quatrième point de la proposition 4.4 et $|f-g| = 0$ p.p.). Donc, $\int f dm = \int g dm$.

■

La dernière assertion de la proposition précédente nous permettra, dans la prochaine section, de définir l'intégrale sur un espace appelé L^1.

On conclut cette section par une proposition préliminaire au théorème de convergence dominée.

Proposition 4.6 *Soit (E,T,m) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$, $f \in \mathcal{M}$ et $g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ p.p.. On a alors $f \in \mathcal{L}^1$, $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$ et $\int f_n dm \to \int f dm$, quand $n \to \infty$.*

DÉMONSTRATION :
Comme $f_n \to f$ p.p. quand $n \to \infty$, Il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in A^c$. Puis, comme $|f_n| \leq g$ p.p., il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in T$ t.q. $m(B_n) = 0$ et $|f_n| \leq g$ sur B_n^c. On pose $C = A \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$. Par σ-sous additivité de m, on a aussi $m(C) = 0$. On pose alors $h_n = f_n 1_{C^c}$, $h = f 1_{C^c}$ $G = g1_{C^c}$, de sorte que $h_n = f_n$ p.p., $h = f$ p.p. et $G = g$ p.p.. De plus les fonctions h_n, h et G sont toujours mesurables et donc $h_n \in \mathcal{L}^1$, $h \in \mathcal{M}$ et $G \in \mathcal{L}^1$.

Comme $|h_n(x)| \leq G(x)$ pour tout $x \in E$ (et pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $h_n(x) \to h(x)$ pour tout $x \in E$. On a aussi $|h| \leq G$. Ceci montre que $h \in \mathcal{L}^1$ et donc que $f \in \mathcal{L}^1$.

On pose maintenant $F_n = 2G - |h_n - h|$. Comme $|h_n - h| \leq 2G$, on a $F_n \in \mathcal{M}_+$ et on peut donc appliquer le lemme de Fatou (lemme 4.6) à la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\liminf_{n\to\infty} F_n = 2G$, on obtient :

$$\int 2G dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int (2G - |h_n - h|) dm = \lim_{n\to\infty} (\inf_{p\geq n} \int (2G - |h_n - h|) dm). \tag{4.20}$$

La linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ donne $\int (2G - |h_n - h|) dm = \int 2G dm - \int |h_n - h| dm$. Donc :

$$\inf_{p\geq n} \int (2G - |h_n - h|) dm = \int 2G dm - \sup_{p\geq n} \int |h_n - h| dm$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} \int (2G - |h_n - h|) dm = \int 2G dm - \limsup_{n\to\infty} \int |h_n - h| dm.$$

L'inégalité 4.20 devient alors (en remarquant que $\int 2G dm \in \mathbb{R}$) :

$$\limsup_{n\to\infty} \int |h_n - h| dm \leq 0.$$

On a donc $\|h_n - h\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$ et, comme $h_n - h = f_n - f$ p.p., on en déduit $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$, et donc $\int f_n dm \to \int f dm$, quand $n \to \infty$ (grâce au quatrième point de la proposition 4.4).

■

4.6 L'espace L^1

Dans toute cette section, on travaille avec un espace mesuré (E,T,m).

On définit maintenant une relation d'équivalence, notée $(= p.p.)$, sur $\mathcal{L}^1$ par :

$$f \ (= p.p.) \ g \text{ si } f = g \ \ p.p.. \tag{4.21}$$

Définition 4.9 (L^1) *L'ensemble $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $(=$ p.p.$)$ définie sur $\mathcal{L}^1$, i.e. $L^1 = \mathcal{L}^1/(=$ p.p.$)$.*

Dans la suite, L^1 désigne $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $\mathcal{L}^1$ désigne $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

Remarque 4.6

1. Un élément de L^1 est donc une partie de $\mathcal{L}^1$.
2. Si $f \in L^1$, on note $\tilde{f} = \{g \in \mathcal{L}^1 ; g = f$ p.p.$\}$. $\tilde{f}$ est donc un élément de L^1, c'est l'élément de L^1 auquel f appartient (on l'appelle la classe de f).

Définition 4.10 (Structure vectorielle sur L^1)
On munit L^1 d'une structure vectorielle (faisant de L^1 un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$)

1. Soient $F \in L^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On choisit $f \in F$ et on pose $\alpha F = \{g \in \mathcal{L}^1 ; g = \alpha f$ p.p.$\}$.

2. Soient $F, G \in L^1$. On choisit $f \in F$, $g \in G$ et on pose $F + G = \{h \in \mathcal{L}^1 ; h = f + g$ p.p.$\}$.

La définition précédente est bien cohérente. En effet αF (qui est la classe de αf) ne dépend pas du choix de f dans F car $f = f_1$ p.p. implique $\alpha f = \alpha f_1$ p.p.. De même $F + G$ (qui est la classe de $f + g$) ne dépend pas du choix de f dans F et du choix de g dans G car $f = f_1$ p.p. et $g = g_1$ p.p. implique $f + g = f_1 + g_1$ p.p..

Définition 4.11 (Intégrale sur L^1) *Soit $F \in L^1$ et $f \in F$ (on dit que f est un représentant de la classe F, noter que $f \in \mathcal{L}^1$). On pose :*

$$\int F dm = \int f dm. \tag{4.22}$$

Ici aussi cette définition est bien cohérente car $\int F dm$ ne dépend pas du choix de f dans F, grâce au troisième point de la proposition 4.5. Le troisième point de la proposition 4.5 nous donne aussi $\|f\|_1 = \|g\|_1$ si $f, g \in \mathcal{L}^1$ et $f = g$ p.p.. Ceci nous permet de définir une norme sur L^1 :

Définition 4.12 (Norme sur L^1) *Soit $F \in L^1$. On choisit $f \in F$ et on pose $\|F\|_1 = \|f\|_1$.*

Proposition 4.7 *L'application $F \mapsto \|F\|_1$ est une norme sur L^1. L'espace L^1 muni de la norme $\|\cdot\|_1$ est donc un espace vectoriel normé.*

DÉMONSTRATION : Il est facile de vérifier que $\|\cdot\|_1$ est bien une norme sur $\mathbb{R}$ (sachant que c'est déjà une semi-norme sur $\mathcal{L}^1$). Le seul point délicat est de remarquer que $\|F\|_1 = 0$ implique que $F = 0$ (0 est ici l'élément neutre de L^1, c'est-à-dire $\{h \in \mathcal{L}^1 ; h = 0$ p.p.$\}$). Ceci découle du premier point de la proposition 4.5. ■

On montrera plus loin que L^1 est complet, c'est donc un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire un espace de Banach, voir le théorème 4.6 page 91.

On rappelle que si $f \in \mathcal{L}^1$, $F \in L^1$ et que $f \in F$, on dit que f est un représentant de F. On introduit maintenant plusieurs notions de convergence dans L^1. Il est facile de vérifier que ces définitions sont cohérentes, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas des représentants choisis pour les éléments de L^1.

La notion de convergence simple n'a pas de sens dans L^1, mais la notion de convergence p.p., vue précédemment, se généralise aux éléments de L^1 ainsi que la notion de convergence en mesure.

Définition 4.13 *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. Soient $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $F \in L^1$. On dit que $F_n \to F$ p.p. quand $n \to \infty$ si $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$, avec $f_n \in F_n$ et $f \in F$.

2. *Soient $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $F \in L^1$. On dit que $F_n \to F$ en mesure quand $n \to \infty$ si $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to \infty$, avec $f_n \in F_n$ et $f \in F$.*
3. *Soient $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $F \in L^1$. On dit que $F_n \to F$ dans L^1 quand $n \to \infty$ si $\|F_n - F\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$. (Ici aussi, noter que $\|F_n - F\|_1 = \|f_n - f\|_1$ si $f_n \in F_n$ et $f \in F$.)*
4. *Soient $F, G \in L^1$. On dit que $F \geq G$ p.p. si $f \geq g$ p.p. avec $f \in F$ et $g \in G$.*

On peut démontrer (s'inspirer de la démonstration du théorème 4.7 et voir les exercices du chapitre 3) que si une suite de fonctions de L^1 converge en mesure, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge presque partout. Dans le cas où la mesure m est finie, la convergence presque partout entraîne la convergence en mesure.

Remarque 4.7 Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soient $F, G \in L^1$. $F = G$ est donc équivalent à $f = g$ p.p. si $f \in F$ et $g \in G$. En général, on écrira plutôt $F = G$ p.p. au lieu de $F = G$ (voir la remarque 4.9).

Remarque 4.8 Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soient $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f : E \to \mathbb{R}$ (ou $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$). On utilisera souvent la notation (légérement incorrecte), "$F_n \to f$ p.p. quand $n \to \infty$". Cette notation signifie "$f_n \to f$ p.p. quand $n \to \infty$" en choisissant $f_n \in F_n$. Ceci est cohérent car le fait que "$f_n \to f$ p.p. quand $n \to \infty$" ne dépend pas du choix de f_n dans F_n (voir aussi la remarque 4.9).

En fait, on écrira même souvent "$F_n \to f$ p.p. quand $n \to \infty$" (pour une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$) sans préciser les espaces de départ et d'arrivée pour f. A vrai dire, en choisissant $f_n \in F_n$, f est au moins définie p.p. sur E et le changement du choix de f_n dans F_n ne change f que sur un ensemble de mesure nulle. D'autre part, en l'absence de précision, f sera supposée être à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4.8 (propriétés de l'intégrale sur L^1) *Soit (E, T, m) un espace mesuré. On a alors :*
1. *Soit $F \in L^1$. Alors $|\int F dm| \leq \|F\|_1$.*
2. *$F \mapsto \int F dm$ est une application linéaire continue de L^1 dans $\mathbb{R}$.*
3. *Soient $F, G \in L^1$ t.q. $F \geq G$ p.p., alors $\int F dm \geq \int G dm$.*

DÉMONSTRATION :
1. Soit $F \in L^1$ et $f \in F$, on a $|\int F dm| = |\int f dm| \leq \|f\|_1 = \|F\|_1$.
2. La linéarité de l'intégrale sur L^1 découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ (proposition 4.4). La continuité est donné par le premier point ci dessus.
3. La monotonie de l'intégrale sur L^1 découle immédiatement de la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ (proposition 4.4).

■

Remarque 4.9 soit (E, T, m) un espace mesuré.
1. On confondra dans la suite un élément F de L^1 avec un représentant f de F, c'est-à-dire avec un élément $f \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f \in F$.
2. De manière plus générale, soit $A \subset E$ t.q. A^c soit négligeable (c'est-à-dire $A^c \subset B$ avec $B \in T$ et $m(B) = 0$) et soit $f : A \to \mathbb{R}$ (la fonction f est donc définie p.p.). On dira que f est un élément de L^1 si il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p.. On confond donc, en fait, la fonction f avec la classe d'équivalence de g, c'est-à-dire avec $\tilde{g} = \{h \in \mathcal{L}^1 ; h = g \text{ p.p.}\}$. D'ailleurs, cet ensemble est aussi égal à $\{h \in \mathcal{L}^1 ; h = f \text{ p.p.}\}$. En confondant ainsi f et $\tilde{g}$ on a donc $\int f dm = \int g dm$. Noter également que f est m-mesurable (voir la définition 4.3 page 78).

3. Avec la confusion décrite ci-dessus, si f et g sont des éléments de L^1, $f = g$ signifie en fait $f = g$ p.p..

Remarque 4.10 Soit (E, T, m) un espace mesuré et $(E, \overline{T}, \overline{m})$ son complété (cf définition 2.15 et exercice 2.15). L'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est “identique" à l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$, il existe une bijection évidente entre ces deux espaces en remarquant que si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$, alors il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p. (voir à ce propos l'exercice 4.9).

Pour montrer qu'une fonction est dans L^1 on utilise souvent le lemme de Fatou de la manière suivante (voir l'exercice 4.27 pour la démonstration, qui est en fait une conséquence facile du lemme de Fatou pour les fonctions mesurables positives, cf lemme 4.6) :

Lemme 4.7 (Utilisation de Fatou) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que :*

1. $f_n \geq 0$ p.p., $\forall n \in \mathbb{N}$,

2. $\exists C$, $\int f_n dm \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

3. $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$,

alors $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (au sens “il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p.") et $\int |f| dm \leq C$.

On peut également montrer qu'une fonction est dans L^1 en utilisant le théorème de convergence monotone. Ceci est précisé dans le théorème 4.3 (dit théorème de Beppo-Lévi) (qui donne aussi un résultat de convergence dans L^1).

4.7 Théorèmes de convergence dans L^1

Nous connaissons à présent trois notions de convergence pour les fonctions de L^1, les notions de convergence presque partout, convergence en mesure et la notion de convergence habituelle dans un espace normé, c'est-à-dire , ici, la convergence pour la norme L^1. On peut montrer par des contre-exemples que la convergence presque partout n'entraîne pas la convergence L^1, et que la convergence L^1 n'entraîne pas la convergence presque partout. Pour montrer que la convergence presque partout n'entraîne pas la convergence L^1, on peut considérer l'espace mesuré $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R})$ définie par : $f_n(x) = n\, 1_{]0, \frac{1}{n}]}$. On a évidemment $f_n \to 0$ pp, alors que $\|f_n\|_1 = 1$. Pour montrer que la convergence L^1 n'entraîne pas la convergence presque partout, on considère à nouveau l'espace mesuré $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, et on construit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R})$ (dite “bosse glissante") définie par : $f_{n+k}(x) = 1_{]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]}$, pour $n = \frac{p(p-1)}{2}$, $p \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq n$. On peut voir facilement que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{p}$ pour $n \in [\frac{p(p-1)}{2}, \frac{p(p+1)}{2}[$, alors que $f_n \not\to 0$ pp (par contre, on peut noter qu'il est possible d'extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge presque partout vers 0). Le théorème de convergence dominée, énoncé ci-après, donne une hypothèse suffisante pour qu'une suite (de fonctions) convergeant presque partout converge aussi dans L^1.

On rappelle (voir la remarque 4.8) que l'hypothèse “$(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f : E \to \mathbb{R}$ t.q. $F_n \to f$ p.p." signifie simplement que $f_n \to f$ p.p. en choisissant $f_n \in F_n$. Cette définition est bien cohérente car elle ne dépend pas du choix des f_n dans F_n. On rappelle aussi que $f_n \to f$ p.p. signifie qu'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in A^c$.

4.7.1 Convergence presque partout et convergence dans L^1

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de convergence monotone et permet de montrer la convergence dans L^1 d'une suite monotone de fonctions convergeant presque partout.

Théorème 4.3 (Beppo-Lévi) *Soient (E,T,m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On suppose que :*

1. $f_{n+1} \geq f_n$ p.p., $\forall n \in \mathbb{N}$, [ou $f_{n+1} \leq f_n$ p.p., $\forall n \in \mathbb{N}$],

2. $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

On a alors :

1. $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q. $f = g$ p.p.") si et seulement si :

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \in \mathbb{R}.$$

2. Si $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, alors $f_n \to f$ dans L^1.

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 4.28.
Nous allons maintenant voir un résultat fondamental, conséquence du lemme de Fatou, qui permet de prouver la convergence de suites dans L^1 sans hypothèse de convergence monotone.

Théorème 4.4 (Convergence dominée) *Soit (E,T,m) un espace mesuré. L'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ est noté L^1 . Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et f une fonction de E dans $\mathbb{R}$ telles que :*

1. $f_n \to f$ p.p.

2. $\exists F \in L^1$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq F$ p.p..

Alors $f \in L^1$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q. $f = g$ p.p.") et $f_n \to f$ dans L^1, c'est-à-dire

$$\int |f_n - f| dm \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Ceci donne aussi $\int f_n dm \to \int f dm$, lorsque $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION :
Ce théorème est essentiellement donné par la proposition 4.6. La différence avec la proposition 4.6 tient dans le fait que f_n et F sont dans L^1 au lieu de $\mathcal{L}^1$ et que f n'est pas nécessairement mesurable. Il s'agit toutefois de différences "mineures" comme nous le voyons ci après.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. La première hypothèse du théorème signifie que $f_n \to f$ p.p. (voir la remarque 4.8). Il existe donc $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in A^c$. On remplace alors f_n par $f_n 1_{A^c}$, encore noté f_n (c'est toujours un représentant de la même classe d'équivalence car $m(A) = 0$). On définit aussi g par $g = f$ sur A^c et $g = 0$ sur A. Enfin, on choisit un représentant de F, encore noté F. On obtient ainsi :

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$,
2. $f_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$, quand $n \to \infty$,
3. $F \in \mathcal{L}^1$ et $f_n \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les 2 premiers items donnent aussi $g \in \mathcal{M}$ (par la proposition 3.5, on utilise ici le fait que $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$ et pas seulement pour presque tout x). On peut donc appliquer la proposition 4.6 page 85. Elle donne : $g \in \mathcal{L}^1$, $\|f_n - g\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$ et $\int f_n dm \to \int g dm$, quand $n \to \infty$.

Comme $g = f$ p.p., on a donc $f \in L^1$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p."). Puis $\|f_n - f\|_1 = \|f_n - g\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$, et $\int f_n dm \to \int g dm = \int f dm$, quand $n \to \infty$.

■

4.7.2 Série absolument convergente

On va maintenant montrer que l'espace $(L^1, \|.\|_1)$ est un espace de Banach, en montrant que toute série absolument convergente dans L^1 (i.e. t.q. la série des normes converge) est convergente dans L^1. On en déduira aussi un résultat très important (le théorème 4.7) qui permet d'extraire d'une suite convergeant dans L^1 une sous-suite convergeant presque partout. On aura besoin au cours de la démonstration du petit résultat (démontré dans l'exercice 4.9) suivant :

Lemme 4.8 *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $F \in \mathcal{M}_+$. On suppose que $\int F dm < \infty$. Alors $F < +\infty$ p.p. (c'est-à-dire que il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $F(x) < \infty$ pour tout $x \in A^c$).*

Théorème 4.5 (Séries absolument convergentes dans L^1) *Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ t.q. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 < +\infty$; alors :*

1. $\exists F \in L^1$; $|\sum_{p=0}^n f_p| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. La série de terme général $f_n(x)$ est, pour presque tout $x \in E$, convergente (dans $\mathbb{R}$).

On définit f par $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ (de sorte que f est définie p.p.).

3. $f \in L^1$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p.") et $\sum_{p=0}^n f_p \to f$ dans L^1 et p.p., quand $n \to \infty$.

DÉMONSTRATION :

1. On choisit un représentant de f_n, encore noté f_n, et on pose $F(x) = \sum_{p\in\mathbb{N}} |f_p(x)| \in \overline{\mathbb{R}}_+$. On a donc $F \in \mathcal{M}_+$ et le corollaire 4.1 du théorème de convergence monotone donne

$$\int F dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int |f_n| dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 < \infty.$$

Le lemme 4.8 donne alors $F < \infty$ p.p., c'est-à-dire il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $F(x) < \infty$ pour tout $x \in A^c$. En remplaçant F par 0 sur A, on a donc $F \in \mathcal{L}^1$. (Donc, $F \in L^1$ au sens de la remarque 4.9).

La définition de F donne immédiatement $|\sum_{p=0}^n f_p| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout $x \in A^c$, la série de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{R}$, donc convergente. Comme $m(A) = 0$, f est donc définie p.p. car elle est définie pour $x \in A^c$ par $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^n f_p(x)$.

3. On pose $s_n = \sum_{p=0}^n f_p$. le premier point donne $|s_n| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $F \in L^1$. Le deuxième point donne $s_n \to f$ p.p.. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 4.4). Il donne $f \in L^1$ et la convergence de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (vers f) dans L^1. La convergence p.p. (vers f) de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par le deuxième point.

■

Théorème 4.6 (Riesz-Fisher) *Soit (E,T,m) un espace mesuré. L^1 est un espace de Banach, c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet.*

DÉMONSTRATION : On sait déjà que L^1 est espace vectoriel normé. Une conséquence du théorème 4.5 est que, dans L^1, toute série absolument convergente est convergente. Cette propriété est une caractérisation du fait qu'un espace vectoriel normé est complet. On en déduit donc que $(L^1, \|.\|_1)$ est complet et donc que $(L^1, \|.\|_1)$ est un espace de Banach. ■

Dans la suite L^1 sera toujours muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

Théorème 4.7 (Réciproque partielle du théorème de CD) *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f \in L^1$ telles que $f_n \to f$ dans L^1, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, et $F \in L^1$ telles que :*

1. $f_{n_k} \to f$ p.p.,

2. $|f_{n_k}| \le F$ p.p., pour tout $k \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION :En utilisant le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans L^1, on construit par récurrence une suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $n_{k+1} > n_k$ et si $p, q \ge n_k$, $\|f_p - f_q\|_1 \le \frac{1}{2^k}$. On peut alors appliquer le théorème 4.5 à la série de terme général $g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ pour conclure. ■

On donne maintenant le théorème de Vitali, qui donne des conditions nécessaires et suffisantes de convergence dans L^1 pour une suite convergeant p.p.. La démonstration de ce théorème ainsi que des petits résultats préliminaires qu'elle nécessite font l'objet des exercices 4.29 et 4.30.

Proposition 4.9 *Soient (E,T,m) un espace mesuré, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$; alors :*

1. $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$ t.q. $\forall A \in T, m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f|dm \le \varepsilon$.

2. $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ C \in T$ t.q. $m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f|dm \le \varepsilon$.

Théorème 4.8 (Vitali) *Soit (E,T,m) un espace mesuré. On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de L^1 t.q. $f_n \to f$ p.p., f prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$ (voir remarque 4.8). Alors, $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. (Equi-intégrabilité) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q.

$$A \in T,\ n \in \mathbb{N}, m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f_n|dm \le \varepsilon,$$

2. ("Equi-petitesse à l'infini") pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C \in T$ t.q. $m(C) < +\infty$ et

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{C^c} |f_n|dm \le \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION : La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 4.30 ; elle ne nécessite pas le théorème de convergence dominée : on utilise le théorème d'Egorov (cf théorème 3.2 et exercice 3.25). Le théorème de convergence dominée peut être vu comme une conséquence du théorème de Vitali (cf exercice 4.30). ■

Dans le théorème 4.8, si $m(E) < +\infty$, l'hypothèse "equi-petitesse à l'infini" est, bien sûr, toujours vérifiée (il suffit de prendre $C = E$).

4.8 Continuité et dérivabilité sous le signe $\int$

Soient (E,T,m) un espace mesuré, f une fonction de $E \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; à $t \in \mathbb{R}$ fixé, on définit l'application $f(.,t) : E \to \mathbb{R}$, qui à x associe $f(x,t)$. On suppose que l'application $f(.,t)$ ainsi définie vérifie l'hypothèse suivante :

$$f(.,t) \in L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m), \;\; \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.23}$$

et on note F l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \int f(.,t)dm = \int f(x,t)dm(x). \tag{4.24}$$

Théorème 4.9 (Continuité sous $\int$) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, f une fonction de $E \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'hypothèse (4.23) et $t_0 \in \mathbb{R}$; on suppose de plus que :*

1. l'application $f(x,.)$, définie pour presque tout $x \in E$ par : $t \mapsto f(x,t)$, est continue en t_0, pour presque tout $x \in E$;

2. $\exists\ \varepsilon > 0$ et $\exists\ G \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ tels que $|f(.,t)| \le G$ p.p., pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$.

Alors F, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $F(t) = \displaystyle\int f(.,t)dm = \int f(x,t)dm(x)$, est continue en t_0.

DÉMONSTRATION : Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to +\infty$. Soit f_n définie par $f_n(x) = f(x,t_n)$. Comme $f_n \to f(\cdot,t_0)$ p.p. et $|f_n| \le G$ p.p.. On peut appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 4.4) à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il donne $F(t_n) \to F(t_0)$ quand $n \to \infty$. ■

Théorème 4.10 (Dérivabilité sous $\int$)
Soient $(E,\,T,\,m)$ un espace mesuré, f une fonction de $E \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'hypothèse (4.23) et $t_0 \in \mathbb{R}$. On suppose de plus qu'il existe $\varepsilon > 0$, $A \in T$ et $G \in L^1_{\mathbb{R}}(E,\,T,\,m)$ t.q. $m(A) = 0$ et :

1. L'application $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et pour tout $x \in A^c$;

2. $|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \le G(x)$ pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et pour tout $x \in A^c$.

Alors F, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $F(t) = \displaystyle\int f(.,t)dm = \int f(x,t)dm(x)$, est dérivable en t_0 et :

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)dm(x). \tag{4.25}$$

DÉMONSTRATION : Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to +\infty$ et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans L^1 et on peut lui appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 4.4) car $f_n \to \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t_0)$ p.p., quand $n \to \infty$, et, si $x \in A^c$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $\theta_{x,n} \in]0,1[$ t.q. $f_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, \theta_{x,n}t_0 + (1-\theta_{x,n})t_n)$ (grâce au théorème des accroissements finis) et donc $|f_n| \le G$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème 4.4 donne alors $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t_0) \in L^1$ et $\int f_n dm \to \int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t_0)dm$. Ceci étant vrai pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to +\infty$ et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on en déduit bien que F est dérivable en t_0 et :

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)dm(x). \tag{4.26}$$

.

■

4.9 Espérance et moments des variables aléatoires

Définition 4.14 (Espérance, moment, variance) *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle.*

1. Si $X \geq 0$ (c'est-à-dire $X(\omega) \geq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$), on définit l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X par $E(X) = \int X(\omega)dp(\omega)$.

2. Si $X \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, p)$ (c'est-à-dire $E(|X|) < \infty$), on définit l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X par :

$$E(X) = \int X(\omega)dp(\omega).$$

On définit la variance de X par Var$(X) = \sigma^2(X) = E((X - E(X))^2)$ (avec $\sigma(X) \geq 0$).

3. Pour $r \in [1, +\infty[$, le moment d'ordre r de la variable aléatoire X est l'espérance de la variable aléatoire $|X|^r$.

Définition 4.15 (Covariance) *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. t.q. $E(X^2) < \infty$ et $E(Y^2) < \infty$. On définit la covariance de X et Y par : cov$(X, Y) = E((X - E(X)(Y - E(Y))$. (Remarquer que $(X - E(X)(Y - E(Y))$ est une v.a.r. intégrable car sa valeur absolue est majorée, par exemple, par $X^2 + Y^2 + E(X)^2 + E(Y)^2$ qui est intégrable.)*

On calcule rarement l'espérance d'une v.a. comme intégrale par rapport à la probabilité p ; en effet, l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ est souvent mal connu. Le théorème 4.11 montre qu'il suffit en fait de connaître la loi de la v.a. X pour calculer son espérance (ou, plus généralement, l'espérance d'une fonction de X). On se ramène ainsi au calcul d'une intégrale sur $\mathbb{R}$.
Les deux inégalités suivantes découlent immédiatement du lemme 4.5 :

Lemme 4.9 (Inégalité de Markov) *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle positive sur Ω et $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$. On suppose que $0 < E(X) < \infty$. Alors :*

$$p(\{X \geq \lambda E(X)\}) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

DÉMONSTRATION : Il suffit, par exemple, d'appliquer le lemme 4.5 avec $f = X$ et $t = \lambda E(X)$. ■

Lemme 4.10 (Inégalité de Bienaymé Tchebichev) *Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ p)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle sur Ω, intégrable et t.q. sa variance vérifie $0 < \sigma^2(X) < +\infty$, et $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$. Alors :*

$$p(\{|X - E(X)| \geq \lambda\sigma(X)\}) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

DÉMONSTRATION : Appliquer le lemme 4.5 avec $f = |X - E(X)|^2$ et $t = \lambda^2\sigma^2(X)$. ■

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle sur Ω. La loi de X, notée p_X est définie par $p_X(A) = p(X^{-1}(A))$, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$). Ceci est équivalent à dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a, avec $\varphi = 1_A$:

$$\int_\Omega \varphi \circ X(\omega)dp(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dp_X(x). \tag{4.27}$$

On rappelle que $\varphi \circ X$ est souvent improprement noté $\varphi(X)$, ce qui s'explique par le fait $\varphi \circ X(\omega) = \varphi(X(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$. Le théorème 4.11 montre que cette égalité est vraie pour une large classe de fonctions boréliennes φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$ (on rappelle que borélienne signifie mesurable quand les espaces sont munis de la tribu de Borel).

Théorème 4.11 (Loi image) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle sur Ω et p_X la loi de la variable aléatoire X. On a alors :*

1. *L'égalité (4.27) est vraie pour toute fonction φ borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et toute fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
2. *Soit φ une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la fonction $\varphi \circ X$ appartient à $L^1(\Omega, \mathcal{A}, p)$ si et seulement si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), p_X)$. De plus, si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), p_X)$, L'égalité (4.27) est vraie.*

DÉMONSTRATION : On remarque que (4.27) est vraie pour tout $\varphi = 1_A$, avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (par définition de p_X). Par linéarité positive, (4.27) est encore vraie pour tout φ borélienne étagée positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par convergence monotone, (4.27) est alors vraie pour tout φ borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ceci donne la première partie du premier item. En utilisant la décomposition $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, on montre alors le deuxième item. Enfin, la deuxième partie du premier item vient du fait que φ est intégrable pour la probabilité p_X si φ est borélienne bornée. ■

Un produit de v.a.r. intégrables et indépendantes est une v.a.r. intégrable (ce qui est, bien sûr, faux sans l'hypothèse d'indépendance) et L'espérance de ce produit est égal au produit des espérances. Ce résultat plus général est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 4.10 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, $d > 1$ et $X_1, \ldots, X_d$ des v.a.r. indépendantes.*

1. *Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ des fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On a alors :*

$$E(\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(X_i)) = \prod_{i=1}^{d} E(\varphi_i(X_i)). \tag{4.28}$$

   (En convenant qu'un produit de termes est nul si l'un des termes est nul.)

2. *Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ des fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\varphi_i(X_i)$ est intégrable pour tout $i = 1, \ldots, d$. La v.a.r. $\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(X_i)$ est intégrable et l'égalité (4.28) est vraie.*
3. *Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ des fonctions boréliennes bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'égalité (4.28) est vraie.*

N.B. Si $X_1, \ldots, X_d$ sont des v.a.r., le fait que (4.28) soit vraie pour toute famille $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ de fonctions boréliennes bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donc une condition nécessaire et suffisante pour les v.a.r. $X_1, \ldots, X_d$ soient indépendantes.

DÉMONSTRATION : Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ sont des fonctions caractéristiques de boréliens de $\mathbb{R}$, l'égalité (4.28) est une conséquence immédiate de la définition de l'indépendance des X_i (Si $\varphi_i = 1_{A_i}$ avec $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $E(\varphi_i(X_i)) = P(\{X_i \in A_i\}) = P(X_i^{-1}(A_i))$). Par linéarité positive, on en déduit que (4.28) est vraie si les fonctions φ_i sont (boréliennes) étagées positives (c'est-à-dire $\varphi \in \mathcal{E}_+$). Puis, par convergence monotone, on en déduit le premier item de la proposition (car toute fonction orélienne de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est limite croissante d'éléments de $\mathcal{E}_+$).

Pour le deuxième item, on utilise (4.28) avec la fonction $x \mapsto |\varphi_i(x)|$ au lieu de la fonction φ_i (pour tout i). On montre ainsi que la v.a.r. $\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(X_i)$ est intégrable. Puis, on montre (4.28) par linéarité (utilisant $\varphi_i = \varphi_i^+ - \varphi_i^-$).

Le troisième item est conséquence immédiate du deuxième (car si X est une v.a.r. et φ est une fonction borélienne bornée, la v.a.r. $\varphi(X)$ est intégrable). ■

Une conséquence de la proposition 4.10 est que XY est intégrable et $\text{cov}(X, Y) = 0$ si X, Y sont deux v.a.r. indépendantes et intégrables sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$.

Pour montrer que des v.a.r. sont indépendantes, il est parfois utile de savoir qu'il suffit de montrer (4.28) lorsque les fonctions φ_i sont continues à support compact de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$. C'est l'objet de la proposition 4.12 qui se démontre à partir d'un résultat d'unicité (proposition 4.11) sur lequel nous reviendrons au chapitre 5. On note $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ (une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est à support compact si il existe un compact K de $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi = 0$ sur K^c).

Proposition 4.11 *Soit m et μ deux mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les compacts de $\mathbb{R}$. On suppose que :*

$$\int \varphi dm = \int \varphi d\mu \text{ pour tout } \varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Alors, $m = \mu$.

DÉMONSTRATION : Puisque m et μ sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les compacts, on a bien $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$ et $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mu)$. On pose maintenant $\mathcal{C} = \{]a,b[,\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ et on commence par montrer que $m = \mu$ sur $\mathcal{C}$.

Soit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\varphi_n \uparrow 1_{]a,b[}$. En effet, il suffit de construire φ_n, pour $n \geq 2/(b-a)$, de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(x) = 0 \text{ si } x \leq a,\\
&\varphi_n(x) = n(x-a) \text{ si } a < x < a + \tfrac{1}{n},\\
&\varphi_n(x) = 1 \text{ si } a + \tfrac{1}{n} < x < b - \tfrac{1}{n},\\
&\varphi_n(x) = -n(x-b) \text{ si } b - \tfrac{1}{n} \leq x \leq b\\
&\varphi_n(x) = 0 \text{ si } b \leq x.
\end{aligned}$$

Puis, en passant à la limite quand $n \to \infty$ dans l'égalité $\int \varphi_n dm = \int \varphi_n d\mu$, on obtient (par convergence monotone ou par convergence dominée) $m(]a,b[) = \mu(]a,b[)$.

On conclut enfin que $m = \mu$ en utilisant, par exemple, la proposition 2.5. ■

Proposition 4.12 *Soit $(\Omega,\mathcal{A},p)$ un espace probabilisé, $d > 1$ et $X_1,\ldots,X_d$ des v.a.r. Ces v.a.r. sont indépendantes si et seulement si on a, pour tout famille $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_d\} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$,*

$$E(\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(X_i)) = \prod_{i=1}^{d} E(\varphi_i(X_i)), \tag{4.29}$$

(En convenant qu'un produit de termes est nul si l'un des termes est nul.)

DÉMONSTRATION : Le fait que la condition est nécessaire est une conséquence immédiate de la proposition 4.10 car une fonction continue à support compact est borélienne et bornée. On montre maintenant que la condition est nécessaire. On suppose donc que (4.29) est vraie pour toute famille $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_d\} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on veut montrer que les v.a.r. $X_1,\ldots,X_d$ sont indépendantes, c'est-à-dire que pour tout $A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :

$$E\left(\prod_{i=1}^{d} 1_{A_i}(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{d} E(1_{A_i}(X_i)). \tag{4.30}$$

On rappelle en effet que

$$E(1_{A_i}(X_i)) = p(X_i^{-1}(A_i)) \text{ et } E(\prod_{i=1}^{d} 1_{A_i} X_i)) = p(\cap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(A_i).$$

Pour montrer (4.30), on introduit, pour tout $1 \le n \le d+1$, la propriété suivante :
P_n : (4.29) est vraie si $\varphi_i = 1_{A_i}$, avec $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pour $i < n$, et $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour $i \ge n$.

L'hypothèse de la proposition donne que P_1 est vraie. On suppose maintenant que P_n est vraie pour un $n \in \{1,\ldots,d\}$. Soit $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour $i < n$ (et $\varphi_i = 1_{A_i}$) et $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour $i > n$. Pour $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose, avec $\varphi_n = 1_{A_n}$:

$$m(A_n) = E(\textstyle\prod_{i=1}^d \varphi_i(X_i)),$$
$$\mu(A_n) = \textstyle\prod_{i=1}^d E(\varphi_i(X_i)).$$

Les applications m et μ sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. La propriété P_n montre que $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La proposition 4.11 montre alors que $m = \mu$ ce qui donne la propriété P_{n+1}. Par récurrence sur n, on montre ainsi que P_{d+1} est vraie, ce qui donne (4.30) et l'indépendance de $X_1,\ldots,X_d$. ■

4.10 Espace $L^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ et espace $L^1_{\mathbb{R}^N}(E,T,m)$

Définition 4.16 *Soient (E,T,m) un espace mesuré et $N > 1$ ($N \in \mathbb{N}$).*

1. *Soit $f : E \to \mathbb{R}^N$. Pour $x \in E$, on pose $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_N(x))^t \in \mathbb{R}^N$. La fonction f appartient à $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E,T,m)$ si $f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ pour tout $n \in \{1,\ldots,N\}$.*
2. *Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E,T,m)$, on note*

$$\int f dm = (\int f_1 dm, \ldots, \int f_N dm)^t \in \mathbb{R}^N.$$

La caractérisation suivante de mesurabilité et intégrabilité est intéressante.

Proposition 4.13 *Soient (E,T,m) un espace mesuré, $N > 1$ et $f : E \to \mathbb{R}^N$.*

1. *f_n est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$) pour tout $n \in \{1,\ldots,N\}$ si et seulement si f est mesurable de E dans $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire si et seulement si $f^{-1}(A) \in E$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.*
2. *Si f est mesurable (de E dans $\mathbb{R}^N$). On munit $\mathbb{R}^N$ d'une norme, notée $\|\cdot\|$. Alors, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E,T,m)$ si et seulement si $\int \|f\| dm < \infty$ (noter que $\|f\| \in \mathcal{M}_+$).*

DÉMONSTRATION : On donne la démonstration pour $N = 2$.

1. On suppose d'abord $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$. On veut montrer que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendré par $\{A \times B,\, A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, il suffit de montrer que $f^{-1}(A \times B) \in T$ pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Soit donc $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a $f^{-1}(A \times B) = f_1^{-1}(A) \cap f_2^{-1}(B) \in T$ car f_1 et f_2 sont mesurables. Donc $f^{-1}(A \times B) \in T$. On a bien montré que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$

   Réciproquement, on suppose maintenant que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque que $f_1^{-1}(A) = f^{-1}(A \times \mathbb{R})$. Or $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, donc $f_1^{-1}(A) = f^{-1}(A \times \mathbb{R}) \in T$, ce qui prouve que f_1 est mesurable. On prouve de manière semblable que f_2 est mesurable.
2. Soit f mesurable de E dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que $\mathbb{R}^N$ est muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$. Comme $y \mapsto \|y\|$ est continue de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, l'application $\|f\| : x \mapsto \|f(x)\|$ est mesurable de E dans $\mathbb{R}$ (comme composée d'applications mesurables). Comme cette application ne prend que des valeurs positives ou nulles, on a donc $\|f\| \in \mathcal{M}_+$.

Comme toutes les normes sur $\mathbb{R}^N$ sont équivalentes, on a donc $\int \|f\| dm < \infty$ si et seulement si $\int \|f\|_1 dm < \infty$, avec $\|f\|_1 = \sum_{n=1}^N |f_n|$. Il est alors immédiat de remarquer que $\int \|f\|_1 dm < \infty$ si et seulement $f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$. On a donc :

$$\int \|f\| dm < \infty \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m).$$

■

La définition de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ donne immédiatement que cet espace est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De plus, si $\mathbb{R}^N$ est muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$, il est aussi immédiat que l'application $f \mapsto \int \|f\| dm$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$. Pour obtenir un espace vectoriel normé, on va considérer, comme dans le cas $N = 1$, l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.". On rappelle que $f = g$ p.p. si il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f = g$ sur A^c.

Définition 4.17 *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. L'espace $L^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ est l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.".

2. On munit $\mathbb{R}^N$ d'une norme notée $\|\cdot\|$. Soit $F \in L^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$. On pose $\|F\|_1 = \int \|f\| dm$, où $f \in F$ (cette définition est correcte car indépendante du choix de f dans F).

Proposition 4.14 *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $N > 1$. L'espace $L^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ est un espace de Banach (réel) c'est-à-dire un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) normé complet (avec la norme définie dans la définition 4.17).*

DÉMONSTRATION : La démonstration de cette proposition découle facilement du cas $N = 1$. ■

Définition 4.18 *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. Soit $f : E \to \mathbb{C}$. On note $\Re(f)$ et $\Im(f)$ les parties réelle et imaginaire de f. On a donc, pour $x \in E$, $f(x) = \Re(f)(x) + i\Im(f)(x)$, avec $\Re(f)(x), \Im(f)(x) \in \mathbb{R}$. La fonction f appartient à $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ si $\Re(f), \Im(f) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

2. Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$, on note

$$\int f dm = \int \Re(f) dm + i \int \Im(f) dm \in \mathbb{C}.$$

Ici aussi, on a une caractérisation de mesurabilité et intégrabilité.

Proposition 4.15 *Soit (E, T, m) un espace mesuré et f une application de $E \to \mathbb{C}$.*

1. $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont mesurables (de E dans $\mathbb{R}$) si et seulement si f est mesurable de E dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire si et seulement $f^{-1}(A) \in E$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

2. Si f est mesurable (de E dans $\mathbb{C}$), $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ si et seulement si $\int |f| dm < \infty$ (noter que $|f| \in \mathcal{M}_+$).

DÉMONSTRATION :
La démonstration de cette proposition se ramène facilement à la précédente démonstration (c'est-à-dire à la démonstration de la proposition 4.13) en utilisant l'application $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(z) = (x, y)^t$ si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, qui est une bijection continue, d'inverse continue.

■

Ici aussi, la définition de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ donne immédiatement que cet espace est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Il est aussi immédiat que l'application $f \mapsto \int |f| dm$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$. Pour obtenir un espace vectoriel normé, on va considérer l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.".

Définition 4.19 *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. L'espace $L^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ est l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.".

2. Soit $F \in L^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$. On pose $\|F\|_1 = \int |f|dm$, où $f \in F$ (cette défintion est correcte car indépendante du choix de f dans F).

Proposition 4.16 *Soit (E, T, m) un espace mesuré. L'espace $L^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ est un espace de Banach (complexe) c'est-à-dire un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) normé complet (avec la norme définie dans la définition 4.19).*

DÉMONSTRATION :
La démonstration de cette proposition découle facilement du fait que $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est un espace de Banach (réel).

■

4.11 Exercices

4.11.1 Intégrale des fonctions mesurables positives et espace $\mathcal{L}^1$

Exercice 4.1 (Sup de mesures) *Corrigé 61 page 323*
Soit (E, T) un espace mesurable et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur T. On suppose que $m_{n+1}(A) \geq m_n(A)$ pour tout $A \in T$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $m(A) = \sup\{m_n(A), n \in \mathbb{N}\}$ pour $A \in T$.

1. (Lemme préliminaire) Soit $(a_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et $(a_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $a_{n+1,p} \geq a_{n,p}$, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, et $a_{n,p} \to a_p$ quand $n \to \infty$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Montrer $\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \to \sum_{p=0}^{\infty} a_p$ (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) quand $n \to \infty$. [On pourra utiliser $\sum_{p=0}^{N} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p$.]
2. Montrer que m est une mesure.
3. Soit $f \in \mathcal{E}_+(E, T)$. (On rappelle que $\mathcal{E}_+(E, T)$ est l'ensemble des fonctions étagées de E dans $\mathbb{R}_+$.) Montrer que $\int f dm = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\int f dm_n)$.
4. Soit $f \in \mathcal{M}_+(E, T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}_+(E, T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.)

   (a) Montrer que $(\int f dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée par $\int f dm$.

   (b) Montrer que $\int f dm_n \to \int f dm$ quand $n \to \infty$.
5. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\int f dm_n \to \int f dm$ quand $n \to \infty$.

Exercice 4.2 (Somme de mesures) *Corrigé 62 page 324*
Soient m_1 et m_2 deux mesures sur l'espace mesurable (E, T).

1. Montrer que $m = m_1 + m_2$ est une mesure.
2. Montrer qu'une application f mesurable de E dans $\mathbb{R}$ est intégrable pour la mesure m si et seulement si elle est intégrable pour les mesures m_1 et m_2. Si f est intégrable pour la mesure m, montrer que $\int f dm = \int f dm_1 + \int f dm_2$.
3. Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de mesures (positives) sur (E, T) et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^\star_+$. On pose, pour $A \in T$, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(A)$. Montrer que m est une mesure sur T ; soit f une application mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et intégrable pour la mesure m ; montrer que f est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, intégrable pour la mesure m_n et que $\int f dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int f dm_n$.

Exercice 4.3 (Mesure de Dirac) *Corrigé 63 page 326*
Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0, définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. (cf exemple 2.1.) Soit $f \in \mathcal{M}_+$, calculer $\int f d\delta_0$.

Exercice 4.4 (Restrictions de la mesure de Lebesgue) *Corrigé 64 page 326*
Soit A et B deux boréliens de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset B$. On note λ_A [resp. λ_B] la restriction à $\mathcal{B}(A)$ [resp. $\mathcal{B}(B)$] de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B, \mathcal{B}(B), \lambda_B)$. Montrer que $f_{|A} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(A, \mathcal{B}(A), \lambda_A)$ et que $\int f_{|A} d\lambda_A = \int f 1_A d\lambda_B$. [Considérer d'abord le cas $f \in \mathcal{E}_+$ puis $f \in \mathcal{M}_+$ et enfin $f \in \mathcal{L}^1$.]

Exercice 4.5 (Intégrale des fonctions continues) *Corrigé 65 page 327*
Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ et que

$$\int f d\lambda = \int_0^1 f(x)dx$$

(cette dernière intégrale est à prendre au sens de "l'intégrale des fonctions continues" vue au Chapitre 1). On rappelle que l'on note (un peu abusivement...) par λ la restriction à $\mathcal{B}([0,1])$ de la mesure de Lebesgue (aussi notée λ...) sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 4.6 (Fonctions continues et fonctions intégrables) *Corrigé 66 page 328*
Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}([0,1])$. Montrer que $C([0,1], \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$.

Exercice 4.7 ($f, g \in \mathcal{L}^1 \not\Rightarrow fg \in \mathcal{L}^1$)
Soit $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Donner un exemple pour lequel $fg \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$.

Exercice 4.8 (Rappel du cours...)
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Montrer que si $A \in T$ est tel que $m(A) = 0$, alors $\int_A f dm (= \int f 1_A dm) = 0$. (On rappelle que $f 1_A = f$ sur A et $f 1_A = 0$ sur A^c.)

Exercice 4.9 (f positive intégrable implique f finie p.p.) *Corrigé 67 page 329*
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Montrer que si $\displaystyle\int f dm < +\infty$, alors $f < +\infty$ p.p..

Exercice 4.10 (Une caractérisation de l'intégrabilité) *Corrigé 68 page 329*
Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, u une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{x \in E, |u(x)| \geq n\}$ et $B_n = \{x \in E, n < |u(x)| \leq n+1\}$.

1. Montrer que :

$$\int |u| dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty. \tag{4.31}$$

2. Soit $p \in]1, +\infty[$, montrer que $|u|^p$ est une fonction mesurable et que :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1}\, m(A_n) < +\infty. \tag{4.32}$$

Exercice 4.11 (Sur la convergence en mesure)
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f, g \in \mathcal{M}$ t.q. $f_n \to f$ en mesure et $g_n \to g$ en mesure, quand $n \to \infty$.

1. On suppose, dans cette question, que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $fg \in \mathcal{M}$ et $f_n g_n \to fg$ en mesure, quand $n \to \infty$.

   [On pourra s'inspirer de la question 3. de l'exercice 3.23 et donc commencer par montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que :
$$n \geq n_0,\ k \geq k_0 \Rightarrow m(\{x \in E\,;\, |f_n(x)| \geq k\}) \leq \varepsilon.]$$
   Donner un exemple pour lequel $fg \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

2. En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, Donner un exemple pour lequel $f_n g_n \not\to fg$ en mesure, quand $n \to \infty$ (pour cet exemple, on a donc $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ ou $g \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$).

Exercice 4.12 (Sur l'inégalité de Markov) *Corrigé 69 page 332*
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $a\, m(\{|f| > a\}) \leq \displaystyle\int_{\{|f|>a\}} |f|\, dm$.
2. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $m(\{|f| > a\}) \leq (\displaystyle\int |f|\, dm)/a$. (Ceci est l'inégalité de Markov.)
3. Montrer que
$$\lim_{a \to \infty} a\, m(\{|f| > a\}) = 0. \tag{4.33}$$
4. Donner des exemples de fonctions non intégrables qui vérifient la propriété (4.33) dans les 2 cas suivants : $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$.

Exercice 4.13 (Sur $f \geq 0$ p.p.) *Corrigé 70 page 332*
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que les 2 conditions suivantes sont équivalentes :

1. $f \geq 0$ p.p.,
2. $\int_A f\, dm \geq 0$ pour tout $A \in T$.

Exercice 4.14 *Corrigé 71 page 333*
Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1 (= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$.

1. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ t.q. $\forall A \in T$, $m(A) \leq \delta \Rightarrow \displaystyle\int_A |f| dm \leq \varepsilon$. [*Introduire* $f_n = \inf(|f|, n)$].
2. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, C \in T$ t.q. :
   (i) $m(C) < +\infty$,
   (ii) $\displaystyle\int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon$,
   (iii) $\sup_C |f| < +\infty$,

   [*Considérer* $C_n = \{x \in E\,;\, \dfrac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\}$, *et montrer que pour* $n \geq n_0$ *où* n_0 *est bien choisi,* C_n *vérifie (i), (ii) et (iii).*]

Exercice 4.15
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que $0 \leq f \leq 1$ p.p. et que $\int f\, dm = \int f^2\, dm$. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable fini A tel que $f = 1_A$ p.p..

Exercice 4.16 (Intégration par rapport à une mesure image)
Soit (E, T, m) un espace mesuré, (F, S) un espace mesurable et f de E dans F. On suppose que f est mesurable, c'est à dire que $f^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in S$. pour tout $B \in S$, on pose $\mu(B) = m(f^{-1}(B))$ (On note souvent $\mu = f_\star m$).

1. Montrer que μ est une mesure sur S (on l'appelle *mesure image* de m par f).
2. μ est-elle finie (resp. σ-finie, diffuse) lorsque m est finie (resp. σ-finie, diffuse) ?
3. Montrer qu'une fonction Φ mesurable de F dans $\mathbb{R}$ est $\mu-$intégrable si et seulement si $\Phi \circ f$ est m-intégrable et que dans ce cas
$$\int_E \Phi \circ f \, dm = \int_F \Phi \, d\mu.$$

Exercice 4.17 ($m-$mesurabilité) *Corrigé 72 page 334*
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et f une application de A^c dans $\mathbb{R}$. Montrer que :
il existe g mesurable de E dans $\mathbb{R}$ t.q. $f = g$ p.p. si et seulement si il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite de fonctions étagées, t.q. $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

Exercice 4.18 (Mesure complète, suite de l'exercice 2.32) *Corrigé 73 page 334*
On reprend les notations de l'exercice 2.32 page 49. On note donc $(E, \overline{T}, \overline{m})$ le complété de l'espace mesuré (E, T, m).

Montrer que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p. et que $\displaystyle\int f d\overline{m} = \int g dm$.

Exercice 4.19 (Petit lemme d'intégration) *Corrigé 74 page 335*
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(E, T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}(E, T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.)

1. On suppose (dans cette question) que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que
$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T,\ m(A_n) \to 0 \ \ \Rightarrow \int f 1_{A_n} dm \to 0. \tag{4.34}$$
2. On prend (dans cette question) $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Donner un exemple de $f \in \mathcal{M}(E, T)$ t.q. $f \geq 0$ (de sorte que $f \in \mathcal{M}_+(E, T)$), pour lequel (4.34) est faux.
3. On suppose (dans cette question) que $m(E) < \infty$ et que $f > 0$ (c'est à dire $f(x) > 0$ pour tout $x \in E$). Montrer que
$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T,\ \int f 1_{A_n} dm \to 0 \ \ \Rightarrow m(A_n) \to 0. \tag{4.35}$$
On pourra utiliser le fait que, pour $p \in \mathbb{N}^\star$, $A_n \subset \{f < \frac{1}{p}\} \cup \{x \in A_n; f(x) \geq \frac{1}{p}\}$.
4. On prend (dans cette question) $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (de sorte que $m(E) = \infty$). Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $f > 0$, alors (4.35) est faux. Donner un exemple de $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f > 0$.

Exercice 4.20 (Fatou sans positivité) *Corrigé 75 page 336*
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $h \in \mathcal{M}(E, T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}(E, T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.)

1. On suppose que $f_n \to h$ p.p. quand $n \to \infty$, $f_n \geq f$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\int f_n dm \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer qu'il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q.
   - $f_n = g_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f = g$ p.p.,
   - $g_n(x) \to h(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in E$,
   - $g_n \geq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.
2. (question plus difficile) On reprend les hypothèses de la question précédente sauf "$f_n \geq f$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$" que l'on remplace par l'hypothèse (plus faible) "il existe $D \in \mathbb{R}$ t.q. $\int f_n dm \geq D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$". Donner un exemple pour lequel $h \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. [Prendre $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.]

Exercice 4.21 *Corrigé 76 page 337*
Soient $T > 0$ et $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1([0,T], \mathcal{B}([0,T]), \lambda)$ (λ désigne donc ici la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}([0,T])$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{nx} f(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1$.

   On suppose, dans la suite de l'exercice, que $f \geq 0$ p.p. et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. que $\int e^{nx} f(x)\, d\lambda(x) \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $f = 0$ p.p.. [Appliquer le théorème de convergence monotone.]
3. On suppose de plus que f est continue. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, T]$.

4.11.2 L'espace L^1

Exercice 4.22 (Mesure de densité) *Corrigé 77 page 338*
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Pour $A \in T$, on pose $\mu(A) = \int_A f dm$.

1. Montrer que μ est une mesure sur T.
2. Soit $g \in \mathcal{M}$. Montrer que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$ si et seulement si $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (on pose $fg(x) = 0$ si $f(x) = \infty$ et $g(x) = 0$). Montrer que, pour $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$, $\int g d\mu = \int f g dm$.

(On dit que μ est la mesure de densité f par rapport à m et on pose $\mu = fm$.)

Exercice 4.23 (Comparaison de convergence dans L^1)
On considère ici l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$. On note λ la mesure de Lebesgue et, pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de Dirac en a. On pose $\mu = \delta_1 + \delta_2 + 3\lambda$ (noter que μ est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. On pose $f_n = f 1_{[-n,n]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $L^1(\mu) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^1(\mu)$, et calculer $a_n = \int f_n d\mu$.
2. A-t-on convergence simple, convergence uniforme, convergence en mesure, convergence dans $L^1(\mu)$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?.

Exercice 4.24 (Convergence uniforme et convergence des intégrales)
Soient (E, T, m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$; on suppose que f_n converge uniformément vers f quand $n \to \infty$ (plus précisément : il existe des représentants des f_n, encore notés f_n, t.q. f_n converge uniformément vers f).

1. A-t-on $f \in L^1$ (plus précisément : existe-t-il $F \in L^1$ t.q. $f = g$ p.p. si $g \in F$) ? [*distinguer les cas $m(E) < +\infty$ et $m(E) = +\infty$.*]

2. Si $f \in L^1$ et $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, a-t-on : $\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \int f dm$?

Exercice 4.25 *Corrigé 78 page 339*
Soit (E,T,m) un espace mesuré. On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f \in L^1$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$ p.p., que $f_n \to f$ p.p. et que $\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1. [*on pourra examiner la suite* $(f - f_n)^+$.]

Exercice 4.26 (Exemple de convergence)

1. Soit (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $f, g \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On suppose que $f_n \to f$ p.p. et que $f_n \to g$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que $f = g$ p.p.
2. On suppose maintenant $(E,T,m) = ([-1,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction : $f_n = n1_{[\frac{-1}{2n}, \frac{1}{2n}]}$.
   (a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1, et que la suite $(\int f_n d\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (b) Peut-on appliquer le théorème de Lebesgue de la convergence dominée ?
   (c) A-t-on convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$?
   (d) Montrer que pour toute fonction φ continue de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\int f_n \varphi d\lambda \to \int \varphi d\delta_0$ lorsque $n \to +\infty$ (on dit que $f_n\lambda$ tend vers δ_0 dans l'ensemble des mesures sur les boréliens de $[-1,1]$ pour la topologie "faible $\star$").

Exercice 4.27 (A propos du lemme de Fatou)
Soient (E,T,m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1 (= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))$ t.q. $f_n \geq 0$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout $x \in E$, $f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$.

1. Construire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f_n = g_n$ p.p..
   On pose $g = \liminf_{n\to+\infty} g_n$ (où g_n est construite à la question 1).
2. Montrer que $f = g$ pp, que $f \geq 0$ p.p. et que :
$$\int g dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n dm \tag{4.36}$$
3. On suppose de plus qu'il existe $C > 0$ t.q. $\int f_n dm \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et que $f < +\infty$ p.p..

Exercice 4.28 (Théorème de Beppo-Lévi) *Corrigé 79 page 339*
Soient (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))$ et $f : E \to \mathbb{R}$, t.q. :

(i) $f_n \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$.
(ii) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, c'est-à-dire :
$f_{n+1} \geq f_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$,
ou
$f_{n+1} \leq f_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Construire $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1 (= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))$ et $g \in \mathcal{M}$ t.q. $f_n = g_n$ p.p., $f = g$ p.p., $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$, et $g_{n+1} \geq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou $g_{n+1} \leq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
2. Montrer que $f \in L^1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \in \mathbb{R}$.

3. On suppose ici que $f \in L^1$, montrer que $f_n \to f$ dans L^1, lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4.29 (Préliminaire pour le théorème de Vitali) *Corrigé 80 page 341*
Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. :

$$A \in T,\ m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \le \varepsilon.$$

[*Choisir un représentant de* f *et introduire* $f_n = \inf(|f|, n)$].

2. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $C \in T$ t.q. $m(C) < +\infty$ et $\displaystyle\int_{C^c} |f| dm \le \varepsilon$. [*Choisir un représentant de* f *et considérer* $C_n = \{x \in E\,;\, \dfrac{1}{n} \le |f(x)|\}$.]

Exercice 4.30 (Théorème de Vitali) *Corrigé 81 page 342*
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et $f : E \to \mathbb{R}$, t.q. $f_n \to f$ p.p..

1. On suppose $m(E) < +\infty$. Montrer que : $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable (i.e. : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ t.q. $(A \in T, n \in \mathbb{N}, m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \varepsilon)$. [*Pour montrer le sens* $\Rightarrow$*, utiliser la question 1 de l'exercice 4.29. Pour le sens* $\Leftarrow$*, remarquer que* $\int |f_n - f| dm = \int_A |f_n - f| dm + \int_{A^c} |f_n - f| dm$*, utiliser le théorème d'Egorov et le lemme de Fatou...*]
2. On suppose maintenant $m(E) = +\infty$. Montrer que : $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable et vérifie : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, C \in T, m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f_n| dm \le \varepsilon$ pour tout n. [*Pour montrer le sens* $\Rightarrow$*, utiliser l'exercice 4.29. Pour le sens* $\Leftarrow$*, utiliser l'exercice 4.29, le lemme de Fatou et le résultat de la question 1.*]
3. Montrer que le théorème de convergence dominée de Lebesgue peut être vu comme une conséquence du théorème de Vitali.

Exercice 4.31 (Théorème de "Vitali-moyenne") *Corrigé 82 page 345*
Soit (E, T, m) un espace mesuré. On note $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$ et $f \in \mathcal{M}(E, T)$.

1. On suppose que $m(E) < \infty$. On se propose ici de montrer que "$f \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$" si et seulement si on a les deux propritées suivantes :
   p1. $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to \infty$,
   p2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.
   (a) Montrer le sens direct (c'est-à-dire que la convergence pour la norme de L^1 implique $p1$ et $p2$).
   (b) Pour montrer la réciproque, on suppose maintenant que $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to \infty$, et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.
      i. Montrer que pour tout $\delta > 0$ et $\eta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. : $p, q \ge n \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| \ge \eta\} \le \delta$.
      ii. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^1.
      iii. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1$ et que $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$.
2. On ne suppose plus que $m(E) < \infty$. Montrer que "$f \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$ si et seulement si on a les propriétés suivantes :
   p1. $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to \infty$,
   p2. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable,
   p3. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in T$ t.q. $m(A) < \infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{A^c} |f_n| dm \le \varepsilon$.

Exercice 4.32 (Continuité de $p \mapsto \|\cdot\|_p$) *Corrigé 83 page 348*
Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(E, T)$.

1. Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose $\|f\|_p = \Big(\displaystyle\int |f|^p dm\Big)^{\frac{1}{p}}$ (noter que $|f|^p \in \mathcal{M}_+$) et on dit que $f \in \mathcal{L}^p$ si $\|f\|_p < +\infty$.
   On pose $I = \{p \in [1, +\infty[, f \in \mathcal{L}^p\}$.
   (a) Soient p_1 et $p_2 \in [1, +\infty[$, et $p \in [p_1, p_2]$. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$, alors $f \in \mathcal{L}^p$. En déduire que I est un intervalle. [*On pourra introduire* $A = \{x; |f(x)| \le 1\}$.]
   (b) On montre sur des exemples que les bornes de I peuvent être ou ne pas être dans I. On prend pour cela : $(E, T, m) = ([2, +\infty[, \mathcal{B}([2, \infty[), \lambda)$ (λ est ici la restriction à $[2, \infty[$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Calculer I dans les deux cas suivants :
      i. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [2, +\infty[$.
      ii. $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}, x \in [2, +\infty[$.
   (c) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ et $p \in \overline{I}$, ($\overline{I}$ désigne l'adhérence de I dans $\mathbb{R}$), t.q. $p_n \uparrow p$ (ou $p_n \downarrow p$). Montrer que $\displaystyle\int |f|^{p_n} dm \to \int |f|^p dm$ quand $n \to +\infty$. [*On pourra encore utiliser l'ensemble* A].
2. On dit que $f \in \mathcal{L}^\infty$ s'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < C$ p.p.. On note $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < C$ p.p.$\}$. Si $f \notin \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = +\infty$.
   (a) Montrer que $f \le \|f\|_\infty$ p.p.. A-t-on $f < \|f\|_\infty$p.p. ?
      On pose $J = \{p \in [1, +\infty]; f \in \mathcal{L}^p\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$.
   (b) Remarquer que $J = I$ ou $J = I \cup \{+\infty\}$. Montrer que si $p \in I$ et $+\infty \in J$, alors $[p, +\infty] \subset J$. En déduire que J est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}_+$.
   (c) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \uparrow +\infty$. On suppose que $\|f\|_\infty > 0$ (noter que $f = 0$ p.p. $\Leftrightarrow \|f\|_\infty = 0$).
      i. Soit $0 < c < \|f\|_\infty$. Montrer que $\liminf_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \ge c$. [On pourra remarquer que $\int |f|^p dm \ge c^p m(\{x, |f(x)| \ge c\}$.]
      ii. On suppose que $\|f\|_\infty < +\infty$. Montrer que : $\limsup_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \le \|f\|_\infty$. [*On pourra considérer la suite* $g_n = \Big(\dfrac{|f|}{\|f\|_\infty}\Big)^{p_n}$ *et noter que* $g_n \le g_0$ *p.p.*.]
      iii. Déduire de (a) et (b) que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
3. Déduire des deux parties précédentes que $p \to \|f\|_p$ est continue de $\overline{J}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, où $\overline{J}$ désigne l'adhérence de J dans $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $\overline{J} = [a, b]$ si $J = |a, b|$, avec $1 \le a \le b \le +\infty$, et $|$ désigne $]$ ou $[$).

Exercice 4.33 (Exemple de continuité et dérivabilité sous le signe $\int$)
Soit $f : \mathbb{R} \times R_+ \to \mathbb{R}_+$donnée par : $f(t, x) =$ch$(t/(1 + x)) - 1$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $f(t, .)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
2. On pose : $F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t, x)dx$. Montrer que F est continue, dérivable. Donner une expression de F'.

Exercice 4.34 (Contre exemple à la continuité sous le signe $\int$)
Soit $f : R_+ \times]0, 1[\to \mathbb{R}_+$ donnée par : $f(t, x) = 1$ si $x \in [0, \frac{t}{4}] \cup [t, 1]$, $f(\frac{t}{2}, t) = \frac{2}{t}$ et f est affine par morceaux.

1. Montrer que la fonction $f(., x)$ est continue pour tout $x \in]0, 1[$.
2. Montrer que $f(t, x) \to 1$ lorsque $t \to 0$, pour tout $x \in]0, 1[$.

3. Montrer que $\int f(t,x)dx \not\to 1$ lorsque $t \to 0$. Pourquoi ne peut on pas appliquer le théorème de continuité sous le signe $\int$?

Exercice 4.35 (Continuité d'une application de L^1 dans L^1) *Corrigé 84 page 353*
Soient (E,T,m) un espace mesuré fini et soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^\star\,;\ |g(s)| \le C|s| + C,\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.37}$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

   On pose $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Pour $u \in L^1$, on pose $G(u) = \{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m);\ h = g \circ v \text{ p.p.}\} \in L^1$, avec $v \in u$.
2. Montrer que la définition précédente a bien un sens, c'est à dire que $G(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$. On suppose que $u_n \to u$ p.p. et qu'il existe $F \in L^1$ t.q. $|u_n| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^1.
4. Montrer que G est continue de L^1 dans L^1. [*On pourra utiliser la question 3. et le théorème appelé "réciproque partielle de la convergence dominée".*]
5. (Question non corrigée, voir le corrigé 108 page 380) On considère ici $(E,T,m) = ([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On suppose que g ne vérifie pas (4.37). On va construire $u \in L^1$ t.q. $G(u) \notin L^1$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que : $|g(\alpha_n)| \ge n|\alpha_n|$ et $|\alpha_n| \ge n$.

   (b) On choisit une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ vérifiant les conditions données à la question précédente. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{|\alpha_n| n^2} = 1.$$

   (c) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite définie par : $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n - \dfrac{\alpha}{|\alpha_n| n^2}$ (où α_n et α sont définies dans les 2 questions précédentes). On pose $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n 1_{[a_{n+1}, a_n[}$. Montrer que $u \in L^1$ et $G(u) \notin L^1$.

4.11.3 Espérance et moments des variables aléatoires

Exercice 4.36 *Soient (E,T) un espace probabilisé et X une variable aléatoire de (E,T) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, de loi de probabilité p_X. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X dans les cas suivants :*

1. p_X est la loi uniforme sur $[a,b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$;

2. p_X est la loi exponentielle ;

3. p_X est la loi de Gauss.

Exercice 4.37 Dans une ruche, la longévité d'une abeille ouvrière née au printemps est une variable aléatoire X définie par la densité de probabilité $f(t) = \lambda t^2 e^{-\alpha t}$, où λ et α sont des réels positifs.
Sachant que la longévité moyenne d'une abeille est de 45 jours, calculer λ et α.

Exercice 4.38 (Problème de Buffon) Sur un parquet "infini" dont les lattes ont une largeur $2d$, on laisse tomber au hasard une aiguille de longueur 2ℓ avec $\ell < d$, et on veut estimer la probabilité de l'événement A : "l'aiguille rencontre un interstice". On appelle (Ω, T, p) l'espace probabilisé associé à ce problème.
On considère :

– que la position x du centre de l'aiguille par rapport à l'interstice le plus proche et dans la direction $x'x$ perpendiculaire aux lattes est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[-d, d]$,
– que l'angle orienté θ que fait l'aiguille avec l'interstice est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

1. Montrer que l'événement A "correspond" (on précisera en quel sens) à la partie P_A du plan (x, θ) : $P_A = \{(x, \theta) \in [-d, d] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]; |x| < \ell \sin \theta\}$. Représenter graphiquement P_A.
2. Montrer que $p(A) = \frac{2\ell}{\pi d}$.

Exercice 4.39 (Inégalité de Jensen) *Corrigé 85 page 354*

Rappel : Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe c_a t.q. $f(x) - f(a) \geq c_a(x - a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et X une v.a. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X et $f(X)$ sont intégrables. Montrer l'**inégalité de Jensen**, c'est-à-dire :

$$\int f(X)dP \geq f(\int XdP).$$

[Utiliser le rappel avec a bien choisi.]

Exercice 4.40 (Sur l'équi-intégrabilité) *Corrigé 86 page 355*

Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. (réelles). On rappelle que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable si $\int_A |X_n|dP \to 0$, quand $P(A) \to 0$ (avec $A \in \mathcal{A}$), uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

1. $\lim_{a\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n|dP = 0$,
2. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |X_n|dP < +\infty$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équi-intégrable.

Exercice 4.41 (Caractérisation de l'indépendance) *Corrigé 87 page 355*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $n \geq 2$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles. Montrer que l'indépendance de $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ est équivalente à la propriété suivante :

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in]-\infty, +\infty[^n, P[X_1 \leq a_1, \ldots, X_n \leq a_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \leq a_i].$$

(La notation $P[X \leq a]$ est identique à $P(\{X \leq a\})$, elle désigne la probabilité de l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq a\}$.)

Exercice 4.42 (Sign(X) et $|X|$ pour une gaussienne) *Corrigé 88 page 356*

Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose sign(s)=1 si $s > 0$, sign(s)=-1 si $s < 0$ et sign(0)= 0. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. gaussienne centrée (c'est-à-dire $P_X = f\lambda$ avec, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, où $\sigma > 0$ est la racine carré de la variance de X). Montrer que sign(X) et $|X|$ sont indépendantes et préciser leurs lois. Même question avec sign(X) et X^2.

Exercice 4.43 (V.a. gaussiennes dépendantes) *Corrigé 89 page 357*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ et X_1, X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes et telles que :

$$X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2) \text{ et } X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2).$$

(le signe "$\sim$" signifie "a pour loi".) Construire deux v.a. Y_1 et Y_2 t.q. $X_1 \sim Y_1$, $X_2 \sim Y_2$ et Y_1 et Y_2 soient dépendantes.

Exercice 4.44 (V.a. gaussiennes dépendantes, à covariance nulle) *Corrigé 90 page 357*

soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilités et X, S deux v.a. réelles, indépendantes, t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et S a pour loi $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. (Il est possible de construire un espace de probabilités et des v.a. indépendantes ayant des lois prescrites, voir le Chapitre 7.)

1. Montrer que $SX \sim \mathcal{N}(0,1)$.
2. Montrer que SX et X sont dépendantes.
3. Montrer que $\mathrm{Cov}(SX, X) = 0$.
4. (Question subsidiaire.) On ne suppose plus l'existence de S, mais on suppose qu'il existe Y v.a. gaussienne indépendante de X. Montrer que si $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\sigma > 0$, il est possible d'utiliser Y pour construire S, v.a. indépendante de X et telle que $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$.

Exercice 4.45 (Limite p.s. et indépendance) *Corrigé 91 page 358*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite v.a.r. et X, Y deux v.a.r.. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, X_n et Y sont indépendantes et on suppose que $X_n \to X$ p.s., quand $n \to \infty$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 4.46 (Exponentielle d'une v.a. gaussienne)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une v.a. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Soit $Y = \exp(X)$. Calculer la moyenne, la variance et la densité de Y.

Exercice 4.47 (Loi du χ^2)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une v.a. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Calculer l'espérance, la variance ainsi que la densité de la v.a. X^2. (Remarque : cette loi s'appelle "Loi du χ^2 à 1 degré de liberté".)

Chapitre 5

Mesures sur la tribu des boréliens

5.1 L'intégrale de Lebesgue et l'intégrale des fonctions continues

Nous commençons par comparer l'intégrale de Lebesgue (définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$) à l'intégrale "classique" des fonctions continues (et plus généralement des fonctions réglées).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non). On rappelle que $\mathcal{B}(I) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A \subset I\}$. On peut donc considérer la restriction à $\mathcal{B}(I)$ de la mesure de Lebesgue définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On notera en général (un peu incorrectement) aussi λ cette mesure sur $\mathcal{B}(I)$.

Proposition 5.1 *Soit $-\infty < a < b < +\infty$. Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$. Alors, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda))$ et $\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$ (cette dernière intégrale est à prendre au sens de "l'intégrale des fonctions continues" vue au Chapitre 1).*

DÉMONSTRATION :
La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice (corrigé) 4.5 page 99. En fait l'exercice 4.5 s'intéresse au cas $[0,1]$ mais s'adapte facilement pour le cas général $[a,b]$.

■

Remarque 5.1

1. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ dont les bornes sont $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (I peut être fermé ou ouvert en a et b) et si $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$ ou $L^1(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$, on notera souvent :

$$\int f d\lambda = \int f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(x)dx.$$

   Cette notation est justifée par la proposition précédente (proposition 5.1) car, si I est compact, l'intégrale de Lebesgue contient l'intégrale des fonctions continues (et aussi l'intégrale des fonctions réglées et aussi l'intégrale de Riemann, voir l'exercice 5.3).

2. Soient $-\infty < a < b < +\infty$ et $f \in C([a,b], \mathbb{R})$.

   La proposition 5.1 donne que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda))$. En fait, on écrira souvent que $f \in L^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda))$, c'est-à-dire qu'on confondra f avec sa classe dans $L^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)$, qui est l'ensemble $\{g$

$\in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b],\ \mathcal{B}([a,b]),\ \lambda)\,;\ g\ =\ f$ p.p.}. On peut d'ailleurs noter que f est alors le seul élément continu de $\{g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)\,;\, g = f$ p.p.} comme le montre la proposition suivante (proposition 5.2).

Proposition 5.2 *Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f, g \in C(]a,b[, \mathbb{R})$. On suppose que $f = g$ λ-p.p.. On a alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.*

DÉMONSTRATION :
Cette proposition est démontrée à l'exercice (corrigé) 3.10 page 66 pour $a = -\infty$ et $b = \infty$. La démonstration pour a et b quelconques est similaire.

■

Proposition 5.3 *Soit $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (fonction continue à support compact). Alors $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. (Ici aussi, on écrira souvent $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.)*

De plus, si $a, b \in \mathbb{R}$ sont t.q. $a < b$ et $f = 0$ sur $[a,b]^c$ (de tels a et b existent). Alors, $\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$ (cette dernière intégrale étant à prendre au sens de "l'intégrale des fonctions continues" vue au Chapitre 1).

DÉMONSTRATION :
On remarque d'abord que f est borélienne car continue. Puis, pour montrer que f est intégrable, on va utiliser la proposition 5.1. Comme f est à support compact, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$ et $f = 0$ sur $[a,b]^c$. On a alors, par la proposition 5.1, $f_{|_{[a,b]}} \in C([a,b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)$. On a donc $\int |f| d\lambda = \int |f_{|_{[a,b]}}| d\lambda < \infty$ et donc $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Enfin, la proposition 5.1 donne aussi :

$$\int f_{|_{[a,b]}} d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

D'où l'on conclut bien que $\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$.

■

Le résultat précédent se généralise à l'intégrale de Riemann des fonctions Riemann-intégrables (construite à partir des sommes de Darboux). Ceci fait l'objet de l'exercice 5.3.

5.2 Mesures abstraites et mesures de Radon

Remarque 5.2 Les propositions 5.1 et 5.3 donnent les résultats suivants :

1. Pour $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f d\lambda$. L'application L est une application linéaire (de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive, c'est-à-dire que $f \geq 0 \Rightarrow L(f) \geq 0$. (On rappelle que $f \geq 0$ signifie que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.)

   Plus généralement, soit m une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, finie sur les compacts. Il est facile de voir que $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ (en toute rigueur, on a plutôt $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$). Pour $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f dm$. L'application L est une application linéaire (de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive (ou encore une "forme linéaire positive").

   On peut montrer une réciproque de ce résultat (théorème 5.1).

2. Soit $-\infty < a < b < \infty$. Pour $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f d\lambda$. L'application L est une application linéaire (de $C([a,b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive.

   Ici aussi, plus généralement, soit m une mesure finie sur $([a,b], \mathcal{B}([a,b]))$. Il est facile de voir que $C([a,b], \mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), m)$ (ou plutôt $C([a,b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), m)$). Pour $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, on pose

$L(f) = \int f dm$. L'application L est une application linéaire (de $C([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive (ou encore une "forme linéaire positive").

Ici aussi, on peut montrer une réciproque de ce résultat (voir la remarque 5.5).

On énonce maintenant des résultats, dûs à F. Riesz, qui font le lien entre les applications linéaires (continues ou positives) sur des espaces de fonctions continues (c'est cela que nous appellerons "mesures de Radon") et les mesures "abstraites" sur $\mathcal{B}(R)$ (c'est-à-dire les applications $\sigma-$additives sur les boréliens de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$, non identiquement égales à $+\infty$). Le théorème 5.1 donné ci après est parfois appelé "Théorème de représentation de Riesz en théorie de la mesure". Dans ce cours, nous utilisons l'appellation "Théorème de représentation de Riesz" pour le théorème 6.9, il s'agit du "Théorème de représentation de Riesz dans les espaces de Hilbert".

Théorème 5.1 (Riesz) *Soit L une forme linéaire positive sur C_c dans $\mathbb{R}$, alors il existe une unique mesure m sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q. :*

$$\forall \ f \in C_c, \ \ L(f) = \int f dm. \tag{5.1}$$

De plus, m est finie sur les compacts (c'est-à-dire $m(K) < \infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}$.)

DÉMONSTRATION : La partie "unicité" de cette démonstration est assez facile et est donnée dans la proposition 5.4. La partie "existence" est plus difficile, on en donne seulement le schéma général.

Soit L une forme linéaire positive sur $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Montrer que L est continue, c'est-à-dire : pour tout compact K de $\mathbb{R}$, il existe $C_K \in \mathbb{R}$ t.q. pour toute fonction continue à support dans K, $|L(f)| \le C_K\|f\|_\infty$. (Considérer une fonction $\psi_K \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t. q. $\psi_K(x) = 1$ si $x \in K$, et $\psi_K(x) \ge 0$).
2. Montrer le lemme suivant :

   Lemme 5.1 (Dini) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $f_n \uparrow f$ ou $f_n \downarrow f$ lorsque $n \to +\infty$. Alors f_n converge uniformément vers f.
3. Déduire des deux étapes précédentes que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $f_n \uparrow f$ ou $f_n \downarrow f$ lorsque $n \to +\infty$, alors $L(f_n) \to L(f)$.
4. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des suites telles que $f_n \uparrow f$ et $g_n \uparrow g$ (ou $f_n \downarrow f$ et $g_n \downarrow g$), où f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que si $f \le g$ alors $\lim_{n\to+\infty} L(f_n) \le \lim_{n\to+\infty} L(g_n)$ (et dans le cas particulier où $f = g$, $\lim_{n\to+\infty} L(f_n) = \lim_{n\to+\infty} L(g_n)$). [On pourra, par exemple, considérer, pour n fixé, $h_p = \inf(g_p, f_n)$ et remarquer que $h_p \uparrow f_n$.]
5. On définit :

$$A_+ \ = \ \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \uparrow f \text{ et } \lim_{n\to+\infty} L(f_n) < +\infty\}, \tag{5.2}$$

$$A_- \ = \ \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \downarrow f \text{ et } \lim_{n\to+\infty} L(f_n) > -\infty\}, \tag{5.3}$$

   Si $f \in A^+$, on pose $L(f) = \lim_{n\to+\infty} L(f_n)$, où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \uparrow f$. Si $f \in A^-$, on pose $L(f) = \lim_{n\to+\infty} L(f_n)$, où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \downarrow f$. Vérifier que ces définitions sont cohérentes (c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas des suites choisies et que si $f \in A^+ \cap A^-$, les deux définitions coincident). Montrer les propriétés suivantes :

   (a) Si $f \in A^+$ (resp. A^-) alors $-f \in A^-$ (resp. A^+)et $L(-f) = -L(f)$.

   (b) Si $f, g \in A^+$ (resp. A^-) alors $f + g \in A^+$ (resp. A^-) et $L(f + g) = L(f) + L(g)$.

(c) Si $f \in A^+$ (resp. A^-) et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ alors $\alpha f \in A^+$ (resp. A^-) et $L(\alpha f) = \alpha L(f)$.

(d) Si $f \in A^+$ (resp. A^-) et $g \in A^+$ alors $\sup(f,g) \in A^+$ et $\inf(f,g) \in A^+$.

(e) Si $f, g \in A^+$ (resp. A^-) et $f \geq g$, alors $L(f) \geq L(g)$.

(f) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_+$ (resp. A^-) et $f_n \uparrow f \in A^+$ (resp. $f_n \downarrow f \in A^-$), alors $L(f_n) \geq L(f)$.

(g) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_+$ (resp. A^-) t.q. $f_n \uparrow f$ (resp. $f_n \downarrow f$), où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $\lim_{n\to+\infty} L(f_n) < +\infty$, alors $f \in A^+$.

Remarquer aussi que A^+ contient toutes les fonctions caractéristiques des ouverts bornés et que A^- contient toutes les fonctions caractéristiques des compacts.

6. On pose :
$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \forall \varepsilon > 0, \exists g \in A^+ \text{ et } h \in A^-; h \leq f \leq g \text{ et } L(g) - L(h) \leq \varepsilon\} \tag{5.4}$$
et pour $f \in E$, on définit :
$$L(f) = \sup_{h\in A^-, h\leq f} L(h) = \inf_{g\in A^-, g\geq f} L(g). \tag{5.5}$$
Montrer que cette définition a bien un sens, c'est-à-dire que d'une part :
$$\sup_{h\in A^-, h\leq f} L(h) = \inf_{g\in A^-, g\geq f} L(g),$$
et d'autre part la définition de L sur E est compatible avec la définition sur A^+ et A^- (après avoir remarqué que $A^+ \subset E$ et $A^- \subset E$). Montrer les propriétés suivantes sur E :

(a) E est un espace vectoriel et L une forme linéaire positive sur E.

(b) E est stable par passage à la limite croissante ou décroissante.

(c) E est stable par inf et sup, i.e. si $f \in E$ et $g \in E$, alors $\sup(f,g) \in E$ et $\inf(f,g) \in E$.

7. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c$ t.q. $0 \leq \varphi_n \leq 1$ et $\varphi_n \uparrow 1$. On pose $T = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); 1_A\varphi_n \in E \forall n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $T \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
8. Pour $A \in T$, on pose : $m(A) = \lim_{n\to+\infty} L(1_A\varphi_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Montrer que m est une mesure σ-finie.
9. Montrer que $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, T, m) = E$ et que $\int f dm = L(f), \forall f \in E$.

■

Proposition 5.4 *Soit $d \geq 1$, m et μ deux mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, finies sur les compacts. On suppose que $\int f dm = \int f d\mu$, pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Alors $m = \mu$.*

DÉMONSTRATION : La démonstration de cette proposition peut se faire en utilisant la proposition 2.5. Elle est faite pour $d = 1$ au chapitre 4 (proposition 4.11. Sa généralisation au cas $d > 1$ est laissée en exercice. ■

Remarque 5.3 Le théorème 5.1 donne un autre moyen de construire la mesure de Lebesgue que celui vu au chapitre 2 :

Pour $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int_a^b f(x)dx$, où $a, b \in \mathbb{R}$ sont choisis pour que $f = 0$ sur $[a, b]^c$ (on utilise ici l'intégrale des fonctions continues sur un compact de $\mathbb{R}$). L'application L est clairement linéaire positive de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème 5.1 donne donc l'existence d'une mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\int f dm = L(f)$ pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cette mesure est justement la mesure de Lebesgue (elle vérifie bien $m(]a, b[) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

Définition 5.1 *On définit les espaces de fonctions continues (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) suivants :*

$$C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}); \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty\},$$
$$C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}); f(x) \to 0 \text{ quand } |x| \to \infty\},$$
$$C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}); \exists K \subset \mathbb{R},\ K \text{ compact, } f = 0 \text{ sur } K^c\}.$$

Pour $f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_u = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. La norme $\|\cdot\|_u$ s'appelle "norme de la convergence uniforme" (elle est aussi parfois appelée "norme infinie".)

Il est clair que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on rappelle que $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont des espaces de Banach (e.v.n. complet) avec la norme $\|\cdot\|_u$

Remarque 5.4 Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$ (en toute rigueur, on a plutôt $C_b \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$). Pour $f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f dm$. L'application L est alors une application linéaire sur $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On munit $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme, L'application L est alors continue (car $L(f) \le m(E)\|f\|_u$ pour tout $f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$). L'application L est aussi positive, c'est-à-dire que $f \ge 0 \Rightarrow L(f) \ge 0$. On donne ci-après des réciproques partielles de ces résultats.

Théorème 5.2 (Riesz) *Soit L une application linéaire positive de C_0 dans $\mathbb{R}$, alors il existe une unique mesure m finie sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q. :*

$$\forall\ f \in C_0,\ \ L(f) = \int f dm. \tag{5.6}$$

DÉMONSTRATION : Ici aussi, on ne donne qu'un schéma de la démonstration.

Soit L une application linéaire positive de C_0 dans $\mathbb{R}$.

1. Pour montrer que si m existe, alors m est finie, considérer les fonctions

   $$f_n = 1_{[-n,n]} + (x+n+1)1_{[-(n+1),n]} + (n+1-x)1_{[n,n+1]},$$

   et la continuité de L.
2. Montrer que L est continue.[*Raisonner par l'absurde en supposant que L est positive et non continue : en utilisant le fait que si L est non continue alors L est non bornée sur la boule unité, construire une suite g_n de fonctions positives telles que la série de terme général g_n converge absolument. Soit g la limite de la série de terme général g_n, montrer que $T(g) > n, \forall n \in \mathbb{N}$.*]
3. Montrer que la restriction T de L à $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est linéaire continue, et donc par le théorème 5.1 qu'il existe une unique mesure m t.q. $T(f) = \int f dm, \forall f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. Montrer que $L(f) = \int f dm\ \forall f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ [*approcher f de manière uniforme par $f_n \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, prendre par exemple : $f_n = f\varphi_n$ où $\varphi_n \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\varphi_n = 1$ sur $[-n,n]$ et $\varphi_n(x) = 0$ sur $[-(n+1),n]^c$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} L(f_n) = L(f)$ et que $\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \int f dm$.*

■

Le résultat du théorème 5.2 est faux si on remplace C_0 par C_b. On peut, par exemple, construire une application linéaire continue positive sur C_b, non identiquement nulle sur C_b et nulle sur C_0. Si on note L une telle application (nulle sur C_0 mais non identiquement nulle sur C_b) et si m est une mesure finie sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q. $L(f) = \int f dm$ pour $f \in C_b$, on montre facilement (en utilisant $\int f dm = 0$ pour tout $f \in C_0$) que $m = 0$ et donc $L(f) = 0$ pour tout $f \in C_b$, en contradiction avec le fait que L n'est pas identiquement nulle sur C_b.

Pour construire une application linéaire continue positive sur C_b, non identiquement nulle et nulle sur C_0, on peut procéder de la manière décrite ci après. On note F le sous espace vectoriel de C_b formé des éléments de C_b ayant une limite en $+\infty$. On a donc $f \in F$ si $f \in C_b$ et si il existe $l \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) \to l$ quand $x \to \infty$. Pour $f \in F$ on pose $\tilde{L}(f) = \lim_{x\to\infty} f(x)$. On a ainsi défini une forme linéaire positive sur F (car, pour $f \in F$, $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ implique bien $\tilde{L}(f) \geq 0$). En utilisant le théorème 5.3 donné ci après, il existe donc L, forme linéaire positive sur C_b, t.q. $L = \tilde{L}$ sur F. L'application L est donc linéaire continue positive sur C_b (pour la continuité, on remarque que $|L(f)| \leq \|f\|_u$), elle est bien nulle sur C_0 (car $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ si $f \in C_0 \subset F$) et non identiquement nulle sur C_b car $L(f) = 1$ si f est la fonction constante, égale à 1 en tout point.

Théorème 5.3 (Hahn-Banach positif)
Soit F un sous espace vectoriel de $C_b = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R});\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty\}$ et T une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$. On suppose que F contient les fonctions constantes et que T est positive (c'est-à-dire que, pour $f \in F$, $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ implique $T(f) \geq 0$). Il existe alors $\overline{T}$, application linéaire positive sur C_b, t.q. $\overline{T} = T$ sur F.

DÉMONSTRATION : La démonstration n'est pas détaillée ici. Elle peut se faire en utilisant une technique très similaire à celle donnant la démonstration du théorème de Hahn-Banach (qui permet aussi de montrer le théorème de prolongement d'une application linéaire continue définie sur un sous espace vectoriel d'un espace de Banach). Elle peut aussi se faire en se ramenant au théorème de Hahn-Banach lui-même tel qu'il est donné, par exemple, dans le livre d'analyse fonctionnelle de H. Brezis.

Il est intéressant de noter que le résultat du théorème peut être faux si on retire l'hypothèse "F contient les fonctions constantes". ■

On peut maintenant faire la remarque suivante :

Remarque 5.5 Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}$. On note $C(K,\mathbb{R}) = \{f_{|_K}, f \in C_b\}$. Si m est une mesure finie sur $(K, \mathcal{B}(K))$ l'espace fonctionnel $C(K,\mathbb{R})$ est inclus dans $L^1_{\mathbb{R}}(K, \mathcal{B}(K), m)$, et l'application qui à $f \in C(K,\mathbb{R})$ associe $\int f dm$ est linéaire positive (et continue, si $C(K,\mathbb{R})$ est muni de la norme de la convergence uniforme). Réciproquement, soit L une application linéaire positive de $C(K,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème précédent permet de montrer qu'il existe une unique mesure finie, notée m, sur $(K, \mathcal{B}(K))$ t.q. :

$$L(f) = \int f dm, \ \ \forall f \in C(K,\mathbb{R}). \tag{5.7}$$

Considérons maintenant le cas des mesures signées : si m est une mesure signée sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (ou sur $(K, \mathcal{B}(K))$), l'application qui à $f \in C_0$ (ou $\in C(K)$, K étant une partie compacte de $\mathbb{R}$) associe $\int f dm$ est linéaire continue (pour la norme de la convergence uniforme). Réciproquement, on a aussi existence et unicité d'une mesure (signée) définie à partir d'une application linéaire continue de C_0 (ou de $C(K)$) dans $\mathbb{R}$:

Théorème 5.4 (Riesz, mesures signées) *Soit L une application linéaire continue de $C_0(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ (ou de $C(K,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, où K est un compact de $\mathbb{R}$). Alors il existe une unique mesure signée, notée m, sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (ou sur $\mathcal{B}(K)$) t.q. :*

$$L(f) = \int f dm, \ \ \forall f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})(\text{ ou } C(K,\mathbb{R})). \tag{5.8}$$

Les éléments de $(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}))'$ (ou $(C(K,\mathbb{R}))'$) sont appelés "mesures de Radon" sur $\mathbb{R}$ (ou K). On rappelle que, pour un espace de Banach (réel) E, on note E' son dual topologique, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{R}$.
DÉMONSTRATION : Elle consiste à se ramener au théorème de Riesz pour des formes linéaires positives. Elle n'est pas détaillée ici. On rappelle seulement que si m est une mesure signée sur T (tribu sur un ensemble E). il existe

deux mesures finies m^+ et m^- sur T, étrangères (c'est-à-dire qu'il existe $A \in T$ t.q. $m^+(A) = m^-(A^c) = 0$) et t.q. $m = m^+ - m^-$. On a alors (par définition) $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m^+) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m^-)$ et, si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $\int f dm = \int f dm^+ - \int f dm^-$. ■

Définition 5.2 (Mesure de Radon) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$, alors on appelle mesure de Radon sur $\overline{\Omega}$ un élément de $(C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}))'$, c'est-à-dire une application linéaire continue (pour la norme infinie) de $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.*

Remarque 5.6 Soit T une forme linéaire sur $C_c(\Omega, \mathbb{R})$.

1. Si T est continue pour la norme $\|.\|_\infty$, on peut montrer qu'il existe une et une seule mesure signée, notée μ, sur les boréliens de Ω telle que $T(f) = \int f d\mu$, pour tout $f \in C_c(\Omega, \mathbb{R})$. Pour montrer l'existence de μ, on peut commencer par se ramener au théorème 5.4 en prolongeant T (de manière non unique) en une application linéaire continue sur $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ (ceci est possible par le théorème de Hahn-Banach). Le théorème 5.4 donne alors une (unique) mesure sur $\mathcal{B}(\overline{\Omega})$ correspondant à ce prolongement de T. La restriction de cette mesure à $\mathcal{B}(\Omega)$ est la mesure μ recherchée. Il est intéressant de remarquer que cette mesure μ est unique, sans que celle donnée par le théorème 5.4 soit unique (car cette dernière dépend du prolongement choisi de T à $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$).
2. Si T est continue pour la topologie “naturelle" de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$, (c'est-à-dire que, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C_K \in \mathbb{R}$ tel que $T(f) \le C_K \|f\|_\infty$, pour tout $f \in C_c(\Omega, \mathbb{R})$ avec $f = 0$ sur le complémentaire de K) alors ce résultat est faux ; par contre on peut montrer qu'il existe deux mesures (positives) μ_1 et μ_2 sur les boréliens de Ω telles que $T(f) = \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2$, $\forall f \in C_c(\Omega, \mathbb{R})$; noter que μ_1 et μ_2 peuvent prendre toutes les deux la valeur $+\infty$ (exemple : $N = 1$, $\Omega =]-1, 1[$, $T(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}^\star} n f(1 - \frac{1}{n}) - \sum_{n \in \mathbb{N}^\star} n f(-1 + \frac{1}{n})$), et donc que $(\mu_1 - \mu_2)(\Omega)$ n'a pas toujours un sens....

Soit maintenant T une forme linéaire sur $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, continue pour la norme $\|\cdot\|_u$, alors il existe une et une seule mesure signée, notée μ, sur les boréliens de Ω telle que $T(f) = \int f d\mu$, $\forall f \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

5.3 Changement de variables, densité et continuité

On montre dans cette section quelques propriétés importantes de l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (et éventuellement de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ si μ est finie sur les compacts)

Proposition 5.5 (Changement de variable affine) *Soient $\alpha \in \mathbb{R}^\star$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(x) = f(\alpha x + \beta)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $\int g d\lambda = \frac{1}{|\alpha|} \int f d\lambda$.*

Le même résultat reste vrai en remplaçant $\mathcal{L}^1$ par L^1.

DÉMONSTRATION :

1. On pose $\varphi(x) = \alpha x + \beta$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, de sorte que $g = f \circ \varphi$. Comme f et φ sont boréliennes (noter que φ est même continue), g est aussi borélienne, c'est-à-dire $g \in \mathcal{M}$.
2. Pour montrer que $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et
$$\int g d\lambda = \frac{1}{|\alpha|} \int f d\lambda, \tag{5.9}$$
on raisonne en plusieurs étapes :
   (a) On suppose que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(A) < \infty$. On a alors $g = 1_{\frac{1}{\alpha}A - \frac{\beta}{\alpha}}$ (avec $\frac{1}{\alpha}A - \frac{\beta}{\alpha} = \{\frac{1}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha}, x \in A\}$). On a donc $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et (5.9) est vraie (car on a déjà vu que $\lambda(\frac{1}{\alpha}A - \frac{\beta}{\alpha}) = \frac{1}{|\alpha|}\lambda(A)$, dans la proposition 2.9).

(b) On suppose que $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Il existe donc $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $A_1, \ldots, A_n \in T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. Comme $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on a aussi $\lambda(A_i) < \infty$ pour tout i. On conclut alors que $g = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\frac{1}{\alpha}A_i - \frac{\beta}{\alpha}}$, ce qui donne que $g \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et que (5.9) est vraie.

(c) On suppose que $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$. On a donc $\int f_n d\lambda \uparrow \int f d\lambda$ quand $n \to \infty$. On définit g_n par $g_n(x) = \alpha x + \beta$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors $g_n \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $g_n \uparrow g$ et $\int g_n d\lambda \uparrow \int g d\lambda$ quand $n \to \infty$. Comme (5.9) est vraie pour $f = f_n$ et $g = g_n$, on en déduit que $g \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et (5.9) est vraie.

(d) On suppose enfin seulement que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Comme $f = f^+ - f^-$, avec $f^\pm \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on peut utiliser l'étape précédente avec $f^\pm$ et on obtient que $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et que (5.9) est vraie.

3. Le résultat obtenu est encore vrai pour L^1 au lieu de $\mathcal{L}^1$. Il suffit de remarquer que

$$f_1 = f_2 \text{ p.p. } \Rightarrow g_1 = g_2 \text{ p.p. },$$

avec $g_i(\cdot) = f_i(\alpha \cdot + \beta)$, $i = 1, 2$.

En fait, lorsque f décrit un élément de L^1 (qui est un ensemble d'éléments de $\mathcal{L}^1$), la fonction $g(\alpha \cdot + \beta)$ décrit alors un élément de L^1.

■

Le résultat de densité que nous énonçons à présent permet d'approcher une fonction de $L^1_R(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ "aussi près que l'on veut" par une fonction continue à support compact. Ce résultat est souvent utilisé pour démontrer certaines propriétés des fonctions de L^1 : On montre la propriété pour les fonctions continues, ce qui s'avère en général plus facile, et on "passe à la limite".

Théorème 5.5 (Densité de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$)
On note $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. L'ensemble $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et à supports compacts, est dense dans L^1, c'est-à-dire :

$$\forall f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda),\ \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \|f - \varphi\|_1 < \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION :
On a déjà vu que $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset L^1$. En toute rigueur, on a plutôt $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. L'objectif est donc de montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}^1$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \le \varepsilon$. On va raisonner une nouvelle fois en plusieurs étapes (fonctions caractéristiques, $\mathcal{E}_+$, $\mathcal{M}_+$ et enfin $\mathcal{L}^1$).

Etape 1. On suppose ici que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(A) < \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme λ est une mesure régulière (proposition 2.3), il existe un ouvert O et un fermé F t.q. $F \subset A \subset O$ et $\lambda(O \setminus F) \le \varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $F_n = F \cap [-n, n]$, de sorte que F_n est compact (pour tout n) et $F = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star} F_n$. La continuité croissante de λ donne alors $\lambda(F_n) \uparrow \lambda(F)$, quand $n \to \infty$. Comme $\lambda(F) \le \lambda(A) < \infty$, on a aussi $\lambda(F \setminus F_n) = \lambda(F) - \lambda(F_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Il existe donc n_0 t.q. $\lambda(F \setminus F_{n_0}) \le \varepsilon$.

On pose $K = F_{n_0}$ et on obtient donc $K \subset F \subset A \subset O$. Ce qui donne $\lambda(O \setminus K) \le \lambda(O \setminus F) + \lambda(F \setminus K) \le 2\varepsilon$.

On a donc trouvé un compact K et un ouvert O t.q. $K \subset A \subset O$ et $\lambda(O \setminus K) \le 2\varepsilon$. ceci va nous permettre de construire $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \le 2\varepsilon$.

On pose $d = d(K, O^c) = \inf\{d(x, y), x \in K, y \in O^c\}$. On remarque que $d > 0$. En effet, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset O^c$ t.q. $d(x_n, y_n) = |x_n - y_n| \to d$ quand $n \to \infty$. Par compacité de K, on peut supposer (après extraction éventuelle d'une sous suite) que $x_n \to x$, quand $n \to \infty$. Si $d = 0$, on a alors aussi $y_n \to x$ quand $n \to \infty$ et donc $x \in O^c \cap K$ (car K et O^c sont fermés). Ce qui est impossible car $O^c \cap K = \emptyset$. On a donc bien montré $d > 0$.

On pose maintenant , pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{d}(d - d(x,K))^+$ avec $d(x,K) = \inf\{d(x,y),\ y \in K\}$. La fonction φ est continue car $x \mapsto d(x,K)$ est continue (cette fonction est même lipschitzienne, on peut montrer que $|d(x,k) - d(y,K)| \le |x - y|$). Elle est à support compact car il existe $A > 0$ t.q. $K \subset [-A, A]$ et on remarque alors que $\varphi = 0$ sur $[-A - d, A + d]^c$. On a donc $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Enfin, on remarque que $\varphi = 1$ sur K, $\varphi = 0$ sur O^c et $0 \le \varphi \le 1$ (partout). On en déduit que $f - \varphi = 0$ sur $K \cup O^c$ et $0 \le |f - \varphi| \le 1$, ce qui donne

$$\|f - \varphi\|_1 \le \lambda(O \setminus K) \le 2\varepsilon,$$

et termine donc la première (et principale) étape.

Etape 2. On suppose ici que $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1$. Il existe donc $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $A_1, \ldots, A_n \in T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. Comme $f \in \mathcal{L}^1$, on a aussi $\lambda(A_i) < \infty$ pour tout i.

Soit $\varepsilon > 0$, l'étape 1 donne, pour tout i, l'existence de $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\|1_{A_i} - \varphi_i\|_1 \le \varepsilon$. On pose $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i\varphi_i \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on obtient $\|f - \varphi\|_1 \le (\sum_{i=1}^n a_i)\varepsilon$ (ce qui est bien arbitrairement petit).

Etape 3. On suppose ici que $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de l'intégrale dans $\mathcal{M}_+$ (lemme 4.3), Il existe $g \in \mathcal{E}_+$ t.q. $g \le f$ et $\int f d\lambda - \varepsilon \le \int g dm \le \int f dm$, de sorte que $\|g - f\|_1 = \int (f - g) d\lambda \le \varepsilon$. L'étape 2 donne alors l'existence de $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\|g - \varphi\|_1 \le \varepsilon$. D'où l'on déduit $\|f - \varphi\|_1 \le 2\varepsilon$. Ce qui termine l'étape 3.

Etape 4. On suppose enfin que $f \in \mathcal{L}^1$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f^\pm \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$, l'étape 3 donne qu'il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\|f^+ - \varphi_1\|_1 \le \varepsilon$ et $\|f^- - \varphi_2\|_1 \le \varepsilon$. On pose alors $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. On a $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\|f - \varphi\|_1 \le 2\varepsilon$. Ce qui prouve bien la densité de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans L^1. ■

Le résultat de densité que nous venons de démontrer n'est pas limité à la mesure de Lebesgue. Il est vrai pour toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts. Il est aussi vrai en remplaçant C_c par C_c^∞. Enfin, il n'est pas limité à $\mathbb{R}$, il est également vrai dans $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$. Tout ceci est montré dans l'exercice 7.13. Par contre, le résultat que nous montrons maintenant n'est pas vrai pour toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts (voir l'exercice 7.13).

Théorème 5.6 (Continuité en moyenne) *Soient $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$. On définit f_h ("translatée" de f) par : $f_h(x) = f(x + h)$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\|f_h - f\|_1 = \int |f(x + h) - f(x)| dx \to 0 \textit{ lorsque } h \to 0. \tag{5.10}$$

DÉMONSTRATION :
Soient $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$. On remarque que $f_h = f(\cdot + h) \in \mathcal{L}1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (d'après la proposition 5.5). D'autre part $f = g$ p.p. implique $f_h = g_h$ p.p.. On peut donc définir f_h comme élément de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ si $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

La démonstration de (5.10) fait l'objet de l'exercice 5.14.

■

5.4 Intégrales impropres des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On considère ici des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Définition 5.3 (Intégrabilité à gauche) *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a > \alpha$; on suppose que $\forall \ \beta \in]\alpha, a[$, $f1_{]\alpha,\beta[} \in L^1(= L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda))$. On dit que f est intégrable à gauche en a (ou encore que $\int^a$ existe) si $\int f1_{]\alpha,\beta[}d\lambda$ a une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $\beta \to a$. Cette limite est notée $\int_\alpha^a f(t)dt$.*

Remarque 5.7 Ceci ne veut pas dire que $f1_{]\alpha,a[} \in L^1$. Il suffit pour s'en convaincre de prendre $a = +\infty$, $\alpha = 0$, considérer la fonction f définie par $f(0) = 1$ et, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Par contre, dès que la fonction f considérée est de signe constant, on a équivalence entre les deux notions :

Proposition 5.6 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a > \alpha$; on suppose que $\forall \ \beta \in]\alpha, a[$, $f1_{]\alpha,\beta[} \in L^1(= L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda))$. Alors f est intégrable à gauche en a si et seulement si $f1_{]\alpha,a[} \in L^1$.*
DÉMONSTRATION : Ce résultat se déduit du théorème de convergence monotone (construire une suite qui tend en croissant vers $f1_{]\alpha,a[}$). ■

5.5 Exercices

Exercice 5.1 (La mesure de Dirac n'est pas une fonction...)
On note $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ et on munit E de la norme de la convergence uniforme. Soit T l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $T(\varphi) = \varphi(0)$. On note aussi δ_0 la mesure de Dirac en 0 sur $\mathcal{B}([0, 1])$.

1. Montrer que $T \in E'$ (on rappelle que E' est le dual topologique de E, c'est à dire l'ensemble des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{R}$).
2. Soit $\varphi \in E$. Monter que $\varphi \in \mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \delta_0)$ et que $T(\varphi) = \int \varphi d\delta_0$, où δ_0 est la mesure de Dirac en 0.
3. Soient $g \in L^1_{\mathbb{R}}([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ définie par : $\varphi_n(x) = (1/n)(n-n^2x)^+$, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\int g\varphi_n d\lambda \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
   En déduire qu'il n'existe pas $g \in L^1_{\mathbb{R}}([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ t.q. on ait, pour toute fonction $\varphi \in E$: $T(\varphi) = \int g\varphi d\lambda$.
4. Montrer que δ_0 n'est pas une mesure de densité par rapport à λ.

Exercice 5.2
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (n - n^2x)^+$. On note λ la mesure de Lebesgue sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $]0, 1[$, et $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(]0, 1[, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
Soit T l'application de $C([0, 1], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $T(\varphi) = \varphi(0)$.

1. Montrer que $T \in \Big(C([0, 1], \mathbb{R})\Big)'$ (on rappelle que $\Big(C([0, 1], \mathbb{R})\Big)'$ est le dual de $C([0, 1], \mathbb{R})$, c'est à dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme).
2. Montrer que $T(\varphi) = \int \varphi d\delta_0$, où δ_0 est la mesure de Dirac en 0.
3. Soient $g \in L^1(]0, 1[, \mathbb{R})$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Big(C([0, 1], \mathbb{R})\Big)$ définie par : $\varphi_n = \frac{f_n}{2n}$. Montrer que $\int g\varphi_n d\lambda \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
   En déduire qu'il n'existe pas $g \in L^1(]0, 1[, \mathbb{R})$ t.q. on ait, pour toute fonction $\varphi \in C([0, 1], \mathbb{R})$: $T(\varphi) = \int g\varphi d\lambda$; montrer que δ_0 n'est pas une mesure de densité.

Exercice 5.3 (Intégrale de Riemann) Soient a, b des réels, $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, i.e. telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $|f(t)| \leq M, \forall t \in [a, b]$. Soit Δ une subdivision de $[a, b]$, $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{N+1}\}$ avec $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{N+1} = b$. On pose $S^\Delta = \sum_{i=0}^{N}(\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x))(x_{i+1} - x_i)$, et $S_\Delta = \sum_{i=0}^{N}(\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x))(x_{i+1} - x_i)$. On note A l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$ et $S^\star = \inf_{\Delta\in A} S^\Delta$, et $S_\star = \sup_{\Delta\in A} S_\Delta$. On dit que f est Riemann intégrable si $S^\star = S_\star$. On pose alors $R\int_a^b f(x)dx = S^\star$.

1. Soient Δ_1 et $\Delta_2 \in A$ tels que $\Delta_1 \subset \Delta_2$. Montrer que $S_{\Delta_1} \leq S_{\Delta_2} \leq S^{\Delta_2} \leq S^{\Delta_1}$. En déduire que $S_\Delta \leq S^{\Delta'}$ pour tous $\Delta, \Delta' \in A$, et donc que $S_\star \leq S^\star$.
2. Montrer qu'il existe une suite de subdivisions $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $S_{\Delta_n} \to S_\star$ et $S^{\Delta_n} \to S^\star$ quand $n \to +\infty$.
3. Montrer que si f est continue, f est Riemann-intégrable.
4. On suppose maintenant que f est Riemann-intégrable. Soit $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite t.q. $S_{\Delta_n} \to S_\star$ et $S^{\Delta_n} \to S^\star$ quand $n \to +\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\Delta_n = \{x_0^{(n)}, \ldots, x_{N_n+1}^{(n)}\}$ et on pose :

$$g_n(x) = \inf\{f(y), y \in [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]\}, x_i^{(n)} \leq x < x_{i+1}^{(n)}, i = 0, \ldots, N_n + 1 \tag{5.11}$$

$$h_n(x) = \sup\{f(y), y \in [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]\}, x_i^{(n)} \leq x < x_{i+1}^{(n)}, i = 0, \ldots, N_n + 1 \tag{5.12}$$

$$g_n(b) = h_n(b) = 0. \tag{5.13}$$

(a) Montrer que g_n et $h_n \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}^1$, où $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\{[a, b], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda\})$ et $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\{[a, b], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda\})$, et que $\int(h_n - g_n)d\lambda \to 0$ quand $n \to +\infty$.

(b) Montrer que $g_n \leq g_{n+1} \leq f \leq g_{n+1} \leq h_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) On pose $g = \lim_{n\to+\infty} g_n$ et $h = \lim_{n\to+\infty} h_n$; montrer que $g = h$ p.p. . En déduire que $f \in L^1$ et que $\int f d\lambda = R\int_a^b f(x)dx$.

(d) Soit f définie par :

$$f(x) \quad = \quad 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \tag{5.14}$$
$$f(x) \quad = \quad 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}. \tag{5.15}$$

Montrer que f n'est pas Riemann intégrable, mais que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a, b], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Exercice 5.4 *Corrigé 92 page 359*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(]0, 1[, \mathbb{R})$ convergeant simplement vers la fonction f :$]0, 1[\to \mathbb{R}$; on suppose que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ $(\subset C(]0, 1[, \mathbb{R})$) converge simplement vers la fonction constante et égale à 1.

1. A-t-on $f \in C^1(]0, 1[, \mathbb{R})$ et $f' = 1$?
2. On suppose maintenant que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1_{\mathbb{R}}(]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$ vers la fonction constante et égale à 1. A-t-on $f \in C^1(]0, 1[, \mathbb{R})$ et $f' = 1$?

Exercice 5.5 (Intégrale impropre) *Corrigé 93 page 360*

On définit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0, \text{ si } x \leq 0,$$
$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x^2}, \text{ si } x > 0.$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

2. Soit $0 < a < b < \infty$. Montrer que $f'1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On pose $\int_a^b f'(t)dt = \int f'1_{]a,b[}d\lambda$. Montrer que :
$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

3. Soit $a > 0$.

   (a) Montrer $f'1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

   (b) Pour $0 < x < a$, on pose $g(x) = \int_x^a f'(t)dt$. Montrer que $g(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to 0$, avec $x > 0$, et que cette limite est égale à $f(a) - f(0)$. (Cette limite est aussi notée $\int_0^a f'(t)dt$, improprement... car $f'1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, la restriction de f' à $]0, a[$ n'est donc pas intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $]0, a[$.)

Exercice 5.6
Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et qu'il existe $C \geq 0$ tel que $|f_n| \leq C$ p.p. et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\int |f_n - f|^2 dm \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5.7 *Corrigé 94 page 362*
Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On définit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $F(x) = \int f1_{[0,x]}d\lambda (= \int_0^x f(t)dt)$, pour $x \geq 0$, et $F(x) = -\int f1_{[x,0]}d\lambda (= -\int_x^0 f(t)dt)$ pour $x < 0$. Montrer que F est uniformément continue.

Exercice 5.8 (Intégrabilité et limite à l'infini) *Corrigé 95 page 363*
Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) = \mathcal{L}^1$.

1. On suppose que $f(x)$ admet une limite quand $x \to \infty$. Montrer que cette limite est nulle.
2. On suppose que $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; a-t-on : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?
3. On suppose que f est uniformément continue. A-t-on $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$? [On pourra commencer par montrer que, pour tout $\eta > 0$ et toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels t.q. $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta} |f(x)|d\lambda(x) = 0.] \tag{5.16}$$
4. On suppose que $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f' \in L^1$; a-t-on : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

Exercice 5.9

1. On considère l'espace mesuré $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[, \lambda)$. Soit $0 < \alpha < +\infty$. On pose, pour $x \in]0, 1[$, $f(x) = (\dfrac{1}{x})^\alpha$. Pour quelles valeurs de α a-t-on $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$?
2. On considère l'espace mesuré $(E, T, m) = (\mathbb{R}^\star_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\star_+), \lambda)$. Soit f définie, pour $x \in]0, +\infty[$, par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Montrer que $f \notin L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On pose $f_n = f1_{]0,n[}$. Montrer que $f_n \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, que $f_n \to f$ p.p. (et même uniformément) et que $\displaystyle\int f_n dm$ a une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5.10 (Egalité p.p. de fonctions continues) *Corrigé 96 page 364*

On munit $\mathbb{R}^N$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et de la mesure de Lebesgue λ_N. Soient f et $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $f = g$ p.p.. Montrer que $f = g$ partout. [On dira donc que $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_n)$ est continue si il existe $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $f = g$ p.p. (plus précisément on devrait écrire $g \in f$). Dans ce cas on identifie f avec g.]

Exercice 5.11 1. On considère l'espace mesuré $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$; soit $0 < \alpha < +\infty$; on pose, pour $x \in]0, 1[$, $f(x) = (\frac{1}{x})^\alpha$. Pour quelles valeurs de α a-t-on $f \in L^1_\mathbb{R}(E, T, m)$?

2. On considère l'espace mesuré $(E, T, m) = (\mathbb{R}_+^\star, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$; soit f définie, pour $x \in]0, +\infty[$, par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Montrer que $f \notin L^1_\mathbb{R}(E, T, m)$. On pose $f_n = f 1_{]0,n[}$. Montrer que $f_n \in L^1_\mathbb{R}(E, T, m)$, que $f_n \to f$ p.p. (et même uniformément) et que $\displaystyle\int f_n dm$ a une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5.12 Soit μ et ν deux mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si, pour toute fonction continue à support compact on a :

$$\int f d\mu = \int f d\nu, \qquad (E)$$

   alors $\mu = \nu$. [*On rappelle (cf. exercice 2.34) que si m est une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors :* $\forall A \in \mathbb{R}, m(A) = \inf\{m(O), O \supset A, O$ *ouvert de* $\mathbb{R}\}$.]
2. On suppose maintenant que l'égalité (E) est vérifiée pour toute fonction f de $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Le résultat précédent vous parait-il encore vrai ?

Exercice 5.13 (*Notation : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note f^2 la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f^2(x) = (f(x))^2$.*) Soit $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \in L^1 = L^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f'^2 \in L^1\}$. Pour $f \in E$, on définit $\|f\| = \int |f| d\lambda + (\int |f'|^2 d\lambda)^{\frac{1}{2}}$

1. Montrer que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé. E est-il un espace de Banach ?
2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^\star$. Montrer que $a \leq \delta a^2 + \frac{1}{\delta}$.En déduire que pour $f \in E$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^\star$, on a : $|f(x) - f(y)| \leq \delta \int |f'|^2 d\lambda + \frac{1}{\delta}|x - y|$.
3. Montrer que si $f \in E$, alors :
   – f est uniformément continue.
   – f est bornée.
   – $f^2 \in L^1$.

Exercice 5.14 (Continuité en moyenne) *Corrigé 97 page 364*
Pour $f \in L^1 = L^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$, on définit f_h ("translatée" de f) par : $f_h(x) = f(x + h)$, pour $x \in \mathbb{R}$. (noter que $f_h \in L^1$).

1. Soit $f \in C_c = C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$.
2. Soit $f \in L^1$, montrer que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Exercice 5.15 On note $L^1 = L^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, et $C_b = C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.

1. Pour $f \in L^1$, $h \in \mathbb{R}_+^\star$ et $x \in \mathbb{R}^N$, on définit

$$f_h(x) = \frac{1}{\lambda_N(B(0, h))} \int_{B(x,h)} f(y) dy,$$

   où $B(0, h)$ désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon h. Montrer que f_h est définie partout, que $f_h \in L^1$, et que $f_h \to f$ dans L^1 lorsque $h \to 0$. En déduire qu'il existe $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $h_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ et $f_{h_n} \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$.

2. On considère maintenant une suite de mesures $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finies sur $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, t.q. $\mu_n \to \delta_0$ dans C_b' i.e. $\int \varphi d\mu_n \to \int \varphi d\mu, \forall \varphi \in C_b$. Soit f une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ et intégrable pour la mesure de Lebesgue, et $\nu = f\lambda$. Montrer que $\mu_n \star \nu$ est une mesure de densité $f_n \in L^1$ et montrer que $f_n \to f$ dans L^1.
3. Soit $A \in \mathbb{R}$ t.q. $A \subset [0,1]$; on dit que A est "bien équilibré" si pour tout intervalle I de $[0,1]$, on a : $\lambda(I \cap A) = \lambda(I \cap A^c) = \frac{\lambda(I)}{2}$. Montrer qu'il n'existe pas de borélien A de $[0,1]$ bien équilibré.

Exercice 5.16 (Non existence de borélien “bien équilibré")
Soit $N \geq 1$. On note $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}_N), \lambda_N)$.

1. Pour $f \in L^1$, $h \in \mathbb{R}_+^\star$ et $x \in \mathbb{R}^N$, on définit

$$f_h(x) = \frac{1}{\lambda_N(B(0,h))} \int_{B(x,h)} f(y)dy,$$

   où $B(x,h)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon h. Montrer que f_h est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Montrer que $f_h \in L^1$ et que $f_h \to f$ dans L^1 lorsque $h \to 0$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de continuité en moyenne dans L^1.]

   En déduire qu'il existe $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $h_n \to 0$, lorsque $n \to +\infty$, et $f_{h_n} \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de borélien A inclus dans [0,1] et t.q. $\lambda(I \cap A) = \lambda(I \cap A^c) = \frac{\lambda(I)}{2}$ pour tout intervalle I de $[0,1]$. [On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question précédente avec $N = 1$ et f convenablement choisi. Cette question est aussi une conséquence de l'exercice 5.17.]

Exercice 5.17 (Sur la concentration d'un borélien) *Corrigé 98 page 365*
Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $A \in \mathcal{B}(]a,b[)$ et $\rho \in]0,1[$. On suppose que $\lambda(A \cap]\alpha,\beta[) \leq \rho(\beta - \alpha)$ pour tout α, β t.q. $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Montrer que $\lambda(A) = 0$. [On pourra, par exemple, commencer par montrer que $\lambda(A \cap O) \leq \rho\lambda(O)$ pour tout ouvert O de $]a,b[$.]

Conséquence de cet exercice : Soit $A \in \mathcal{B}(]a,b[)$ t.q. $\lambda(A) > 0$. Alors, pour tout $\rho < 1$, il existe α, β t.q. $a \leq \alpha < \beta \leq b$ et $\lambda(A \cap]\alpha,\beta[) \geq \rho(\beta - \alpha)$.

Exercice 5.18 (Points de Lebesgue) *Corrigé 99 page 366*
On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$, par L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^1$ l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$. On note $dt = d\lambda(t)$.

1. Soit $(I_1, \ldots, I_n)$ des intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ t.q. chaque intervalle n'est pas contenu dans la réunion des autres. On pose $I_k =]a_k, b_k[$ et on suppose que la suite $(a_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante. Montrer que la suite $(b_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante et que les intervalles d'indices impairs [resp. pairs] sont disjoints 2 à 2.
2. Soit J une famille finie d'intervalles ouverts non vide de $\mathbb{R}$ dont la réunion est notée A. Montrer qu'il existe une sous-famille finie de J, notée $(I_1, \ldots, I_m)$, formée d'intervalles disjoints 2 à 2 et t.q. $\lambda(A) \leq 2\sum_{k=1}^m \lambda(I_k)$. [Utiliser la question 1.]

   On se donne maintenant $f \in L^1$ et on suppose qu'il existe $a > 0$ t.q. $f = 0$ p.p. sur $[-a,a]^c$. Le but de l'exercice est de montrer que :

$$\frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt \to f(x), \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}, \text{ quand } n \to \infty. \tag{5.17}$$

   Pour $\varepsilon > 0$, on définit $f_\varepsilon^\star$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_\varepsilon^\star(x) = \sup_{h\geq\varepsilon} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |f(x+t)|dt. \tag{5.18}$$

3.(a) Montrer que $f_\varepsilon^\star$ est bornée.

(b) Montrer que $f_\varepsilon^\star$ est borélienne. [On pourra montrer que $f_\varepsilon^\star$ est le sup de fonctions continues.]

(c) Montrer que $f_\varepsilon^\star(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$.

4. Pour $y > 0$, on pose $B_{y,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R},\ f_\varepsilon^\star(x) > y\}$.

   (a) Montrer que tout $x \in B_{y,\varepsilon}$ est le centre d'un intervalle ouvert $I(x)$ t.q.

   i. $\lambda(I(x)) \geq 2\varepsilon$,

   ii. $\frac{1}{\lambda(I(x))}\int_{I(x)} |f|d\lambda > y$.

   Montrer que parmi les intervalles $I(x)$, $x \in B_{y,\varepsilon}$, ainsi obtenus, il en existe un nombre fini $I(x_1), \ldots, I(x_n)$ dont la réunion recouvre $B_{y,\varepsilon}$. [On pourra d'abord remarquer que $B_{y,\varepsilon}$ est borné.]

   (b) Montrer que $\lambda(B_{y,\varepsilon}) \leq \frac{2}{y}\|f\|_1$. [Utiliser la question 2.]

   On définit maintenant $f^\star$ de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$f^\star(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |f(x+t)|dt. \tag{5.19}$$

5. Montrer que $f^\star$ est borélienne et que $\lambda(\{f^\star > y\}) \leq \frac{2}{y}\|f\|_1$, pour tout $y > 0$.
6. Montrer (5.17) si f admet un représentant continu. [cette question n'utilise pas les questions précédentes.]
7. Montrer (5.17). [Approcher f, dans L^1 et p.p., par une suite d'éléments de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, notée $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$. On pourra utiliser $(f - f_p)^\star$.]

Exercice 5.19 (Convergence vague et convergence etroite) *Corrigé 100 page 369*

Soit $(m_n)n \in \mathbb{N}$ une suite de mesures (positives) finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ($d \geq 1$) et m une mesure (positive) finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On suppose que :

– $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to \infty$, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

– $m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R}^d)$ quand $n \to \infty$.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to \infty$. [On pourra utiliser le fait que φ est limite uniforme d'une suite d'élement de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.]
2. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on note B_p la boule fermée de centre 0 et de rayon p (pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$). Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star} \subset C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q., pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $0 \leq \varphi_p \leq 1$, $\varphi_p = 1$ sur B_p et $\varphi_p \leq \varphi_{p+1}$. On utilise cette suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ dans les questions suivantes.
3. Soit $\varepsilon > 0$.

   (a) Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. : $p \geq p_0 \Rightarrow \displaystyle\int (1-\varphi_p)dm \leq \varepsilon$.

   (b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\int (1-\varphi_p)dm_n \to \int (1-\varphi_p)dm$ quand $n \to \infty$.

   (c) Montrer qu'il existe $p_1 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. : $n \in \mathbb{N}$, $p \geq p_1 \Rightarrow \displaystyle\int (1-\varphi_p)dm_n \leq \varepsilon$.

4. Montrer que $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to \infty$, pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (on dit alors que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement vers m).
5. Indiquer brièvement comment obtenir le même résultat (c'est-à-dire le résultat de la question 4) si on remplace "$\mathbb{R}^d$" (dans les hypothèses et dans la question 4) par "Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$".

Exercice 5.20 (Unicité avec C_c^∞)
Soit m et μ deux mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$). on suppose que $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $m = \mu$.

Exercice 5.21 (Densité de C_c et C_c^∞ dans L^1)
Soit $d \geq 1$ et μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que μ vérifie les deux propriétés suivantes :

(p1) μ est est finie sur les compacts de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire que $\mu(K) < +\infty$ si K est un compact de $\mathbb{R}^d$,

(p2) μ est régulière, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

En fait, la propriété (p1) entraîne la propriété (p2) (cela est démontré au chapitre 7, proposition 7.5) mais cette démonstration n'est pas demandée ici.

On note $\mathcal{L}^1_\mu$ l'espace $\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$. Pour $f \in \mathcal{L}^1_\mu$, on note $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $|x|$ la norme euclidienne de x.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire φ continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact). Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}^1_\mu$.
2. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\eta > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $\varphi(x) = \frac{(\eta - d(x,K))^+}{\eta}$ avec $d(x, K) = \inf\{|x - y|, y \in K\}$. Montrer que $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et que $\varphi(x) = 1$ si $x \in K$.
3. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\mu(A) < +\infty$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe O ouvert et K compact t.q. $K \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus K) \leq \varepsilon$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|\varphi - 1_A\|_1 \leq \varepsilon$.
4. Soit f une fonction borélienne positive de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \in \mathcal{L}^1_\mu$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra approcher f par une fonction étagée.]
5. (Densité.) Soit $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$.
   (b) Montrer qu'il existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra montrer que, si $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a $\|\varphi - \varphi_n\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$, avec $\varphi_n = \varphi \star \rho_n$ et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une famille régularisante, voir la définition 8.4. du polycopié de cours).]
6. (Continuité en moyenne ?)
   (a) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.
   (b) Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement f et μ) qu'on peut avoir $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \not\to 0$ quand $h \to 0$.
7. On suppose maintenant que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et que μ est une mesure sur les boréliens de Ω, finie sur les sous ensembles compacts de Ω. Indiquer brièvement comment on peut montrer la densité de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ et $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$.

Exercice 5.22 (Loi d'une fonction linéaire de X)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une v.a.. On suppose que la loi de X a une densité par rapport à Lebesgue et on note g cette densité.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que la v.a. $aX + b$ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et donner cette densité en fonction de g, a et b.

Chapitre 15

Fonctions intégrables

15.1 Intégrale sur $\mathcal{M}_+$ et sur $\mathcal{L}^1$

Corrigé 61 (Sup de mesures)

Soit (E, T) un espace mesurable et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur T. On suppose que $m_{n+1}(A) \geq m_n(A)$ pour tout $A \in T$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $m(A) = \sup\{m_n(A), n \in \mathbb{N}\}$ pour $A \in T$.

1. (Lemme préliminaire) Soit $(a_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et $(a_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $a_{n+1,p} \geq a_{n,p}$, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, et $a_{n,p} \to a_p$ quand $n \to \infty$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Montrer $\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \to \sum_{p=0}^{\infty} a_p$ (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) quand $n \to \infty$. [On pourra utiliser $\sum_{p=0}^{N} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p$.]

   ———————————————corrigé———————————————

   On remarque tout d'abord que la suite $(\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle admet donc une limite dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on passe à la limite quand $n \to \infty$ dans les inégalités $\sum_{p=0}^{N} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p$.

   On obtient $\sum_{p=0}^{N} a_p \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p$.
   On passe maintenant à la limite quand $N \to \infty$ pour obtenir
   $\sum_{p=0}^{\infty} a_p \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p$.
   On a donc $\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} = \sum_{p=0}^{\infty} a_p$.

   ———————————————————————————————

2. Montrer que m est une mesure.

   ———————————————corrigé———————————————

   – $m(\emptyset) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\emptyset) = 0$.
   – Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A_p \cap A_q = \emptyset$ si $p \neq q$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On a :
     $m(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(A) = \lim_{n\to\infty} m_n(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} m_n(A_p)$.
     En utilisant la question précédente avec $a_{n,p} = m_n(A_p)$, on en déduit $m(A) = \sum_{p=0}^{\infty} m(A_p)$.

   ———————————————————————————————

3. Soit $f \in \mathcal{E}_+(E, T)$. (On rappelle que $\mathcal{E}_+(E, T)$ est l'ensemble des fonctions étagées de E dans $\mathbb{R}_+$.) Montrer que $\int f dm = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\int f dm_n)$.

   ———————————————corrigé———————————————

   Soit $\{a_1, \ldots, a_p\} \subset \mathbb{R}_+^{\star}$ et $\{A_1, \ldots, A_p\} \subset T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^{p} a_i 1_{A_i}$.

On a $\int f dm_n = \sum_{i=1}^{p} a_i m_n(A_i)$, la suite $(\int f dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. Puis, en passant à la limite sur n, on obtient :
$\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{p} a_i m_n(A_i)) = \sum_{i=1}^{p} a_i \lim_{n\to\infty}(m_n(A_i)) = \sum_{i=1}^{p} a_i m(A_i) = \int f dm$, et donc
$\int f dm = \lim_{n\to\infty}(\int f dm_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\int f dm_n)$.

---

4. Soit $f \in \mathcal{M}_+(E,T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}_+(E,T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.)

(a) Montrer que $(\int f dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée par $\int f dm$.

corrigé

Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_p \uparrow f$ quand $p \to \infty$. D'après la question précédente, on a (pour tout n et tout p) $\int f_p dm_n \le \int f_p dm_{n+1} \le \int f_p dm$.
En passant à la limite sur p (avec n fixé) on en déduit $\int f dm_n \le \int f dm_{n+1} \le \int f dm$. La suite $(\int f dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par $\int f dm$.

(b) Montrer que $\int f dm_n \to \int f dm$ quand $n \to \infty$.

corrigé

On pose $A_f = \{g \in \mathcal{E}_+, g \le f\}$. On sait que $\int f dm = \sup_{g\in A_f} \int g dm$ et que $\int f dm_n = \sup_{g\in A_f} \int g dm_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La question 2 donne que $\int g dm = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int g dm_n$ pour tout $g \in \mathcal{E}_+$. On en déduit :

$$\int f dm = \sup_{g\in A_f} (\sup_{n\in\mathbb{N}} \int g dm_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{g\in A_f} \int g dm_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f dm_n,$$

ce qui, avec la question précécdente, donne bien $\int f dm_n \to \int f dm$ quand $n \to \infty$.

---

5. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\int f dm_n \to \int f dm$ quand $n \to \infty$.

corrigé

On a $|f| \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. la question 4 donne $\int |f| dm_n \le \int |f| dm$, on en déduit que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
la question 4 donne aussi que
$\int f^+ dm_n \to \int f^+ dm$ et
$\int f^- dm_n \to \int f^- dm$.
Ces 2 convergences ayant lieu dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $\int f dm_n \to \int f dm$ quand $n \to \infty$.

Corrigé 62 (Somme de mesures)

Soient m_1 et m_2 deux mesures sur l'espace mesurable (E,T).

1. Montrer que $m = m_1 + m_2$ est une mesure.

corrigé

(a) $m(\emptyset) = m_1(\emptyset) + m_2(\emptyset) = 0$,

(b) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A_n \cap \mathcal{A}_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On a :

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = m_1(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) + m_2(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$

Comme $m_i(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} m_i(A_p)$ pour $i = 1, 2$, on en déduit

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} (m_1(A_p) + m_2(A_p)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} m(A_p),$$

ce qui prouve bien la σ-additivité de m.

Ceci montre bien que m est une mesure.

---

2. Montrer qu'une application f mesurable de E dans $\mathbb{R}$ est intégrable pour la mesure m si et seulement si elle est intégrable pour les mesures m_1 et m_2. Si f est intégrable pour la mesure m, montrer que $\int f dm = \int f dm_1 + \int f dm_2$.

corrigé

Soit $A \in T$, on pose $\varphi = 1_A$. La définition de m donne immédiatement

$$\int \varphi dm = \int \varphi dm_1 + \int \varphi dm_2. \tag{15.1}$$

Par linérarité de l'intégrale, (15.1) est aussi vrai pour $\varphi \in \mathcal{E}_+$.

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{M}_+$. Il existe $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $\varphi_n \uparrow \varphi$ quand $n \to \infty$. On écrit (15.1) avec φ_n au lieu de φ et on fait tendre n vers l'infini. La définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors (15.1).

On a donc montré que (15.1) était vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{M}_+$.

Soit $f \in \mathcal{M}$, en écrivant (15.1) avec $\varphi = |f|$ on obtient bien que $f \in \mathcal{L}^1(E, T, m)$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}^1(E, T, m_1) \cap \mathcal{L}^1(E, T, m_2)$.

Enfin, si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\, T,\, m)$, on écrit (15.1) avec $\varphi = f^+$ et $\varphi = f^-$, la différence donne bien $\int f dm = \int f dm_1 + \int f dm_2$.

---

3. Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de mesures (positives) sur (E, T) et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^\star$. On pose, pour $A \in T$, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(A)$. Montrer que m est une mesure sur T ; soit f une application mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et intégrable pour la mesure m ; montrer que $\int f dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int f dm_n$.

corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}$. n définit $\tilde{m}_n$ par $\tilde{m}_n(A) = \alpha_n m_n(A)$ pour tout $A \in T$. Il est facile de voir que $\tilde{m}_n$ est une mesure sur T, que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m_n) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \tilde{m}_n)$ et que $\int f d\tilde{m}_n = \alpha_n \int f dm_n$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m_n)$.

On pose maintenant , par récurrence sur n, $\mu_0 = \tilde{m}_0$ et $\mu_n = \mu_{n-1} + \tilde{m}_n$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$. La question précédente montre, par récurrence sur n, que μ_n est une mesure sur T et donne que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu_n$ si et seulement si $f \in \cap_{p\le n} \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \tilde{m}_n) = \cap_{p\le n} \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m_n)$. Enfin, la question précédente donne aussi, toujours par récurrence sur n :

$$\int f d\mu_n = \sum_{p=0}^{n} \int f d\tilde{m}_n = \sum_{p=0}^{n} \alpha_n \int f dm_n.$$

Pour tout $A \in T$, on a $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A)$. On peut donc utiliser les résultats de l'exercice précédent. On obtient que m est une mesure sur T et que $f \in \mathcal{L}^1_R(E,T,m)$ implique $f \in \mathcal{L}^1_R(E,T,\mu_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\int f dm = \lim_{n\to\infty} \int f d\mu_n$. Si $f \in \mathcal{L}^1_R(E,T,m)$ on a donc $f \in \mathcal{L}^1_R(E,T,m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\int f dm = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^n \alpha_p \int f dm_p$, c'est-à-dire

$$\int f dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int f dm_n.$$

Corrigé 63 (Mesure de Dirac)

Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0, définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. (cf exemple 2.1.) Soit $f \in \mathcal{M}_+$, calculer $\int f d\delta_0$.

corrigé

Comme $\delta_0(\{0\}^c) = 0$, on a $f = f(0)1_{\{0\}}$ p.p., on en déduit $\int f d\delta_0 = f(0)\delta_0(\{0\}) = f(0)$.

Corrigé 64 (Restrictions de la mesure de Lebesgue)

Soit A et B deux boréliens de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset B$. On note λ_A [resp. λ_B] la restriction à $\mathcal{B}(A)$ [resp. $\mathcal{B}(B)$] de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B,\mathcal{B}(B),\lambda_B)$. Montrer que $f_{|A} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(A,\mathcal{B}(A),\lambda_A)$ et que $\int f_{|A} d\lambda_A = \int f 1_A d\lambda_B$. [Considérer d'abord le cas $f \in \mathcal{E}_+$ puis $f \in \mathcal{M}_+$ et enfin $f \in \mathcal{L}^1$.]

corrigé

On rappelle que $\mathcal{B}(A) = \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,;\, C \subset A\}$ et $\mathcal{B}(B) = \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,;\, C \subset B\}$ (voir l'exercice 2.3).

1. Soit $f \in \mathcal{E}_+(B,\mathcal{B}(B))$. Il existe donc $a_1,\ldots,a_p \in \mathbb{R}_+$ et $A_1,\ldots,A_p \in \mathcal{B}(B) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $f = \sum_{i=1}^p a_i 1_{A_i}$.

   La fonction $f1_A$ appartient donc aussi à $\mathcal{E}_+(B,\mathcal{B}(B))$ (car $A_i \cap A \in \mathcal{B}(B)$) et elle s'écrit

   $$f = \sum_{i=1}^p a_i 1_{A_i} 1_A = \sum_{i=1}^p a_i 1_{A_i\cap A},$$

   de sorte que

   $$\int f 1_A d\lambda_B = \sum_{i=1}^p a_i \lambda(A_i \cap A).$$

   La fonction $f_{|A}$ (c'est-à-dire la restriction de f à A) est définie sur A, elle s'écrit $f_{|A} = \sum_{i=1}^p a_i 1_{A_i\cap A}$. Cette fonction appartient à $\mathcal{E}_+(A,\mathcal{B}(A))$ car $A_i \cap A \in \mathcal{B}(A)$ pour tout i et on a

   $$\int f_{|A} d\lambda_A = \sum_{i=1}^p a_i \lambda(A_i \cap A).$$

   On a bien montré que

   $$\int f 1_A d\lambda_B = \int f_{|A} d\lambda_A, \tag{15.2}$$

   pour tout $f \in \mathcal{E}_+(B,\mathcal{B}(B))$.

2. Soit $f \in \mathcal{M}_+(B, \mathcal{B}(B))$. il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+(B, \mathcal{B}(B))$ t.q. $f_n \uparrow f$, quand $n \to \infty$. On a donc aussi $(f_n 1_A)_{n\in\mathbb{N}} \uparrow f 1_A$ et $(f_{n|_A})_{n\in\mathbb{N}} \uparrow f_{|_A}$, quand $n \to \infty$. Comme $f_{n|_A} \in \mathcal{E}_+(A, \mathcal{B}(A))$, la caractérisation de la mesurabilité positive (proposition 3.3) donne $f_{|_A} \in \mathcal{M}_+(A, \mathcal{B}(A))$. On a aussi $f 1_A \in \mathcal{M}_+(B, \mathcal{B}(B))$. Puis, en écrivant (15.2) avec f_n au lieu de f et en passant à la limite quand $n \to \infty$, la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+(A, \mathcal{B}(A))$ et sur $\mathcal{M}_+(B, \mathcal{B}(B))$ donne (15.2).

   On a donc montré (15.2) pour tout $f \in \mathcal{M}_+(B, \mathcal{B}(B))$.

3. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B, \mathcal{B}(B), \lambda_B)$. On remarque d'abord que $f_{|_A} \in \mathcal{M}(A, \mathcal{B}(A))$. En effet, si $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $(f_{|_A})^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cap A \in \mathcal{B}(A)$. Puis, on applique (15.2) à $|f|$, qui appartient à $\mathcal{M}_+(B, \mathcal{B}(B))$, pour obtenir

$$\int |f_{|_A}| d\lambda_A = \int |f|_{|_A} d\lambda_A = \int |f| 1_A d\lambda_B < \int |f| d\lambda_B < \infty,$$

   ce qui montre que $f_{|_A} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(A, \mathcal{B}(A)), \lambda_A)$.

   Enfin, en appliquant (15.2) avec f^+ et f^- au lieu de f, on obtient

$$\int f^+ 1_A d\lambda_B = \int f^+{}_{|_A} d\lambda_A = \int (f_{|_A})^+ d\lambda_A < \infty$$

   et

$$\int f^- 1_A d\lambda_B = \int f^-{}_{|_A} d\lambda_A = \int (f_{|_A})^- d\lambda_A < \infty,$$

   ce qui donne, en faisant la différence,

$$\int f 1_A d\lambda_B = \int f_{|_A} d\lambda_A.$$

Corrigé 65 (Intégrale de Lebesgue et intégrale des fonctions continues)
Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ et que

$$\int f d\lambda = \int_0^1 f(x) dx$$

(cette dernière intégrale est à prendre au sens de "l'intégrale des fonctions continues" vue au Chapitre 1). On rappelle que l'on note (un peu abusivement...) par λ la restriction à $\mathcal{B}([0,1])$ de la mesure de Lebesgue (aussi notée λ...) sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

———————corrigé———————

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^\star$, une famille $(\alpha_i)_{i\in\{0,\ldots,p\}}$, avec : $\alpha_0 = 0$, $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, pour tout $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $\alpha_p = 1$, et une famille $(a_i)_{i\in\{0,\ldots,p-1\}} \subset \mathbb{R}$ tels que :

$$g(x) = a_i, \;\; \forall x \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[, \;\; \forall i \in \{0, \ldots, p-1\}.$$

On sait que

$$\int_0^1 g(x) dx = \sum_{i=0}^{p-1} a_i (\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$

D'autre part, cette fonction g est mesurable (c'est-à-dire $g \in \mathcal{M}([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ car, pour tout $C \subset \mathbb{R}$, $g^{-1}(C)$ est une réunion (finie) d'intervalles du type $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ à laquelle on ajoute éventuellement certains des points α_i.

On a donc $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}([0,1])$. On a bien montré que $g \in \mathcal{M}([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$. Enfin, comme les singletons sont de mesure nulle, on a $|g| = \sum_{i=0}^{p-1} |a_i| 1_{]\alpha_i,\alpha_{i+1}[}$ p.p., et donc

$$\int |g| d\lambda = \sum_{i=0}^{p-1} |a_i|(\alpha_{i+1} - \alpha_i) < \infty.$$

Donc, $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Finalement, puisque $g = \sum_{i=0}^{p-1} a_i 1_{]\alpha_i,\alpha_{i+1}[}$ p.p., on a aussi

$$\int g d\lambda = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$

On a donc montré que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ et

$$\int g d\lambda = \int_0^1 g(x) dx. \tag{15.3}$$

Soit maintenant $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. On remarque tout d'abord que f est mesurable (parce que, par exemple, les ouverts de $[0,1]$ engendre $\mathcal{B}([0,1])$ et que l'image réciproque, par f, d'un ouvert de $[0,1]$ est un ouvert de $[0,1]$, donc un élément de $\mathcal{B}([0,1])$). Puis, on remarque que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1], \lambda)$ car $\int |f| d\lambda \leq \|f\|_u = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| < \infty$.

On compare maintenant $\int f d\lambda$ et $\int_0^1 f(x) dx$.

Il existe une suite de fonctions en escalier, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q. $f_n \to f$ uniformément sur $[0,1]$, c'est-à-dire $\|f_n - f\|_u \to 0$, quand $n \to \infty$.

La définition de l'intégrale des fonctions continues donne $\int_0^1 f_n(x) dx \to \int_0^1 f(x) dx$ quand $n \to \infty$.

D'autre part, on a aussi $\int f_n d\lambda \to \int f d\lambda$, quand $n \to \infty$, car $|\int f_n d\lambda - \int f d\lambda| \leq \int |f_n - f| d\lambda \leq \|f_n - f\|_u \to 0$, quand $n \to \infty$. En passant à la limite quand $n \to \infty$ dans (15.3) avec f_n au lieu de g, on obtient bien

$$\int f d\lambda = \int_0^1 f(x) dx.$$

Corrigé 66 (Fonctions continues et fonctions intégrables)
Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}([0,1])$. Montrer que $C([0,1], \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$.

corrigé

Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. On montre tout d'abord que f est mesurable.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Comme f est continue, l'ensemble $f^{-1}(O) = \{x \in [0,1],\ f(x) \in O\}$ est une ouvert de $[0,1]$ et donc $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}([0,1])$. Les ouverts de $\mathbb{R}$ engendrant la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, on en déduit que f est mesurable de $[0,1]$ (muni de sa tribu borélienne) dans $\mathbb{R}$ (muni de sa tribu borélienne).

On montre maintenant que f est intégrable. Comme la fonction f est continue sur le compact $[0,1]$, elle est bornée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $|f| \leq M$ sur $[0,1]$. On a donc, par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$:

$$\int |f| dm \leq Mm([0,1]) < \infty.$$

On a donc $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$.

Corrigé 67 (f positive intégrable implique f finie p.p.)

Soit (E,T,m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Montrer que si $\displaystyle\int f dm < +\infty$, alors $f < +\infty$ p.p..

corrigé

Soit $A = f^{-1}(\{\infty\})$. On a $A \in T$ car f est mesurable et $\{\infty\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $f \geq n 1_A$, donc, par monotonie de l'intégrale, $\int f dm \geq n m(A)$, ou encore

$$m(A) \leq \frac{1}{n} \int f dm.$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$, on en déduit $m(A) = 0$. On a donc $f < \infty$ p.p. car $f(x) < \infty$ pour tout $x \in A^c$.

Corrigé 68 (Une caractérisation de l'intégrabilité)

Soient (E,T,m) un espace mesuré fini, u une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{x \in E, |u(x)| \geq n\}$ et $B_n = \{x \in E, n < |u(x)| \leq n+1\}$.

1. Montrer que :

$$\int |u| dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty. \tag{15.4}$$

corrigé

On remarque tout d'abord que $B_n, A_n \in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n 1_{B_n} \leq |u| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) 1_{B_n}.$$

On en déduit (en utilisant le théorème de convergence monotone et la monotonie de l'intégrale) que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, m(B_n) \leq \int |u| dm \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) m(B_n). \tag{15.5}$$

Si $\int |u| dm < +\infty$, on a donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, m(B_n) < \infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, m(B_n) < \infty$, on a aussi $\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) m(B_n) < \infty$ car $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n) \leq m(E) < \infty$ (remarquer que $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$). On déduit donc de (15.5) que $\int |u| dm < +\infty$.

On a ainsi montré que :

$$\int |u| dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(B_n).$$

On peut utiliser le même raisonnement en remplaçant B_n par $C_n = \{x \in E, n \leq |u(x)| < n+1\}$. On a donc aussi :

$$\int |u| dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n). \tag{15.6}$$

Pour terminer la question, il suffit de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty. \tag{15.7}$$

Pour montrer (15.7), on remarque que $C_n = A_n \setminus A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, comme $A_{n+1} \subset A_n$ et que $m(A_{n+1}) \leq m(A_n) \leq m(E) < \infty$:

$$m(C_n) = m(A_n) - m(A_{n+1}).$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n} p\, m(C_p) &= \sum_{p=0}^{n} p\, m(A_p) - \sum_{p=0}^{n} p\, m(A_{p+1}) \\ &= \sum_{p=0}^{n} p\, m(A_p) - \sum_{p=1}^{n+1} (p-1) m(A_p) = \sum_{p=1}^{n} m(A_p) - n\, m(A_{n+1}).\end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{p=0}^{n} p\, m(C_p) \leq \sum_{p=1}^{n} m(A_p), \tag{15.8}$$

et :

$$\sum_{p=1}^{n} m(A_p) = \sum_{p=0}^{n} p\, m(C_p) + n\, m(A_{n+1}). \tag{15.9}$$

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty$, on déduit donc de (15.8) que $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n) < +\infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n) < +\infty$. On a, par (15.6), $\int |u| dm < \infty$ et donc, comme $n\, 1_{A_{n+1}} \leq |u|$, on a aussi $n\, m(A_{n+1}) \leq \int |u| dm < \infty$. On déduit donc de (15.9) que $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$. Comme $m(A_0) \leq m(E) < \infty$, on a bien finalement $\sum_{n=0}^{\infty} m(A_n) < \infty$.

On a bien montré (15.7), ce qui termine la question.

---

2. Soit $p \in]1, +\infty[$, montrer que $|u|^p$ est une fonction mesurable et que :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1}\, m(A_n) < +\infty. \tag{15.10}$$

corrigé

La fonction $|u|^p$ est mesurable car composée d'une fonction mesurable et d'une fonction continue.

On reprend maintenant le raisonnement de la question précédente. On remarque que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n^p\, m(B_n) \leq \int |u|^p dm \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1)^p m(B_n). \tag{15.11}$$

Si $\int |u|^p dm < +\infty$, on a donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^p\, m(B_n) < \infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^p\, m(B_n) < \infty$, on a aussi $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^p m(B_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^p n^p m(B_n) < \infty$ et $m(B_0) \le m(E) < \infty$. On a donc $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^p m(B_n) < \infty$. Ceci donne $\int |u|^p dm < +\infty$ par (15.11).

On a ainsi montré que :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(B_n) < +\infty.$$

Ici aussi, on peut utiliser le même raisonnement en remplaçant B_n par $C_n = \{x \in E, n \le |u(x)| < n+1\}$. On a donc aussi :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(C_n) < +\infty. \tag{15.12}$$

Pour terminer la question, il suffit donc de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(C_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1} m(A_n) < +\infty. \tag{15.13}$$

Pour montrer (15.13), on utilise, comme dans la question précédente que $C_n = A_n \setminus A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc :

$$m(C_n) = m(A_n) - m(A_{n+1}).$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n^p\, m(C_n) &= \sum_{n=0}^{N} n^p\, m(A_n) - \sum_{n=0}^{N} n^p\, m(A_{n+1})\\ &= \sum_{n=0}^{N} n^p\, m(A_n) - \sum_{n=1}^{N+1} (n-1)^p m(A_n)\\ &= \sum_{n=1}^{N} (n^p - (n-1)^p) m(A_n) - N^p\, m(A_{N+1}).\end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{n=0}^{N} n^p\, m(C_n) \le \sum_{n=1}^{N} (n^p - (n-1)^p) m(A_n), \tag{15.14}$$

et :

$$\sum_{n=1}^{N} (n^p - (n-1)^p) m(A_n) = \sum_{n=0}^{N} n^p\, m(C_n) + N^p\, m(A_{N+1}). \tag{15.15}$$

Pour conclure, on remarque que $\dfrac{n^p - (n-1)^p}{n^{p-1}} \to p$ quand $n \to \infty$. Il existe donc $\alpha, \beta > 0$ t.q. $\alpha n^{p-1} \le n^p - (n-1)^p \le \beta n^{p-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Si $\sum_{n=0}^{\infty} n^{p-1} m(A_n) < \infty$, on déduit alors de (15.14) que $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n) < +\infty$.

Réciproquement, on suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(C_n) < +\infty$. On a alors, par (15.12), $\int |u|^p dm < \infty$ et donc, comme $N\, 1_{A_{N+1}} \le |u|$, on a aussi $N^p\, m(A_{n+1}) \le \int |u|^p dm < \infty$. On déduit alors de (15.15) que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{p-1} m(A_n) < \infty.$$

On a bien montré (15.13), ce qui termine la question.

Corrigé 69 (Sur l'inégalité de Markov)
Soit (E,T,m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

1. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $a\, m(\{|f| > a\}) \le \displaystyle\int_{\{|f|>a\}} |f|\, dm$.

corrigé

Comme $|f| \in \mathcal{M}_+$, la méthode pour faire les questions 1 et 2 a déjà été vue dans le cours (voir l'inégalité (4.8)).

Soit $a > 0$. On remarque que $|f|1_{\{|f|>a\}} \ge a1_{\{|f|>a\}}$. Par monotonie de l'intégrale, on en déduit :

$$am(\{|f| > a\}) = \int a1_{\{|f|>a\}}dm \le \int |f|1_{\{|f|>a\}}dm = \int_{\{|f|>a\}} |f|dm.$$

---

2. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $m(\{|f| > a\}) \le (\displaystyle\int |f|\, dm)/a$. (Ceci est l'inégalité de Markov.)

corrigé

Comme $\displaystyle\int_{\{|f|>a\}} |f|dm \le \int |f|dm$, cette question découle immédiatement de ma précédente.

---

3. Montrer que

$$\lim_{a\to\infty} a\, m(\{|f| > a\}) = 0. \tag{15.16}$$

corrigé

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q. $a_n \to \infty$, quand $n \to \infty$. On pose $g_n = |f|1_{\{|f|>a_n\}}$. On a $g_n \to 0$ p.p. quand $n \to \infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|g_n| \le |f|$ p.p.. Grâce au théorème de convergence dominée, on en déduit que $\int g_n dm \to 0$ quand $n \to \infty$ et donc, avec la question 1, $a_n m(\{|f| > a_n\}) \to 0$ quand $n \to \infty$.

---

4. Donner des exemples de fonctions non intégrables qui vérifient la propriété (15.16) dans les 2 cas suivants : $(E,T,m) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et $(E,T,m) = (]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$.

corrigé

Dans le cas $(E,T,m) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, il suffit de prendre $f = 1_{\mathbb{R}}$.

Dans le cas $(E,T,m) = (]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$, on peut prendre, par exemple, f définie par $f(x) = \frac{1}{x|\ln(2x)|}$ pour $x \in]0,1[$. La fonction f est mesurable mais n'est pas intégrable. Pour $a > 0$, on a $am(\{|f| > a\}) = ax_a$ avec $x_a > 0$ t.q. $x_a|\ln(2x_a)| = \frac{1}{a}$. On a $x_a \to 0$ quand $a \to \infty$ et donc $am(\{|f| > a\}) = ax_a = \frac{1}{|\ln(2x_a)|} \to 0$ quand $a \to \infty$.

Corrigé 70 (Sur $f \ge 0$ p.p.)
Soit (E,T,m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que les 2 conditions suivantes sont équivalentes :

1. $f \ge 0$ p.p.,
2. $\int_A f\, dm \ge 0$ pour tout $A \in T$.

corrigé

– On suppose d'abord que $f \geq 0$ p.p.. Soit $A \in T$, on a alors $f 1_A \geq 0$ p.p. et donc, par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ (proposition 4.4 page 83), $\int_A f dm = \int f 1_A dm \geq 0$.

En fait, pour être tout à fait précis, la proposition 4.4 est énoncée avec l'hypothèse "$f \geq g$" et non seulement "$f \geq g$ p.p.". Toutefois il est clair que cette proposition est aussi vraie avec seulement "$f \geq g$ p.p.". Il suffit de remarquer que, si $f \geq g$ p.p., il existe $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$ et $f \geq g$ sur B^c. On a donc $f 1_{B^c} \geq g 1_{B^c}$. Si $f, g \in \mathcal{L}^1$, la proposition 4.4 donne alors $\int f 1_{B^c} dm \geq \int g 1_{B^c} dm$. On en déduit $\int f dm \geq \int g dm$ car $\int f dm = \int f 1_{B^c} dm$ et $\int g dm = \int g 1_{B^c} dm$ (voir la proposition 4.5 page 84).

– On suppose maintenant que $\int_A f\, dm \geq 0$ pour tout $A \in T$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on choisit $A = A_n = \{f \leq -\frac{1}{n}\} = \{x \in E : f(x) \leq -\frac{1}{n}\}$, de sorte que $f 1_{A_n} \leq -\frac{1}{n} 1_{A_n}$. La monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ (proposition 4.4 page 83) donne alors

$$\int f 1_{A_n} dm \leq -\frac{1}{n} m(A_n).$$

Comme $\int f 1_{A_n} dm \geq 0$ par hypothèse, on a donc nécessairement $m(A_n) = 0$.

Par σ-sous additivité de m, on en déduit que $m(\{f < 0\}) = m(\cup_{n \in \mathbb{N}^\star} \{f \leq -\frac{1}{n}\}) = 0$, et donc $f \geq 0$ p.p..

Corrigé 71

Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1 (= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$.

1. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ t.q. $\forall A \in T$, $m(A) \leq \delta \Rightarrow \displaystyle\int_A |f| dm \leq \varepsilon$. [*Introduire* $f_n = \inf(|f|, n)$].

corrigé

On pose $f_n = \inf(|f|, n)$. Comme $|f| - f_n \to 0$ p.p. (et même partout), quand $n \to \infty$, et que $0 \leq |f| - f_n \leq |f| \in \mathcal{L}^1$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(|f| - f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou la proposition 4.6). Il donne que $\int (|f| - f_n) dm \to 0$ quand $n \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\int (|f| - f_n) dm \leq \varepsilon$. Pour $A \in T$, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_A |f| dm \leq \int_A (|f| - f_n) dm + \int_A f_n dm &\leq \int (|f| - f_n) dm + \int_A f_n dm \\ &\leq \varepsilon + n m(A).\end{aligned}$$

En prenant $\delta = \frac{\varepsilon}{n}$, on en déduit :

$$A \in T,\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \leq 2\varepsilon.$$

NB : Au lieu d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(|f| - f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut aussi faire cet question en appliquant le théorème de convergence monotone à la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et en utilisant le fait que $f \in \mathcal{L}^1$.

---

2. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, C \in T$ t.q. :

(i) $m(C) < +\infty$,

(ii) $\displaystyle\int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon$,

(iii) $\displaystyle\sup_C |f| < +\infty$, [*Considérer* $C_n = \{x \in E\,;\ \dfrac{1}{n} \le |f(x)| \le n\}$*, et montrer que pour* $n \ge n_0$ *où* n_0 *est bien choisi,* C_n *vérifie (i), (ii) et (iii).*]

corrigé

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $C_n = \{x \in E\,;\ \dfrac{1}{n} \le |f(x)| \le n\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $|f| \le n$ sur C_n et $\frac{1}{n} m(C_n) \le \int |f| dm < \infty$. Les conditions (i) et (iii) sont donc vérifiées si on prend $C = C_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. On va maintenant montrer qu'on peut choisir n de manière avoir aussi (ii). Pour cela, on pose $g_n = f 1_{C_n^c}$, de sorte que $g_n \to 0$ p.p. (et même partout) et $|g_n| \le |f|$ p.p. (et même partout), pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou la proposition 4.6). Il donne que $\int |g_n| dm \to 0$ quand $n \to \infty$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^\star$ t.q. (ii) soit vérifiée. En prenant $C = C_n$, on a donc (i), (ii) et (iii).

Corrigé 72 ($m-$mesurabilité)

Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et f une application de A^c dans $\mathbb{R}$. Montrer que :
il existe g mesurable de E dans $\mathbb{R}$ t.q. $f = g$ p.p. si et seulement si il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite de fonctions étagées, t.q. $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

corrigé

- On suppose d'abord qu'il existe g mesurable de E dans $\mathbb{R}$ t.q. $f = g$ p.p.. Il existe donc $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$ et $f = g$ sur B^c (et $B^c \subset A^c$, i.e. $A \subset B$).

  Comme $g \in \mathcal{M}$, la deuxième caractérisation de la mesurabilité (proposition 3.6 page 59) donne l'existence d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$. On a donc aussi $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in B^c$. Comme $m(B) = 0$, on a bien $f_n \to f$ p.p..
- On suppose maintenant qu'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n \to f$ p.p.. Il existe donc $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in B^c$ (on a donc aussi $B^c \subset A^c$). On pose $g_n = f_n 1_{B^c}$ et on définit g par $g(x) = f(x)$ si $x \in B^c$ et $g(x) = 0$ si $x \in B$. Avec ces choix de g_n et g, on a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ et $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$. On a donc, par la proposition 3.6, $g \in \mathcal{M}$. On a aussi $f = g$ p.p. car $f = g$ sur B^c et $m(B) = 0$.

Corrigé 73 (Mesure complète, suite de l'exercice 2.32)

On reprend les notations de l'exercice 2.32 page 49. On note donc $(E, \overline{T}, \overline{m})$ le complété de l'espace mesuré (E, T, m).

Montrer que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p. et que $\displaystyle\int f d\overline{m} = \int g dm$.

corrigé

1. On commence par montrer que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$.

   Comme $T \subset \overline{T}$, on a $\mathcal{M}(E, T) \subset \mathcal{M}(E, \overline{T})$, $\mathcal{M}_+(E, T) \subset \mathcal{M}_+(E, \overline{T})$, $\mathcal{E}(E, T) \subset \mathcal{E}(E, \overline{T})$ et $\mathcal{E}_+(E, T) \subset \mathcal{E}_+(E, \overline{T})$. Puis, comme $\overline{m} = m$ sur T, on a $\int f dm = \int f d\overline{m}$ pour tout $f \in \mathcal{E}_+(E, T)$. Si $f \in \mathcal{M}_+(E, T)$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+(E,T)$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n\to\infty$, la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors :

$$\int f dm = \int f d\overline{m}, \text{ pour tout } f \in \mathcal{M}_+(E,T). \tag{15.17}$$

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, on a donc $f \in \mathcal{M}(E,T) \subset \mathcal{M}(E,\overline{T})$ et (15.17) donne $\int |f| d\overline{m} = \int |f| dm < \infty$. Donc, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\overline{T},\overline{m})$. En appliquant (15.17) à $f^{\pm}$, on montre aussi que $\int f dm = \int f d\overline{m}$.

2. On va montrer la deuxième partie de la question en raisonnant en 3 étapes :
   (a) Soit $C \in \overline{T}$. Il existe donc $A \in T$, $N \in \mathcal{N}_m$ t.q. $C = A \cup N$. Il existe $B \in T$ t.q. $N \subset B$ et $m(B) = 0$. On a $\{1_A \neq 1_C\} \subset N \subset B$. Donc, $\{1_A \neq 1_C\} \in \mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{\overline{m}}$, c'est-à-dire $1_A = 1_C$ m-p.p. et $\overline{m}$-p.p.. En fait, comme $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{\overline{m}}$, il est identique de dire "m-p.p." et "$\overline{m}$-p.p.", on dira donc simplement "p.p.".
   (b) Soit $f \in \mathcal{E}(E,\overline{T})$. Il existe $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$ et $C_1,\ldots,C_n \in \overline{T}$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{C_i}$. D'après (a), on trouve $A_1,\ldots,A_n \in T$ t.q. $1_{A_i} = 1_{C_i}$ p.p., pour tout i. On pose alors $g = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$, de sorte que $g \in \mathcal{E}(E,T)$ et $g = f$ p.p..
   (c) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\overline{T},\overline{m})$. Comme $f \in \mathcal{M}(E,\overline{T})$, il existe (d'après la proposition 3.6) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(E,\overline{T})$ t.q. $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$. D'après (b), pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n \in \mathcal{E}(E,T)$ t.q. $f_n = g_n$ p.p.. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $f_n = g_n$ sur A_n^c. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On a $A \in T$, $m(A) = 0$ et $f_n = g_n$ sur A^c, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit alors g par $g = f$ sur A^c et $g = 0$ sur A. On a $g \in \mathcal{M}(E,T)$ car g est limite simple de $(g_n 1_{A^c}) \in \mathcal{E}(E,T)$ (cf. proposition 3.6) et $f = g$ p.p. (car $f = g$ sur A^c).

   Comme $|f|, |g| \in \mathcal{M}_+(E,\overline{T})$ et $|f| = |g|$ p.p., on a $\infty > \int |f| d\overline{m} = \int |g| d\overline{m}$. Puis, comme $|g| \in \mathcal{M}_+(E,T)$, (15.17) donne $\int |g| d\overline{m} = \int |g| dm$. On en déduit donc que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

   Enfin, en utilisant le fait que $f^+ = g^+$ p.p., $f^- = g^-$ p.p. et (15.17) (avec g^+ et g^-) on a aussi :

$$\begin{aligned}\int f d\overline{m} &= \int f^+ d\overline{m} - \int f^- d\overline{m} = \int g^+ d\overline{m} - \int g^- d\overline{m} \\ &= \int g^+ dm - \int g^- dm = \int g dm.\end{aligned}$$

   On a bien trouvé $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q. $f = g$ p.p. et $\int f d\overline{m} = \int g dm$.

Corrigé 74 (Petit lemme d'intégration)

Soit (E,T,m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(E,T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}(E,T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.)

1. On suppose (dans cette question) que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T,\ m(A_n) \to 0 \ \Rightarrow \int f 1_{A_n} dm \to 0. \tag{15.18}$$

corrigé

Comme $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, La question 1 de l'exercice 4.14 page 100 donne :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ t.q. $(A \in T, m(A) \leq \eta) \Rightarrow \int f 1_A dm \leq \varepsilon.$
Ceci donne (15.18)…

---

2. On prend (dans cette question) $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Donner un exemple de $f \in \mathcal{M}(E, T)$ t.q. $f \geq 0$ (de sorte que $f \in \mathcal{M}_+(E, T)$), pour lequel (15.18) est faux.

corrigé

On prend $f(x) = x1_{\mathbb{R}_+}(x)$ et $A_n =]n, n + 1/n[$. On a $m(A_n) \to 0$ (quand $n \to \infty$) et $\int f1_{A_n} d\lambda \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $\int f1_{A_n} d\lambda \not\to 0$.

3. On suppose (dans cette question) que $m(E) < \infty$ et que $f > 0$ (c'est à dire $f(x) > 0$ pour tout $x \in E$). Montrer que

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T, \int f1_{A_n} dm \to 0 \quad \Rightarrow m(A_n) \to 0. \tag{15.19}$$

On pourra utiliser le fait que, pour $p \in \mathbb{N}^\star$, $A_n \subset \{f < \frac{1}{p}\} \cup \{x \in A_n; f(x) \geq \frac{1}{p}\}$.

corrigé

On a $\{f < \frac{1}{p+1}\} \subset \{f < \frac{1}{p}\}$, $\cap_{p\in\mathbb{N}^\star}\{f < \frac{1}{p}\} = \emptyset$ et $m(\{f < \frac{1}{p}\}) < \infty$, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$ (car $m(E) < \infty$). La propriété de continuité décroissante de la mesure m donne alors que $m(\{f < \frac{1}{p}\}) \to 0$ quand $p \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $m(\{f < \frac{1}{p}\}) \leq \varepsilon$. On a alors $m(A_n) \leq \varepsilon + m(\{x \in A_n; f(x) \geq \frac{1}{p}\}) \leq \varepsilon + p \int f1_{A_n} dm$. Comme $\int f1_{A_n} dm \to 0$, il existe donc n_0 t.q. $m(A_n) \leq 2\varepsilon$ pour $n \geq n_0$. Ce qui prouve (15.19).

4. On prend (dans cette question) $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (de sorte que $m(E) = \infty$). Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $f > 0$, alors (15.19) est faux. Donner un exemple de $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f > 0$.

corrigé

On prend $A_n =]n, n+1[$. En appliquant la proposition 4.6 page 85 (ou le théorème de convergence dominée) à la suite $(f1_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient que $\int f1_{A_n} d\lambda \to 0$ (quand $n \to \infty$). D'autre part $\lambda(A_n) = 1 \not\to 0$. La propriété (4.35) est donc fausse.

On obtient un exemple de $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $f > 0$ en prenant $f(x) = \exp(-|x|)$.

Corrigé 75 (Fatou sans positivité)

Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $h \in \mathcal{M}(E, T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}(E, T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.)

1. On suppose que $f_n \to h$ p.p. quand $n \to \infty$, $f_n \geq f$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\int f_n dm \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer qu'il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q.
- $f_n = g_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f = g$ p.p.,
- $g_n(x) \to h(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in E$,
- $g_n \geq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

corrigé

Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to h(x)$ pour tout $x \in A^c$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $f_n(x) \geq f(x)$ pour tout $x \in (A_n)^c$.

On pose $B = A \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. On a $B \in T$, $m(B) = 0$, $f_n(x) \to h(x)$ pour tout $x \in B^c$ et $f_n(x) \geq f(x)$ pour tout $x \in B^c$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n = f_n 1_{B^c} + h 1_B$ et $g = f 1_{B^c} + h 1_B$. On a bien $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et les 3 conditions demandées sont vérifiées.

(b) Montrer que $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

corrigé

On applique le lemme de Fatou à la suite $(g_n - g)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ (noter aussi que $(h - g) \in \mathcal{M}_+$).

On obtient $\int (h - g)dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g_n - g)dm \leq C - \int gdm < \infty$.

On en déduit que $(h - g) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et donc $h = h - g + g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

---

2. (question plus difficile) On reprend les hypothèses de la question précédente sauf "$f_n \geq f$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$" que l'on remplace par l'hypothèse (plus faible) "il existe $D \in \mathbb{R}$ t.q. $\int f_n dm \geq D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$". Donner un exemple pour lequel $h \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. [Prendre $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.]

corrigé

On prend $f_n = 1_{[1/n, n+1/n]} - n^2 1_{[0,1/n[}$ et $h = 1_{\mathbb{R}_+}$. On a $f_n \to h$ p.p., $\int f_n dm = 0$ et $h \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Corrigé 76

Soient $T > 0$ et $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \lambda)$ (λ désigne donc ici la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}([0, T])$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{nx} f(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1$.

corrigé

La fonction $x \mapsto e^{nx}$ est continue donc mesurable (de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, tous deux munis de la tribu borélienne). La fonction $x \mapsto e^{nx} f(x)$ est donc mesurable comme produit de fonctions mesurables.

On remarque ensuite que $\int |e^{nx} f(x)| d\lambda(x) \leq e^n \|f\|_1 < \infty$. On en déduit que la fonction $x \mapsto e^{nx} f(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1$.

On suppose, dans la suite de l'exercice, que $f \geq 0$ p.p. et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. que $\int e^{nx} f(x)\, d\lambda(x) \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $f = 0$ p.p.. [Appliquer le théorème de convergence monotone.]

corrigé

On pose $A = \{f > 0\} = \{x \in E\,;\, f(x) > 0\}$ et $B = A \setminus \{0\}$. Comme f est mesurable, on a $A, B \in \mathcal{B}([0, 1])$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = e^{nx}|f(x)|$ pour $x \in [0, 1]$. On a $g_n \in \mathcal{M}_+$ et $g_n \uparrow g$ avec g définie par :

$$\begin{aligned}
&g(x) = \infty, \text{ si } x \in B,\\
&g(x) = 0, \text{ si } x \in]0, 1] \setminus B,\\
&g(0) = |f(0)|.
\end{aligned}$$

Le théorème de convergence monotone donne que $g \in \mathcal{M}_+$ et $\int g_n dm \to \int gdm$ quand $n \to \infty$. Comme $g_n = e^{n\cdot} f$ p.p., on a $\int g_n dm = \int e^{nx} f(x) d\lambda(x) \leq M$ et donc, en passant à limite quand $n \to \infty$, $\int gdm \leq M$.

On a aussi $h_n \uparrow g$ avec $h_n = n 1_B + |f(0)| 1_{\{0\}}$. La définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors $\int gdm = \lim_{n\to\infty} n\lambda(B)$ et donc $\int gdm = \infty$ si $\lambda(B) > 0$. Comme $\int gdm \leq M$, on a donc $\lambda(B) = 0$ et donc aussi $\lambda(A) = 0$. Ce qui donne $f = 0$ p.p..

---

3. On suppose de plus que f est continue. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, T]$.

corrigé

On pose toujours $A = \{f > 0\} = \{x \in E\,;\, f(x) > 0\}$. Comme f est continue, l'ensemble A est un ouvert de $[0, 1]$. Si $A \neq \emptyset$, il existe un intervalle ouvert non vide inclus dans A et donc $\lambda(A) > 0$ en contradiction avec le résultat de la question précédente qui donne $\lambda(A) = 0$. On a donc $A = \emptyset$, c'est-à-dire $f = 0$ sur tout $[0, 1]$.

15.2 Espace L^1

Corrigé 77 (Mesure de densité)

Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Pour $A \in T$, on pose $\mu(A) = \int_A f dm$.

1. Montrer que μ est une mesure sur T.

corrigé

On rappelle que, par définition, pour tout $A \in T$, on a $\int_A f dm = \int f 1_A dm$ avec $f 1_A = 0$ sur A^c et $f 1_A = f$ sur A (on a bien $f 1_A \in \mathcal{M}_+$ et donc $\int_A f dm$ est bien définie).

On montre maintenant que μ est une mesure.

Il est clair que $\mu(\emptyset) = 0$ car $f 1_A = 0$ (sur tout E) si $A = \emptyset$. Pour montrer que μ est un mesure, il reste à montrer que μ est σ-additive.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et on remarque que $1_A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x)$ pour tout $x \in E$ et donc $f 1_A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f 1_{A_n}(x)$ pour tout $x \in E$. Le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.1) donne alors

$$\int f 1_A dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f 1_{A_n} dm,$$

c'est-à-dire $\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$. Ceci prouve que μ est σ-additive et donc que μ est une mesure.

2. Soit $g \in \mathcal{M}$. Montrer que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$ si et seulement si $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (on pose $fg(x) = 0$ si $f(x) = \infty$ et $g(x) = 0$). Montrer que, pour $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$, $\int g d\mu = \int f g dm$.

corrigé

On raisonne en 3 étapes :

(a) Soit $g \in \mathcal{E}_+ \setminus \{0\}$. Il existe donc $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}_+^\star$ et $A_1, \ldots, A_p \in T$ t.q. $g = \sum_{i=1}^p a_i 1_{A_i}$. On a alors (en posant $fg(x) = 0$ si $f(x) = \infty$ et $g(x) = 0$) $fg = \sum_{i=1}^p a_i f 1_{A_i} \in \mathcal{M}_+$ et :

$$\int f g dm = \sum_{i=1}^p a_i \int f 1_{A_i} dm = \sum_{i=1}^p a_i \mu(A_i) = \int g d\mu.$$

(Ce qui, bien sûr, est aussi vrai pour $g = 0$.)

(b) Soit $g \in \mathcal{M}_+$. Il existe alors $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $g_n \uparrow g$. L'item précédent donne que $\int f g_n dm = \int g_n d\mu$. Avec le théorème de convergence monotone (pour μ et pour m, puisque $f g_n \uparrow f g$ en posant toujours $fg(x) = 0$ si $f(x) = \infty$ et $g(x) = 0$), on en déduit que $fg \in \mathcal{M}_+$ et :

$$\int f g dm = \int g d\mu. \tag{15.20}$$

(c) Soit maintenant $g \in \mathcal{M}$. En appliquant (15.20) à $|g| \in \mathcal{M}_+$, on a :

$$\int |fg| dm = \int f|g| dm = \int |g| d\mu,$$

et donc :

$$fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m) \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu).$$

En fait, on peut ne pas avoir $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\,T,\,m)$ car fg peut prendre les valeurs $\pm\infty$. L'assertion "$fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$" est à prendre, comme d'habitude, au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\,T,\,m)$ t.q. $fg = h$ p.p.". Ceci est vérifié car si $\int |fg| dm < \infty$, on a $|fg| < \infty$ p.p.. Il suffit alors de changer fg sur un ensemble de mesure nulle pour avoir une fonction mesurable prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$, en écrivant (15.20) avec g^+ et g^- (qui sont bien des éléments de $\mathcal{M}_+$) et en faisant la différence on obtient bien que $\int fg dm = \int g d\mu$.

Corrigé 78

Soit (E, T, m) un espace mesuré. On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f \in L^1$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$ p.p., que $f_n \to f$ p.p. et que $\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1. [*on pourra examiner la suite* $(f - f_n)^+$.]

corrigé

On pose $h_n = (f - f_n)^+$. On a donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $h_n \to 0$ p.p.. De plus, comme $f_n \geq 0$ p.p., on a $0 \leq h_n \leq f^+$ p.p.. En effet, soit $x \in E$ t.q. $h_n(x) \neq 0$. On a alors, si $f_n(x) \geq 0$ (ce qui est vrai pour presque tout x), $0 < h_n(x) = f(x) - f_n(x) \leq f(x) = f^+(x)$.

Comme $f^+ \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à cette suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il donne que $h_n \to 0$ quand $n \to \infty$, c'est-à-dire

$$\int (f - f_n)^+ dm \to 0, \text{ quand } n \to \infty. \tag{15.21}$$

On remarque ensuite que

$$\int (f - f_n)^- dm = \int (f - f_n)^+ dm - \int (f - f_n) dm,$$

et donc, comme $\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to +\infty$,

$$\int (f - f_n)^- dm \to 0, \text{ quand } n \to \infty. \tag{15.22}$$

De (15.21) et (15.22), on déduit

$$\int |f - f_n| dm \to 0, \text{ quand } n \to \infty,$$

c'est-à-dire $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,\,T,\,m)$, quand $n \to \infty$.

Corrigé 79 (Théorème de Beppo-Lévi)

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et $f : E \to \mathbb{R}$, t.q. :

(i) $f_n \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$.

(ii) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, c'est-à-dire :
$f_{n+1} \geq f_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$,
ou
$f_{n+1} \leq f_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Construire $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))$ et $g \in \mathcal{M}$ t.q. $f_n = g_n$ p.p., $f = g$ p.p., $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$, et $g_{n+1} \geq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou $g_{n+1} \leq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

———————————————corrigé———————————————

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, que l'on note encore f_n.

L'hypothèse (i) donne qu'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in A^c$.

L'hypothèse (ii) donne que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$est monotone. On suppose que cette suite est monotone croissante (le cas "monotone décroissante" est similaire). Il existe alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $f_{n+1} \geq f_n$ sur A_n^c.

On pose $B = A \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. On a donc $B \in T$ et $m(B) = 0$. Puis on pose $g_n = f_n 1_{B^c}$ et on définit g par $g(x) = f(x)$ si $x \in B^c$ et $g(x) = 0$ si $x \in B$. On a bien $f = g$ p.p., $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))$, $f_n = g_n$ p.p. et $g_{n+1} \geq g_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$). Enfin $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$, et $g \in \mathcal{M}$ car g est limite simple d'éléments de $\mathcal{M}$ (voir la proposition 3.5 sur la stabilité de $\mathcal{M}$).

On remarque aussi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n et g_n sont deux répresentants du même élément de $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $\int f_n dm = \int g_n dm$.

———————————————————————————————

2. Montrer que $f \in L^1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \in \mathbb{R}$.

———————————————corrigé———————————————

On reprend la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la fonction g construites à la question précédente et on distingue maintenant les 2 cas de l'hypothèse (ii).

Cas 1 : La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée monotone croissante.

Dans ce cas, on a $(g_n - g_0) \uparrow (g - g_0)$ quand $n \to \infty$ et, comme $(g_n - g_0) \in \mathcal{M}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut utiliser le théorème de convergence monotone dans $\mathcal{M}_+$ (théorème 4.1). Il donne $((g - g_0) \in \mathcal{M}_+$ et)

$$\int (g_n - g_0)dm \to \int (g - g_0)dm \text{ quand } n \to \infty. \tag{15.23}$$

On sait déjà que $(g - g_0) \in \mathcal{M}$ et que $\int |g - g_0|dm = \int (g - g_0)dm$ car $(g - g_0) \in \mathcal{M}_+$. la propiétée (15.23) donne alors que $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ si et seulement si la limite de la suite (croissante) $(\int (g_n - g_0)dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire différente de ∞).

Comme $g_n, g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, on a $\int (g_n - g_0)dm = \int g_n dm - \int g_0 dm$ et donc $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ si et seulement si la limite de la suite (croissante) $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.

Enfin, comme $g = (g - g_0) + g_0$ et que $g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, on a $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ si et seulement $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et finalement on obtient bien que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ si et seulement la limite de la suite (croissante) $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.

On conclut en remarquant que $\int f_n dm = \int g_n dm$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f = g$ p.p.. Plus précisement :

– Si la limite de la suite (croissante) $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$, on obtient que $g \in \mathcal{L}^1$) et donc que $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ au sens “il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\,T,\,m)$ t.q. $f = g$ p.p." (on confond donc f et la classe de g, c’est-à-dire $\{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)\,;\, h = g$ p.p.$\}$).
– Réciproquement, si $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, cela signifie qu’il existe $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\,T,\,m)$ t.q. $f = h$ p.p. (on a donc confondu f et la classe de h). Comme $f = g$ p.p., on a aussi $h = g$ p.p.. Comme $g \in \mathcal{M}$, on obtient donc que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\,T,\,m)$ et donc $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\,T,\,m)$ ce qui donne, par (15.23), que la limite de la suite (croissante) $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.

Cas 2 : La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée monotone décroissante.

La démonstration est très voisine de la précécende. On remarque que $(g_0 - g_n) \uparrow (g_0 - g)$ quand $n \to \infty$ et, comme $(g_0 - g_n) \in \mathcal{M}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut utiliser le théorème de convergence monotone dans $\mathcal{M}_+$ (théorème 4.1). Il donne ($(g_0 - g) \in \mathcal{M}_+$ et)

$$\int (g_0 - g_n)dm \to \int (g_0 - g)dm \text{ quand } n \to \infty. \tag{15.24}$$

On sait déjà que $(g-g_0) \in \mathcal{M}$ et que $\int |g-g_0|dm = \int (g_0-g)dm$ car $(g_0-g) \in \mathcal{M}_+$. La propriétée (15.24) donne alors que $(g-g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ si et seulement si la limite de la suite (croissante) $(\int (g_0-g_n)dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$ (c’est-à-dire différente de ∞).

Comme $g_n, g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, on a $\int (g_0 - g_n)dm = \int g_0 dm - \int g_n dm$ et donc $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ si et seulement si la limite de la suite (décroissante) $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$ (c’est-à-dire différente de $-\infty$).

Enfin, comme $g = (g - g_0) + g_0$ et que $g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\,T,\,m)$, on a $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\,T,\,m)$ si et seulement $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\,T,\,m)$ et finalement on obtient bien que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\,T,\,m)$ si et seulement la limite de la suite (décroissante) $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.

On conclut en remarquant que $\int f_n dm = \int g_n dm$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f = g$ p.p., comme dans le premier cas.

---

3. On suppose ici que $f \in L^1$, montrer que $f_n \to f$ dans L^1, lorsque $n \to +\infty$.

corrigé

On utilise toujours la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la fonction g construites à la première question.

Comme $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ on a $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\,T,\,m)$ et la propriété (15.23) (ou la propriété (15.24)) donne $\int g_n dm \to \int g dm$ quand $n \to \infty$ et donc

$$\int |g_n - g|dm \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

(On a utilisé ici le fait que $(g_n - g)$ a un signe constant et que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\,T,\,m)$.)

Comme $\|f_n - f\|_1 = \int |g_n - g|dm$, on en déduit que $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,\,T,\,m)$, quand $n \to \infty$.

Corrigé 80 (Préliminaire pour le théorème de Vitali)

Soient (E,T,m) un espace mesuré et $f \in L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. :

$$A \in T,\ m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f|dm \le \varepsilon.$$

[*Choisir un représentant de* f *et introduire* $f_n = \inf(|f|, n)$].

corrigé

En choisissant un représentant de f, cette question est démontrée à la question 1 de l'exsercice 4.14.

---

2. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $C \in T$ t.q. $m(C) < +\infty$ et $\displaystyle\int_{C^c} |f|dm \leq \varepsilon$. [*Choisir un représentant de* f *et considérer* $C_n = \{x \in E\,;\ \dfrac{1}{n} \leq |f(x)|\}$.]

corrigé

On choisit un représentant de f, encore noté f et pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $C_n = \{|f| \geq \frac{1}{n}\}$.

Comme $|f| \geq \frac{1}{n} 1_{C_n}$, on a, par monotonie de l'intégrale, $m(C_n) \leq n\|f\|_1 < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

On pose maintenant $g_n = |f| 1_{C_n^c}$. On remarque que $g_n(x) \to 0$ pour tout $x \in E$ et que $|g_n| \leq |f|$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou la proposition préliminaire 4.6). Il donne que $\int g_n dm \to 0$ quand $n \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\int g_n dm \leq \varepsilon$. On prend alors $C = C_{n_0}$, on a bien $m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f|dm \leq \varepsilon$.

Corrigé 81 (Théorème de Vitali)

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et $f : E \to \mathbb{R}$ t.q. $f_n \to f$ p.p..

1. On suppose $m(E) < +\infty$. Montrer que : $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable (i.e. : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ t.q. $(A \in T, n \in \mathbb{N}, m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f_n|dm \leq \varepsilon)$. [*Pour montrer le sens* $\Rightarrow$, *utiliser la question 1 de l'exercice 4.29. Pour le sens* $\Leftarrow$, *remarquer que* $\int |f_n - f|dm = \int_A |f_n - f|dm + \int_{A^c} |f_n - f|dm$, *utiliser le théorème d'Egorov et le lemme de Fatou...*]

corrigé

Sens($\Rightarrow$) Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'exercice 4.29 (première question), il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n > 0$ t.q. :

$$A \in T,\ m(A) \leq \delta_n \Rightarrow \int_A |f_n|dm \leq \varepsilon. \tag{15.25}$$

On ne peut pas déduire de (15.25) l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car on peut avoir $\min_{n\in\mathbb{N}} \delta_n = 0$.

Comme $f \in L^1$, il existe aussi $\delta > 0$ t.q. :

$$A \in T,\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f|dm \leq \varepsilon. \tag{15.26}$$

On va déduire l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant (15.25) et (15.26).

Soit $A \in T$, on a :

$$\int_A |f_n|dm \leq \int_A |f_n - f|dm + \int_A |f|dm \leq \int |f_n - f|dm + \int_A |f|dm. \tag{15.27}$$

Comme $f_n \to f$ dans L^1 quand $n \to \infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\|f_n - f\|_1 \leq \varepsilon$ si $n > n_0$. Pour $n > n_0$ et $m(A) \leq \delta$, (15.27) et (15.26) donne donc $\int_A |f_n|dm \leq 2\varepsilon$. On choisit alors $\overline{\delta} = \min\{\delta_0, \ldots, \delta_{n_0}, \delta\} > 0$ et on obtient, avec aussi (15.25) (pour tout $n \leq n_0$) :

$$n \in \mathbb{N}, A \in T,\ m(A) \leq \overline{\delta} \Rightarrow \int_A |f_n|dm \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui donne l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sens (⇐)
on veut montrer ici que $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. L'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne l'existence de $\delta > 0$ t.q. :

$$n \in \mathbb{N}, A \in T,\ m(A) \leq \overline{\delta} \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq 2\varepsilon. \tag{15.28}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit maintenant un représentant de f_n, encore noté f_n. Comme $f_n \to f$ p.p., il existe $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$ et $f_n \to f$ sur B^c. En remplaçant f par $f1_{B^c}$ (ce qui ne change f que sur un ensemble de mesure nulle, donc ne change pas les hypothèses du théorème), on a alors $f \in \mathcal{M}$ car f est limite simple de la suite $(f_n 1_{B^c})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ (noter que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$). Comme $m(E) < \infty$, on peut utiliser le théorème d'Egorov (théorème 3.2), il donne l'existence de $A \in T$ t.q. $f_n \to f$ uniformément sur A^c, c'est-à-dire $\sup_{x\in A^c} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ quand $n \to \infty$. On a donc aussi, pour ce choix de A,

$$\int_{A^c} |f_n - f| dm \leq m(E) \sup_{x\in A^c} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

Il existe donc $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ t.q. $\int_{A^c} |f_n - f| dm \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$. Avec (15.28), on en déduit, pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$:

$$\int |f_n - f| dm \leq \int_{A^c} |f_n - f| dm + \int_A |f_n| dm + \int_A |f| dm \leq 2\varepsilon + \int_A |f| dm.$$

Pour majorer le dernier terme de l'inégalité précédente, on utilise le lemme de Fatou sur la suite $(|f_n| 1_A)_{n\in\mathbb{N}}$ (qui est bien dans $\mathcal{M}_+$). Comme $\liminf_{n\to\infty} |f_n| 1_A = |f| 1_A$, il donne avec (15.28),

$$\int_A |f| dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int |f_n| 1_A \leq \varepsilon.$$

On a donc, finalement,

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \int |f_n - f| dm \leq 3\varepsilon. \tag{15.29}$$

En choisissant $n = n_0(1)$, on déduit de (15.29) que $f_n - f \in L^1$ et donc que $f = (f - f_n) + f_n \in L^1$. Cette appartenance étant, comme d'habitude à prendre au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p." (en fait, ici, comme nous avons remplacé f par $f1_{B^c}$ ci dessus, on a même $f \in \mathcal{L}^1$).

Puis, (15.29) étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré que $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$.

---

2. On suppose maintenant $m(E) = +\infty$. Montrer que : $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable et vérifie : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, C \in T, m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f_n| dm \leq \varepsilon$ pour tout n. [*Pour montrer le sens ⇒, utiliser l'exercice 4.29. Pour le sens ⇐, utiliser l'exercice 4.29, le lemme de Fatou et le résultat de la question 1.*]

——————————————**corrigé**——————————————

Sens (⇒)

(a) L'hypothèse $m(E) < \infty$ n'a pas été utilisée à la question précédente. La même démonstration donne donc ici l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) On utilise maintenant la deuxième question de l'exercice 4.29.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $C_n \in T$ t.q. $m(C_n) < \infty$ et $\int_{C_n^c} f_n dm \leq \varepsilon$. Comme $f \in L^1$, il existe aussi $D \in T$ t.q. $m(D) < \infty$ et $\int_{D^c} f dm \leq \varepsilon$. Enfin, comme $f_n \to f$ dans L^1 quand $n \to \infty$, il existe n_0 t.q. $\|f_n - f\|_1 \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.

On choisit maintenant $C = D \cup (\cup_{n=0}^{n_0} C_n)$, de sorte que $m(C) < m(D) + \sum_{n=0}^{n_0} m(C_n) < \infty$, $C^c \subset D^c$ et $C^c \subset C_n^c$ si $n \leq n_0$. Ce choix de C nous donne, pour tout $n \geq n_0$,

$$\int_{C^c} |f_n| dm \leq \int_{D^c} |f| dm + \int |f_n - f| dm \leq 2\varepsilon,$$

et, pour tout $n \leq n_0$,

$$\int_{C^c} |f_n| dm \leq \int_{C_n^c} |f_n| dm \leq \varepsilon.$$

On a donc $m(C) < \infty$ et $\int_{C^c} |f_n| dm \leq 2\varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sens ($\Leftarrow$)

on veut montrer ici que $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. La deuxième hypothèse donne l'existence de $C \in T$ t.q. $m(C) < \infty$ et

$$\int_{C^c} |f_n| dm \leq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{15.30}$$

Comme dans la question précédente, on peut supposer (en changeant éventuellement f sur un ensemble de mesure nulle) que $f \in \mathcal{M}$. En appliquant le lemme de Fatou à la suite $(|f_n| 1_{C^c})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, on déduit de (15.30) que

$$\int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon. \tag{15.31}$$

La première hypothèse (c'est-à-dire l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$) donne l'existence de $\delta > 0$ t.q.

$$n \in \mathbb{N},\ A \in T,\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \varepsilon. \tag{15.32}$$

On peut maintenant utiliser le théorème d'Egorov sur la suite $(f_{n|_C})_{n\in\mathbb{N}}$ (qui converge p.p. vers $f_{|_C}$) dans l'espace mesurable (C, T_C) où T_C est la tribu $\{B \in T\,;\, B \subset C\}$. Il donne l'existence de $A \subset C$, $A \in T$, t.q. $m(A) \leq \delta$ et $f_n \to f$ uniformément sur $A^c \cap C$. On en déduit que

$$\int_{A^c \cap C} |f_n - f| dm \leq m(C) \sup_{x \in A^c \cap C} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Il existe donc n_0 t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int_{A^c \cap C} |f_n - f| dm \leq \varepsilon. \tag{15.33}$$

Enfin, en appliquant le lemme de Fatou à la suite $(|f_n|1_A)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, on déduit de (15.32) que

$$\int_A |f|dm \le \varepsilon. \tag{15.34}$$

Il suffit maintenant de remarquer que

$$\int |f_n - f|dm \le \int_{A^c\cap C} |f_n - f|dm + \int_A |f_n|dm + \int_A |f|dm \\ + \int_{C^c} |f_n|dm + \int_{C^c} |f|dm,$$

pour déduire de (15.33), (15.32), (15.34), (15.30) et (15.31) que

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int |f_n - f|dm \le 5\varepsilon.$$

On conclut comme à la question précédente. En prenant d'abord $\varepsilon = 1$, on montre que $f \in L^1$ puis, comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on montre que $f_n \to f$ dans L^1 quand $n \to \infty$.

---

3. Montrer que le théorème de convergence dominée de Lebesgue peut être vu comme une conséquence du théorème de Vitali.

corrigé

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $F \in L^1$ t.q. $|f_n| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En utilisant l'exercice 4.29 sur F, on montre facilement l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_n$ et l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, de $C \in T$ t.q. $m(C) < \infty$ et $\int_{C^c} |f_n|dm \le \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (noter que si $m(E) < \infty$ cette propriété est immédiate en prenant $C = E$). Il est alors facile de montrer le théorème de convergence dominée à partir du théorème de Vitali.

Corrigé 82 (Théorème de "Vitali-moyenne")
Soit (E, T, m) un espace mesuré. On note $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$ et $f \in \mathcal{M}(E, T)$.

1. On suppose que $m(E) < \infty$. On se propose ici de montrer que "$f \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$" si et seulement si on a les deux propriétées suivantes :
p1. $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to \infty$,
p2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

(a) Montrer le sens direct (c'est-à-dire que la convergence pour la norme de L^1 implique p1 et p2).

corrigé

On montre tout d'abord la convergence en mesure. Soit $\eta > 0$. On a alors :

$$m(\{|f_n - f| \ge \eta\}) \le \frac{1}{\eta}\int |f_n - f|dm \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

Ce qui donne que $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to \infty$.

Pour montrer l'équi-intégrabilité, il suffit de remarquer que, pour tout $A \in T$, on a :

$$\int_A |f_n|dm \le \int |f_n - f|dm + \int_A |f|dm.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f \in \mathcal{L}^1$, il existe (voir la proposition 4.9) $\delta > 0$ t.q.

$$m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \leq \varepsilon.$$

Comme $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$, il existe n_0 t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int |f_n - f| dm \leq \varepsilon.$$

On en déduit :

$$(n \geq n_0 \text{ et } m(A) \leq \delta) \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq 2\varepsilon. \tag{15.35}$$

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe (voir la proposition 4.9) $\delta_n > 0$ t.q.

$$m(A) \leq \delta_n \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \varepsilon. \tag{15.36}$$

En posant $\overline{\delta} = \min\{\delta, \delta_0, \ldots, \delta_n\}$ on a donc, avec (15.35) et (15.36) :

$$(n \in \mathbb{N} \text{ et } m(A) \leq \overline{\delta}) \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui montre l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Pour montrer la réciproque, on suppose maintenant que $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to \infty$, et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

i. Montrer que pour tout $\delta > 0$ et $\eta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. : $p, q \geq n \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\} \leq \delta$.

corrigé

On remarque que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$, $|f_p - f|(x) \leq \frac{\eta}{2}$ et $|f_q - f|(x) \leq \frac{\eta}{2}$ implique $|f_p - f_q|(x) \leq \eta$. On a donc $\{|f_p - f_q| \geq \eta\} \subset \{|f_p - f| \geq \frac{\eta}{2}\} \cup \{|f_p - f| \geq \frac{\eta}{2}\}$. Ce qui donne :

$$m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\}) \leq m(\{|f_p - f| \geq \frac{\eta}{2}\}) + \{|f_q - f| \geq \frac{\eta}{2}\}.$$

Comme $f_n \to f$ en mesure, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. :

$$p \geq n \Rightarrow m(\{|f_p - f| \geq \frac{\eta}{2}\}) \leq \frac{\delta}{2},$$

on en déduit :

$$p, q \geq n \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\}) \leq \delta.$$

---

ii. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^1.

corrigé

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$, on a :

$$\|f_p - f_q\|_1 = \int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_p| dm + \int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_q| dm + \eta m(E). \tag{15.37}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $\delta > 0$ t.q.

$$(A \in T,\ m(A) \leq \delta \text{ et } n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \int_A |f_n| \leq \varepsilon. \tag{15.38}$$

On commence à choisir $\eta > 0$ t.q. $\eta m(E) \leq \varepsilon$. Puis, la question précédente donne l'existence de n t.q. $m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\}) \leq \delta$ si $p, q \geq n$. On a donc, par (15.38) :

$$\int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_p| \leq \varepsilon \text{ et } \int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_q| \leq \varepsilon \text{ si } p, q \geq n.$$

Finalement, (15.37) donne :

$$p, q \geq n \Rightarrow \|f_p - f_q\|_1 \leq 3\varepsilon.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans L^1.

---

iii. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1$ et que $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$.

corrigé

Comme L^1 est complet, il existe $g \in L^1$ t.q. $f_n \to g$ dans L^1, quand $n \to \infty$. On peut supposer $g \in \mathcal{L}^1$ (en confondant g avec l'un de ses représentants). La question (a) donne alors que $f_n \to g$ en mesure, quand $n \to \infty$. Comme $f_n \to f$ en mesure, on a donc nécessairement $f = g$ p.p.. ce qui donne bien $f \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n - f\|_1 = \|f_n - g\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$.

---

2. On ne suppose plus que $m(E) < \infty$. Montrer que "$f \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$ si et seulement si on a les propriétés suivantes :
p1. $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to \infty$,
p2. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable,
p3. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in T$ t.q. $m(A) < \infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{A^c} |f_n| dm \leq \varepsilon$.

corrigé

Etape 1 On montre tout d'abord le sens direct.

Les propriétés p1 et p2 ont déjà été démontrées dans la question 1-(a) (car l'hypothèse $m(E) < \infty$ n'avait pas été utilisée).

Pour démontrer la propriété p3, on utilise la proposition 4.9 du cours. Soit $\varepsilon > 0$. pour tout $n \in \mathbb{N}$, Il existe $B_n \in T$ t.q. $m(B_n) < \infty$ et

$$\int_{B_n^c} |f_n| dm \leq \varepsilon. \tag{15.39}$$

Il existe aussi $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$ et

$$\int_{B^c} |f| dm \leq \varepsilon. \tag{15.40}$$

En remarquant que

$$\int_{B^c} |f_n| dm \leq \int |f_n - f| dm + \int_{B^c} |f| dm,$$

on obtient, en utilisant le fait que $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$, et (15.40), l'existence de n_0 t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int_{B^c} |f_n| dm \leq 2\varepsilon.$$

En prenant $A = B \cup (\cup_{p=0}^{n_0} B_p)$, on obtient alors (avec (15.39)) $m(A) < \infty$ et :

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{A^c} |f_n| dm \leq 2\varepsilon.$$

Etape 2 On montre maintenant la réciproque.

On reprend la même méthode que dans le cas $m(E) < \infty$.

On remarque tout d'abord que pour tout $\delta > 0$ et $\eta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. : $p, q \geq n \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\} \leq \delta$. La démonstration est la même que précédemment (l'hypothèse $m(E) < \infty$ n'avait pas été utilisée).

On montre maintenant que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^1. Soit $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in T$ et $\eta > 0$, on a :

$$\|f_p - f_q\|_1 \leq \int_{A^c} (|f_p| + |f_q|) dm + \int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} (|f_p| + |f_q|) dm + \eta m(A). \tag{15.41}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $\delta > 0$ t.q.

$$(B \in T,\ m(B) \leq \delta \text{ et } n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \int_B |f_n| \leq \varepsilon. \tag{15.42}$$

D'après la propriété p3, il existe $A \in T$ t.q. $m(A) < \infty$ et

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{A^c} |f_n| dm \leq \varepsilon. \tag{15.43}$$

On commence à choisir $\eta > 0$ t.q. $\eta m(A) \leq \varepsilon$. Maintenant que δ et η sont fixés, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\}) \leq \delta$ si $p, q \geq n$. On a donc, par (15.42), $\int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_p| \leq \varepsilon$ et $\int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_q| \leq \varepsilon$ si $p, q \geq n$. Avec (15.41) et (15.43), on obtient alors :

$$p, q \geq n \Rightarrow \|f_p - f_q\|_1 \leq 5\varepsilon.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans L^1.

On conclut, comme dans le cas $m(E) < \infty$, que $f \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$ (car l'hypothèse $m(E) < \infty$ n'avait pas été utilisée pour cette partie).

Corrigé 83 (Continuité de $p \mapsto \|\cdot\|_p$)
Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(E, T)$.

1. Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose $\|f\|_p = \left(\int |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}}$ (noter que $|f|^p \in \mathcal{M}_+$) et on dit que $f \in \mathcal{L}^p$ si $\|f\|_p < +\infty$. On pose $I = \{p \in [1, +\infty[, f \in \mathcal{L}^p\}$.
   (a) Soient p_1 et $p_2 \in [1, +\infty[$, et $p \in [p_1, p_2]$. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$, alors $f \in \mathcal{L}^p$. En déduire que I est un intervalle. [*On pourra introduire* $A = \{x; |f(x)| \leq 1\}$.]

   corrigé

   Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$. On remarque que $\alpha^p \leq \alpha^{p_2}$ si $1 \leq \alpha$ et $\alpha^p \leq \alpha^{p_1}$ si $\alpha \leq 1$. On en déduit que $|f|^p \leq |f|^{p_1} + |f|^{p_2}$ (en fait, on a $|f|^p \leq |f|^{p_1}$ sur $A = \{|f| \leq 1\}$ et $|f|^p \leq |f|^{p_2}$ sur A^c) et donc que $f \in \mathcal{L}^p$ si $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$.

On suppose que $I \neq \emptyset$. On pose $a = \inf I$ et $b = \sup I$. On a donc $1 \leq a \leq b \leq \infty$ et $I \subset [a, b]$. On montre maintenant que $]a, b[\subset I$ (ce qui donne que I est bien un intervalle dont les bornes sont a et b).

Soit $p \in]a, b[$. La défintion de a et b permet d'affirmer qu'il existe $p_1 \in I$ t.q. $p_1 < p$ et qu'il existe $p_2 \in I$ t.q. $p_2 > p$. On a donc $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$ et $p \in]p_1, p_2[$, d'où l'on déduit que $p \in I$. on a donc bien monté que $]a, b[\subset I$ et donc que I est un intervalle.

(b) On montre sur des exemples que les bornes de I peuvent être ou ne pas être dans I. On prend pour cela : $(E, T, m) = ([2, +\infty[, \mathcal{B}([2, \infty[), \lambda)$ (λ est ici la restriction à $[2, \infty[$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Calculer I dans les deux cas suivants :

i. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [2, +\infty[$.

ii. $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}, x \in [2, +\infty[$.

corrigé

i. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [2, +\infty[$. Soit $1 \leq p < \infty$. Pour savoir si $f \in \mathcal{L}^p$ ou non, on utilise le théorème de convergence monotone et l'intégrale des fonctions continues sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = |f|^p 1_{[2,n]}$. On a donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ et $f_n \uparrow |f|^p$ ce qui donne, grâce au théorème de convergence monotone,

$$\int f_n d\lambda \to \int |f|^p d\lambda, \text{ quand } n \to \infty.$$

Les intégrales ci dessus sont des intégrales sur $[2, +\infty[$, muni de la mesure de Lebesgue sur les boréliens. La comparaison entre l'intégrale des fonctions continues et l'intégrale de Lebesgue (voir les exercices corrigés 64 et 65) donne que

$$\int f_n d\lambda = \int_2^n \frac{1}{x^p} dx.$$

On distingue maintenant les cas $p = 1$ et $p > 1$.

Si $p > 1$, on a $\int f_n d\lambda = \frac{1}{p-1}(\frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}) \to \frac{1}{p-1}\frac{1}{2^{p-1}} < \infty$, quand $n \to \infty$. On a donc $f \in \mathcal{L}^p$.

Si $p = 1$, on a $\int f_n d\lambda = \ln(n) - \ln(2) \to \infty$ quand $n \to \infty$. On a donc $f \notin \mathcal{L}^1$.

On a donc $I =]1, \infty[$.

ii. $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}, x \in [2, +\infty[$. Pour $1 < p < \infty$, on a clairement $f \in \mathcal{L}^p$ car la fonction f est positive et majorée par $\frac{1}{\ln(2)^2} g$ où g est la fonction de l'exemple précédent, c'est-à-dire $g(x) = \frac{1}{x}$. Pour $p = 1$, on utilise la même méthode que pour l'exemple précédent :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = |f| 1_{[2,n]}$, de sorte que $f_n \uparrow |f| = f$ et donc

$$\int f_n d\lambda \to \int |f| d\lambda, \text{ quand } n \to \infty.$$

On a ici, quand $n \to \infty$,

$$\int f_n d\lambda = \int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \ln(2)^{-1} - \ln(n)^{-1} \to \ln(2)^{-1} < \infty.$$

On en déduit que $f \in \mathcal{L}^1$, donc $I = [1, \infty[$.

(c) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ et $p \in \overline{I}$, ($\overline{I}$ désigne l'adhérence de I dans $\mathbb{R}$), t.q. $p_n \uparrow p$ (ou $p_n \downarrow p$). Montrer que $\int |f|^{p_n} dm \to \int |f|^p dm$ quand $n \to +\infty$. [*On pourra encore utiliser l'ensemble* A].

corrigé

On utilise ici $A = \{|f| \le 1\} \in T$.

(a) On suppose d'abord que $p_n \uparrow p$ quand $n \to \infty$. On pose $g_n = |f|^{p_n} 1_A$ et $h_n = |f|^{p_n} 1_{A^c}$, de sorte que $g_n \in \mathcal{L}^1$, $h_n \in \mathcal{L}^1$ et

$$\int g_n dm + \int h_n dm = \int |f|^{p_n} dm.$$

On remarque alors que $h_n \uparrow h = |f|^p 1_{A^c}$, quand $n \to \infty$. Comme $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, le théorème de convergence monotone donne

$$\int h_n dm \to \int h dm, \text{ quand } n \to \infty. \tag{15.44}$$

Noter que ceci est vrai même si $p \notin I$ (dans ce cas, on a, en fait, $\int h dm = \infty$).

On remarque maintenant que $g_n \to g = |f|^p 1_A$ p.p., quand $n \to \infty$, et que $0 \le g_n \le |f|^{p_0}$ car la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ici décroissante. Comme $p_0 \in I$, on a $|f|^{p_0} \in \mathcal{L}^1$ et on peut appliquer le théorème de convergence dominée (ou la proposition 4.6). Il donne

$$\int g_n dm \to \int g dm, \text{ quand } n \to \infty. \tag{15.45}$$

Avec (15.44) et (15.45) on obtient, quand $n \to \infty$,

$$\int |f|^{p_n} dm = \int g_n dm + \int h_n dm \to \int g dm + \int h dm = \int |f|^p dm,$$

(b) On suppose maintenant que $p_n \downarrow p$ quand $n \to \infty$ et on reprend la même méthode que ci dessus. On pose $g_n = |f|^{p_n} 1_A$ et $h_n = |f|^{p_n} 1_{A^c}$, de sorte que $g_n \in \mathcal{L}^1$, $h_n \in \mathcal{L}^1$ et

$$\int g_n dm + \int h_n dm = \int |f|^{p_n} dm.$$

les rôles de g_n et h_n sont inversés par rapport au cas précécent : On remarque que $g_n \uparrow g = |f|^p 1_A$, quand $n \to \infty$. Comme $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, le théorème de convergence monotone donne

$$\int g_n dm \to \int g dm, \text{ quand } n \to \infty. \tag{15.46}$$

Ceci est vrai même si $p \notin I$ (dans ce cas, on a, en fait, $\int g dm = \infty$).

On remarque que $h_n \to h = |f|^p 1_{A^c}$ p.p., quand $n \to \infty$, et que $0 \le h_n \le |f|^{p_0}$ car la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ici décroissante. Comme $p_0 \in I$, on a $|f|^{p_0} \in \mathcal{L}^1$ et on peut appliquer le théorème de convergence dominée (ou la proposition 4.6). Il donne

$$\int h_n dm \to \int h dm, \text{ quand } n \to \infty. \tag{15.47}$$

Avec (15.46) et (15.47) on obtient, quand $n \to \infty$,

$$\int |f|^{p_n} dm = \int g_n dm + \int h_n dm \to \int g dm + \int h dm = \int |f|^p dm.$$

La conséquence de cette question est que l'application $p \mapsto \|f\|_p$ est continue de $\overline{I}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, où $\overline{I}$ est l'adhérence de I dans $\mathbb{R}$. Dans la suite de l'exercice, on va introduire le cas $p = \infty$ et montrer la continuité de $p \mapsto \|f\|_p$ sur l'adhérence de I dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

---

2. On dit que $f \in \mathcal{L}^\infty$ s'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < C$ p.p.. On note $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < C$ p.p.$\}$. Si $f \notin \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = +\infty$.
   (a) Montrer que $f \leq \|f\|_\infty$ p.p.. A-t-on $f < \|f\|_\infty$ p.p. ?

corrigé

Si $\|f\|_\infty = +\infty$, on a, bien sûr, $f \leq \|f\|_\infty$ p.p.. On suppose donc maintenant que $\|f\|_\infty < +\infty$. Par définition d'une borne inférieure, il existe $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \{C \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < C$ p.p.$\}$ t.q. $C_n \downarrow \|f\|_\infty$ quand $n \to \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $|f| < C_n$ sur A_n^c.

On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On a donc $A \in T$, $m(A) = 0$ et $|f(x)| < C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $x \in A^c$. Comme $C_n \downarrow \|f\|_\infty$ quand $n \to \infty$, on en déduit $|f| \leq \|f\|_\infty$ sur A^c et donc que $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p..

En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $\|f\|_\infty = 1$ et l'assertion $f < \|f\|_\infty$ p.p. est fausse.

Noter aussi que $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| \leq C$ p.p.$\}$.

On pose $J = \{p \in [1, +\infty]; f \in \mathcal{L}^p\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$.

   (b) Remarquer que $J = I$ ou $J = I \cup \{+\infty\}$. Montrer que si $p \in I$ et $+\infty \in J$, alors $[p, +\infty] \subset J$. En déduire que J est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}_+$.

corrigé

Soit $p \in I$ et on suppose que $\infty \in J$. Soit $q \in]p, \infty[$. Comme $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p., On a $|f|^q \leq \|f\|_\infty^{q-p} |f|^p$ p.p.. On en déduit que $f \in \mathcal{L}^q$, c'est-à-dire $q \in I$. On a ainsi montré que $]p, \infty[\subset I$ et donc $[p, \infty] \subset J$.

On raisonne maintenant comme dans la question 1. On pose $a = \inf J$ et $b = \sup J$, de sorte que $J \subset [a, b]$. Puis, soit p t.q. $a < p < b$. On a nécessairement $a < \infty$ et il existe $p_1 \in I$ t.q. $p_1 < p$. On a $b \leq \infty$ et il existe $p_2 \in J$ t.q. $p < p_2$. Si $p_2 \in I$, on utilise la question 1 pour montrer que $p \in I$ et si $p_2 = \infty$ la première partie de cette question donne que $p \in I$. On a bien ainsi montré que $]a, b[\subset J$. J est donc un intervalle dont les bornes sont a et b.

Noter aussi que $\inf I = \inf J$ et $\sup I = \sup J$.

   (c) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \uparrow +\infty$. On suppose que $\|f\|_\infty > 0$ (noter que $f = 0$ p.p. $\Leftrightarrow \|f\|_\infty = 0$).
      i. Soit $0 < c < \|f\|_\infty$. Montrer que $\liminf_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \geq c$. [On pourra remarquer que $\int |f|^p dm \geq c^p m(\{x, |f(x)| \geq c\})$.]

corrigé

Comme $|f|^p \geq c^p 1_{\{|f|\geq c\}}$, la monotonie de l'intégrale donne bien

$$\int |f|^p dm \geq c^p m(\{|f| \geq c\}),$$

et donc, comme $\int |f|^p dm \neq 0$,

$$\|f\|_p \geq c m(\{|f| \geq c\})^{\frac{1}{p}}. \tag{15.48}$$

Comme $c < \|f\|_\infty$, on a $m(\{|f| \geq c\}) > 0$, d'où l'on déduit que $m(\{|f| \geq c\})^{\frac{1}{p}} \to 1$ quand $p \to \infty$ ($p \in [1, \infty[$).

En passant à la limite inférieure quand $n \to \infty$ dans (15.48) pour $p = p_n$, on obtient alors

$$\liminf_{n\to\infty} \|f\|_{p_n} \geq c.$$

Comme c est arbitrairement proche de $\|f\|_\infty$, on en déduit :

$$\liminf_{n\to\infty} \|f\|_{p_n} \geq \|f\|_\infty. \tag{15.49}$$

---

ii. On suppose que $\|f\|_\infty < +\infty$. Montrer que : $\limsup_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \leq \|f\|_\infty$. [*On pourra considérer la suite* $g_n = \Big(\frac{|f|}{\|f\|_\infty}\Big)^{p_n}$ *et noter que* $g_n \leq g_0$ *p.p..*]

—————————————**corrigé**—————————————

Comme $\frac{f}{\|f\|_\infty} \leq 1$ p.p. et que $p_n \geq p_0$ (car la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante), on a $g_n \leq g_0$ p.p. et donc $\int g_n dm \leq \int g_0 dm$, d'où l'on déduit (en notant que toutes les normes de f sont non nulles) :

$$\|f_n\|_{p_n} \leq \|f\|_\infty (\int g_0 dm)^{\frac{1}{p_n}}.$$

En remarquant que $\int g_0 dm \neq 0$, on obtient bien, en passant à la limite supérieure dans cette inégalité,

$$\limsup_{n\to\infty} \|f\|_{p_n} \leq \|f\|_\infty. \tag{15.50}$$

---

iii. Déduire de (a) et (b) que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

—————————————**corrigé**—————————————

On distingue deux cas :

Cas 1 On suppose ici que $\|f\|_\infty = \infty$. (15.49) donne alors que $\|f\|_{p_n} \to \infty$ et donc $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ quand $n \to \infty$.

Cas 2 . On suppose ici que $\|f\|_\infty < \infty$, de sorte que $0 < \|f\|_\infty < \infty$. Les assertions (15.49) et (15.50) donnent alors $\limsup_{n\to\infty} \|f\|_{p_n} \leq \|f\|_\infty \leq \liminf_{n\to\infty} \|f\|_{p_n}$ et donc que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ quand $n \to \infty$.

---

3. Déduire des deux parties précédentes que $p \to \|f\|_p$ est continue de $\overline{J}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, où $\overline{J}$ désigne l'adhérence de J dans $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $\overline{J} = [a, b]$ si $J = |a, b|$, avec $1 \leq a \leq b \leq +\infty$, et | désigne] ou [).

—————————————**corrigé**—————————————

Si $f = 0$ p.p., on a $J = \overline{J} = [1, \infty]$ et $\|f\|_p = 0$ pour tout $p \in J$. Donc, $p \to \|f\|_p$ est continue de $\overline{J}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

On suppose maintenant que f n'est pas "$= 0$ p.p.". On a donc $\|f\|_p > 0$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

On pose $\overline{J} = [a, b]$ (si $J \neq \emptyset$). On distingue 3 cas :

Cas 1 . Soit $p \in]a, b[$, de sorte que $p \in I$.

(a) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \uparrow p$. La question 1-c donne que $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_p^p$ quand $n \to +\infty$. On en déduit que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_p$ quand $n \to \infty$ (pour s'en convaincre, on peut remarquer que $\ln(\|f\|_{p_n}) = \frac{1}{p_n}\ln(\|f\|_{p_n}^{p_n}) \to \frac{1}{p}\ln(\|f\|_p^p) = \ln(\|f\|_p)$). Ceci donne la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point p.

(b) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \downarrow p$. La question 1-c donne aussi $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_p^p$ quand $n \to +\infty$ et on en déduit, comme précédemment, que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_p$ quand $n \to \infty$. Ceci donne la continuité à droite de $q \to \|f\|_q$ au point p.

Cas 2 . On prend ici $p = a$ et on suppose $a \neq \infty$ (sinon $a = b$ et ce cas est étudié au Cas 3). Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \downarrow a$.

(a) On suppose d'abord que $a \in I$. Ici encore, la question 1-c donne $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_a^a$ quand $n \to +\infty$ et on en déduit que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_a$ quand $n \to \infty$. Ceci donne la continuité à droite de $q \to \|f\|_q$ au point a.

(b) On suppose maintenant que $a \notin I$, de sorte que $\|f\|_a = \infty$. La question 1-c donne alors $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \infty$ quand $n \to +\infty$ et donc $\|f\|_{p_n} \to \infty$ quand $n \to \infty$. Ceci donne la continuité à droite de $q \to \|f\|_q$ au point a.

Cas 2 . On prend ici $p = b$. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \uparrow a$.

(a) On suppose d'abord que $b \in I$. Ici encore, la question 1-c donne $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_b^b$ quand $n \to +\infty$ et on en déduit que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_b$ quand $n \to \infty$. Ceci donne la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point b.

(b) On suppose maintenant que $b \notin I$.

Si $b \neq \infty$, on a donc $\|f\|_b = \infty$. La question 1-c donne alors $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \infty$ quand $n \to +\infty$ et donc $\|f\|_{p_n} \to \infty$ quand $n \to \infty$. Ceci donne la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point b.

Si $b = \infty$, la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point b a été démontré à la question 2-c-iii.

Corrigé 84 (Continuité d'une application de L^1 dans L^1)
Soient (E, T, m) un espace mesuré fini et soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. :

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+^\star\,;\ |g(s)| \leq C|s| + C,\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{15.51}$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

corrigé

u est mesurable de E (muni de la tribu T) dans $\mathbb{R}$ (muni de la tribu $\mathcal{B}(R)$) et g est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu $\mathcal{B}(R)$). On en déduit que $g \circ u$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

Puis, comme $|g \circ u(x)| = |g(u(x))| \leq C|u(x)| + C$ pour tout $x \in E$, on a

$$\int |g \circ u| dm \leq C\|u\|_1 + Cm(E).$$

Donc, $g \circ u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

On pose $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Pour $u \in L^1$, on pose $G(u) = \{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m);\ h = g \circ v \text{ p.p.}\} \in L^1$, avec $v \in u$.

2. Montrer que la définition précédente a bien un sens, c'est à dire que $G(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u.

corrigé

Soient $v, w \in u$. Il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $v = w$ sur A^c. On a donc aussi $g \circ v = g \circ w$ sur A^c et donc $g \circ v = g \circ w$ p.p.. On en déduit que $\{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m); h = g \circ v \text{ p.p.}\} = \{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m); h = g \circ w \text{ p.p.}\}$.

$G(u)$ ne dépend donc pas du choix de v dans u.

---

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$. On suppose que $u_n \to u$ p.p. et qu'il existe $F \in L^1$ t.q. $|u_n| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^1.

corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de u_n, encore notée u_n. On choisit aussi des représentants de u et F, notés toujours u et F. Comme $u_n \to u$ p.p. quand $n \to \infty$ et que g est continu, il est facile de voir que $g \circ u_n \to g \circ u$ p.p.. On a donc $G(u_n) \to G(u)$ p.p..

On remarque aussi que $|g \circ u_n| \leq C|u_n| + C \leq CF + C$ p.p. et donc $|G(u_n)| \leq CF + C$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $CF + C \in L^1$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée, il donne que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^1 quand $n \to \infty$.

---

4. Montrer que G est continue de L^1 dans L^1. [*On pourra utiliser la question 3. et le théorème appelé "réciproque partielle de la convergence dominée".*]

corrigé

On raisonne par l'absurde. On suppose que G n'est pas continue de L^1 dans L^1. Il existe donc $u \in L^1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ t.q. $u_n \to u$ dans L^1 et $G(u_n) \not\to G(u)$ dans L^1 quand $n \to \infty$.

Comme $G(u_n) \not\to G(u)$, il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$ et :

$$\|G(u_{\varphi(n)}) - G(u)\|_1 \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{15.52}$$

(La suite $(G(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de la suite $(G(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.)

Comme $u_{\varphi(n)} \to u$ dans L^1, on peut appliquer le théorème appelé "réciproque partielle de la convergence dominée" (théorème 4.7). Il donne l'existence de $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et de $F \in L^1$ t.q. $\psi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$, $u_{\varphi\circ\psi(n)} \to u$ p.p. et $|u_{\varphi\circ\psi(n)}| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. (La suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$).

On peut maintenant appliquer la question 3 à la suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle donne que $G(u_{\varphi\circ\psi(n)}) \to G(u)$ dans L^1 quand $n \to \infty$. Ce qui est en contradiction avec (15.52).

15.3 Espérance et moments des variables aléatoires

Corrigé 85 (Inégalité de Jensen)

Rappel : Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe c_a t.q. $f(x) - f(a) \geq c_a(x - a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et X une v.a. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X et $f(X)$ sont intégrables. Montrer l'**inégalité de Jensen**, c'est-à-dire :

$$\int f(X)dP \geq f(\int XdP).$$

[Utiliser le rappel avec a bien choisi.]

corrigé

On utilise le rappel avec $a = E(X) = \int X dP$. On obtient pour tout $\omega \in \Omega$

$$f(X(\omega)) - f(a) \geq X(\omega) - a.$$

Comme les fonctions $f(X) - f(a)$ et $X - a$ sont intégrables, la monotonie de l'intégrale donne alors

$$\int (f(X) - f(a)) dP \geq \int (X - a) dP.$$

Comme $\int X dp = a$, on en déduit $\int (f(X) - f(a)) dP \geq 0$, ce qui donne le résultat demandé.

Corrigé 86 (Sur l'équi-intégrabilité)

Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. (réelles). On rappelle que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable si $\int_A |X_n| dP \to 0$, quand $P(A) \to 0$ (avec $A \in \mathcal{A}$), uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| dP = 0,$
2. $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |X_n| dP < +\infty$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équi-intégrable.

corrigé

En attente.

Corrigé 87 (Caractérisation de l'indépendance)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $n \geq 2$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles. Montrer que l'indépendance de $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ est équivalente à la propriété suivante :

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in]-\infty, +\infty[^n, P[X_1 \leq a_1, \ldots, X_n \leq a_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \leq a_i]. \tag{15.53}$$

(La notation $P[X \leq a]$ est identique à $P(\{X \leq a\})$, elle désigne la probabilité de l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq a\}$.)

corrigé

Le fait que l'indépendance de $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ entraîne la propriété (15.53) car immédiat car l'ensemble $\{X_i \leq a_i\}$ appartient à la tribu engendrée par X_i (pour tout $a_i \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$).

On montre maintenant la réciproque, c'est-à-dire que (15.53) entraîne l'indépendance de $(X_1, X_2, \ldots X_n)$. On note $\mathcal{D} = \{]-\infty, a], a \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{C} = \mathcal{D} \cup \{\mathbb{R}\}$ (on a donc $A \in \mathcal{C}$ si et seulement si $A \in \mathcal{D}$ ou $A = \mathbb{R}$). L'hypothèse (15.53) donne

$$P[\cap_{i=1}^n \{X_i \in A_i\}] = \prod_{i=1}^{n} P[\{X_i \in A_i\}] \text{ pour tout } A_i \in \mathcal{D}.$$

Mais, comme $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, n]$ une conséquence facile de la continuité croissante de P est que

$$P[\cap_{i=1}^n \{X_i \in A_i\}] = \prod_{i=1}^{n} P[\{X_i \in A_i\}] \text{ pour tout } A_i \in \mathcal{C}. \tag{15.54}$$

.
Nous allons, à partir de (15.54), montrer, par récurrence sur q (q allant de 1 à $n+1$), la propriété suivante :

$$\begin{gathered} P[\cap_{i=1}^n \{X_i \in A_i\}] = \prod_{i=1}^n P[\{X_i \in A_i\}] \\ \text{pour tout } A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ t.q. } A_i \in \mathcal{C} \text{ si } i \geq q. \end{gathered} \tag{15.55}$$

Par définition de v.a.r. indépendantes (définition 3.12), la propriété (15.55) pour $q = n+1$ donne l'indépendance de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Pour $q = 1$, la propriété (15.55) est donnée par (15.54). Soit maintenant $q \in \{1, \ldots, n\}$ t.q. (15.55) soit vraie. On montre maintenant que (15.55) est encore vraie pour $q+1$ au lieu de q (ce qui termine la récurrence).

Soit $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ donnés pour $i \neq q$, avec $A_i \in \mathcal{C}$ si $i > q$. Pour tout $A_q \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on définit $m(A_q)$ et $\mu(A_q)$ de la manière suivante :

$$m(A_q) = P[\cap_{i=1}^n \{X_i \in A_i\}],\ \mu(A_q) = \prod_{i=1}^n P[\{X_i \in A_i\}].$$

La σ-aditivité de P donne que m et μ sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. L'hypthèse de récurence (c'est-à-dire le fait que (15.55) est vraie) donne que ces deux mesures sont égales sur $\mathcal{C}$. On peut alors appliquer la proposition 2.5 (car $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et $\mathbb{R} \in \mathcal{C}$, $m(\mathbb{R}) < \infty$). Elle donne que $m = \mu$ (sur tout $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Ce qui montre que (15.55) est encore vraie pour $q+1$ au lieu de q.

On a bien terminé la récurrence et montré ainsi l'indépendance de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

N.B. Une démonstration (probablement plus directe) de cette dernière implication peut se faire en utilisant une généralisation de la proposition 2.5 à $\mathbb{R}^n$. Cette méthode permet déviter la récurrence sur q.

Corrigé 88 (Sign(X) et $|X|$ pour une gaussienne)

Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose sign(s)=1 si $s > 0$, sign(s)=-1 si $s < 0$ et sign(0)$=0$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. gaussienne centrée (c'est-à-dire $P_X = f\lambda$ avec, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, où $\sigma > 0$ est la racine carré de la variance de X). Montrer que sign(X) et $|X|$ sont indépendantes et préciser leurs lois. Même question avec sign(X) et X^2.

corrigé

On pose Y =sign(X) et $Z = |X|$. Pour montrer que Y et Z sont indépendantes il suffit de montrer que $E(\varphi(Y)\psi(Z)) = E(\varphi(Y))E(\psi(Z))$ pour toutes fonctions φ et ψ boréliennes bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (en fait, par définition de l'indépendance, il suffit de considérer $\varphi = 1_A$ et $\psi = 1_B$ avec $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$).

Soit φ, ψ boréliennes bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} E(\varphi(Y)\psi(Z)) = \int_\Omega \varphi(\text{sign}(X))\psi(|X|)dP = \int_\mathbb{R} \varphi(\text{sign}(x))\psi(|x|)f(x)dx = \\ \varphi(1)\int_{\mathbb{R}^+} \psi(x)f(x) + \varphi(-1)\int_{\mathbb{R}_-} \psi(-x)f(x)dx \\ = (\varphi(1) + \varphi(-1))\int_{\mathbb{R}^+} \psi(x)f(x)dx, \end{aligned}$$

en utilisant $f(-x) = f(x)$.

En prenant $\psi = 1_\mathbb{R}$, on a $E(\varphi(Y)) = \frac{1}{2}(\varphi(1) + \varphi(-1))$ car $\int_{\mathbb{R}_+} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

En prenant $\varphi = 1_{\mathbb{R}}$, on a $E(\psi(Z)) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi(x) 2f(x)dx$.

On en déduit que $E(\varphi(Y)\psi(Z)) = E(\varphi(Y))E(\psi(Z))$ pour toutes fonctions φ et ψ boréliennes bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et donc que Y et Z sont indépendantes. On obtient aussi que $P_Y = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$ et $P_Z = g\lambda$ avec $g = 2f1_{\mathbb{R}_+}$ (c'est-à-dire que P_Z est la mesure de densité g par rapport à la mesure de Lebesgue). Noter que $E(\varphi(Y)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi dP_Y$ et $E(\varphi(Z)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi dP_Z$ si φ est borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui caractérise P_Y et P_Z (voir (4.27) ou le théorème 4.11, par exemple).

Pour montrer l'indépendance de $\text{sign}(X)$ et X^2, on remarque que $X^2 = Z^2$. Comme Y et Z sont indépendantes, les v.a.r. Y et Z^2 sont aussi indépendantes (voir la proposition 3.10) et donc $\text{sign}(X)$ et X^2 sont indépendantes.

Il reste à trouver la loi de X^2. On a, pour φ borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en utilisant $f(-x) = f(x)$,

$$E(\varphi(X^2)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) f(x)dx = 2\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x^2) f(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(y) \frac{f(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} dy.$$

Ce qui donne $P_{X^2} = h\lambda$ avec $h(x) = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ pour $x > 0$ et $h(x) = 0$ pour $x \leq 0$.

Corrigé 89 (V.a. gaussiennes dépendantes)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ et X_1, X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes et telles que :

$$X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2) \text{ et } X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2).$$

(le signe "$\sim$" signifie "a pour loi".) Construire deux v.a. Y_1 et Y_2 t.q. $X_1 \sim Y_1$, $X_2 \sim Y_2$ et Y_1 et Y_2 soient dépendantes.

———————————————corrigé———————————————

En attente.

Corrigé 90 (V.a. gaussiennes dépendantes, à covariance nulle)
soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilités et X, S deux v.a. réelles, indépendantes, t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et S a pour loi $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. (Il est possible de construire un espace de probabilités et des v.a. indépendantes ayant des lois prescrites, voir le Chapitre 7.)

1. Montrer que $SX \sim \mathcal{N}(0,1)$.

———————————————corrigé———————————————

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ de sorte que la loi de X est de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on note $-A = \{-x, x \in A\}$. Comme f est paire, on a :

$$P(X \in (-A)) = \int_{-A} f(x)dx = \int_A f(-x)dx = \int_A f(x)dx = P(X \in A).$$

On remarque maintenant que $P(SX \in A) = P(S = 1, X \in A) + P(S = -1, X \in (-A))$. Comme S et X sont indépendantes, on a :

$$P(S = 1, X \in A) = P(S = 1)P(X \in A) = \frac{1}{2}P(X \in A),$$

$$P(S = -1, X \in (-A)) = P(S = -1)P(X \in (-A)) = \frac{1}{2}P(X \in (-A)).$$

Comme $P(X \in (-A)) = P(X \in A)$, on en déduit $P(SX \in A) = P(X \in A)$. Les v.a.r. SX et X ont donc même loi, et donc $SX \sim \mathcal{N}(0,1)$.

---

2. Montrer que SX et X sont dépendantes.

———————————————corrigé———————————————

On raisonne par l'absurde. On suppose que SX et X sont indépendantes. La proposition 4.10 donne alors $E(|SX||X|) = E(|SX|)E(|X|)$ (noter que la fonction $s \mapsto |s|$ est borélienne positive). Comme $|S| = 1$ p.s., on a donc :

$$E(X^2) = E(|SX||X|) = E(|SX|)E(|X|) = E(|X|)^2.$$

Comme $E(|X|) < +\infty$, on en déduit que $\mathrm{Var}(|X|) = 0$, ce qui est impossible car $|X|$ n'est pas égale p.s. à sa moyenne (sinon, la loi de $|X|$ serait une masse de Dirac et non pas une loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue).

———————————————————————————————

3. Montrer que $\mathrm{Cov}(SX, X) = 0$.

———————————————corrigé———————————————

Comme $SX \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, on a $E(SX) = E(X) = 0$. Comme S et X sont indépendantes (et S et X^2 intégrables), on a (proposition 4.10) SX^2 intégrable et $E(SX^2) = E(S)E(X^2) = 0$. On en déduit $\mathrm{Cov}(SX, X) = E([SX - E(SX)][X - E(X)]) = E(SX^2) = E(S)E(X^2) = 0$.

———————————————————————————————

4. (Question subsidiaire.) On ne suppose plus l'existence de S, mais on suppose qu'il existe Y v.a. gaussienne indépendante de X. Montrer que si $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\sigma > 0$, il est possible d'utiliser Y pour construire S, v.a. indépendante de X et telle que $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$.

———————————————corrigé———————————————

Il suffit de prendre $S = \mathrm{sign}(Y)$ avec $\mathrm{sign}(s) = -1$ si $s < 0$, $\mathrm{sign}(s) = 1$ si $s > 0$ et (par exemple) $\mathrm{sign}(0) = 0$ (la fonction sign est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On a bien X et S indépendantes (par la proposition 3.10, mais la preuve est facile ici car la tribu engendrée par $\varphi(Y)$ est incluse dans celle engendrée par Y dés que φ est borélienne). Enfin, on a $P(S = 1) = P(Y > 0) = \frac{1}{2} = P(Y < 0) = P(S = -1)$, ce qui donne bien $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$.

———————————————————————————————

Corrigé 91 (Limite p.s. et indépendance)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite v.a.r. et X, Y deux v.a.r.. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, X_n et Y sont indépendantes et on suppose que $X_n \to X$ p.s., quand $n \to \infty$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

———————————————corrigé———————————————

Soit ϕ, $\psi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Comme X_n et Y sont indépendantes, on a (voir la proposition 4.10), pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$E(\varphi(X_n)\psi(Y)) = E(\varphi(X_n))E(\psi(Y)). \tag{15.56}$$

Comme φ est continue, on a $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ p.s. et $\varphi(X_n)\psi(Y) \to \varphi(X)\psi(Y)$ p.s.. les convergences sont dominées car $|\varphi(X_n)| \le \sup\{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ (et $|\psi(Y)| \le \sup\{\psi(x), x \in \mathbb{R}\}$). On peut donc utiliser le théprème de convergence dominée, il donne $\lim_{n\to\infty} E(\varphi(X_n)\psi(Y)) = E(\varphi(X)\psi(Y))$ et $\lim_{n\to\infty} E(\varphi(X_n)) = E(\varphi(X))$. En passant à la limite dans (15.56), on en déduit que

$$E(\varphi(X)\psi(Y)) = E(\varphi(X))E(\psi(Y)).$$

La proposition 4.12 permet de conclure que X et Y sont indépendantes.

———————————————————————————————

Chapitre 16

Mesures sur la tribu des boréliens

Corrigé 92

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(]0,1[,\,\mathbb{R})$ convergeant simplement vers la fonction $f\ :]0,1[\to\mathbb{R}$; on suppose que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\subset C(]0,1[,\mathbb{R})$) converge simplement vers la fonction constante et égale à 1.

1. A-t-on $f \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et $f' = 1$?

corrigé

La réponse est “non". La fonction f peut même ne pas être continue, comme le montre l’exemple suivant :

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, on définit g_n de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$
\begin{array}{l}
g_n(x) = 1, \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\\
g_n(x) = 1 + n^2(x - \frac{1}{2}), \text{ si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n},\\
g_n(x) = 1 - n^2(x - \frac{1}{2} - \frac{2}{n}), \text{ si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{n},\\
g_n(x) = 1, \text{ si } \frac{1}{2} + \frac{2}{n} < x \leq 1.
\end{array}
$$

Il est facile de voir que $g_n \in C([0,1],\mathbb{R})$ et que $g_n(x) \to 1$ pour tout $x \in [0,1]$.

Pour $n \geq 4$, on définit f_n par :

$$f_n(x) = \int_0^x g_n(t)dt, \text{ pour tout } x \in]0,1[,$$

de sorte que $f_n \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et $f'_n = g_n$ sur $]0,1[$. On a donc bien que $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante et égale à 1. (On prend n’importe quelles fonctions C^1 pour f_n, $0 \leq n \leq 3$).

On remarque maintenant que, pour $n \geq 4$, $f_n(x) = x$ pour tout $x \in]0,\frac{1}{2}]$ et que $f_n(x) = x + 1$ pour tout $x \in]\frac{1}{2} + \frac{2}{n}, 1[$. On en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f\ :]0,1[\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in]0,\frac{1}{2}]$ et $f_n(x) = x+1$ pour tout $x \in]\frac{1}{2},1[$. Cette fonction n’est pas continue en $\frac{1}{2}$, donc $f \notin C^1(]0,1[,\mathbb{R})$.

---

2. On suppose maintenant que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$ vers la fonction constante et égale à 1. A-t-on $f \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et $f' = 1$?

corrigé

La réponse maintenant est “oui". En effet, soit $0 < x < 1$. Comme $f_n \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$, on a $f_n(x) = f_n(\frac{1}{2}) + \int_{\frac{1}{2}}^{x} f_n'(t)dt$, c'est-à-dire

$$f_n(x) = f_n(\frac{1}{2}) + s_x \int f_n' 1_{I_x} d\lambda, \tag{16.1}$$

avec $s_x = 1$ et $I_x =]\frac{1}{2}, x[$ si $x \geq \frac{1}{2}$, $s_x = -1$ et $I_x =]x, \frac{1}{2}[$ si $x < \frac{1}{2}$.

Quand $n \to \infty$, on a

$$|\int f_n' 1_{I_x} d\lambda - \int 1_{I_x} d\lambda| \leq \|f_n' - 1\|_1 \to 0,$$

et $f_n(x) \to f(x)$ (ainsi que $f_n(\frac{1}{2}) \to f(\frac{1}{2})$). On déduit donc de (16.1), quand $n \to \infty$,

$$f(x) = f(\frac{1}{2}) + s_x \int 1_{I_x} d\lambda,$$

c'est-à-dire $f(x) = f(\frac{1}{2}) + x - \frac{1}{2}$.

On a bien montré que $f \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et $f' = 1$.

Corrigé 93 (Intégrale impropre)

On définit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0, \text{ si } x \leq 0,$$
$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}, \text{ si } x > 0.$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

corrigé

La fonction f est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}^\star$ et on a $f'(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ si $x > 0$.

Pour montrer la continuité et la dérivablité de f en 0, il suffit de remarquer que, pour tout $x > 0$, on a $|f(x)| \leq x^2$ et donc $|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}| \leq x$. On en déduit que f est continue et dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

---

2. Soit $0 < a < b < \infty$. Montrer que $f' 1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On pose $\int_a^b f'(t)dt = \int f' 1_{]a,b[} d\lambda$. Montrer que :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

corrigé

La fonction f' est continue sur $]0, \infty[$. La restriction de f' à $[a,b]$ est donc continue (on utilise ici le fait que $a > 0$). On a donc, voir la proposition 5.1 (ou l'exercice 4.5) :

$$f'_{|[a,b]} \in \mathcal{L}^1([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda_{[a,b)}),$$

où $\lambda_{[a,b)}$ désigne la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $[a,b]$ (c'est-à-dire la restriction à $\mathcal{B}([a,b])$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) et l'intégrale (de Lebesgue) de $f'_{|[a,b]}$ coïncide avec l'intégrale des fonctions continues, c'est-à-dire :

$$\int f'_{|[a,b]} d\lambda_{[a,b)} = \int_a^b f'(x)dx.$$

Le terme de droite de l'égalité précédente est à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues. Comme f est de classe C^1 sur un intervalle ouvert contenant $[a,b]$, il est alors classique que :

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Pour se convaincre de cette dernière égalité, on rappelle que f et $x \mapsto \int_a^x f'(t)dt$ sont deux primitives de f', leur différence est donc constante sur $[a,b]$.

Enfin, comme $f'_{|[a,b]} \in \mathcal{L}^1([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda_{[a,b)})$, il est facile d'en déduire que $f'1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et que

$$\int f'_{|[a,b]} d\lambda_{[a,b)} = \int f'1_{]a,b[} d\lambda.$$

Plus précisement, on pose $f' = g$ et on considère d'abord le cas $g_{|[a,b]} \in \mathcal{E}_+([a,b],\, \mathcal{B}([a,b])$ puis $g_{|[a,b]} \in \mathcal{M}_+([a,b],\, \mathcal{B}([a,b])$ et enfin $g_{|[a,b]} \in \mathcal{L}^1([a,b],\, \mathcal{B}([a,b]),\, \lambda_{[a,b)})$, comme dans l'exercice 4.4. Ceci termine la question.

Un autre moyen de montrer $f'1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est de procéder de la manière suivante :
La fonction f' est la limite simple, quand $n \to \infty$, de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ où f_n est défnie, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, par :

$$f_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f est mesurable (c'est-à-dire borélienne car $\mathbb{R}$ est muni de la tribu de Borel). Grâce à la stabilité de l'ensemble des fonctions mesurables (voir la proposition 3.5), on en déduit que f_n est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et donc que f' est mesurable (comme limite simple de fonctions mesurables). La fonction $f'1_{]a,b[}$ est donc aussi mesurable (comme produit de fonctions mesurables). La mesurabilité de $f'1_{]a,b[}$ est donc vraie pour tout $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (noter cependant que f' n'est pas continue en 0).

Pour montrer que $f'1_{]a,b[}$ est intégrable, il suffit de remarquer que f' est bornée sur $]a,b[$, car f' est continue sur $[a,b]$ (on utilise ici le fait que $a > 0$) et que $\lambda(]a,b[) < \infty$. On a donc bien montré que $f'1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

---

3. Soit $a > 0$.
   (a) Montrer $f'1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

corrigé

La restriction de f' à $]0,a[$ est continue, c'est donc une fonction mesurable (c'est-à-dire borélienne) de $]0,a[$ dans $\mathbb{R}$. On en déduit facilement que $f'1_{]0,a[}$ est borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. (On a aussi vu à la question précédente que f' était borélienne. Ceci montre également que $f'1_{]0,a[}$ est borélienne.)

On a $f'1_{]0,a[} = g_1 1_{]0,a[} - g_2 1_{]0,a[}$, avec :

$$g_1(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} \text{ et } g_2(x) = \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \text{ si } x \in]0,a[.$$

Il est clair que $g_1 1_{]0,a[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (car g_1 est continue et bornée sur $]0,a[$). Pour montrer que $f'1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, il suffit donc de montrer que $g_2 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour cela, on remarque maintenant que :

$$|g_2(x)| \geq \sqrt{2}\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}, \text{ si } \frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}},\ n \geq n_0, \tag{16.2}$$

avec $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\frac{1}{\sqrt{n_0\pi - \frac{\pi}{4}}} \le a$. On déduit alors de (16.2), par monotonie de l'intégrale, que, pour tout $N \ge n_0$:

$$\int |g_2| 1_{]0,a[} d\lambda \ge \sum_{n=n_0}^{N} \sqrt{2}\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}}\right)$$
$$= \sum_{n=n_0}^{N} \sqrt{2}\frac{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}} - \sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}},$$

et donc :

$$\int |g_2| 1_{]0,a[} d\lambda \ge \sum_{n=n_0}^{N} \frac{\sqrt{2}\pi}{2\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}} + \sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}\right)}$$
$$\ge \sum_{n=n_0}^{N} \frac{\sqrt{2}\pi}{4(n\pi + \frac{\pi}{4})}.$$

En faisant tendre N vers ∞, on en déduit que $\int |g_2| 1_{]0,a[} d\lambda = \infty$ et donc que $g_2 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f' 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

(b) Pour $0 < x < a$, on pose $g(x) = \int_x^a f'(t)dt$. Montrer que $g(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to 0$, avec $x > 0$, et que cette limite est égale à $f(a) - f(0)$. (Cette limite est aussi notée $\int_0^a f'(t)dt$, improprement… car $f' 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, la restriction de f' à $]0, a[$ n'est donc pas intégrable pour la mseure de Lebesgue sur $]0, a[$.)

corrigé

On a $g(x) = f(a) - f(x)$, pour tout $x > 0$. Comme f est continue en 0, on en déduit bien que $g(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to 0$, avec $x > 0$, et que cette limite est égale à $f(a) - f(0)$.

Corrigé 94

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On définit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $F(x) = \int f 1_{[0,x]} d\lambda (= \int_0^x f(t)dt)$, pour $x \ge 0$, et $F(x) = -\int f 1_{[x,0]} d\lambda (= -\int_x^0 f(t)dt)$ pour $x < 0$. Montrer que F est uniformément continue.

corrigé

On remarque que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$,

$$F(y) - F(x) = \int f 1_{]x,y[} d\lambda = \int_{]x,y[} f d\lambda.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, l'exercice 4.14 (ou l'exercice 4.29) montre qu'il existe $\delta > 0$ t.q.

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f| d\lambda \le \varepsilon.$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. On a donc, comme $\lambda(]x, y[) = y - x$,

$$|y - x| \le \delta \Rightarrow |F(y) - F(x)| \le \int_{]x,y[} |f| d\lambda \le \varepsilon,$$

ce qui montre bien la continuité uniforme de F.

Corrigé 95 (Intégrabilité et limite à l'infini)
Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) = \mathcal{L}^1$.

1. On suppose que $f(x)$ admet une limite quand $x \to \infty$. Montrer que cette limite est nulle.

—————————————corrigé—————————————

On pose $l = \lim_{x\to\infty} f(x)$ et on suppose $l \neq 0$. Il existe alors $a \in \mathbb{R}$ t.q. $|f(x)| \geq \frac{|l|}{2}$ pour tout $x > a$. On en déduit, par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$,

$$\int |f| d\lambda \geq \int_{]a,\infty[} \frac{|l|}{2} d\lambda = \infty,$$

en contradiction avec l'hypothèse $f \in \mathcal{L}^1$.

---

2. On suppose que $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; a-t-on : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

—————————————corrigé—————————————

La réponse est "non", comme le montre l'exemple suivant. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, f_n par :

$$\begin{array}{l} f_n(x) = 0, \text{ si } x \leq n - \frac{1}{n^2}, \\ f_n(x) = n^2(x - n + \frac{1}{n^2}), \text{ si } n - \frac{1}{n^2} < x \leq n, \\ f_n(x) = -n^2(x - n - \frac{1}{n^2}), \text{ si } n < x \leq n + \frac{1}{n^2}, \\ f_n(x) = 0, \text{ si } x > n + \frac{1}{n^2}. \end{array}$$

Puis, on pose $f(x) = \sum_{n\geq 2} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série définissant $f(x)$ a au plus 1 terme non nul. Plus précisément, il existe n (dépendant de x) t.q. $f = f_n$ dans un voisinage de x. On en déduit que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et que f est continue (car les f_n sont continues).

Comme $f_n \in \mathcal{M}_+$ pour tout n, le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.1) donne que $f \in \mathcal{M}_+$ et

$$\int f dm = \sum_{n\geq 2} \int f_n dm = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

On a donc $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f(x) \not\to 0$ quand $x \to \infty$ car $f_n(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

---

3. On suppose que f est uniformément continue. A-t-on $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$? [On pourra commencer par montrer que, pour tout $\eta > 0$ et toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels t.q. $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta} |f(x)| d\lambda(x) = 0.] \tag{16.3}$$

—————————————corrigé—————————————

On commence par montrer le résultat prélimaire suggéré. Soient $\eta > 0$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

On pose $f_n = |f|1_{]x_n-\eta,x_n+\eta[}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$ (on a même $f_n(x) = 0$ pour n t.q. $x_n - \eta > x$). On a aussi $|f_n| \le |f| \in \mathcal{L}^1$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (ou la proposition préliminaire 4.6). Il donne que $\int f_n dm \to 0$, c'est-à-dire :

$$\int |f|1_{]x_n-\eta,x_n+\eta[} d\lambda \to 0, \text{ quand } n \to \infty. \tag{16.4}$$

On montre maintenant que $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.

On raisonne par l'absurde. On suppose que $f(x) \not\to 0$ quand $x \to \infty$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q. $x_n \to \infty$ quand $n \to \infty$ et $|f(x_n)| \ge \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La continuité uniforme de f donne l'existence de $\eta > 0$ t.q.

$$x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \le \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc $|f(x)| \ge \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \in]x_n - \eta, x_n + \eta[$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\int |f|1_{]x_n-\eta,x_n+\eta[} d\lambda \ge \varepsilon\eta > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est en contradiction avec (16.4).

On a donc bien finalement montré que $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.

---

4. On suppose que $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f' \in L^1$; a-t-on : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

corrigé

Comme $f \in C^1$, on a, pour $y > x$, $f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt = \int_{]x,y[} f' d\lambda$. Comme $f' \in \mathcal{L}^1$, l'exercice 5.7 donne que f est uniformément continue. La question précédente donne alors que $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$ (c'est seulement pour ce dernier point qu'on utilise $f \in \mathcal{L}^1$).

Une autre démonstration possible est :
Comme $f \in C^1$, on a $f(x) = f(0) + \int_{]0,x[} f' d\lambda$. Comme $f' \in \mathcal{L}^1$, on en déduit que $f(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to \infty$. En effet, le théorème de convergence dominée donne que $\int_{]0,x[} f' d\lambda \to \int_{]0,\infty[} f' d\lambda$ (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to \infty$. Enfin, la première question donne que la limite de $f(x)$ quand $x \to \infty$ est nécessairement 0 (et ici aussi, c'est seulement pour ce dernier point qu'on utilise $f \in \mathcal{L}^1$).

Corrigé 96 (Egalité p.p. de fonctions continues)
On munit $\mathbb{R}^N$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et de la mesure de Lebesgue λ_N. Soient f et $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $f = g$ p.p.. Montrer que $f = g$ partout. [On dira donc que $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_n)$ est continue si il existe $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $f = g$ p.p. (plus précisément on devrait écrire $g \in f$). Dans ce cas on identifie f avec g.]

corrigé

En attente

Corrigé 97 (Continuité en moyenne)
Pour $f \in L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$, on définit f_h ("translatée" de f) par : $f_h(x) = f(x + h)$, pour $x \in \mathbb{R}$. (noter que $f_h \in L^1$).

1. Soit $f \in C_c = C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$.

corrigé

Comme $f \in C_c$, f est uniformément continue, ce qui donne

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)| \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

Soit $a > 0$ t.q. $f = 0$ sur $[-a, a]^c$. Pour $h \in \mathbb{R}$ t.q. $|h| \leq 1$, on a donc, comme $f(x+h) - f(x) = 0$ si $x \notin [-a-1, a+1]$,

$$\int |f(x+h) - f(x)| dx \leq (2a+2) \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)| \to 0, \text{ quand } h \to 0,$$

et donc que $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.

2. Soit $f \in L^1$, montrer que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$.

corrigé

L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne que $f(\cdot + h) \in L^1$ pour tout $h \in \mathbb{R}$. On veut maintenant montrer que $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la densité de C_c dans L^1 (théorème 5.5), il existe $\varphi \in C_c$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne $\|f(\cdot + h) - \varphi(\cdot + h)\|_1 = \|f - \varphi\|_1$. On a donc, pour tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\|f(\cdot + h) - f\|_1 \leq 2\|f - \varphi\|_1 + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \leq 2\varepsilon + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1.$$

D'après la première question, il existe $\eta > 0$ t.q.

$$|h| \leq \eta \Rightarrow \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \leq \varepsilon.$$

Donc,

$$|h| \leq \eta \Rightarrow \|f(\cdot + h) - f\|_1 \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $f(\cdot + h) \to f$ dans L^1, quand $h \to 0$.

Corrigé 98 (Sur la concentration d'un borélien)

Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $A \in \mathcal{B}(]a, b[)$ et $\rho \in]0, 1[$. On suppose que $\lambda(A \cap]\alpha, \beta[) \leq \rho(\beta - \alpha)$ pour tout α, β t.q. $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Montrer que $\lambda(A) = 0$. [On pourra, par exemple, commencer par montrer que $\lambda(A \cap O) \leq \rho\lambda(O)$ pour tout ouvert O de $]a, b[$.]

Conséquence de cet exercice : Soit $A \in \mathcal{B}(]a, b[)$ t.q. $\lambda(A) > 0$. Alors, pour tout $\rho < 1$, il existe α, β t.q. $a \leq \alpha < \beta \leq b$ et $\lambda(A \cap]\alpha, \beta[) \geq \rho(\beta - \alpha)$.

corrigé

Soit O un ouvert de $]a, b[$. Comme O est un ouvert de $\mathbb{R}$, il peut s'écrire comme une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2 (lemme 2.4). On a donc $O = \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ avec $I_n \cap I_m = \emptyset$ si $n \neq m$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n =]a_n, b_n[$ avec $a \leq a_n \leq b_n \leq b$. La $\sigma-$additivité de λ et l'hypothèse $\lambda(A \cap]\alpha, \beta[) \leq \rho(\beta - \alpha)$ pour tout α, β t.q. $a \leq \alpha < \beta \leq b$ donne alors :

$$\lambda(A \cap O) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A \cap]a_n, b_n[) \leq \rho \sum_{n \in \mathbb{N}} (b_n - a_n) = \rho \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(]a_n, b_n[) = \rho\lambda(O). \tag{16.5}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. D'après la régularité de λ (et le fait que $A \in \mathcal{B}(]a,b[) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$), il existe O ouvert de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset O$ et $\lambda(O \setminus A) \leq \varepsilon$. En remplaçant O par $O \cap]a,b[$, on peut supposer que O est un ouvert de $]a,b[$. En utilisant (16.5) et l'additivité de λ, on a donc :

$$\lambda(A) = \lambda(A \cap O) \leq \rho\lambda(O) = \rho(\lambda(A) + \lambda(O \setminus A)) \leq \rho(\lambda(A) + \varepsilon).$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, on en déduit $\lambda(A) \leq \rho\lambda(A)$, ce qui n'est possible (comme $\rho < 1$) que si $\lambda(A) = 0$ ou si $\lambda(A) = \infty$.

Il reste donc à montrer que le cas $\lambda(A) = \infty$ est impossible. Pour cela, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = A \cap [-n,n]$. Soit $n \in \mathbb{N}$, la monotonie de λ donne $\lambda(A_n \cap]\alpha,\beta[) \leq \lambda(A \cap]\alpha,\beta[)$, on a donc aussi $\lambda(A_n \cap]\alpha,\beta[) \leq \rho(\beta - \alpha)$ pour tout α, β t.q. $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Comme $\lambda(A_n) < \infty$, la démonstration précédente, appliquée à A_n au lieu de A, donne $\lambda(A_n) = 0$. Enfin, comme $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, on en déduit $\lambda(A) = 0$.

Corrigé 99 (Points de Lebesgue)

On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$, par L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^1$ l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$. On note $dt = d\lambda(t)$.

1. Soit $(I_1, \ldots, I_n)$ des intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ t.q. chaque intervalle n'est pas contenu dans la réunion des autres. On pose $I_k =]a_k, b_k[$ et on suppose que la suite $(a_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante. Montrer que la suite $(b_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante et que les intervalles d'indices impairs [resp. pairs] sont disjoints 2 à 2.

———————————————corrigé———————————————

Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Comme $a_k \leq a_{k+1}$, on a $b_k < b_{k+1}$ (sinon $I_{k+1} \subset I_k$). La suite $(b_k)_{k \in \{1,\ldots,n\}}$ est donc (strictement) croissante.

Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. On a $b_k \leq a_{k+2}$ (sinon $I_k \cup I_{k+2} =]a_k, b_{k+2}[$ et donc $I_{k+1} \subset I_k \cup I_{k+2}$ car $a_k \leq a_{k+1} < b_{k+1} \leq b_{k+2}$). On a donc $I_k \cap I_{k+2} = \emptyset$. ceci prouve (avec la croissance de $(a_k)_{k=1,\ldots,n}$) que les intervalles d'indices impairs [resp. pairs] sont disjoints 2 à 2.

---

2. Soit J une famille finie d'intervalles ouverts non vide de $\mathbb{R}$ dont la réunion est notée A. Montrer qu'il existe une sous-famille finie de J, notée $(I_1, \ldots, I_m)$, formée d'intervalles disjoints 2 à 2 et t.q. $\lambda(A) \leq 2\sum_{k=1}^{m} \lambda(I_k)$. [Utiliser la question 1.]

———————————————corrigé———————————————

On commence par montrer la propriété suivante :

Pour toute famille finie, notée J, d'intervalles ouverts non vide de $\mathbb{R}$, il existe une sous famille, notée K, t.q. :

(a) Chaque élément de K n'est pas contenu dans la réunion des autres éléments de K,

(b) La réunion des éléments de K est égale à la réunion des éléments de J.

Cette propriété se démontre par récurrence sur le nombre d'éléments de J. Elle est immédiate si J a 1 élément (on prend K= J). Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que la propriété est vraie pour toutes les familles de n éléments. Soit J une famille de $(n+1)$ éléments. Si chaque élément de J n'est pas contenu dans la réunion des autres éléments de J, on prend K= J. Sinon, on choisit un élément de J, noté I, contenu dans la réunion des autres éléments de J. On applique alors l'hypothèse de récurrence à la famille J $\setminus\{I\}$, on obtient une sous famille de J $\setminus\{I\}$ (et donc de J), notée K, vérifiant bien les assertions (a) et (b) (en effet, La réunion des éléments de J $\setminus\{I\}$ est égale à la réunion des éléments de J). Ceci termine la démonstration de la propriété désirée.

Soit maintenant J une famille finie d'intervalles ouverts non vide de $\mathbb{R}$ dont la réunion est notée A (remarquer que $A \in B(\mathbb{R})$). Grâce à la propriété démontrée ci dessus, on peut supposer que chaque élément de J n'est pas contenu dans la réunion des autres éléments de J. On note $J_1, \ldots J_n$ les éléments de J, $J_i =]a_i, b_i[$, $i = 1, \ldots, n$. En réordonnant, on peut aussi supposer que la suite $(a_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante. On peut alors appliquer la question 1, elle donne, en posant $P = \{i = 1, \ldots, n; \, i \text{ pair}\}$ et $I = \{i = 1, \ldots, n; \, i \text{ impair}\}$ que les familles $(J_i)_{i\in P}$ et $(J_i)_{i\in I}$ sont formées d'éléments disjoints 2 à 2, de sorte que :

$$\lambda(\cup_{i\in P} J_i) = \sum_{i\in P} \lambda(J_i), \quad \lambda(\cup_{i\in I} J_i) = \sum_{i\in I} \lambda(J_i).$$

Enfin, comme $A = \cup_{i=1}^n J_i$, la sous-additivité de λ donne $\lambda(A) \le \sum_{i\in P} \lambda(J_i) + \sum_{i\in I} \lambda(J_i)$.
Une sous-famille de J satisfaisant les conditions demandées est alors $(J_i)_{i\in P}$ si $\sum_{i\in P} \lambda(J_i) \ge \sum_{i\in I} \lambda(J_i)$ et $(J_i)_{i\in I}$ si $\sum_{i\in I} \lambda(J_i) > \sum_{i\in P} \lambda(J_i)$.

On se donne maintenant $f \in L^1$ et on suppose qu'il existe $a > 0$ t.q. $f = 0$ p.p. sur $[-a, a]^c$. Le but de l'exercice est de montrer que :

$$\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt \to f(x), \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}, \text{ quand } n \to \infty. \tag{16.6}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on définit $f_\varepsilon^\star$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_\varepsilon^\star(x) = \sup_{h\ge\varepsilon} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |f(x+t)|dt. \tag{16.7}$$

3.(a) Montrer que $f_\varepsilon^\star$ est bornée.

corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, pour $h \ge \varepsilon$, $\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |f(x+t)|dt \le \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_1$ donc $f_\varepsilon^\star(x) \in \mathbb{R}$ et $|f_\varepsilon^\star(x)| \le \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_1$. La fonction $f_\varepsilon^\star$ est donc bornée par $\frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_1$.

(b) Montrer que $f_\varepsilon^\star$ est borélienne. [On pourra montrer que $f_\varepsilon^\star$ est le sup de fonctions continues.]

corrigé

Soit $h > 0$. On définit f_h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_h(x) = \int_{-h}^{h} |f(x+t)|dt$. La fonction f_h est continue car

$$\begin{aligned} |f_h(x+\eta) - f_h(x)| &= |\int_{-h}^{h} (|f(x+\eta+t)| - |f(x+t)|)dt| \\ &\le \int_{-h}^{h} |f(x+\eta+t) - f(x+t)|dt \\ \le \int |f(x+\eta+t) - f(x+t)|dt &= \|f(\cdot+\eta) - f\|_1 \to 0, \text{ quand } \eta \to 0, \end{aligned}$$

par le théorème de continuité en moyenne. (Ceci donne même la continuité uniforme.)

On en déduit que $f_\varepsilon^\star$ est borélienne comme "sup" de fonctions continues. En effet, si $\alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$(f_\varepsilon^\star)^{-1}(]\alpha,\infty[) = \cup_{h\geq\varepsilon}(\frac{1}{2h}f_h)^{-1}(]\alpha,\infty[)$$

et donc $(f_\varepsilon^\star)^{-1}(]\alpha,\infty[)$ est un ouvert, et donc aussi un borélien.

(c) Montrer que $f_\varepsilon^\star(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$.

corrigé

Soit $\eta > 0$. On a (avec la notation de la question précédente), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2h}f_h(x) \leq \eta$ si $h \geq \frac{\|f\|_1}{2\eta}$. D'autre part, on a $f_h(x) = 0$ si $h \leq \frac{\|f\|_1}{2\eta}$ et $|x| \geq a + \frac{\|f\|_1}{2\eta}$. On en déduit que $0 \leq f_\varepsilon^\star(x) \leq \eta$ si $|x| \geq a + \frac{\|f\|_1}{2\eta}$. Ceci prouve que $f_\varepsilon^\star(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$.

---

4. Pour $y > 0$, on pose $B_{y,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}, f_\varepsilon^\star(x) > y\}$.

(a) Montrer que tout $x \in B_{y,\varepsilon}$ est le centre d'un intervalle ouvert $I(x)$ t.q.

i. $\lambda(I(x)) \geq 2\varepsilon$,

ii. $\frac{1}{\lambda(I(x))}\int_{I(x)}|f|d\lambda > y$.

Montrer que parmi les intervalles $I(x)$, $x \in B_{y,\varepsilon}$, ainsi obtenus, il en existe un nombre fini $I(x_1), \ldots, I(x_n)$ dont la réunion recouvre $B_{y,\varepsilon}$. [On pourra d'abord remarquer que $B_{y,\varepsilon}$ est borné.]

corrigé

Si $x \in B_{y,\varepsilon}$, il existe $h \geq \varepsilon$ t.q. $\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|f(t)|dt = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|f(x+t)|dt > y$. On choisit alors $I(x) =]x-h, x+h[$. On a bien i. et ii..

$B_{y,\varepsilon}$ est borné car $f_\varepsilon^\star(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$. $\overline{B}_{y,\varepsilon}$ est donc fermé et borné (donc compact). De plus, Si $z \in \overline{B}_{y,\varepsilon}$, il existe $x \in B_{y,\varepsilon}$ t.q. $|x-z| < \varepsilon$. On a donc $z \in I(x)$. Ceci montre que $\{I(x), x \in B_{y,\varepsilon}\}$ forme un recouvrement ouvert de $\overline{B}_{y,\varepsilon}$. Par compacité, on peut donc en extraire un sous recouvrement fini. Il existe donc $x_1, \ldots, x_n \in B_{y,\varepsilon}$ t.q. $B_{y,\varepsilon} \subset \cup_{i=1}^n I(x_i)$.

(b) Montrer que $\lambda(B_{y,\varepsilon}) \leq \frac{2}{y}\|f\|_1$. [Utiliser la question 2.]

corrigé

En appliquant la question 2 à la famille $\{I(x_i), i \in \{1,\ldots,n\}\}$, il existe $E \subset \{1,\ldots,n\}$ t.q. $I(x_i) \cap I(x_j) = \emptyset$ si $i,j \in E$ $i \neq j$ et $\lambda(B_{y,\varepsilon}) \leq \lambda(\cup_{i=1}^n I(x_i)) \leq 2\sum_{i\in E}\lambda(I(x_i))$. Comme $\lambda(I(x_i)) < \frac{1}{y}\int_{I(x_i)}|f(t)|dt$ et comme $I(x_i) \cap I(x_j) = \emptyset$, si $i,j \in E$ $i \neq j$, on a aussi $\sum_{i\in E}\lambda(I(x_i)) < \frac{1}{y}\int|f(t)|dt$ et donc $\lambda(B_{y,\varepsilon}) \leq \frac{2}{y}\|f\|_1$.

On définit maintenant $f^\star$ de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$f^\star(x) = \sup_{h>0}\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|f(x+t)|dt. \tag{16.8}$$

5. Montrer que $f^\star$ est borélienne et que $\lambda(\{f^\star > y\}) \leq \frac{2}{y}\|f\|_1$, pour tout $y > 0$.

corrigé

$f^\star$ est borélienne (de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) car c'est le "sup" de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On remarque ensuite que $\{f^\star > y\} = \{x \in \mathbb{R},\ f^\star(x) > y\} = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star} B_{y,\frac{1}{n}}$ et que $B_{y,\frac{1}{n}} \subset B_{y,\frac{1}{n+1}}$ (car $f^\star_{\frac{1}{n}} \le f^\star_{\frac{1}{n+1}}$). Par continuité croissante de λ, on a donc $\lambda(\{f^\star > y\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B_{y,\frac{1}{n}}) \le \frac{2}{y}\|f\|_1$.

---

6. Montrer (16.6) si f admet un représentant continu. [cette question n'utilise pas les questions précédentes.]

corrigé

On confond f (qui est dans L^1) avec ce représentant continu. On a alors $\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt \to f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, quand $n \to \infty$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, par continuité de f, il existe $\theta_{x,n} \in]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$ t.q. $\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt = f(\theta_{x,n})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $f(\theta_{x,n}) \to f(x)$, quand $n \to \infty$ (par continuité en x de f).

---

7. Montrer (16.6). [Approcher f, dans L^1 et p.p., par une suite d'éléments de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, notée $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$. On pourra utiliser $(f-f_p)^\star$.]

corrigé

On confond f (qui est dans L^1) avec l'un de ses représentants (de sorte que $f \in \mathcal{L}^1$). Par densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans L^1, il existe une suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $f_p \to f$ dans L^1. Après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut supposer aussi que $f_p \to f$ p.p..

Pour $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}|f(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt| \le |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x) \\ -\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_p(x+t)dt| + (f-f_p)^\star(x).\end{aligned} \tag{16.9}$$

Pour $m \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose :

$$A_{m,p} = \{(f-f_p)^\star > \frac{1}{m}\},\ B_{m,p} = \cap_{q\ge p} A_{m,q} \text{ et } B = \cup_{m\in\mathbb{N}^\star}(\cup_{p\in\mathbb{N}} B_{m,p}).$$

On remarque que, par la question 5, $\lambda(A_{m,p}) \le 2m\|f-f_p\|_1 \to 0$ quand $p \to \infty$ (avec m fixé). On a donc $\lambda(B_{m,p}) \le \inf_{q\ge p}\lambda(A_{m,q}) = 0$. On en déduit, par σ-sous-additivité de λ, que $\lambda(B) = 0$.

On choisit $C \in B(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(C) = 0$ et $f_p(x) \to f(x)$ pour tout $x \in C^c$.

On va maintenant montrer (grâce à (16.9)) que $(f(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt) \to 0$ pour tout $x \in (B\cup C)^c$ (ce qui permet de conclure car $\lambda(B\cup C) = 0$).

Soit donc $x \in (B\cup C)^c$ et soit $\eta > 0$. Comme $x \in C^c$, il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ t.q. $|f(x) - f_p(x)| \le \eta$ pour $p \ge p_1$. Comme $x \in B^c$, $x \in \cap_{m\in\mathbb{N}^\star}(\cap_{p\in\mathbb{N}} B^c_{m,p})$. On choisit $m \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\frac{1}{m} \le \eta$. On a $x \in \cap_{p\in\mathbb{N}} B^c_{m,p} = \cap_{p\in\mathbb{N}} \cup_{q\ge p} A^c_{m,q} \subset \cup_{q\ge p_1} A^c_{m,q}$. Il existe donc $p \ge p_1$ t.q. $x \in A^c_{m,p}$, on en déduit $(f-f_p)^\star(x) \le \frac{1}{m} \le \eta$. Enfin, p étant maintenant fixé, la question 6 donne l'existence de $n_1 \in \mathbb{N}$ t.q. $|f_p(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_p(x+t)dt| \le \eta$ pour $n \ge n_1$. On a donc $|f(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt| \le 3\eta$ pour $n \ge n_1$. Ce qui termine la démonstration.

Corrigé 100 (Convergence vague et convergence etroite)

Soit $(m_n)n \in \mathbb{N}$ une suite de mesures (positives) finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ($d \ge 1$) et m une mesure (positive) finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On suppose que :

– $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to \infty$, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.
– $m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R}^d)$ quand $n \to \infty$.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to \infty$. [On pourra utiliser le fait que φ est limite uniforme d'une suite d'élement de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.]

corrigé

Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\rho \ge 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$ et $\rho(x) = 0$ si $|x| \ge 1$. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on définit ρ_p par $\rho_p(x) = p^d \rho(px)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$, de sorte que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_p(x)dx = 1$ et $\rho(x) = 0$ si $|x| \ge 1/p$. La suite $(\rho_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ s'appelle "suite régularisante" (ou "suite de noyaux régularisants").

Soit $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on définit la suite $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ en posant $\psi_p(x) = \int \psi(y)\rho_p(x-y)dy$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Comme ρ_p et ψ sont des fonctions à support compact, il est clair que ψ_p est aussi une fonction à support compact. Grâce au théorème de dérivabilité sous le signe intégral (théorème 4.10), il est assez facile de voir que ψ_p est indéfiniment dérivable. On a donc $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. Enfin, du fait que ψ est uniformément continue, on déduit que ψ_p converge uniformément (sur $\mathbb{R}^d$) vers ψ quand $p \to \infty$. Plus précisément, en notant $\|\cdot\|_u$ la norme de la convergence uniforme, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$,

$$\|\psi_p - \psi\|_u \le \sup_{z\in\mathbb{R}^d,\, |z|\le 1/p} \|\psi(\cdot + z) - \psi\|_u,$$

dont on déduit bien $\|\psi_p - \psi\|_u \to 0$ quand $p \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. On remarque maintenant que, pour $p \in \mathbb{N}^\star$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \psi dm_n - \int \psi dm = \int (\psi - \psi_p)dm_n + \int \psi_p dm_n - \int \psi_p dm + \int (\psi_p - \psi)dm,$$

on a donc

$$|\int \psi dm_n - \int \psi dm| \le \|\psi_p - \psi\|_u (\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R}^d) + m(\mathbb{R}^d)) \\ +|\int \psi_p dm_n - \int \psi_p dm|.$$

Comme $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R}^d) + m(\mathbb{R}^d) < \infty$ (car $\lim_{n\to\infty} m_n(\mathbb{R}^d) = m(\mathbb{R}^d)$), il existe donc $p_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\int \psi dm_n - \int \psi dm| \le \varepsilon + |\int \psi_{p_0} dm_n - \int \psi_{p_0} dm|.$$

Comme $\psi_{p_0} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, la première hypothèse sur la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne qu'il existe n_0 t.q. $n \ge n_0$ implique $|\int \psi_{p_0} dm_n - \int \psi_{p_0} dm| \le \varepsilon$. on a donc, finalement,

$$n \ge n_0 \Rightarrow |\int \psi dm_n - \int \psi dm| \le 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $\int \psi dm_n \to \int \psi dm$, quand $n \to \infty$, pour tout $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

---

2. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on note B_p la boule fermée de centre 0 et de rayon p (pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$). Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star} \subset C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q., pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $0 \le \varphi_p \le 1$, $\varphi_p = 1$ sur B_p et $\varphi_p \le \varphi_{p+1}$. On utilise cette suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ dans les questions suivantes.

corrigé

Il suffit de prendre φ_p définie ainsi :

$$\begin{array}{l}\varphi_p(x) = 1 \text{ si } x \in B_p,\\ \varphi_p(x) = p + 1 - |x| \text{ si } x \in B_{p+1} \setminus B_p,\\ \varphi_p(x) = 0 \text{ si } x \notin B_{p+1}.\end{array}$$

---

3. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. : $p \geq p_0 \Rightarrow \displaystyle\int (1 - \varphi_p) dm \leq \varepsilon$.

corrigé

On utilise ici le théorème de convergence dominée, la suite $(1 - \varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ converge p.p. vers 0 et est dominée par la fonction constante et égale à 1 (qui est bien une fonction intégrable pour la mesure m). On a donc $\lim_{p\to\infty} \int (1 - \varphi_p) dm = 0$, ce qui donne le résultat demandé.

(b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\int (1 - \varphi_p) dm_n \to \int (1 - \varphi_p) dm$ quand $n \to \infty$.

corrigé

On a $\int (1 - \varphi_p) dm_n = m_n(\mathbb{R}^d) - \int \varphi_p dm_n$. comme $\varphi_p \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a $\int \varphi_p dm_n \to \int \varphi_p dm$ (quand $n \to \infty$). D'autre part, on a $\lim_{n\to\infty} m_n(\mathbb{R}^d) = m(\mathbb{R}^d)$. On a donc finalement, quand $n \to \infty$,

$$\int (1 - \varphi_p) dm_n \to m(\mathbb{R}^d) - \int \varphi_p dm = \int (1 - \varphi_p) dm.$$

(c) Montrer qu'il existe $p_1 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. : $n \in \mathbb{N}$, $p \geq p_1 \Rightarrow \displaystyle\int (1 - \varphi_p) dm_n \leq \varepsilon$.

corrigé

D"après a), il existe p_2 t.q. $\int (1 - \varphi_{p_2}) dm \leq \varepsilon/2$. D'après b), il existe n_0 t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int (1 - \varphi_{p_2}) dm_n \leq \int (1 - \varphi_{p_2}) dm + \varepsilon/2.$$

On a donc

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int (1 - \varphi_{p_2}) dm_n \leq \varepsilon.$$

Comme $(1 - \varphi_p) \leq (1 - \varphi_{p_2})$ si $p \geq p_2$, on a aussi

$$n \geq n_0,\ p \geq p_2 \Rightarrow \int (1 - \varphi_p) dm_n \leq \varepsilon.$$

D"autre part, le théorème de convergence dominée donne (comme en a) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{p\to\infty} \int (1 - \varphi_p) dm_n = 0.$$

Pour tout $n \in 0, \ldots, n_0$, il existe donc $p_{2,n}$ t.q.

$$p \geq p_{2,n} \Rightarrow \int (1 - \varphi_p) dm_n \leq \varepsilon.$$

On choisit donc $p_1 = \max\{p_2, \max_{n=0,\ldots,n_0} p_{2,n}\}$ et on obtient bien $p \in \mathbb{N}^\star$ et :

$$n \in \mathbb{N},\, p \geq p_1 \Rightarrow \int (1-\varphi_p) dm_n \leq \varepsilon.$$

---

4. Montrer que $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to \infty$, pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (on dit alors que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement vers m).

corrigé

Soit $\varphi \in C_b[\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. En écrivant que $\varphi = \varphi\varphi_p + \varphi(1-\varphi_p)$, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$,

$$|\int \varphi dm_n - \int \varphi dm| \leq |\int \varphi\varphi_p dm_n - \int \varphi\varphi_p dm|$$
$$+\|\varphi\|_u \int (1-\varphi_p) dm_n + \|\varphi\|_u \int (1-\varphi_p) dm.$$

Les questions 2a) et 2c) permettent de trouver $p_0 \in \mathbb{N}^\star$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. les deux derniers de la précédente inégalité soient inférieurs à ε pour $p = p_0$ et $n \geq n_0$. Puis, comme $\varphi\varphi_{p_0} \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, il existe n_1 t.q. le premier du membre de droite de la précédente inégalité soit inférieur à ε pour $p = p_0$ et $n \geq n_1$. On a donc finalement

$$n \geq \max\{n_0, n_1\} \Rightarrow |\int \varphi dm_n - \int \varphi dm| \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve la convergence étroite de m_n vers m (quand $n \to \infty$).

---

5. Indiquer brièvement comment obtenir le même résultat (c'est-à-dire le résultat de la question 4) si on remplace "$\mathbb{R}^d$" (dans les hypothèses et dans la question 4) par "Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$".

corrigé

Pour la question 1, on remarque que toute fonction de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions appartenant à $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ (la démonstration, semblable au cas $\Omega = \mathbb{R}^d$ utilise le fait que, si $\varphi \in C_c(\Omega, \mathbb{R})$, la distance entre le support de φ, qui est compact, et le complémentaire de Ω, qui est ouvert, est strictement positive. On rappelle que le support de φ est l'adhérence de l'ensemble des points où φ est non nulle).

Pour la question 2, on construit (avec la fonction "distance") une suite φ_p comme demandée en remplaçant simplement B_p par $B_p \cap \{x \in \Omega,\, d(x, \Omega^c) \geq 1/p\}$, avec $d(x, \Omega^c) = \max\{|x-y|,\, y \in \Omega^c\}$.

Pour les questions 3 et 4, on remplace simplement $\mathbb{R}^d$ par Ω.
