12.2 Exercices du chapitre 2

12.2.1 Tribus

Corrigé 9 (Caractérisation d'une tribu)
Soit E un ensemble.

1. Soit T une partie de $\mathcal{P}(E)$ stable par union dénombrable, stable par passage au complémentaire et t.q. $\emptyset \in T$. Montrer que T est une tribu, c'est-à-dire qu'elle vérifie aussi $E \in T$ et qu'elle est stable par intersection dénombrable.

———————————————**corrigé**———————————————

   - $E \in T$ car $E = \emptyset^c$ et que T est stable par passage au complémentaire.
   - T est stable par intersection dénombrable car, si $(A_n) \subset T$, on a $(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \in T$ (car T est stable par passage au complémentaire et par union dénombrable) et donc $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$ (car T est stable par passage au complémentaire).

———————————————————————————————————

2. L'ensemble des parties finies de E est-il une tribu ?

———————————————**corrigé**———————————————

   - Si E est fini, l'ensemble des parties finies de E est une tribu, c'est la tribu $\mathcal{P}(E)$.
   - Si E est infini, l'ensemble des parties finies de E n'est pas une tribu, car il n'est pas stable par passage au complémentaire (le complémentaire d'une partie finie est infinie...).

———————————————————————————————————

Corrigé 10 (Tribu engendrée)
Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.

———————————————**corrigé**———————————————

Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur I (I est un ensemble quelconque). On pose $T = \{A \subset E;$ $A \in T_i$ pour tout $i \in I\}$ (T est bien l'intersection des tribus T_i, $i \in I$). On montre que T est une tribu :

   - $\emptyset \in T$ car $\emptyset \in T_i$ pour tout $i \in I$.
   - T est stable par complémentaire car, si $A \subset T$, on a $A \in T_i$ pour tout $i \in I$, donc $A^c \in T_i$ pour tout $i \in I$ (car T_i est stable par passage au complémentaire), donc $A^c \in T$.
   - T est stable par union dénombrable car, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, on a $A_n \in T_i$ pour tout $i \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T_i$ pour tout $i \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$ (car T_i est stable par union dénombrable), donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$,

d'après l'exercice précédent, on en déduit que T est une tribu.

———————————————————————————————————

2. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On note $T_{\mathcal{A}}$ l'intersection de toutes les tribus sur E contenant $\mathcal{A}$ (une partie de E appartient donc à $T_{\mathcal{A}}$ si et seulement si elle appartient à toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$, on remarquera qu'il y a toujours au moins une tribu contenant $\mathcal{A}$, c'est la tribu $\mathcal{P}(E)$). Montrer que $T_{\mathcal{A}}$ est la plus petite des tribus contenant $\mathcal{A}$ (c'est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$).

—————————————————————**corrigé**—————————————————————

D'après la question précédente, $T_{\mathcal{A}}$ est bien une tribu. La définition de $T_{\mathcal{A}}$ donne que toute tribu contenant $\mathcal{A}$ doit contenir $T_{\mathcal{A}}$. $T_{\mathcal{A}}$ est donc la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$.

———

3. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ et $T_{\mathcal{A}}$, $T_{\mathcal{B}}$ les tribus engendrées par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Montrer que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ alors $T_{\mathcal{A}} \subset T_{\mathcal{B}}$.

—————————————————————**corrigé**—————————————————————

$T_{\mathcal{B}}$ est une tribu contenant $\mathcal{B}$, donc contenant $\mathcal{A}$. Donc $T_{\mathcal{A}} \subset T_{\mathcal{B}}$.

———

Corrigé 11 (Exemples de tribus)

1. Tribu trace

   (a) Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble E et $F \subset E$. Montrer que $\mathcal{T}_F = \{A \cap F, A \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F (tribu trace de $\mathcal{T}$ sur F).

   —————————————————————**corrigé**—————————————————————

   - $\emptyset \in \mathcal{T}_F$ car $\emptyset = \emptyset \cap F$ et $\emptyset \in \mathcal{T}$.
   - Soit $A \in \mathcal{T}_F$. Il existe $B \in \mathcal{T}$ t.q. $A = B \cap F$. On a donc $F \setminus A = (E \setminus B) \cap F \in \mathcal{T}_F$ car $E \setminus B \in \mathcal{T}$. $\mathcal{T}_F$ est donc stable par passage au complémentaire.
   - Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $B_n \in T$ t.q. $A_n = B_n \cap F$. On a donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \cap F \in \mathcal{T}_F$ car $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}$. $\mathcal{T}_F$ est donc stable par union dénombrable.

   Ceci est suffisant pour dire que $\mathcal{T}_F$ est une tribu sur F.

   ———

   (b) Si E est un espace topologique et $\mathcal{T} = \mathcal{B}(E)$ ($\mathcal{B}(E)$ est la tribu borélienne de E), montrer que la tribu trace sur F, notée T_F, est la tribu engendrée par la topologie trace sur F (tribu borélienne de F, notée $\mathcal{B}(F)$). [Montrer que $\mathcal{B}(F) \subset T_F$. Pour montrer que $T_F \subset \mathcal{B}(F)$, considérer $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(E);\ A \cap F \in \mathcal{B}(F)\}$ et montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu (sur E) contenant les ouverts de E.] Si F est un borélien de E, montrer que T_F est égale à l'ensemble des boréliens de E contenus dans F.

   —————————————————————**corrigé**—————————————————————

   On note $\mathcal{O}_F$ l'ensemble des ouverts de F, et $\mathcal{O}_E$ l'ensemble des ouverts de E. Par définition de la topologie trace, $\mathcal{O}_F = \{O \cap F, O \in \mathcal{O}_E\}$.

   Comme $\mathcal{O}_E \subset \mathcal{B}(E)$, on a $\mathcal{O}_F \subset T_F = \{B \cap F, B \in \mathcal{B}(E)\}$ (Noter que $T_F = \mathcal{B}(E)_F$, avec les notations de la question précédente). On en déduit que $\mathcal{B}(F) \subset T_F$ car T_F est une tribu sur F contenant $\mathcal{O}_F$ qui engendre $\mathcal{B}(F)$.

On montre maintenant que $T_F \subset \mathcal{B}(F)$. On pose $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(E);\ A \cap F \in \mathcal{B}(F)\}$. $\emptyset \in \mathcal{C}$ car $\emptyset \cap F = \emptyset \in \mathcal{B}(F)$. $\mathcal{C}$ est stable par passage au complémentaire car, si $A \in \mathcal{C}$, on a $(E \setminus A) \cap F = F \setminus A = F \setminus (A \cap F) \in \mathcal{B}(F)$, donc $(E \setminus A) \in \mathcal{C}$. Enfin, pour montrer que $\mathcal{C}$ est stable par union dénombrable, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$, on a $(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap F = \cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap F) \in \mathcal{B}(F)$, ce qui donne $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$ et la stabilité de $\mathcal{C}$ par union dénombrable. $\mathcal{C}$ est donc une tribu. Il est clair que $\mathcal{O}_E \subset \mathcal{C}$ car si $O \in \mathcal{O}_E$, on a $O \cap F \in \mathcal{O}_F \subset \mathcal{B}(F)$. La tribu $\mathcal{C}$ contient $\mathcal{O}_E$, ce qui prouve que $\mathcal{C}$ contient $\mathcal{B}(E)$ et donc que $A \cap F \in \mathcal{B}(F)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$. Ceci donne exactement $T_F \subset \mathcal{B}(F)$. On a bien montré finalement que $T_F = \mathcal{B}(F)$ (on rappelle que $T_F = \mathcal{B}(E)_F$, avec les notations de la question précédente).

On suppose maintenant que F est un borélien de E, c'est-à-dire que $F \in \mathcal{B}(E)$. On a alors $T_F \subset \mathcal{B}(E)$ (car $A \cap F \in \mathcal{B}(E)$ si $A \in \mathcal{B}(E)$). Puis, soit $A \subset F$ t.q. $A \in \mathcal{B}(E)$, on peut écrire $A = A \cap F$, donc $A \in T_F$. On a bien montré que $T_F = \{A \subset F;\ A \in \mathcal{B}(E)\}$.

---

2. Soit E un ensemble infini et $S = \{\{x\}, x \in E\}$. Déterminer la tribu engendrée par S (distinguer les cas E dénombrable et non dénombrable).

———————————————**corrigé**———————————————

On note $T(S)$ la tribu engendrée par S.

- On suppose que E est au plus dénombrable (c'est-à-dire dire fini ou dénombrable). D'après la stabilité de $T(S)$ par union dénombrable, la tribu $T(S)$ doit contenir toutes les parties au plus dénombrables. Comme toutes les parties de E sont au plus dénombrables, on en déduit $T(S) = \mathcal{P}(E)$.
- On suppose maintenant que E est infini non dénombrable. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de E au plus dénombrables et $\mathcal{B} = \{A^c,\ A \in \mathcal{A}\}$. D'après la stabilité de $T(S)$ par union dénombrable, la tribu $T(S)$ doit contenir $\mathcal{A}$. Par stabilité de $T(S)$ par passage au complémentaire, $T(S)$ doit aussi contenir $\mathcal{B}$.

  on va montrer maintenant que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est une tribu (on en déduit que $T(S) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$). On a $\emptyset \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ et il est clair que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire (car $A \in \mathcal{A}$ implique $A^c \in \mathcal{B}$ et $A \in \mathcal{B}$ implique $A^c \in \mathcal{A}$). Enfin, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, on distingue 2 cas :

  1er cas. Si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

  2eme cas. Si il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $A_n \in \mathcal{B}$ on a alors $A_n^c \in \mathcal{A}$, donc A_n^c est au plus dénombrable et $(\cup_{p\in\mathbb{N}} A_p)^c = \cap_{p\in\mathbb{N}} A_p^c \subset A_n^c$ est aussi au plus dénombrable,ce qui donne $(\cup_{p\in\mathbb{N}} A_p)^c \in \mathcal{A}$ et $\cup_{p\in\mathbb{N}} A_p \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

  On a bien montré que $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Ce qui prouve la stabilité par union dénombrable de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Finalement, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est donc une tribu contenant S et contenu dans $T(S)$, ceci donne $T(S) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Corrigé 12 (Tribu image)

Soient E et F des ensembles. Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ (resp. $\mathcal{P}(F)$) on note $T(\mathcal{A})$ la tribu de E (resp. F) engendrée par $\mathcal{A}$.
Soit $f\ : E\ \to F$ une application.

1. Montrer que si $\mathcal{T}'$ est une tribu sur F, alors $f^{-1}(\mathcal{T}') = \{f^{-1}(B);\ B \in \mathcal{T}'\}$ est une tribu sur E (tribu image réciproque).

   ———————————————**corrigé**———————————————

   On démontre que $f^{-1}(\mathcal{T}')$ est une tribu sur E en remarquant que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $E \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(F\setminus A)$ (pour tout $A \subset F$) et $f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}}f^{-1}(A_n)$ (pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(F)$).

   ——————————————————————————————

2. Montrer que si $\mathcal{T}$ est une tribu sur E, alors $\mathcal{T}' = \{B \subset F;\ f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F (tribu image directe).

   ———————————————**corrigé**———————————————

   Ici aussi, on montre que $\mathcal{T}'$ est une tribu sur F en remarquant que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(F \setminus A) = E\setminus f^{-1}(A)$ (pour tout $A \subset F$) et $f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}}f^{-1}(A_n)$ (pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(F)$).

   Noter que, en général, $\{f(B),\ B \in \mathcal{T}\}$ n'est pas une tribu sur F (par exemple, si f est non surjective, $F \notin \{f(B),\ B \in \mathcal{T}\}$).

   ——————————————————————————————

3. Montrer que pour tout ensemble $\mathcal{C}$ de parties de F on a : $T(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(T(\mathcal{C}))$. [*Montrer que* $T(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(T(\mathcal{C}))$. *Puis, pour montrer que* $f^{-1}(T(\mathcal{C})) \subset T(f^{-1}(\mathcal{C}))$, *montrer que* $T = \{G \subset F;\ f^{-1}(G) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$ *est une tribu contenant* $\mathcal{C}$.]

   ———————————————**corrigé**———————————————

   $f^{-1}(T(\mathcal{C}))$ est une tribu sur E (d'après la première question) contenant $f^{-1}(\mathcal{C})$ (car $T(\mathcal{C}) \supset \mathcal{C}$), elle contient donc $T(f^{-1}(\mathcal{C}))$, ce qui donne $f^{-1}(T(\mathcal{C})) \supset T(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

   Pour montrer l'inclusion inverse, c'est-à-dire $f^{-1}(T(\mathcal{C})) \subset T(f^{-1}(\mathcal{C}))$. On pose $T = \{G \subset F;\ f^{-1}(G) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$. On montre d'abord que T est une tribu :

   - $\emptyset \in T$ car $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$
   - T est stable par passage au complémentaire car, si $A \in T$, on a $f^{-1}(A) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$ et $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$, donc $(F \setminus A) \in T$.
   - T est stable par union dénombrable car, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, on a $f^{-1}(A_n) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}}f^{-1}(A_n) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$, donc $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n \in T$.

   On a bien montré que T est une tribu. Il est immédiat que $T \supset \mathcal{C}$ (car $f^{-1}(B) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$ pour tout $B \in \mathcal{C}$). On en déduit que T contient $T(\mathcal{C})$, c'est-à-dire que $f^{-1}(B) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$ pour tout $B \in T(\mathcal{C})$. Ceci signifie exactement que $f^{-1}(T(\mathcal{C})) \subset T(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

   Les 2 inclusions nous donnent bien $f^{-1}(T(\mathcal{C})) = T(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

   ——————————————————————————————

Corrigé 13 (π-système, λ-système)
Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu si et seulement si $\mathcal{F}$ est un π-système (c'est-à-dire stable par intersection finie) et un λ-système (c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable croissante, $\Omega \in \mathcal{F}$ et $A \setminus B \in \mathcal{F}$ si $A, B \in \mathcal{F}$ avec $B \subset A$).

2. On suppose que $\mathcal{F}$ est un λ-système. Soit $C \in \mathcal{F}$. On pose $\mathcal{G} = \{B \subset \Omega \text{ t.q. } C \cap B \in \mathcal{F}\}$. Montrer que $\mathcal{G}$ est un λ-système.

———————————————**corrigé**———————————————

En attente

——————————————————————————————————

Corrigé 14 (Tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$)

On note T la tribu (sur $\mathbb{R}^2$) engendrée par $\{A \times B;\ A,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On va montrer ici que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion au plus dénombrable de produits d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. [S'inspirer d'une démonstration analogue faite pour $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}^2$.] En déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset T$.

———————————————**corrigé**———————————————

On s'inspire ici de la démonstration du lemme 2.1 (on peut reprendre aussi la démonstration de l'exercice 15).

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $x = (x_1, x_2)^t \in O$, il existe $r > 0$ t.q. $]x_1 - r, x_1 + r[\times]x_2 - r, x_2 + r[\subset O$. Comme les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$, on peut trouver $y_1 \in \mathbb{Q}\cap]x_1 - r, x_1[$, $z_1 \in \mathbb{Q}\cap]x_1, x_1 + r[$, $y_2 \in \mathbb{Q}\cap]x_2 - r, x_2[$ et $z_2 \in \mathbb{Q}\cap]x_2, x_2 + r[$. On a donc $x \in]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[\subset O$.

On note alors $I = \{(y_1, z_1, y_2, z_2) \in \mathbb{Q}^4;\ ]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[) \subset O\}$. Pour tout $x \in O$, il existe donc $(y_1, z_1, y_2, z_2) \in I$ t.q. $x \in]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[$. On en déduit que

$$O = \cup_{(y_1,z_1,y_2,z_2)\in I}]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[.$$

Comme I est au plus dénombrable (car $\mathbb{Q}^4$ est dénombrable), on en déduit que $O \in T$. On a ainsi montré que T est une tribu contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^2$, et donc contenant la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$). Donc, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset T$.

——————————————————————————————————

2. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$ et $T_1 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que T_1 est une tribu (sur $\mathbb{R}$) contenant les ouverts (de $\mathbb{R}$). En déduire que $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

———————————————**corrigé**———————————————

- $\emptyset \in T_1$ car $A \times \emptyset = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
- On montre ici que T_1 est stable par passage au complémentaire.

  Soit $B \in T_1$, on a donc $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \times B^c = A \times (\mathbb{R} \setminus B) = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B)$. Or, $(A \times \mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (car A et $\mathbb{R}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$), on a donc $(A \times \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. D'autre part, $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (car $B \in T_1$). Donc, $A \times B^c = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Ce qui prouve que $B^c \in T_1$ et donc que T_1 est stable par passage au complémentaire.
- Enfin, T_1 est stable par union dénombrable. En effet, si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$, on a $A \times (\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} A \times B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (car $A \times B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Donc, $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in T_1$.

On a donc montré que T_1 est une tribu, il reste à montrer que T_1 contient les ouverts de $\mathbb{R}$.

Soit B un ouvert de $\mathbb{R}$. On a donc $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et, comme $A \times B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on a $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On a donc $B \in T_1$.

T_1 est donc une tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}$, donc contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Donc, $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

La conséquence de cette question est donc :

$$A \text{ ouvert de } \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2). \tag{12.4}$$

---

3. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $T_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

corrigé

On commence par remarquer que la question précédente donne que T_2 contient les ouverts de $\mathbb{R}$. En effet, soit A un ouvert de $\mathbb{R}$, la propriété (12.4) donne $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, et donc $A \in T_2$.

On montre maintenant que T_2 est une tribu (on en déduira que $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$).

- $\emptyset \in T_2$ car $\emptyset \times B = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
- On montre ici que T_2 est stable par passage au complémentaire.

  Soit $A \in T_2$, on a $A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A^c \times B = (\mathbb{R} \times B) \setminus (A \times B)$. La propriété (12.4) donne $(\mathbb{R} \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ car $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. D'autre part, $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (car $A \in T_2$). Donc, $A^c \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Ce qui prouve que $A^c \in T_2$ et donc que T_2 est stable par passage au complémentaire.
- Enfin, T_2 est stable par union dénombrable. En effet, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$, on a $(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \times B = \cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (car $A_n \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Donc, $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T_2$.

T_2 est donc une tribu (sur $\mathbb{R}$) contenant les ouverts de $\mathbb{R}$, ce qui prouve que $T_2 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc, finalement, $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

---

4. Montrer que $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (et donc que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$).

corrigé

La question précédente donne :

$$A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

On a donc $\{A \times B;\ A,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On en déduit $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Avec la question 1, on a finalement $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Corrigé 15 (Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^N$)

1. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$ est égale à celle engendrée par l'ensemble de toutes les boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$. [On pourra montrer d'abord que tout ouvert de $\mathbb{R}^N$ est réunion dénombrable de boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$.]

corrigé

Soit T la tribu engendrée par l'ensemble de toutes les boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$. Comme les boules ouvertes sont des ouverts, on a $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

On montre maintenant l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset T$. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ t.q. $B(x,r) \subset O$ (où $B(x,r)$ déisgne la boule ouverte de centre x et rayon r). Comme les rationnels sont denses $\mathbb{R}$, on peut donc trouver $y \in \mathbb{Q}^N$ et $s \in \mathbb{Q}_+^\star = \{t \in \mathbb{Q};\ t > 0\}$, t.q. $x \in B(y,s) \subset O$. On note alors $I = \{(y,s) \in \mathbb{Q}^N \times \mathbb{Q}_+^\star;\ B(y,s) \subset O\}$. On a alors $O = \cup_{(y,s)\in I} B(y,s)$. Comme I est au plus dénombrable (car $\mathbb{Q}^{N+1}$ est dénombrable), on en déduit que $O \in T$ et donc que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset T$ (car T est une tribu contenant tous les ouverts).

Le raisonnement précédent montre même que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est aussi la tribu engendrée par l'ensemble des boules ouvertes à rayons rationnels et centre à coordonnées rationnelles.

---

2. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$ est égale à celle engendrée par l'ensemble des produits d'intervalles ouverts à extrémités rationnelles.

———————————————**corrigé**———————————————

On reprend le même raisonnement que dans la question précédente en remplaçant $B(x,r)$ par $P(x,r) = \prod_{i=1}^N]x_i - r, x_i + r[$, avec $x = (x_1, \ldots, x_N)^t$.

---

3. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles $]a,b]$ où $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

———————————————**corrigé**———————————————

Soit $\mathcal{C} = \{]a,b],\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ et $T(\mathcal{C})$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Comme $]a,b] = \cap_{n>0}]a, b + \frac{1}{n}[$, on voit que $]a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Donc, on a $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $T(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On montre maintenant l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C})$. Soit $I =]a,b[$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On peut écrire $I = \cup_{n \ge n_0}]a, b - \frac{1}{n}]$, avec n_0 t.q. $\frac{1}{n_0} < b - a$. On en déduit que $I \in T(\mathcal{C})$. Puis, comme tout ouvert non vide peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts à extrémités finies (voir le lemme 2.1 page 20), on obtient que tout ouvert appartient à $T(\mathcal{C})$. Ceci permet de conclure que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C})$ et finalement que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = T(\mathcal{C})$.

---

4. Soit S un sous ensemble dense de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est engendrée par la classe des boules ouvertes (ou bien fermées) telles que les coordonnées du centre et le rayon appartiennent S.

———————————————**corrigé**———————————————

On reprend le même raisonnement que dans la première question en remplaçant $\mathbb{Q}^N$ par S^N (qui est dense dans $\mathbb{R}^N$) et $\mathbb{Q}_+^\star$ par $S_+^\star = \{s \in S;\ s > 0\}$ (qui est dense dans $\mathbb{R}_+^\star$).

Corrigé 16

Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre (cf. définition 2.4) si et seulement si $\mathcal{A}$ vérifie les deux propriétés suivantes :

   (a) $E \in \mathcal{A}$,
   (b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$.

———————————————**corrigé**———————————————

- On suppose que $\mathcal{A}$ est une algèbre. Il est clair que (a) est vérifiée. Pour montrer (b) il suffit d'utiliser la stabilité par intersection finie et par passage au complémentaire, cela donne bien que $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$ si $A, B \in \mathcal{A}$.
- On suppose maintenant que $\mathcal{A}$ vérifie (a) et (b).

  On a alors $\emptyset = E \setminus E \in \mathcal{A}$, et donc $\emptyset, E \in \mathcal{A}$.

  On remarque ensuite que, grâce à (b), $A^c = E \setminus A \in E$ si $A \in \mathcal{A}$. On a donc la stabilité de $\mathcal{A}$ par passage au complémentaire.

  Soit maintenant $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. On a $A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus A_2^c$, on en déduit que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ par (b) et la stabilité de $\mathcal{A}$ par passage au complémentaire. Une récurrence sur n donne alors que $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie.

  Enfin, la stabilité de $\mathcal{A}$ par union finie découle de la stabilité de $\mathcal{A}$ par intersection finie et par passage au complémentaire car $(\cup_{p=0}^n A_p)^c = \cap_{p=0}^n A_p^c$.

  On a bien montré que $\mathcal{A}$ est une algèbre.

---

2. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille d'algèbres (sur E). Montrer que $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{P}(E);\ A \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I\}$ est encore une algèbre.

   ————————————————**corrigé**————————————————

   On peut montrer que $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ est une algèbre en utilisant diretement la définition d'une algèbre. Onb peut aussi le montrer en utilisant la première question, ce que nous faisons ici. On montre donc que $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ vérifie (a) et (b) :

   - $E \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ car $E \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I$.
   - Soit $A, B \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$. Pour tout $i \in I$, on a $A, B \in \mathcal{A}_i$. On en déduit $A \setminus B \in \mathcal{A}_i$ (car $\mathcal{A}_i$ est une algèbre) et donc $A \setminus B \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$.

   On a bien montré que $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ est une algèbre.

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, la deuxième question permet donc de définir l'algèbre engendrée par $\mathcal{C}$ comme l'intersection de toutes les algèbres sur E contenant $\mathcal{C}$.

Corrigé 17

Soit E un ensemble et $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de E. On suppose que $\emptyset, E \in \mathcal{C}$, que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que le complémentaire de tout élément de $\mathcal{C}$ est une union finie disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire :

$$C \in \mathcal{C} \Rightarrow \text{ il existe } n \in \mathbb{N}^\star \text{ et } C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C} \text{ t.q. } C^c = \cup_{p=1}^n C_p \text{ et } C_p \cap C_q = \emptyset \text{ si } p \neq q.$$

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $\mathcal{C}$. Une partie de E est donc un élément de $\mathcal{B}$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(A_p)_{p=1,\ldots,n} \subset \mathcal{C}$ t.q. $A_p \cap A_q = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \cup_{p=1}^n A_p$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie et par passage au complémentaire.

   ————————————————**corrigé**————————————————

   On montre tout d'abord la stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie. Soit $A, B \in \mathcal{B}$. Il existe $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ et $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{C}$ t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, si $i \neq j$, $A = \cup_{i=1}^n A_i$ et $B = \cup_{j=1}^m B_j$.

On a alors $A \cap B = (\cup_{i=1}^n A_i) \cap (\cup_{j=1}^m B_j) = \cup_{i=1}^n \cup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$. Comme $A_i \cap B_j \in \mathcal{C}$ (car $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie) pour tout i, j et que $(A_i \cap B_j) \cap (A_k \cap B_l) = \emptyset$ si $(i, j) \neq (k, l)$, on en déduit que $A \cap B \in \mathcal{B}$.

Une récurrence sur n donne alors la stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie.

On montre maintenant la stabilité de $\mathcal{B}$ par passage au complémentaire. Soit $A \in \mathcal{B}$. Il existe $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $A = \cup_{i=1}^n A_i$. On a alors $A^c = \cap_{i=1}^n A_i^c$. Comme A_i^c est une réunion finie disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$, on a bien $A_i^c \in \mathcal{B}$. La stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie donne alors que $A^c \in \mathcal{B}$. On a donc bien montré la stabilité de $\mathcal{B}$ par passage au complémentaire.

---

2. Montrer que l'algèbre engendrée par $\mathcal{C}$ est égale à $\mathcal{B}$.

———————————————**corrigé**———————————————

On note $\mathcal{A}$ l'agèbre engendrée par $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{A}$ est stable par union finie et contient $\mathcal{C}$, il est clair que $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ contient $\mathcal{C}$, pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre (car $\mathcal{A}$ est l'intersection de toutes les algèbres contenant $\mathcal{C}$). On montre donc maintenant que $\mathcal{B}$ est une algèbre.

Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre, on montre que $\mathcal{B}$ vérifie les quatre propriétés d'une algèbre.

- $E, \emptyset \in \mathcal{B}$ car $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ et $E, \emptyset \in \mathcal{C}$.
- La question précédente montre que $\mathcal{B}$ est stable par par intersection finie et par passage au complémentaire.
- La stabilité de $\mathcal{B}$ par union finie découle facilement de la stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie et par passage au complémentaire, car $\cup_{i=1}^n A_i = (\cap_{i=1}^n A_i^c)^c$.

On a bien montré que $\mathcal{B}$ est une algèbre. Comme $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$, on a donc $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ et finalement $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Corrigé 18

Soit E un ensemble. Pour $\Sigma \subset \mathcal{P}(E)$, on dit que Σ est une classe monotone (sur E) si Σ vérifie les deux propriétés suivantes (de stabilité par union croissante dénombrable et par intersection décroissante dénombrable) :

- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$,
- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

1. Soit $\Sigma \subset \mathcal{P}(E)$. Montrer que Σ est une tribu si et seulement si Σ est une classe monotone et une algèbre (cf. exercice 2.9).

———————————————**corrigé**———————————————

- Si Σ est une tribu, Σ est stable par union dénombrable et intersection dénombrable. On en déduit immédiatement que Σ est une algèbre et une classe monotone.
- On suppose maintenant que Σ est une algèbre et une classe monotone. Comme Σ est une algèbre, pour montrer que Σ est une tribu, il suffit de montrer que Σ est stable par union dénombrable.

Soit donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ et $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On veut montrer que $A \in \Sigma$. On remarque que $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ avec $B_n = \cup_{p=0}^{n} A_n$. Comme Σ est une algèbre, on a $B_n \in \Sigma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, comme Σ est de stable par union croissante (noter que $B_n \subset B_{n+1}$) dénombrable, on en déduit que $A \in \Sigma$. On a bien montré que Σ est stable par union dénombrable et donc que Σ est une tribu.

Noter que l'hypothèse de stabilité de Σ par intersection décroissante dénombrable n'a pas été utilisé. Elle sera utile à la question 4.

---

2. Donner un exemple, avec $E = \mathbb{R}$, de classe monotone qui ne soit pas une tribu.

——————————**corrigé**——————————

Il y a beaucoup d'exemples de classes monotones qui ne sont pas des tribus. En voici un : $\Sigma = \{\mathbb{R}\}$.

---

3. Soit $(\Sigma_i)_{i\in I}$ une famille de classes monotones (sur E). Montrer que $\cap_{i\in I}\Sigma_i = \{A \in \mathcal{P}(E);\ A \in \Sigma_i$ pour tout $i \in I\}$ est encore une classe monotone.

——————————**corrigé**——————————

- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \cap_{i\in I}\Sigma_i$ t.q. $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, pour tout $i \in I$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_i$ et donc, puisque Σ_i est une classe monotone, $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma_i$. On en déduit que $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \cap_{i\in I}\Sigma_i$.
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \cap_{i\in I}\Sigma_i$ t.q. $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, pour tout $i \in I$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_i$ et donc, puisque Σ_i est une classe monotone, $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma_i$. On en déduit que $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \cap_{i\in I}\Sigma_i$.

Ceci montre bien que $\cap_{i\in I}\Sigma_i$ est une classe monotone.

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, cette question permet donc de définir la classe monotone engendrée par $\mathcal{C}$ comme l'intersection de toutes les classes monotones sur E contenant $\mathcal{C}$.

4. (Lemme des classes monotones) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur E. On note Σ la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}$ et on note T la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

   (a) Montrer que $\Sigma \subset T$.

   ——————————**corrigé**——————————

   Σ est l'intersection de toutes les classes monotones sur $\mathcal{A}$. Une tribu étant aussi une classe monotone, la tribu T (engendrée par $\mathcal{A}$) est donc une classe monotone contenant $\mathcal{A}$. On en déduit que $\Sigma \subset T$.

   (b) Soit $A \subset E$. On pose $\Sigma_A = \{B \subset E;\ A \setminus B \in \Sigma$ et $B \setminus A \in \Sigma\}$. Montrer que Σ_A est une classe monotone.

   ——————————**corrigé**——————————

   - Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_A$, $B_n \subset B_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. On va montrer que $B \in \Sigma_A$.

     On a $A \setminus B = A \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \cap_{n\in\mathbb{N}}(A \setminus B_n)$. La suite $(A \setminus B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de Σ. Comme Σ est une classe monotone, on en déduit $A \setminus B = \cap_{n\in\mathbb{N}}(A \setminus B_n) \in \Sigma$.

On montre aussi que $B \setminus A \in \Sigma$. En effet, $B \setminus A = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus A = \cup_{n\in\mathbb{N}}(B_n \setminus A) \in \Sigma$ par la stabilité de Σ par union croissante dénombrable.

On a donc bien montré que $B \in \Sigma_A$. Ce qui donne la stabilité de Σ par union croissante dénombrable.

- De manière analogue, on va montrer la stabilité de Σ par intersection décroissante dénombrable. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_A$, $B_n \supset B_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $B = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

  Comme $A \setminus B = \cup_{n\in\mathbb{N}}(A \setminus B_n)$, on obtient $A \setminus B \in \Sigma$ en utilisant la stabilité de Σ par union croissante dénombrable.

  Comme $B \setminus A = \cap_{n\in\mathbb{N}}(B_n \setminus A)$, on obtient $B \setminus A \in \Sigma$ en utilisant la stabilité de Σ par intersection décroissante dénombrable.

  On a donc $B \in \Sigma_A$. Ce qui donne la stabilité de Σ par intersection décroissante dénombrable.

On a bien montré que Σ_A est une classe monotone.

(c) (Question plus difficile.) Montrer que Σ est une algèbre. [Utiliser la question (b) et la première question de l'exercice 2.9.] En déduire que $T = \Sigma$.

corrigé

Pour montrer que Σ est une algèbre, il suffit de montrer que Σ vérifie les propriétés (a) et (b) de la première question de l'exercice 2.9. Il est immédiat que la propriété (a) est vérifiée car $E \in \mathcal{A} \in \Sigma$. Pour montrer (b), on utilise la classe monotone Σ_A définie à la question 4 pour $A \subset E$.

Soit $A \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est une algèbre, on a donc $\mathcal{A} \subset \Sigma_A$. La classe monotone Σ_A contient $\mathcal{A}$, elle contient donc Σ qui est l'intersection de toutes les classes monotones contenant $\mathcal{A}$. On a donc :

$$A \in \mathcal{A},\ B \in \Sigma \Rightarrow B \in \Sigma_A. \tag{12.5}$$

On remarque maintenant que, pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on a :

$$A \in \Sigma_B \Leftrightarrow B \in \Sigma_A.$$

On déduit donc de (12.5) :

$$A \in \mathcal{A},\ B \in \Sigma \Rightarrow A \in \Sigma_B.$$

Si $B \in \Sigma$, la classe monotone Σ_B contient donc $\mathcal{A}$. Elle contient alors aussi Σ (qui est l'intersection de toutes les classes monotones sur E contenant $\mathcal{A}$). On a donc montré :

$$B \in \Sigma,\ A \in \Sigma \Rightarrow A \in \Sigma_B.$$

On en déduit que $A \setminus B \in \Sigma$ si $A, B \in \Sigma$.

On a bien montré que Σ vérifie la propriété (b) de la première question de l'exercice 2.9 et donc que Σ est une algèbre.

Pour conclure, on remarque Σ est une classe monotone et une algèbre. C'est donc une tribu (par la question 1) contenant $\mathcal{A}$. Elle contient donc T (qui est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$) et on a bien, finalement, $\Sigma = T$.

Corrigé 19 (Caractérisation de la tribu engendrée)

Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie si $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{A}$ est stable par différence si :

$$A, B \in \mathcal{A},\ B \subset A \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}.$$

On dit que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable disjointe si :

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A_n \cap A_m = \emptyset \text{ pour } n \neq m \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$.

1. On note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des parties de $\mathcal{P}(E)$ stables par différence et stables par union dénombrable disjointe. Montrer qu'il existe $\mathcal{D} \in \mathcal{Z}$ t.q. $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ et :

$$\mathcal{A} \in \mathcal{Z},\ \mathcal{C} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{D} \subset \mathcal{A}.$$

———————————————**corrigé**———————————————

On note $\mathcal{Z}_r$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{Z}$ contenant $\mathcal{C}$. On remarque tout d'abord que $\mathcal{Z}_r \neq \emptyset$ car $\mathcal{P}(E) \in \mathcal{Z}_r$. Puis, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des parties de E appartenant à tous les éléments de $\mathcal{Z}_r$ (c'est-à-dire que, pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on a $A \in \mathcal{D}$ si, pour tout $\mathcal{B} \in \mathcal{Z}_r$, $A \in \mathcal{B}$).

Il est facile de voir que $\mathcal{D}$ est stable par différence, stable par union dénombrable disjointe et que $\mathcal{D}$ contient $\mathcal{C}$ (car tous les éléments de $\mathcal{Z}_r$ vérifient ces trois propriétés). Enfin, $\mathcal{A} \in \mathcal{Z}_r \Rightarrow \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$, ce qui est bien la propriété demandée.

———————————————————————————————

Dans la suite, on note toujours $\mathcal{D}$ cette partie de $\mathcal{P}(E)$. On suppose maintenant que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que $E \in \mathcal{C}$.

2. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on note $\mathcal{D}_A = \{D \in \mathcal{D} \text{ t.q. } A \cap D \in \mathcal{D}\}$.

   (a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $\mathcal{D}_A$ est stable par union dénombrable disjointe et stable par différence.

   ———————————————**corrigé**———————————————

   Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_A$ avec $D_n \cap D_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On va montrer que $\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}_A$. On remarque tout d'abord que $\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$ car $D_n \in \mathcal{D}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe. Puis, $A \cap (\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} (D_n \cap A) \in \mathcal{D}$ car $D_n \cap A \in \mathcal{D}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(D_n \cap A) \cap (D_m \cap A) = \emptyset$, si $n \neq m$, et $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe. On a donc montré que $\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}_A$. Ce qui prouve que $\mathcal{D}_A$ est stable par union dénombrable disjointe.

   Soit maintenant $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_A$, avec $D_1 \subset D_2$. On va montrer que $D_2 \setminus D_1 \in D_{\mathcal{A}}$. Pour cela, on remarque que $D_2 \setminus D_1 \in \mathcal{D}$ car $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}$ est stable par différence. Puis, $A \cap (D_2 \setminus D_1) = (A \cap D_2) \setminus (A \cap D_1) \in \mathcal{D}$ car $A \cap D_1$, $A \cap D_2 \in D$, $(A \cap D_1) \subset (A \cap D_2)$ et $\mathcal{D}$ est stable par différence. On a donc montré que $D_2 \setminus D_1 \in D_{\mathcal{A}}$. Ce qui prouve que $\mathcal{D}_A$ est stable par différence.

   ———————————————————————————————

   (b) Soit $A \in \mathcal{C}$. Montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$. En déduire que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$.

   ———————————————**corrigé**———————————————

Soit $B \in \mathcal{C}$. On a $B \in \mathcal{D}$ (car $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$) et $A \cap B \in \mathcal{C}$ (car $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie), donc $A \cap B \in \mathcal{D}$. Ceci montre que $B \in \mathcal{D}_A$ et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$.

Comme $\mathcal{D}_A$ est stable par différence, stable par union dénombrable disjointe et que $\mathcal{D}_A$ contient $\mathcal{C}$, la question 1 donne $\mathcal{D}_A \supset \mathcal{D}$ et, finalement, $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$.

(c) Soit $A \in \mathcal{D}$. Montrer que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$. En déduire que $\mathcal{D}$ est stable par intersection finie.

corrigé

Soit $B \in \mathcal{C}$. On a $B \in \mathcal{D}$ (car $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$). Comme $B \in \mathcal{C}$, la question précédente donne $\mathcal{D} = \mathcal{D}_B$ et donc $A \in \mathcal{D}_B$. On a donc $A \cap B \in \mathcal{D}$. Ceci montre que $B \in \mathcal{D}_A$ et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$.

On en déduit, comme à la question précédente, que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$.

Soit maintenant $B \in \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D} = \mathcal{D}_A$, on a $B \in \mathcal{D}_A$ et donc $A \cap B \in \mathcal{D}$. L'intersection de deux éléments de $\mathcal{D}$ est donc aussi dans $\mathcal{D}$. Ceci prouve bien la stabilité de $\mathcal{D}$ par intersection finie (une récurrence facile donne que l'intersection d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{D}$ est aussi dans $\mathcal{D}$).

---

3. Montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu. En déduire que $\mathcal{D}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

corrigé

On remarque que $E \in \mathcal{D}$ (car $E \in \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$) et que $\mathcal{D}$ est stable par complémentaire car, si $A \in \mathcal{D}$, on a $E \setminus A \in \mathcal{D}$ car $\mathcal{D}$ est stable par différence (et $E, A \in \mathcal{D}$ avec $A \subset E$). Pour montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu, il suffit de montrer que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable (non nécessairement disjointe).

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D}$ est stable par complémentaire, on aussi $A_n^c \in \mathcal{D}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$B_n = A_n \cap (\cap_{i=0}^{n-1} A_i^c).$$

On a $B_n \in \mathcal{D}$ car $\mathcal{D}$ est stable par inteserction finie et $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$ (en notant que $B_n \subset A_n$ et $B_m \subset A_n^c$ si $m > n$). Comme $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe, on en déduit $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}$ et donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$ (car $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$). Ceci prouve que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable et donc que $\mathcal{D}$ est une tribu.

On a ainsi montré que $\mathcal{D}$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$ et donc contenant la tribu engendrée par $\mathcal{C}$, notée $\tau(\mathcal{C})$. D'autre part, il est facile de voir que toute tribu contenant $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{Z}_r$ (défini à la question 1) et donc que $\tau(\mathcal{C})$ contient $\mathcal{D}$. On a bien montré finalement que $\mathcal{D} = \tau(\mathcal{C})$.

Remarque : l'hypothèse "$E \in \mathcal{C}$" n'a été utilisée qu'une seule fois. Elle n'a été utilisée que pour montrer que $E \in \mathcal{D}$ (dans la question 3). On peut remplacer cette hypothèse par "il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ t.q. $E_n \cap E_m = \emptyset$, si $n \neq m$, et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$". En effet, de cette hypothèse, on déduit aussi $E \in \mathcal{D}$ car $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe et $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. La suite du raisonnement de la question 3 donne alors aussi que $\mathcal{D}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

12.2.2 Mesures

Corrigé 20 (Exemples de mesures)

Soit E un ensemble infini non dénombrable. Pour toute partie A de E, on pose $m(A) = 0$ si A est au plus dénombrable, et $m(A) = +\infty$ sinon. L'application m est-elle une mesure sur $\mathcal{P}(E)$?

———————————————————**corrigé**———————————————————

Oui, l'application m est une mesure sur $\mathcal{P}(E)$. En effet, on a bien $m(\emptyset) = 0$ et si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E)$ on a $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) = 0$ si A_n est au plus dénombrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (car une réunion d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable) et $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) = \infty$ si il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. A_n est infini non dénombrable. On a donc toujours $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n)$ (noter d'ailleurs qu'il est inutile de supposer les A_n disjoints 2 à 2).

———

Corrigé 21 (Mesure trace et restriction d'une mesure)

Soit (E, T, m) un espace mesuré

1. Soit $F \in T$. Montrer que la tribu trace de T sur F, notée T_F, est incluse dans T (cette tribu est une tribu sur F). Montrer que la restriction de m à T_F est une mesure sur T_F. On l'appellera la *trace* de m sur F. Si $m(F) < \infty$, cette mesure est finie.

   ———————————————————**corrigé**———————————————————

   Soit $B \in T_F$, il existe donc $A \in T$ t.q. $B = A \cap F$. Comme $F \in T$, on a donc aussi $B \in T$.

   On note m_F la restriction de m à T_F, on a donc $m_F(B) = m(B)$ pour tout $B \in T_F$. Il est alors immédiat de voir que $m_F(\emptyset) = 0$ et que m_F est σ-additive sur T_F, m_F est donc une mesure sur T_F. Si $m(F) < \infty$, on a $m_F(F) = m(F) < \infty$, la mesure m_F est donc finie (mais la mesure m peut ne pas être finie, c'est-à-dire que l'on peut avoir $m(E) = \infty$).

   ———

2. Soit $\mathcal{A}$ une tribu incluse dans T. La restriction de m à $\mathcal{A}$ est une mesure. Est-elle finie (resp. σ-finie) si m est finie (resp. σ-finie) ?

   ———————————————————**corrigé**———————————————————

   On note m_a la restriction de m à $\mathcal{A}$, on a donc $m_a(B) = m(B)$ pour tout $B \in \mathcal{A}$. Il est clair que m_a est une mesure sur $\mathcal{A}$.

   - Si m est finie, on a $m_a(E) = m(E) < \infty$, m_a est donc aussi une mesure finie.
   - Si m est σ-finie, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$ et $m(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais, comme les A_n ne sont pas nécessairement dans $\mathcal{A}$, la mesure m_a peut ne pas être σ-finie. On peut construire un exemple facilement de la manière suivante :

     On suppose que m est σ-finie mais n'est pas finie (on peut prendre, par exemple $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$) et on prend $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$. La mesure m_a n'est pas σ-finie...

   ———

Corrigé 22

Soit (E, T, m) un espace mesuré fini ("fini" signifie que $m(E) < \infty$) et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'ensembles mesurables tels que $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n \subset \cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus B_n)$.

———————————————**corrigé**———————————————

Soit $x \in (\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n$, on a donc $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ et $x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n$, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ t.q. $x \in A_p$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \notin B_n$. On a donc $x \in A_p \setminus B_p$, ce qui prouve que $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus B_n)$ et donc que $(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n \subset \cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus B_n)$.

———————————————————————————————

2. Montrer que $m(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) - m(\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n) - m(B_n))$.

———————————————**corrigé**———————————————

Puisque $m(E) < \infty$, on a, pour tout $A, B \in T$ t.q. $B \subset A$, $m(A\setminus B) = m(A)-m(B)$. La monotonie de m, la σ-sous additivité de m (et la question précédente) nous donne alors :

$$\begin{aligned} m(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) - m(\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n) &= m((\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n)) \leq m(\cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus B_n)) \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n \setminus B_n) = \sum_{n=0}^{+\infty}(m(A_n) - m(B_n)). \end{aligned}$$

———————————————————————————————

Corrigé 23

Soit (E, T, m) un espace mesuré fini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(A_n) = m(E)$. Montrer que $m(\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n) = m(E)$.

———————————————**corrigé**———————————————

Comme $m(E) < \infty$, on a $m(A^c) = m(E) - m(A)$ pour tout $A \in T$. De $m(A_n) = m(E)$, on déduit alors $m(A_n^c) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par σ-sous additivité de m, on a alors $m(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n^c) = 0$. Comme $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n^c = (\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n)^c$, on a donc $m((\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n)^c) = 0$ et donc $m(\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n) = m(E)$.

———————————————————————————————

Corrigé 24 (Sur la mesure d'une union. . .)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré et $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$. On suppose que $m(A_p) < \infty$ pour tout p. Montrer que $m(\cup_{p=1}^{n}(B \cap A_p)) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} m(B \cap (\cap_{j=1}^{k}A_{i_j}))\right)$.

———————————————**corrigé**———————————————

En attente

———————————————————————————————

Corrigé 25 (Contre exemples. . .)

1. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(A) = 0$. A-t-on nécessairement A fermé ?

———————————————**corrigé**———————————————

Non, A n'est pas nécessairement fermé. On peut prendre, par exemple $A = \{\frac{1}{n}, n \geq 1\}$. On a $\lambda(A) = 0$ et A n'est pas fermé (car 0 appartient à l'adhérence de A sans être dans A).

———————————————————————————————

2. Soit (E, T) un espace mesurable et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ qui engendre T. On considère m_1 et m_2 des mesures sur T. Montrer que $m_1(A) = m_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$ n'implique pas que $m_1 = m_2$ sur T. [*On pourra trouver un exemple (facile) avec* $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *et* m_1, m_2 *non finies. Un exemple avec* $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *et* m_1, m_2 *finies est aussi possible mais plus difficile à trouver. . .*]

———————————————————**corrigé**———————————————————

on prend $(E,T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

- Exemple "facile" (avec m_1, m_2 non finies).

  On prend $\mathcal{C}_1 = \{]a,\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}$. On a bien $T(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $\mathcal{C}_1$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (voir la proposition 2.2). On prend alors $m_1 = \lambda$ et $m_2 = 2\lambda$ (c'est-à-dire $m_2(B) = 2\lambda(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$). On a bien $m_1(B) = m_2(B)$ pour tout $B \in \mathcal{C}_1$ (car on a alors $m_1(B) = m_2(B) = \infty$). Mais $m_1 \neq m_2$ puisque, par exemple, $m_1(]0,1[) = 1$ et $m_2(]0,1[) = 2$.
- Exemple "difficile" (avec m_1, m_2 finies).

  On prend maintenant $\mathcal{C}_2 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ \{-1,0,1\} \cap B = \emptyset\} \cup \{\{-1,0\}\} \cup \{\{0,1\}\}$ (un élément de $\mathcal{C}_2$ est donc un borélien ne contenant ni -1 ni 0 ni 1, ou bien la partie $\{-1,0\}$, ou bien la partie $\{0,1\}$). On montre d'abord que $T(\mathcal{C}_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Il est clair que $T(\mathcal{C}_2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour montrer l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C}_2)$, on remarque que $\{0\} = \{-1,0\} \cap \{0,1\} \in T(\mathcal{C}_2)$ et donc que $\{-1\} = \{-1,0\} \setminus \{0\} \in T(\mathcal{C}_2)$, $\{1\} = \{0,1\} \setminus \{0\} \in T(\mathcal{C}_2)$. Finalement on voit alors que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C}_2)$ car tout borélien s'écrit comme un borélien ne contenant ni -1 ni 0 ni 1 (qui appartient donc à $T(\mathcal{C}_2)$), auquel on ajoute éventuellement 1, 2 ou 3 autre(s) élément(s) de $T(\mathcal{C}_2)$ (qui sont les parties $\{0\}$, $\{-1\}$ et $\{1\}$, on conclut alors avec la stabilité par union finie de la tribu $T(\mathcal{C}_2)$).

  On rappelle que, pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de dirac sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc, pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_a(B) = 1$ si $a \in B$ et $\delta_a(B) = 0$ si $a \notin B$. On prend alors $m_1 = \delta_{-1} + \delta_0 + \delta_1$ et $m_2 = 2\delta_{-1} + 2\delta_1$. On a clairement $m_1 = m_2$ sur $\mathcal{C}_2$ car $m_1(B) = m_2(B) = 0$ si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est t.q. $\{-1,0,1\} \cap B = \emptyset$ et $m_1(\{-1,0\}) = m_2(\{-1,0\}) = m_1(\{0,1\}) = m_2(\{0,1\}) = 2$. Enfin, on a $m_1 \neq m_2$ puisque, par exemple, $m_1(\{0\}) = 1$ et $m_2(\{0\}) = 0$.

———————————————————————————————————————

Corrigé 26 (Résultat d'unicité)

Soit (E,T) un espace mesurable et m, μ deux mesures sur T. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. On suppose que $\mathcal{C}$ engendre T et que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie.

On suppose que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$.

1. On suppose que $E \in \mathcal{C}$ et que $m(E) < \infty$. Montrer que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$. [On pourra introduire $\mathcal{D} = \{A \in T,\ m(A) = \mu(A)\}$ et utiliser l'exercice 2.14.]

   ———————————————————**corrigé**———————————————————

   On pose $\mathcal{D} = \{A \in T,\ m(A) = \mu(A)\}$. La $\sigma-$additivité de m et μ montre que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe. Comme $m(E) < \infty$, on peut aussi montrer que $\mathcal{D}$ est stable par différence (au sens de l'exercice 2.14). En effet, si $A, B \in \mathcal{D}$, avec $B \subset A$, on a (par additivité de m et μ) $m(B) + m(A \setminus B) = m(A)$ et $\mu(B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A)$. Comme $m(A) < \infty$ et $\mu(A) < \infty$, on a donc $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$ et $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$, ce qui prouve que $m(A \setminus B) = \mu(A \setminus B)$ et donc que $A \setminus B \in \mathcal{D}$.

   On utilise maintenant l'exercice 2.14. Comme $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et $E \in \mathcal{C}$, la question 3 de l'exercice 2.14 permet de montrer $\mathcal{D} = \tau(\mathcal{C}) = T$. (Plus précisément, comme $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$, on a $\mathcal{D} \in \mathcal{Z}_r$, où $\mathcal{Z}_r$ est défini dans le corrigé 19. Puis, en utilisant que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que $E \in \mathcal{C}$, la dernière question de l'exercice 2.14 donne que $\mathcal{D} \supset \tau(\mathcal{C})$.)

   On a donc bien montré que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$.

   ———————————————————————————————————————

2. (Généralisation de la question précédente). On suppose qu'il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ t.q. $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$, $m(E_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Montrer que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$.

—————————————**corrigé**—————————————

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $A \in T$, on pose $m_n(A) = m(A\cap E_n)$ et $\mu_n(A) = \mu(A\cap E_n)$ (noter que $A\cap E_n \in T$, car $A, E_n \in T$). On obtient ainsi deux mesures sur T, m_n et μ_n. Ces deux mesures sont égales sur $\mathcal{C}$ (car $A \cap E_n \in \mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie).

On raisonne alors comme à la question précédente. On pose $\mathcal{D} = \{A \in T,\ m_n(A) = \mu_n(A)\}$ et le raisonnement de la question récédente donne que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe et (grâce à $m_n(E) < \infty$) que $\mathcal{D}$ est stable par différence (au sens de l'exercice 2.14). On utilise maintenant la remarque de la fin de la question 3 de l'exercice 2.14. Comme $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et E est une union dénombrable disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$, cette remarque donne $\mathcal{D} = \tau(\mathcal{C}) = T$. On a donc, pour tout $A \in T$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$m(A \cap E_n) = m_n(A) = \mu_n(A) = \mu(A \cap E_n).$$

On en déduit que $m(A) = \mu(A)$, pour tout $A \in T$, car, par $\sigma-$additivité de m et μ, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A \cap E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap E_n) = \mu(A)$.

———————————————————————————

3. Avec $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donner un exemple pour lequel $E \in \mathcal{C}$ et $m \neq \mu$.

—————————————**corrigé**—————————————

Un exemple simple est obtenu en prenant pour $\mathcal{C}$ lensemble des ouverts de $\mathbb{R}$, $\mu = 2m$ et m définie sur T par $m(A)$ =card(A) si A a un nombre fini d'éléments et $m(A) = +\infty$ sinon.

———————————————————————————

Corrigé 27 (Mesure atomique, mesure diffuse)

Soit (E, T) un espace mesurable t.q. $\{x\} \in T$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est diffuse si $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est purement atomique si il existe $S \in T$ t.q. $m(S^c) = 0$ et $m(\{x\}) > 0$ si $x \in S$.

1. Montrer qu'une mesure purement atomique et diffuse est nulle. Donner, pour $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ un exemple de mesure purement atomique et un exemple de mesure diffuse. [Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est diffuse.]

—————————————**corrigé**—————————————

Soit m une mesure purement atomique et soit $S \in T$ t.q. $m(S^c) = 0$ et $m(\{x\}) > 0$ si $x \in S$. Si m est diffuse, on a $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$, donc $S = \emptyset$ et $m = 0$.

On rappelle que, pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de dirac sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc, pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_a(B) = 1$ si $a \in B$ et $\delta_a(B) = 0$ si $a \notin B$. La mesure δ_a est (pour tout $a \in \mathbb{R}$) purement atomique, il suffit de prendre $S = \{a\}$, on a bien $\delta_a(S^c) = 0$ et $\delta_a(\{a\}) = 1 > 0$.

Un exemple de mesure diffuse sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est donné par la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

———————————————————————————

2. Soit m une mesure diffuse sur T. Montrer que tous les ensembles dénombrables sont de mesure nulle.

———————————————corrigé———————————————

Soit A une partie dénombrable de E. Il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ t.q. $A = \{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ $= \cup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$. On a donc $A \in T$ (car $\{x_n\} \in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que T est stable par union dénombrable) et $m(A) \le \sum_{n=0}^{+\infty} m(\{x_n\}) = 0$ car m est diffuse.

———————————————————————————————

3. Soit m une mesure sur T. On suppose que m est σ-finie, c'est à dire qu'il existe $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $m(E_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que l'ensemble des $x \in E$ t.q. $m(\{x\}) > 0$ (de tels x sont appelés "atomes" de m) est au plus dénombrable. [On pourra introduire l'ensemble $A_{n,k} = \{x \in E_n;\, m(x) \ge \frac{1}{k}\}$.]

   ———————————————corrigé———————————————

   On pose $A = \{x \in E;\, m(\{x\}) > 0\}$. Si $x \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $x \in E_n$ et il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $m(\{x\}) \ge \frac{1}{k}$. On a donc $x \in A_{n,k}$. Ceci montre que $A = \cup_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^\star} A_{n,k}$. Pour montrer que A est au plus dénombrable, il suffit de montrer que $A_{n,k}$ est au plus dénombrable (car une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable). Soit donc $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$. Soit $x_1, \ldots, x_p$ p éléments distincts de $A_{n,k}$. Par monotonie et additvité de m, on a $\frac{p}{k} \le \sum_{n=1}^{p} m(\{x_n\}) = m(\{x_1, \ldots, x_p\}) \le m(E_n) < \infty$. On en déduit que $p \le km(E_n) < \infty$ et donc que $A_{n,k}$ a un nombre fini d'éléments (ce nombre est inférieur ou égal à $km(E_n)$). On en déduit donc que A est au plus dénombrable.

   ———————————————————————————————

   (b) Montrer qu'il existe une mesure diffuse m_d et une mesure purement atomique m_a sur T telles que $m = m_d + m_a$. Montrer que m_d et m_a sont étrangères, c'est à dire qu'il existe $A \in T$ t.q. $m_d(A) = 0$ et $m_a(A^c) = 0$.

   ———————————————corrigé———————————————

   On considère toujours $A = \{x \in E;\, m(\{x\}) > 0\}$. On remarque tout d'abord que $A \in T$ (car A est au plus dénombrable, d'après la question précédente, et que les singletons, c'est-à-dire les parties réduites à un seul élément, sont dans T). On pose alors, pour tout $B \in T$:

   $$m_a(B) = m(B \cap A), \;\; m_d(B) = m(B \cap A^c).$$

   Il est facile de voir que m_d et m_a sont des mesures sur T et que, par additivité de m, on a bien $m = m_a + m_d$.

   La mesure m_d est diffuse car, si $x \in E$, on a $m_d(\{x\}) = m(\{x\}) = 0$ si $x \in A^c$ (car A contient tous les points t.q. $m(\{x\}) > 0$) et $m_d(\{x\}) = m(\emptyset) = 0$ si $x \in A$ (car $\{x\} \cap A^c = \emptyset$).

   La mesure m_a est purement atomique. Il suffit de prendre $S = A$, on a bien $m_a(S^c) = m(A^c \cap A) = 0$ et $m_a(\{x\}) = m(\{x\}) > 0$ si $x \in S = A$.

   Enfin, m_a et m_d sont étrangères car $m_d(A) = 0$ et $m_a(A^c) = 0$.

   ———————————————————————————————

   (c) Montrer que si m est finie il existe un singleton dont la mesure est supérieure ou égale à la mesure de tous les autres singletons. Montrer que ceci peut-être inexact si m n'est que σ-finie.

   ———————————————corrigé———————————————

   On suppose que m est finie. Soit $M = \sup\{m(\{x\}),\, x \in E\}$. On veut montrer qu'il existe $x \in E$ t.q. $M = m(\{x\})$. On suppose $M > 0$ (sinon, il suffit de prendre n'importe quel $x \in E$

pour avoir $m(\{x\}) = M$). On va raisonner par l'absurde, on suppose donc que $m(\{x\}) < M$ pour tout $x \in E$. Par définition de M, Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ t.q. $m(\{x_n\}) \to M$ quand $n \to \infty$. Comme $m(\{x_n\}) < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut même supposer (quitte à extraire une sous suite) que $m(\{x_n\}) < m(\{x_{n+1}\}) < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quitte à supprimer les premiers termes de la suite, on peut aussi supposer que $m(\{x_0\}) > \frac{M}{2}$. Les points x_n sont alors tous distincts, ce qui donne $\sum_{n=0}^{+\infty} m(\{x_n\}) = m(\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}) \le m(E)$. Ceci est impossible car $m(E) < \infty$ et $m(\{x_n\}) > \frac{M}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (donc $\sum_{n=0}^{+\infty} m(\{x_n\}) = \infty$).

Exemple de mesure σ-finie pour laquelle M n'est pas atteint.

Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on définit m par $m(B) = \sum_{n=2}^{\infty}(1 - \frac{1}{n})\delta_n(B)$ (où δ_n est le mesure de Dirac au point $n \in \mathbb{N}$).

Pour montrer que m est une mesure, on peut remarquer, en posant $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N};\ n \ge 2\}$, que $m(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}_2; n\in B}(1 - \frac{1}{n})$. Si $B = \cup_{p\in\mathbb{N}} B_p$ avec $B_p \cap B_q = \emptyset$ si $p \ne q$, on a $\sum_{p\in\mathbb{N}} m(B_p) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}_2; n\in B_p}(1 - \frac{1}{n}) = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}_2\times\mathbb{N}; n\in B_p}(1 - \frac{1}{n})$ (on utilise ici le lemme 2.3 page 30). Comme les B_p sont disjoints 2 à 2, n appartient à B_p pour au plus 1 p, et comme $B = \cup_{p\in\mathbb{N}} B_p$, on obtient $\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}_2\times\mathbb{N}; n\in B_p}(1 - \frac{1}{n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}_2\times\mathbb{N}; n\in B}(1 - \frac{1}{n}) = m(B)$. Ceci prouve la σ-additivité de m. Le fait que $m(\emptyset) = 0$ est immédiat. On a donc bien montré que m est une mesure.

La mesure m est bien σ-finie, il suffit de remarquer que $m([-n, n]) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{N}}[-n, n]$. enfin, pour cette mesure m, on a $M = \sup\{m(\{x\}),\ x \in E\} = 1$ et il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ t.q. $m(\{x\}) = 1$. En fait, m est purement atomique car $m((\mathbb{N}_2)^c) = 0$ et on a $0 < m(\{x\})$, pour tout $x \in \mathbb{N}_2$.

---

4. Pour $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donner un exemple de mesure purement atomique finie dont l'ensemble des atomes est infini.

corrigé

Un tel exemple est obtenu en modifiant légérement la mesure construite à la question précédente. Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on définit m par $m(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\delta_n(B)$. Une démonstration analogue à celle faite à la question précédente montre que m est bien une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, m est finie (on a $m(\mathbb{R}) = \frac{\pi^2}{6} < \infty$), m est atomique car $m((\mathbb{N}^\star)^c) = 0$ et $0 < m(\{x\}) < 1$, pour tout $x \in \mathbb{N}^\star$. L'ensemble des atomes de m est infini, c'est $\mathbb{N}^\star$.

Corrigé 28 (limites sup et inf d'ensembles)

Soit (E, T, m) un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On rappelle que $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{p\ge n} A_p$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{p\ge n} A_p$.

1. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $m(\cup_{p\ge n_0} A_p) < \infty$. Montrer que $m(\liminf_{n\to\infty} A_n) \le \liminf_{n\to\infty} m(A_n) \le \limsup_{n\to\infty} m(A_n) \le m(\limsup_{n\to\infty} A_n)$.

corrigé

- La propriété de continuité croissante d'une mesure (voir la proposition 2.3) donne :

$$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} m(\cap_{p\ge n} A_p).$$

La monotonie de m donne $m(\cap_{p\ge n} A_p) \le m(A_q)$ pour tout $q \ge n$. On a donc $m(\cap_{p\ge n} A_p) \le \inf_{p\ge n} m(A_p)$ et donc $\lim_{n\to\infty} m(\cap_{p\ge n} A_p) \le \lim_{n\to\infty}(\inf_{p\ge n} m(A_p))$, c'est-à-dire :

$$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) \le \liminf_{n\to\infty} m(A_n).$$

- De $\inf_{p\ge n} m(A_p) \le \sup_{p\ge n} m(A_p)$, on déduit $\liminf_{n\to\infty} m(A_n) \le \limsup_{n\to\infty} m(A_n)$.
- Comme il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $m(\cup_{p\ge n_0} A_p) < \infty$, la propriété de continuité décroissante d'une mesure (voir la proposition 2.3) donne $m(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} m(\cup_{p\ge n} A_p)$. La monotonie de m donne $m(\cup_{p\ge n} A_p) \ge m(A_q)$ pour tout $q \ge n$. On a donc $m(\cup_{p\ge n} A_p) \ge \sup_{p\ge n} m(A_p)$ et donc $\lim_{n\to\infty} m(\cup_{p\ge n} A_p) \ge \lim_{n\to\infty}(\sup_{p\ge n} m(A_p))$, c'est-à-dire :

$$m(\limsup_{n\to\infty} A_n) \ge \limsup_{n\to\infty} m(A_n).$$

---

2. Donner un exemple (c'est-à-dire choisir (E, T, m) et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$) pour lequel :

$$\limsup_{n\to\infty} m(A_n) > m(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$

———————————————**corrigé**———————————————

On prend $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $A_n = [n, n+1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient alors :

$$\limsup_{n\to\infty} m(A_n) = 1 > 0 = m(\emptyset) = m(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$

---

3. Donner un exemple avec m finie (c'est-à-dire $m(E) < \infty$) pour lequel

$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) < \liminf_{n\to\infty} m(A_n) < \limsup_{n\to\infty} m(A_n) < m(\limsup_{n\to\infty} A_n)$.

———————————————**corrigé**———————————————

On prend (E, T, m)=$([0,4], \mathcal{B}([0,4]), \lambda)$ (plus précisément, λ est ici la restriction à $\mathcal{B}([0,4])$ de λ qui est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) et $A_{2n} = [0,2]$, $A_{2n+1} = [1,4]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient $\limsup_{n\to\infty} A_n = [0,4]$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n = [1,2]$. On a ainsi :

$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) = 1$, $\liminf_{n\to\infty} m(A_n) = 2$, $\limsup_{n\to\infty} m(A_n) = 3$ et $m(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 4$.

---

4. $(\star)$ (Lemme de Borel-Cantelli) On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) < \infty$.

Montrer que $m(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

———————————————**corrigé**———————————————

De $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) < \infty$ on déduit que $\sum_{p=n}^{\infty} m(A_p) \to 0$ quand $n \to \infty$ et donc que $m(\cup_{p\ge n} A_p) \to 0$ quand $n \to \infty$ (car, par σ-sous additivté de m, on a $m(\cup_{p\ge n} A_p) \le \sum_{p=n}^{\infty} m(A_p)$). Par continuité décroissante de m, on en déduit alors $m(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

Corrigé 29 (Petit ouvert dense...) $(\star\star)$
On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $\varepsilon > 0$, peut-on construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure inférieure à ε ? [On rappelle qu'une partie A de R est dense dans $\mathbb{R}$ si $\overline{A} = \mathbb{R}$ ou encore si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ t.q. $|x - a| < \varepsilon$.]

———————————————**corrigé**———————————————

La réponse est "oui".... Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, bijective. On considère alors $O = \cup_{n\in\mathbb{N}}]\varphi(n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, \varphi(n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[$. O est bien un ouvert (comme réunion d'ouverts), dense dans $\mathbb{R}$ (car $O \supset \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$) et, par σ-sous additivité d'une mesure, on a $\lambda(O) \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \varepsilon$.

———————————————————————————————

Corrigé 30 (Non existence d'une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ exprimant la longueur) $(\star\star)$
On définit la relation d'équivalence sur $[0,1[$: xRy si $x-y \in \mathbb{Q}$. En utilisant l'axiome du choix, on construit un ensemble $A \subset [0,1[$ tel que A contienne un élément et un seul de chaque classe d'équivalence. Pour $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$, on définit $A_q = \{y \in [0,1[; y = x+q \text{ ou } y = x+q-1, x \in A\}$, c'est-à-dire $A_q = \{y \in [0,1[; y - q \in A \text{ ou } y - q + 1 \in A\}$.

1. Montrer que $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} A_q = [0,1[$.

———————————————**corrigé**———————————————

Soit $y \in [0,1[$, il existe $x \in A$ t.q. yRx (car A contient un élément dans chaque classe d'équivalence), c'est-à-dire $y - x \in \mathbb{Q}$. Comme $y - x \in]-1,1[$ (car $x, y \in [0,1[$), on a donc $y - x = q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$ ou $y - x + 1 = q \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$. Ceci donne $y \in A_q$. On a donc $[0,1[\subset \cup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} A_q$. Comme $A_q \subset [0,1[$ pour tout $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$, on a finalement $[0,1[= \cup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} A_q$.

Il est important aussi de remarquer que les A_q sont disjoints 2 à 2. En effet, si $y \in A_q \cap A_{q'}$, il existe $x, x' \in A$ t.q. $y - x = q$ ou $(q-1)$ et $y - x' = q'$ ou $(q'-1)$. On en déduit $x - x' \in \mathbb{Q}$ et donc $x = x'$ (car A contient un seul élément de chaque classe d'équivalence). Ceci donne $q = q' = y - x$ (si $y - x \in [0,1[$) ou $q = q' = y - x + 1$ (si $y - x \in]-1,0[$).

———————————————————————————————

2. Montrer que si m est une application de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, invariante par translation et vérifiant $m([0,1[) = 1$, m ne peut pas être σ- additive. En déduire la non-existence d'une mesure m, sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et t.q. $m([a,b]) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. En particulier, montrer que l'application $\lambda^\star$, définie en cours, ne peut pas être une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

———————————————**corrigé**———————————————

On suppose que m est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ vérifiant $m([0,1[) = 1$. La σ- additivité de m donne alors, avec la première question,

$$1 = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} m(A_q). \tag{12.6}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on note $B + x = \{y + x, y \in B\}$. On suppose que m est invariante par translation, on a donc $m(B + x) = m(B)$ pour tout $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

On remarque maintenant que $A_q = ((A+q) \cap [0,1[) \cup ((A+q-1) \cap [0,1[)$ pour tout $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$. De plus, si $y \in ((A+q) \cap [0,1[) \cap ((A+q-1) \cap [0,1[)$, il existe $x, x' \in A$ t.q. $y = x + q = x' + q - 1$, donc $x' - x = 1$, ce qui est impossible. Ceci montre que $((A+q) \cap [0,1[) \cap ((A+q-1) \cap [0,1[) = \emptyset$. On a donc, en utilisant l'additivité de m, l'invariance par translation de m et le fait que $A+q \subset [0,2[$, $m(A_q) = m((A+q) \cap [0,1[) + m((A+q-1) \cap [0,1[) = m((A+q) \cap [0,1[) + m((A+q) \cap [1,2[) = m(A+q) = m(A)$, pour tout $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$. On en déduit $\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[} m(A_q) = 0$ si $m(A) = 0$ et $\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[} m(A_q) = \infty$ si $m(A) > 0$, et donc $\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[} m(A_q) \neq 1$, en contradiction avec (12.6). Il n'existe donc pas de mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et t.q. $m([0,1[) = 1$.

Si m est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et t.q. $m([a,b]) = b-a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On montre que $m[0,1[= 1$ en utilisant la continuité croissante de m et le fait que $[0,1[= \cup_{n \geq 1} [0, 1-\frac{1}{n}]$. Il est donc impossible de trouver une telle mesure.

L'application $\lambda^\star$ définie en cours sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) est invariante par translation et vérifie $\lambda^\star([a,b]) = b-a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Elle n'est donc pas σ-additive sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Corrigé 31

Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. pour tout intervalle I et tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $m(I) = m(I+x)$ (avec $I + x = \{a + x, \, a \in I\}$) et $m([0,1]) = 1$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m(\{x\}) = 0$ (i.e. m est diffuse). En déduire que m est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. [On pourra découper $[0,1[$ en q intervalles de longueur $1/q$.]

corrigé

On pose $m(\{0\}) = \alpha$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On prend $I = \{0\}$ (I est bien un intervalle) de sorte que $I + x = \{x\}$. On a alors $\alpha = m(\{0\}) = m(I) = m(I+x) = m(\{x\})$. On a donc montré que $m(\{x\}) = \alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour montrer que $\alpha = 0$, il suffit, par exemple, de remarquer que, en utilisant la σ-additivité de m :

$$1 = m([0,1]) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(\{\frac{1}{n}\}) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha.$$

On en déduit $\alpha = 0$ (sinon, le membre de droite de la précédente inégalité est égal à $+\infty$ et l'inégalité est alors fausse).

On a donc bien montré que $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci donne, en particulier que $1 = m([0,1]) = m([0,1[) + m(\{1\}) = m([0,1[)$.

Soit maintenant $q \in \mathbb{N}^\star$. On a $m([\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[) = m([0, \frac{1}{q}[)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, q-1\}$, car $[\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[= [0, \frac{1}{q}[+\frac{i}{q}$. On en déduit :

$$1 = m([0,1[) = \sum_{i=0}^{q-1} m([\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[) = qm([0, \frac{1}{q}[),$$

et donc $m([0, \frac{1}{q}[) = \frac{1}{q}$. Ceci donne aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m([x, x+\frac{1}{q}[) = \frac{1}{q}$, car $[x, x+\frac{1}{q}[= [0, \frac{1}{q}[+x$. En utilisant l'additivité de m, on a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$:

$$m([0, \frac{p}{q}[) = \sum_{i=0}^{p-1} m([\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[) = \frac{p}{q}. \tag{12.7}$$

De (12.7), on va déduire $m([\alpha, \beta[) = \beta - \alpha$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha < \beta$. En effet, soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha < \beta$. Comme $[\alpha, \beta[= [0, \gamma[+\alpha$, avec $\gamma = \beta - \alpha$, on a $m([\alpha, \beta[) = m([0, \gamma[)$. Il existe alors deux suites $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}_+^\star$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}_+^\star$ t.q. $r_n \uparrow \gamma$ et $s_n \downarrow \gamma$ quand $n \to \infty$. Comme $[0, r_n[\subset [0, \gamma[\subset [0, s_n[$, on a, grâce à (12.7), $r_n = m([0, r_n[) \leq m([0, \gamma[) \leq m([0, s_n[) = s_n$. Eh faisant $n \to \infty$, on en déduit que $m([0, \gamma[) = \gamma$ et donc $m([\alpha, \beta[) = \beta - \alpha$.

Enfin, comme $m(\{\alpha\}) = 0$, on a aussi

$$m(]\alpha, \beta[) = \beta - \alpha, \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \alpha < \beta.$$

La partie "unicité" du théorème de Carathéodory donne alors $m = \lambda$.

Corrigé 32 (Support d'une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$)
Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe un plus grand ouvert de mesure nulle pour m. L'ensemble fermé complémentaire de cet ouvert s'appelle *le support* de m. [On pourra, par exemple, considérer les pavés à extrémités rationnelles qui sont de mesure nulle pour m.]

—————————————**corrigé**—————————————

On note A l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^d$ de mesure nulle pour m. L'ensemble A est non vide (car l'ensemble vide est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de mesure nulle). On pose :

$$O = \cup_{\omega \in A} \omega.$$

L'ensemble O est donc la réunion de tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$ de mesure nulle. Il est clair que O est ouvert (car c'est une réunion d'ouverts) et qu'il contient tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$ de mesure nulle. Pour montrer que O est le plus grand ouvert de mesure nulle, il suffit donc de montrer que O est de mesure nulle. Pour cela, on va montrer que O est une réunion dénombrable d'ouverts de mesure nulle.
Soit $x = (x_1, \ldots, x_d)^t \in O$. Il existe $\omega \in A$ t.q. $x \in \omega$. Comme ω est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ t.q. :

$$\prod_{i=1}^{d}]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\subset \omega.$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$ il existe $\gamma_{i,x} \in]x_i - \varepsilon, x_i[\cap \mathbb{Q}$ et $\delta_{i,x} \in]x_i, x_i + \varepsilon[\cap \mathbb{Q}$. On a donc :

$$x \in \prod_{i=1}^{d}]\gamma_{i,x}, \delta_{i,x}[\subset \omega \subset O.$$

Par monotonie d'une mesure, on a $m(\prod_{i=1}^{d}]\gamma_{i,x}, \delta_{i,x}[) \le m(\omega) = 0$, et donc $m(\prod_{i=1}^{d}]\gamma_{i,x}, \delta_{i,x}[) = 0$.
Comme $O = \cup_{x \in O} \{x\}$, on a aussi :

$$O = \cup_{x \in O} \prod_{i=1}^{d}]\gamma_{i,x}, \delta_{i,x}[= \cup_{x \in O} P_{\gamma_x, \delta_x}, \tag{12.8}$$

en posant $\gamma_x = (\gamma_{1,x}, \ldots, \gamma_{d,x})^t$, $\delta_x = (\delta_{1,x}, \ldots, \delta_{d,x})^t$ et $P_{\gamma,\delta} = \prod_{i=1}^{d}]\gamma_i, \delta_i[$ (si $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)^t$ et $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_d)^t$).
On remarque maintenant que, pour tout $x \in O$, $\gamma_x, \delta_x \in \mathbb{Q}^d$. L'égalité (12.8) donne donc :

$$O = \cup_{(\gamma,\delta) \in B} P_{\gamma,\delta},$$

où B est une partie de $\mathbb{Q}^{2d}$ et $m(P_{\gamma,\delta}) = 0$ pour tout $(\gamma, \delta) \in B$. Comme $\mathbb{Q}^{2d}$ est dénombrable, la partie B est au plus dénombrable et la $\sigma-$sous additivité d'une mesure donne alors que $m(O) = 0$.

Corrigé 33 (Ensemble de Cantor)

On considère l'espace mesuré $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$.
On pose $C_0 = [0,1]$, $a_1^0 = 0$, $b_1^0 = 1$, et $\alpha_0 = 1$. Pour $n \geq 0$, on construit $C_{n+1} \subset [0,1]$ de la manière suivante : on suppose $C_n = \bigcup_{p=1}^{2^n} [a_p^n, b_p^n]$ connu, et on définit $C_{n+1} = \bigcup_{p=1}^{2^{n+1}} [a_p^{n+1}, b_p^{n+1}]$ où, pour $p = 1, \ldots, 2^n$, $a_{2p-1}^{n+1} = a_p^n$, $b_{2p-1}^{n+1} = a_p^n + \alpha_{n+1}$, $a_{2p}^{n+1} = b_p^n - \alpha_{n+1}$ et $b_{2p}^{n+1} = b_p^n$, avec $\alpha_{n+1} = \frac{\rho_n \alpha_n}{2}$, et $0 < \rho_n < 1$. On pose $C = \cap_{n \geq 0} C_n$ (C s'appelle "ensemble de Cantor", l'exemple le plus classique est obtenu avec $\rho_n = \frac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

1. Montrer que $C_{n+1} \subset C_n$.

———————————————**corrigé**———————————————

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1, \ldots, 2^n\}$, la longueur de l'intervalle $[a_p^n, b_p^n]$ est α_n. Comme $\alpha_{n+1} < \frac{\alpha_n}{2}$ et que $a_{2p-1}^{n+1} = a_p^n$ et $b_{2p}^{n+1} = b_p^n$, on a $[a_{2p-1}^{n+1}, b_{2p-1}^{n+1}] \cup [a_{2p}^{n+1}, b_{2p}^{n+1}] \subset [a_p^n, b_p^n]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1, \ldots, 2^n\}$. En prenant l'union sur $p \in \{1, \ldots, 2^n\}$, on en déduit $C_{n+1} \subset C_n$.

———————————————————————————————

2. Montrer que C est compact et $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

———————————————**corrigé**———————————————

L'ensemble C est fermé (dans $\mathbb{R}$) car c'est une intersection de fermés (chaque C_n est fermé). D'autre part $C \subset [0,1]$, C est donc compact (car fermé et borné dans $\mathbb{R}$).

Comme $\alpha_{n+1} < \frac{\alpha_n}{2}$, on a toujours $b_p^n < a_{p+1}^n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}$). Les intervalles composant C_n sont donc disjoints 2 à 2 et de longueur α_n. Ceci montre que $x, y \in [0,1]$, $(y - x) > \alpha_n$ implique $]x, y[\not\subset C_n$. Comme $\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$ (noter que $\alpha_n \leq \frac{1}{2^n}$), on en déduit que $C = \cap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ ne contient aucun intervalle ouvert (non vide) et donc que $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

———————————————————————————————

3. Montrer que C est non dénombrable.

———————————————**corrigé**———————————————

On commence par définir, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$, des points x_c pour $c \in \{1,2\}^n$.

Pour $n = 1$, $x_{(1)} = a_1^0$ et $x_{(2)} = b_1^0$.

Soit $n \geq 1$. Supposons que x_c est construit pour tout $c \in \{1,2\}^n$ et que pour chaque $c \in \{1,2\}^n$, $x_c \in \{b_p^{n-1}, \, p = 1, \ldots, 2^{n-1}\} \cup \{a_p^{n-1}, \, p = 1, \ldots, 2^{n-1}\}$. On construit maintenant x_c pour $c \in \{1,2\}^{n+1}$. Soit donc $c \in \{1,2\}^{n+1}$, on pose $c = \{\overline{c}, b\}$ avec $\overline{c} \in \{1,2\}^n$ et $d \in \{1,2\}$ et on distingue 4 cas :

(a) $x_{\overline{c}} = b_p^{n-1}$, avec $p \in \{1, \ldots, 2^{n-1}\}$, $d = 1$. On pose alors $x_c = a_{2p}^n$,
(b) $x_{\overline{c}} = b_p^{n-1}$, avec $p \in \{1, \ldots, 2^{n-1}\}$, $d = 2$. On pose alors $x_c = b_{2p}^n$,
(c) $x_{\overline{c}} = a_p^{n-1}$, avec $p \in \{1, \ldots, 2^{n-1}\}$, $d = 1$. On pose alors $x_c = a_{2p-1}^n$,
(d) $x_{\overline{c}} = a_p^{n-1}$, avec $p \in \{1, \ldots, 2^{n-1}\}$, $d = 2$. On pose alors $x_c = b_{2p-1}^n$.

Il est intéressant de noter, avec ces formules, que $|x_c - x_{\overline{c}}| \leq \alpha_n \leq \frac{1}{2^n}$ et que $x_c \in C$.

On note S l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}^\star$, prenant leurs valeurs dans $\{1,2\}$. Si $c \in S$, on note c_n l'élément de $\{1,2\}^n$ formé par les n premiers termes de la suite et on note $x_n = x_{c_n}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (car $|x_{n+1}-x_n|\le \frac{1}{2^n}$) et incluse dans C, elle converge donc vers un point $x_c\in C$. On remarque que si c et c' sont deux suites différentes, alors $x_c\neq x_{c'}$. En effet soit $n\in\mathbb{N}$ t.q. $c_n=c'_n$ et $c_{n+1}\neq c'_{n+1}$, on alors $|x_{c_m}-x_{c'_m}|\ge(1-\rho_n)\alpha_n$ pour tout $m>n$ et donc, en passant à la limite quand $m\to\infty$, $|x_c-x_{c'}|\ge(1-\rho_n)\alpha_n$, ce qui donne $x_c\neq x_{c'}$. L'application $c\mapsto x_c$ est donc une injection de S dans C. Ceci montre que C est infini non dénombrable (car S est infini non dénombrable).

---

4. Montrer que si ρ_n ne dépend pas de n, alors $\lambda(C)=0$. En déduire que si $A\in\mathcal{B}([0,1])$, $\lambda(A)=0$ n'entraîne pas que A est dénombrable.

———————————————**corrigé**———————————————

La construction des points a_p^n et b_p^n donne $\lambda([a_{2p-1}^{n+1},b_{2p-1}^{n+1}]\cup[a_{2p}^{n+1},b_{2p}^{n+1}])=2\alpha_{n+1}=\rho_n\alpha_n=\rho_n\lambda([a_p^n,b_p^n])$. En prenant l'union sur $p\in\{1,\ldots,2^n\}$, on en déduit $\lambda(C_{n+1})=\rho_n\lambda(C_n)$.

Si ρ_n ne dépend pas de n, c'est-à-dire $\rho_n=\rho$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $0<\rho<1$, on a donc $\lambda(C_{n+1})=\rho\lambda(C_n)$. Ceci donne, comme $\lambda(C_0)=1$, $\lambda(C_n)=\rho^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Par continuité décroissante de λ, on en déduit $\lambda(C)=\lim_{n\to\infty}\lambda(C_n)=0$.

---

5. Soit $0<\epsilon<1$. Montrer qu'il existe une suite $(\rho_n)_{n\ge0}\subset]0,1[$ t.q. $\lambda(C)=\epsilon$.

———————————————**corrigé**———————————————

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset]\varepsilon,1]$ t.q. $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_{n+1}<\varepsilon_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $\varepsilon_n\to\varepsilon$ quand $n\to\infty$ (on peut prendre, par exemple, $\varepsilon_n=\varepsilon-\frac{1-\varepsilon}{n+1}$).

On prend $\rho_n=\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On a bien $0<\rho_n<1$ et, comme $\lambda(C_{n+1})=\rho_n\lambda(C_n)$ (ceci a été démontré à la question précédente), on adonc $\lambda(C_n)=\varepsilon_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Par continuité décroissante de λ, on en déduit $\lambda(C)=\lim_{n\to\infty}\lambda(C_n)=\varepsilon$.

---

6. Soit f lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si A est un compact de $[0,1]$ t.q. $\lambda(A)=0$, alors $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$ t.q. $\lambda(f(A))=0$.

———————————————**corrigé**———————————————

Comme f est continue, f transforme les compacts en compacts. Donc, $f(A)$ est bien un compact de $\mathbb{R}$ (et donc appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

On montre maintenant que $\lambda(f(A))=0$.

Soit $L\in\mathbb{R}$ t.q. $|f(y)-f(x)|\le L|y-x|$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$. On commence par montrer un petit résultat préliminaire. Soit $I=[a,b]$ un intervalle fermé de $[0,1]$ (I est donc compact). Comme f est continue sur $[a,b]$, il existe $x,y\in[a,b]$ t.q. $f(x)=m=\min\{f(z),\ z\in[a,b]\}$ et $f(y)=M=\max\{f(z),\ z\in[a,b]\}$. On a donc $f(I)\subset[m,M]$ (en fait, $f(I)=[m,M]$), d'où :

$$\lambda(f(I))\le M-m=f(y)-f(x)\le L|y-x|=L\lambda(I). \tag{12.9}$$

Soit $\eta>0$. Comme $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, d'après la régularité de λ (voir le théorème 2.3), il existe O, ouvert de $\mathbb{R}$, t.q. $A\subset O$ et $\lambda(0)\le\eta$. D'après le lemme 2.4 page 35, O est une union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2. En prenant éventuellement la restriction à $[0,1]$ de ces intervalles, on obtient donc une famille dénombrable, notée $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'intervalles inclus dans $[0,1]$, disjoints 2 à 2 t.q. $A \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset O$. On en déduit $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(I_n) = \lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}} I_n) \le \eta$ et $f(A) \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} f(I_n) \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} f(\overline{I}_n)$. On a donc $\lambda(f(A)) \le \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(f(\overline{I}_n))$. En utilisant (12.9), on a donc $\lambda(f(A)) \le L\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(\overline{I}_n) = L\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(I_n) \le L\eta$. Comme η est arbitrairement petit, on a donc $\lambda(f(A)) = 0$.

---

7. Construire une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. si A est un compact de $[0,1]$ t.q. $\lambda(A) = 0$, on n'a pas forcément $\lambda(f(A)) = 0$ (mais $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$). [Utiliser un ensemble de Cantor de mesure nulle (cf question 4) et un ensemble de Cantor de mesure $\epsilon > 0$ (cf question 5).]

———————————————**corrigé**———————————————

On note C l'ensemble obtenu dans la question 4, c'est-à-dire avec $\rho_n = \rho$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 < \rho < 1$ (par exemple, $\rho = \frac{2}{3}$). On note a_n^p, b_n^p, C_n les points et ensembles utilisés pour construire C et on note aussi $D = \{a_n^p,\ n \in \mathbb{N},\ p \in \{1,\ldots,2^n\}\} \cup \{b_n^p,\ n \in \mathbb{N},\ p \in \{1,\ldots,2^n\}\}$. (Noter que $D \subset C$.)

Soit $\varepsilon > 0$. On note $\tilde{C}$ l'ensemble C obtenu à la question 5. On a donc $\lambda(C) = \varepsilon$. On note $\tilde{a}_n^p$, $\tilde{b}_n^p$, $\tilde{C}_n$ les points et ensembles utilisés pour construire $\tilde{C}$ et on note aussi $\tilde{D} = \{\tilde{a}_n^p,\ n \in \mathbb{N},\ p \in \{1,\ldots,2^n\}\} \cup \{\tilde{b}_n^p,\ n \in \mathbb{N},\ p \in \{1,\ldots,2^n\}\}$. (Noter que $\tilde{D} \subset \tilde{C}$.)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1,\ldots,2^n\}$. On construit f sur l'intervalle $[b_{2p-1}^{n+1}, a_{2p}^{n+1}]$ en prenant f affine et t.q. $f(b_{2p-1}^{n+1}) = \tilde{b}_{2p-1}^{n+1}$ et $f(a_{2p-1}^{n+1}) = \tilde{a}_{2p-1}^{n+1}$. On remarque que f est ainsi contruit de $(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$ dans $(\cup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{C}_n^c) \cup \tilde{D}$ et est strictement croissante. Comme $(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c)^c = C$ et que C est d'intérieur vide, f est définie sur une partie dense de $[0,1]$ et, comme $(\cup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{C}_n^c)^c = \tilde{C}$ et que $\tilde{C}$ est d'intérieur vide, l'image de f est dense dans $[0,1]$.

Il est maintenant facile de définir f par densité sur tout $[0,1]$. En effet, soit $x \in [0,1] \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$, il existe une suite de points de $(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$, notée $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergeant en croissant vers x et une suite de points de $(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$, notée $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergeant en décroissant vers x (en fait, ces points peuvent même être pris dans D). Comme f et croissante, la suite $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc en croissant vers un certain $\gamma \in [0,1]$ et la suite $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers un certain $\delta \in [0,1]$ (la croissance de f donne aussi que ces limites ne dépendent que du choix de x et non du choix des suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Comme f est croissante, on a $\gamma \le \delta$ et comme l'image de f (définie pour l'instant seulement sur $(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$) est dense dans $[0,1]$, on a nécessairement $\gamma = \delta$ (l'intervalle γ, δ ne rencontre pas l'image de f). On peut donc poser $f(x) = \gamma = \delta$.

La fonction f est donc maintenant définie sur tout $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. Elle est strictement croissante et son image est dense dans $[0,1]$, elle est donc continue (par le même raisonnement que celui fait pour définir $f(x)$ en tout point $x \in [0,1] \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$). Comme une application continue transforme un compact en compact, on a donc $f([0,1]) = [0,1]$ et ceci prouve en particulier que $f([0,1] \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D) = [0,1] \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{C}_n^c) \cup \tilde{D}$. Comme $f(D) = \tilde{D}$, on a aussi $f(C) = \tilde{C}$. Pour que f soit définie sur $\mathbb{R}$ et continue, on ajoute $f(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f(x) = 1$ pour $x > 1$. On a toujours $f(C) = \tilde{C}$. Ceci donne bien le résultat désiré car $\lambda(C) = 0$ et $\lambda(\tilde{C}) = \varepsilon > 0$.

Corrigé 34 (Mesure complète)
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Une partie B de E est dite "négligeable" si elle est incluse dans un élément de T de mesure nulle. On note $\mathcal{N}_m$ l'ensemble des parties négligeables. On pose $\overline{T} = \{A \cup N;\ A \in T,\ N \in \mathcal{N}_m\}$.

1. Montrer que $\overline{T}$ est une tribu et que $T \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

———————————————————————corrigé———————————————————————

(a) On montre d'abord que $\overline{T}$ est une tribu.

- $\emptyset \in \overline{T}$ car $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ et $\emptyset$ appartient à T et $\mathcal{N}_m$ (car il est de mesure nulle).
- $\overline{T}$ est stable par passage au complémentaire :

  Soit $C \in \overline{T}$. Il existe $A \in T$ et $N \in \mathcal{N}_m$ t.q. $C = A \cup N$. Comme $N \in \mathcal{N}_m$, il existe $B \in T$ t.q. $N \subset B$ et $m(B) = 0$.

  On remarque alors que $C^c = (A \cup N)^c = A^c \cap N^c = (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap N^c \cap B)$. Comme $A^c \cap B^c \in T$ (par les propriétés de stabilité de T) et $(A^c \cap N^c \cap B) \in \mathcal{N}_m$ (car inclus dans B), on en déduit que $C^c \in \overline{T}$. Donc, $\overline{T}$ est stable par passage au complémentaire.
- $\overline{T}$ est stable par union dénombrable :

  Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{T}$. Il existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_m$ t.q. $C_n = A_n \cup N_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_n \in \mathcal{N}_m$, il existe $B_n \in T$ t.q. $N_n \subset B_n$ et $m(B_n) = 0$.

  On a alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n = (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} N_n)$. On remarque que $\cup_{n\in\mathbb{N}} N_n \subset B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in T$ et $m(B) = 0$ par σ-sous additivité de m. Donc, $\cup_{n\in\mathbb{N}} N_n \in \mathcal{N}_m$. comme $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$, on a finalement $\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \overline{T}$. Ce qui prouve bien que $\overline{T}$ est stable par union dénombrable.

On a bien montré que $\overline{T}$ est une tribu sur E.

(b) On montre maintenant que $T \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

- Si $A \in T$, on a $A = A \cup \emptyset$. Comme $\emptyset \in \mathcal{N}_m$, on en déduit $A \in \overline{T}$. Donc, $T \subset \overline{T}$.
- Si $N \in \mathcal{N}_m$, on a $N = \emptyset \cup N$. Comme $\emptyset \in T$, on en déduit $N \in \overline{T}$. Donc, $\mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

Finalement, on a bien $T \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

———

2. Soit A_1, $A_2 \in T$ et N_1, $N_2 \in \mathcal{N}_m$ t.q. $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$. Montrer que $m(A_1) = m(A_2)$.

———————————————————————corrigé———————————————————————

Soit $B_2 \in T$ t.q. $N_2 \subset B_2$ et $m(B_2) = 0$. On a :

$$A_1 \subset A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \subset A_2 \cup B_2.$$

Donc, par monotonie et sous additivité de m, $m(A_1) \le m(A_2 \cup B_2) \le m(A_2) + m(B_2) = m(A_2)$. En changeant les rôles de A_1 et A_2, on a aussi $m(A_2) \le m(A_1)$. On a donc $m(A_1) = m(A_2)$.

———

Pour $B \in \overline{T}$, soit $A \in T$ et $N \in \mathcal{N}_m$ t.q. $B = A \cup N$, on pose $\overline{m}(B) = m(A)$. (La question précédente montre que cette définition est cohérente.)

3. Montrer que $\overline{m}$ est une mesure sur $\overline{T}$ et $\overline{m}_{|_T} = m$. Montrer que $\overline{m}$ est la seule mesure sur $\overline{T}$ égale à m sur T.

———————————————————————corrigé———————————————————————

(a) On montre d'abord que $\overline{m}$ est une mesure sur $\overline{T}$.

Comme $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ et $\emptyset \in T \cap \mathcal{N}_m$, on a $\overline{m}(\emptyset) = m(\emptyset) = 0$.

Soit maintenant $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{T}$ t.q. $C_n \cap C_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Il existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_m$ t.q. $C_n = A_n \cup N_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_n \in \mathcal{N}_m$, il existe $B_n \in T$ t.q. $N_n \subset B_n$ et $m(B_n) = 0$.

On a donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n = (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} N_n)$. On a déjà vu que $\cup_{n\in\mathbb{N}} N_n \in \mathcal{N}_m$. Par définition de $\overline{m}$, on a donc $\overline{m}(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n) = m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. Comme $C_n \cap C_m = \emptyset$ si $n \neq m$, on a aussi $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$ (car $A_p \subset C_p$ pour tout p). La σ-additivité de m (et la définition de $\overline{m}(C_n)$) donne(nt) alors :

$$\overline{m}(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n) = m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{m}(C_n).$$

Ce qui prouve la σ-additivité de $\overline{m}$.

(b) On montre maintenant que $\overline{m}_{|T} = m$.

Si $A \in T$, on a $A = A \cup \emptyset$. Comme $\emptyset \in \mathcal{N}_m$, on a donc ($A \in \overline{T}$, on le savait déjà, et) $\overline{m}(A) = m(A)$. Donc, $\overline{m}_{|T} = m$.

(c) Enfin, on montre que $\overline{m}$ est la seule mesure sur $\overline{T}$ égale à m sur T.

Soit $\tilde{m}$ une mesure sur $\overline{T}$ égale à m sur T.

Soit $C \in \overline{T}$. Il existe $A \in T$ et $N \in \mathcal{N}_m$ t.q. $C = A \cup N$. Comme $N \in \mathcal{N}_m$, il existe $B \in T$ t.q. $N \subset B$ et $m(B) = 0$. On a alors $A \subset C \subset A \cup B$. La monotonie de $\tilde{m}$, le fait que $\tilde{m} = m$ sur T et la sous additivité de m donnent :

$$m(A) = \tilde{m}(A) \le \tilde{m}(C) \le \tilde{m}(A \cup B) = m(A \cup B) \le m(A) + m(B) = m(A).$$

On a donc $\tilde{m}(C) = m(A) = \overline{m}(C)$. Ce qui prouve que $\tilde{m} = \overline{m}$.

---

4. Montrer que $\mathcal{N}_{\overline{m}} = \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

——————————————**corrigé**——————————————

On a déjà vu (à la question 1) que $\mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

- Il est facile de voir que $\mathcal{N}_m \subset \mathcal{N}_{\overline{m}}$. En effet, soit $N \in \mathcal{N}_m$. Il existe $B \in T$ t.q. $N \subset B$ et $m(B) = 0$. Comme $T \subset \overline{T}$ et que $\overline{m} = m$ sur T, on a donc aussi $B \in \overline{T}$ et $\overline{m}(B) = 0$. Ce qui prouve que $N \in \mathcal{N}_{\overline{m}}$.
- Soit maintenant $N \in \mathcal{N}_{\overline{m}}$. Il existe $C \in \overline{T}$ t.q. $N \subset C$ et $\overline{m}(C) = 0$. Comme $C \in \overline{T}$, il existe $A \in T$, $M \in \mathcal{N}_m$ et $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$ et $C = A \cup M \subset A \cup B$. la définition de $\overline{m}$ donne que $\overline{m}(C) = m(A)$, on a donc $m(A) = 0$. On en déduit $m(A \cup B) \le m(A) + m(B) = 0$, et donc, comme $C \subset A \cup B$, on a bien $C \in \mathcal{N}_m$.

On a bien montré que $\mathcal{N}_{\overline{m}} = \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

L'exercice 4.18 page 104 montre la différence "dérisoire", du point de vue de l'intégration, entre (E, T, m) et son complété $(E, \overline{T}, \overline{m})$.

Corrigé 35 (Série commutativement convergente dans $\mathbb{R}$)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de montrer que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$ est convergente pour toute bijection $\varphi\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est absolument convergente.

Pour montrer ce résultat, on suppose, par exemple, que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^+ = \infty$. Montrer qu'il existe $\varphi\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, bijective, t.q. $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \to \infty$ quand $n \to \infty$. Conclure.

—————————————**corrigé**—————————————

On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ n'est pas absolument convergente. La suite $(\sum_{p=0}^{n} |a_p|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc en croissant vers ∞. Comme $|a_p| = a_p^+ + a_p^-$ et que $a_p^+ = \max\{a_p, 0\} \geq 0$ et $a_p^- = \max\{-a_p, 0\} \geq 0$, les deux suites $(\sum_{p=0}^{n} a_p^+)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sum_{p=0}^{n} a_p^-)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc aussi croissantes et l'une des deux, au moins, converge vers ∞. On suppose que la suite $(\sum_{p=0}^{n} a_p^+)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ∞ (un raisonnement analogue à ce qui suit permettrait de traiter le cas où la suite $(\sum_{p=0}^{n} a_p^-)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ∞). On va construire ci-après une bijection φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \to \infty$ quand $n \to \infty$. Ceci prouvera que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$ est non convergente pour au moins une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

On note $P = \{n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0\}$ et $N = \{n \in \mathbb{N},\ a_n < 0\}$ (de sorte que $P \cap N = \emptyset$ et $P \cup N = \mathbb{N}$). Soit φ_1 et φ_2 les deux applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. $P = \{\varphi_1(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ et $N = \{\varphi_2(n),\ n \in \mathbb{N}\}$.

On comnence par montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ t.q. $a_0 = 0$ et :

$$a_{\varphi_2(n)} + \sum_{p=a_n}^{a_{n+1}-1} a_{\varphi_1(p)} \geq 1. \tag{12.10}$$

Pour montrer l'existence d'une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose $a_0 = 0$. Puis, on raisonne par récurrence sur n. Si $a_0, \ldots, a_n$ sont contruits, l'existence de a_{n+1} découle du fait que $\sum_{p=a_n}^{\infty} a_{\varphi_1(p)} = \sum_{p=\varphi_1(a_n)}^{\infty} a_p^+ = \infty$.

la construction de la suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ se fait alors en prenant $\varphi_1(a_0), \ldots, \varphi_1(a_1 - 1)$ puis $\varphi_2(0)$ puis $\varphi_1(a_1), \ldots, \varphi_1(a_2 - 1)$ puis $\varphi_2(1)\ldots$ puis $\varphi_1(a_n), \ldots, \varphi_1(a_{n+1} - 1)$ puis $\varphi_2(n)\ldots$

Pour décrire précisément cette application φ, on pose $b_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = b_n + a_{n+1} - a_n + 1$ (la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend donc vers ∞ quand $n \to \infty$). On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(q)$ losrque $q \in \{b_n, \ldots b_{n+1} - 1\}$ par :

$$\begin{aligned}
&\varphi(b_n + p) = \varphi_1(a_n + p) \text{ pour } p \in \{0, \ldots, a_{n+1} - a_n - 1\},\\
&\varphi(b_{n+1} - 1) = \varphi_2(n).
\end{aligned}$$

On a bien ainsi défini une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ car $b_{n+1} - 1 = b_n + p$, pour $p = a_{n+1} - a_n$. L'application φ est surjective car $\{\varphi(q),\ q \in \mathbb{N}\} = P \cup N\}$. Elle est injective car chaque valeur de φ_1 et φ_2 n'est prise qu'une seule fois par φ. Enfin, on a bien $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \to \infty$ quand $n \to \infty$. En effet, on remarque que, grâce à (12.10) :

$$\sum_{q=0}^{b_{n+1}-1+p} a_{\varphi(q)} \geq \sum_{q=0}^{b_{n+1}-1} a_{\varphi(q)} \geq n,$$

pour tout $p \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Ce qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\liminf_{p\to\infty} \sum_{q=0}^{p} a_{\varphi(q)} \geq n$, et donc $\sum_{q=0}^{p} a_{\varphi(q)} \to \infty$, quand $p \to \infty$.

———————————————————————————————

Corrigé 36 (Mesure sur S^1)

On considère $S^1 = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2, |x|^2+|y|^2 = 1\}$ (S^1 est donc le cercle unité de $\mathbb{R}^2$). Pour $z = (x,y)^t \in S^1$, il existe un unique $\theta_z \in [0,2\pi[$ t.q. $x = \cos(\theta_z)$ et $y = \sin(\theta_z)$. Pour $\alpha \in [0,2\pi[$ et $z \in S^1$ on pose $R_\alpha(z) = (\cos(\theta_z+\alpha), \sin(\theta_z+\alpha))^t$. Noter que R_α est une bijection de S^1 sur S^1 (c'est la rotation d'angle α).

Définir une tribu T sur S^1, t.q. T contienne les parties de la forme $\{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \ \theta \in]\alpha,\beta[\}$ avec $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, et une mesure μ sur T de sorte que (S^1, T, μ) soit un espace mesuré avec $\mu(S^1) = 1$ et t.q. μ soit invariante par rotation (c'est à dire que, pour tout $A \in T$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$, on ait $R_\alpha(A) = \{R_\alpha(z), z \in A\} \in T$ et $\mu(R_\alpha(A)) = \mu(A)$). [On pourra utiliser la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.]

———————————————**corrigé**———————————————

On note Θ l'application $z \mapsto \theta_z$ de S^1 dans $\mathbb{R}$ (cette application est bijective de S^1 dans $[0,2\pi[$). On prend alors $T = \{\Theta^{-1}(B), \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. C'est bien une tribu sur S^1 (voir l'exercice 2.4).

Soit $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ et $E = \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \ \theta \in]\alpha,\beta[\}$. On a $E \subset S^1$ et, si $z \in S^1$, on a $z \in E$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ t.q. $\theta_z + 2k\pi \in]\alpha,\beta[$. Ceci prouve que

$$E = \cup_{k\in\mathbb{Z}} \Theta^{-1}(]\alpha - 2k\pi, \beta - 2k\pi[),$$

et donc que $E \in T$ car $\Theta^{-1}(]\alpha - 2k\pi, \beta - 2k\pi[) \in T$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On définit maintenant μ. Soit $A \in T$. On pose $\Theta_A = \{\theta_z, \ z \in A\}$. Comme $A \in T$, il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $A = \Theta^{-1}(B)$, et donc $A = \Theta^{-1}(B \cap [0,2\pi[)$. Comme Θ est une bijection de S^1 dans $[0,2\pi[$, on a alors $\Theta_A = B \cap [0,2\pi[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $\mu(A) = \frac{1}{2\pi}\lambda(\Theta_A)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

μ est bien une mesure sur T. En effet, on a $2\pi\mu(\emptyset) = \lambda(\Theta_\emptyset) = \lambda(\emptyset) = 0$. Puis, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de T, disjoints 2 à 2, la suite $(\Theta_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, disjoints 2 à 2. La $\sigma-$additvité de μ découle alors de celle de λ.

Il reste à montrer que μ est invariante par rotation. Soit $\alpha \in [0,2\pi[$ et $A \in T$. Comme on l'a vu précédemment, il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $A = \Theta^{-1}(B \cap [0,2\pi[)$. On a donc $A = \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \theta \in B \cap [0,2\pi[\}$. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, on note $B_\beta = \{\theta + \beta, \ \theta \in B\}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&R_\alpha(A) = \{(\cos(\theta+\alpha), \sin(\theta+\alpha))^t, \ \theta \in B \cap [0,2\pi[\} = \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \ \theta \in B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi+\alpha[\} \\
&= \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \ \theta \in B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[\} \cup \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \ \theta \in B_{\alpha-2\pi} \cap [0,\alpha[\} \\
&= \Theta^{-1}(B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[) \cup \Theta^{-1}(B_{\alpha-2\pi} \cap [0,\alpha[).
\end{aligned}$$

La propriété d'invariance par translation de λ permet de dire que $B_\beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$. On a donc $R_\alpha(A) \in T$ et, par additivité d'une mesure et définition de μ,

$$2\pi\mu(R_\alpha(A)) = \lambda(B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[) + \lambda(B_{\alpha-2\pi} \cap [0,\alpha[).$$

L'invariance par translation de λ donne $\lambda(B_{\alpha-2\pi} \cap [0,\alpha[) = \lambda(B_\alpha \cap [2\pi, \alpha+2\pi[)$ et donc :

$$2\pi\mu(R_\alpha(A)) = \lambda(B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[) + \lambda(B_\alpha \cap [2\pi, \alpha+2\pi[) = \lambda(B_\alpha \cap [\alpha, \alpha+2\pi[) = \lambda(B \cap [0,2\pi[).$$

Ce qui donne bien $\mu(R_\alpha(A)) = \mu(A)$.

———————————————————————————————————

12.2.3 Probabilités

Corrigé 37 (Lemme de Borel-Cantelli)

Soient (E, T, p) un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On pose $B_n = \cup_{k\geq n} A_k$ et $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ (on rappelle que $A = \limsup_{n\to\infty} A_n$).

1. Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) < +\infty$ alors $p(A) = 0$.

   —————————————corrigé—————————————

   Cette question a été corrigée dans le corrigé 28.

   ———————————————————————————————

2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants. On suppose aussi que $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) = \infty$. Montrer que $p(A) = 1$.

   —————————————corrigé—————————————

   Comme cela a été vu dans le corrigé 28, la propriété de continuité décroissante d'une mesure (voir la proposition 2.3) domme $p(A) = \lim_{n\to\infty} p(B_n)$. Il suffit donc de montrer que $p(B_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Si il existe $k \geq n$ t.q. $p(A_k) = 1$, on a, par monotonie de p, que $p(B_n) \geq p(A_k) = 1$ et donc $p(B_n) = 1$. On suppose maintenant que $p(A_k) < 1$ pour tout $k \geq n$. Comme $B_n^c = \cap_{k\geq n} A_k^c$, la continuité décroissante de p et l'indépendance des A_k donne :

   $$p(B_n^c) = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} p(A_k^c) = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} (1 - p(A_k)).$$

   Comme $\ln(1-x) \leq -x$ pour tout $x < 1$ (ou, de manière équivalente, $\ln(u) \leq u-1$ pour tout $u > 0$, ceci est une conséquence, par exemple, de la concavité de la fonction ln), on a, pour $m > n$:

   $$\ln(\prod_{k=n}^{m} (1 - p(A_k))) = \sum_{k=n}^{m} \ln(1 - p(A_k)) \leq - \sum_{k=n}^{m} p(A_k).$$

   De l'hypothèse $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) = \infty$, on déduit $\lim_{m\to\infty} \ln(\prod_{k=n}^{m}(1-p(A_k))) = -\infty$, et donc $p(B_n^c) = 0$. Ceci donne bien $p(B_n) = 1$ et termine la démonstration.

   ———————————————————————————————

12.3 Exercices du chapitre 3

12.3.1 Fonctions mesurables

Corrigé 38 (Caractérisation des fonctions mesurables) ($\star$)
Soient (E, T) un espace mesurable et f une application de E dans $\mathbb{R}$;

1. Montrer que $T_f = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\,;\, f^{-1}(B) \in T\}$ est une tribu.

———————————————**corrigé**———————————————

Cette question est un cas particulier (avec $F = \mathbb{R}$) de la question 2 de l'exercice 2.4, voir le corrige 12 page 285.

—————————————————————————————————

2. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

   (i) f est mesurable,

   (ii) $f^{-1}(C) \in T$, pour tout $C \in \mathcal{C}$.

———————————————**corrigé**———————————————

On remarque que f mesurable signifie simplement que T_f (définie à la question précédente) contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Le sens (i) $\Rightarrow$ (ii) est immédiat car $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour le sens (ii) $\Rightarrow$ (i), on remarque que T_f est une tribu. Donc, si T_f contient $\mathcal{C}$, on a aussi T_f contient $T(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci donne f mesurable. Donc, on a bien (ii) $\Rightarrow$ (i)

—————————————————————————————————

Corrigé 39 (Composition de fonctions mesurables)
Soit (E, T) et (F, S) deux espaces mesurables. Soit $f : E \to F$ et $\varphi : F \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours, de la tribu borélienne). On suppose que f et φ sont mesurables. Montrer que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

———————————————**corrigé**———————————————

E est muni de la tribu T, F est muni de la tribu S et $\mathbb{R}$ est muni de la tribu borélienne.

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on remarque que $(\varphi \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(\varphi^{-1}(B))$. Comme $\varphi^{-1}(B) \in S$ car φ est mesurable (de F dans $\mathbb{R}$), on a donc $f^{-1}(\varphi^{-1}(B)) \in T$ car f est mesurable (de E dans F). Ceci montre bien que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

—————————————————————————————————

Corrigé 40 ($\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+ \ldots$)
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne. Montrer que φ est mesurable (on dit aussi borélienne) si et seulement si φ est mesurable quand on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ ($\overline{\mathbb{R}}_+$ étant aussi muni de la tribu borélienne).

———————————————**corrigé**———————————————

On suppose φ mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit B un borélien de $\overline{\mathbb{R}}_+$, on a donc $B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (voir la définition 3.1 page 53). Comme φ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et que φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a donc $\varphi^{-1}(B) = \varphi^{-1}(B \cap \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci donne donc que φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Réciproquement, on suppose maintenant φ mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (mais φ ne prend jamais la valeur ∞, on peut donc la considérer comme étant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc aussi $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et donc $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ceci prouve que φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé 41 (Stabilité de $\mathcal{M}$)

1. Soient (E,T), (E',T'), (E'',T'') des espaces mesurables, f (resp. g) une application de E dans E' (resp. de E' dans E''). On suppose que f et g sont mesurables. Montrer que $g \circ f$ est une application mesurable de E dans E''.

   ——————————**corrigé**——————————

   Cette question est identique à celle de l'exercice 3.3 (voir le corrigé 39) avec E'' au lieu de $\mathbb{R}$. La démonstration est semblable :

   Soit $B \in T''$, on remarque que $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$. Comme $g^{-1}(B) \in T'$ car g est mesurable (de E' dans E''), on a donc $f^{-1}(g^{-1}(B)) \in T$ car f est mesurable (de E dans E'). Ceci montre bien que $g \circ f$ est mesurable (de E dans E").

   ---

2. Soit (E,T) un espace mesurable, on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; soient f et g des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $f^+(= \sup(f,0))$, $f^-(= -\inf(f,0))$ sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

   ——————————**corrigé**——————————

   Cette question est démontrée dans la proposition 3.7 page 60.

   (b) Montrer que $f+g$, fg et $|f|$ sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

   ——————————**corrigé**——————————

   Le fait que $f+g$, $fg \in \mathcal{M}$ est démontré dans la proposition 3.5 et le fait que $|f| \in \mathcal{M}$ est démontré dans la proposition 3.7 (car $|f|$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et $|f| \in \mathcal{M}_+$, on conclut avec l'exercice 3.4, corrigé 40).

   ---

3. Soient (E,T) un espace mesurable, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\mathbb{R}$) pour tout $x \in E$. On pose $f(x) = lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (pour tout $x \in E$). Montrer que f est une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.

   ——————————**corrigé**——————————

   La démonstration de cette question est donnée dans la proposition 3.5 page 58 (propriété 3).

   ---

4. Soit (E,T) un espace mesurable, on suppose qu'il existe $A \in T$ dont les sous-ensembles ne soient pas tous mesurables. Il existe donc $B \subset A$ t.q. $B \notin T$. Montrer que $h = 1_B - 1_{A\setminus B}$ n'est pas mesurable (de E dans $\mathbb{R}$), alors que $|h|$ l'est.

   ——————————**corrigé**——————————

$\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors que $h^{-1}(\{1\}) = B \notin T$, donc h n'est pas mesurable. Par contre $|h| = 1_A$ est mesurable car $A \in T$.

Corrigé 42 (Mesurabilité des fonctions continues)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne

1. On suppose f continue. Montrer que f est mesurable (on dit aussi que f est borélienne).

   —————————————**corrigé**—————————————

   Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Comme f est continue, $f^{-1}(O)$ est aussi un ouvert de $\mathbb{R}$, donc $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme l'ensemble des ouverts des ouverts engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on en déduit que f est mesurable (on utilise ici le caractérisation de la mesurabilité donnée à la proposition 3.2 page 56).

   ---

2. On suppose f continue à droite (resp. gauche). Montrer que f est mesurable.

   —————————————**corrigé**—————————————

   On suppose f continue à droite. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit f_n par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq -n, \\ f(\frac{p}{n}) & \text{si} \quad \frac{p-1}{n} < x \leq \frac{p}{n},\ p \in \{-n^2+1, \ldots, n^2\} \\ 0 & \text{si} \quad x > n, \end{cases}$$

   de sorte que

$$f_n = \sum_{p=-n^2+1}^{n^2} f(\frac{p}{n}) 1_{]\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n}]}.$$

   On a $f_n \in \mathcal{E}$ car $]\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n}] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout n et p. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n > |x|$, on a $f_n(x) = f(\frac{p}{n})$ avec $\frac{p}{n} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{p}{n}$ (p dépend de n, x est fixé). Comme f est continue à droite en x, on a donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$ (car $\frac{p}{n} \to x$, avec $\frac{p}{n} \geq x$). La deuxième caractérisation de la mesurabilité (proposition 3.6 page 60) donne alors $f \in \mathcal{M}$.

   ---

3. On suppose f croissante. Montrer que f est mesurable.

   —————————————**corrigé**—————————————

   Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $A = f^{-1}([\alpha, \infty[)$. On suppose $A \neq \emptyset$ (si $A = \emptyset$, on a bien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$). Si $x \in A$, on a $f(x) \geq \alpha$ et, comme f est croissante, on a aussi $f(y) \geq \alpha$ pour tout $y \geq x$. Donc, $[x, \infty[\subset A$. En posant $a = \inf A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, on en déduit que $]a, \infty[\subset A \subset [a, \infty[$. A est donc nécessairement un intervalle (dont la borne supérieure est ∞), ce qui prouve que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme $\{[\alpha, \infty[,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on en déduit que f est mesurable. (On a utilisé ici de nouveau la caractérisation de la mesurabilité donnée à la proposition 3.2 page 56).

Corrigé 43 (Egalité presque partout)

1. Soient f et g des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue ; montrer que $f = g$ λ p.p. si et seulement si $f = g$.

———————————————**corrigé**———————————————

Si $f = g$ (c'est-à-dire $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), on a bien $f = g$ λ p.p. car $f = g$ sur $\emptyset^c$ et $\lambda(\emptyset) = 0$.

Pour la réciproque, on va utiliser le fait qu'un ouvert non vide est toujours de mesure de Lebesgue strictement positive. En effet, si O est un ouvert non vide, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha < \beta$ et $]\alpha, \beta[\subset O$, on a donc $0 < \beta - \alpha = \lambda(]\alpha, \beta[) \leq \lambda(O)$.

On suppose maintenant que $f = g$ λ p.p., il existe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(A) = 0$ et $f = g$ sur A^c. On a alors $\{f(x) \neq g(x)\} \subset A$. Or, $\{f(x) \neq g(x)\} = (f-g)^{-1}(\mathbb{R}^\star)$ est un ouvert car $(f-g)$ est continue (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et $\mathbb{R}^\star$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc $\{f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et la monotonie de λ donne $\lambda(\{f(x) \neq g(x)\}) \leq \lambda(A) = 0$. On en déduit que $\{f(x) \neq g(x)\} = \emptyset$ (car un ouvert non vide est toujours de mesure de Lebesgue strictement positive) et donc $f = g$.

———————————————————————————————

2. Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et δ_0 la mesure de Dirac en 0 ; montrer que $f = g$ δ_0 p.p. si et seulement si $f(0) = g(0)$.

———————————————**corrigé**———————————————

Si $f(0) = g(0)$, on prend $A = \{0\}^c$. On a bien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_0(A) = 0$ et $f = g$ sur A^c car $A^c = \{0\}$. Donc, $f = g$ δ_0 p.p..

Réciproquement, on suppose maintenant que $f = g$ δ_0 p.p., il existe donc $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $f = g$ sur A^c et $\delta_0(A) = 0$. Comme $\delta_0(A) = 0$, on a donc $0 \notin A$, c'est-à-dire $0 \in A^c$ et donc $f(0) = g(0)$.

———————————————————————————————

Corrigé 44

Soit $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}^p$ de sa tribu borélienne (pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$). on suppose que f est mesurable par rapport à $x \in \mathbb{R}^N$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, et que f est continue a gauche par rapport a $y \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Pour $n > 1$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose : $a_p^n = \frac{p}{n}$, $p \in \mathbb{Z}$; on définit la fonction f_n, $n > 1$, de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x, y) = f(x, a_p^n), \text{ si } y \in [a_p^n, a_{p+1}^n[$$

On se limite à $N = 1$.

1. Montrer que f_n converge simplement vers f lorsque $n \to +\infty$.

———————————————**corrigé**———————————————

Soit $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a donc $f_n(x, y) = f(x, \frac{p}{n})$ avec $\frac{p}{n} \leq y < \frac{p}{n} + \frac{1}{n}$. Noter que x et y sont fixés et que p dépend de n. Quand $n \to \infty$, on a donc $\frac{p}{n} \to y$ avec $\frac{p}{n} \leq y$. Comme $f(x, \cdot)$ est continue à gauche en y, on a donc $f(x, \frac{p}{n}) \to f(x, y)$ quand $n \to \infty$, c'est-à-dire $f_n(x, y) \to f(x, y)$ quand $n \to \infty$.

———————————————————————————————

2. Montrer que f_n est mesurable. [On pourra utiliser, sans le démontrer, le fait que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ si $A,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci est démontré dans l'exercice 2.6 page 42.]

———————————————**corrigé**———————————————

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $p \in \mathbb{Z}$, on pose $g_p = f(\cdot, \frac{p}{n})$. On a donc, par hypothèse, g_p mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$. Il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ t.q. $y \in [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[$. On a alors $f_n(x, y) = g_p(x)$ et donc $f_n(x, y) \in C$ si et seulement $g_p(x) \in C$. On en déduit que :

$$f_n^{-1}(C) = \cup_{p\in\mathbb{Z}}(g_p^{-1}(C) \times [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[).$$

Comme g_p est mesurable, on a $g_p^{-1}(C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a aussi $[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $g_p^{-1}(C) \times [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (ceci est démontré dans l'exercice 2.6 page 42). Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est stable par union dénombrable, on en déduit $f_n^{-1}(C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et donc f_n mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

———————————————————————————————

3. Montrer que f est mesurable.

———————————————**corrigé**———————————————

Comme f_n mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et que $f_n(x, y) \to f(x, y)$, quand $n \to \infty$, pour tout $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$, la propriété 3 de la proposition 3.5 donne que f est mesurable (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$).

———————————————————————————————

Corrigé 45 (Tribu de Borel sur $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$)

1. Montrer que $\{[0, \beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^\star\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

———————————————**corrigé**———————————————

On note $\mathcal{C}_1 = \{[0, \beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^\star\}$.

- Comme $[0, \beta[$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et donc $T(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.
- Par stabilité d'une tribu par passage au complémentaire, on a $\{[\beta, \infty], \beta \in \mathbb{R}_+^\star\} \subset T(\mathcal{C}_1)$.
  Comme $[0, \infty] = [0, 1[\cup[1, \infty] \in T(\mathcal{C}_1)$, on a aussi $\{[\alpha, \infty], \alpha \in \mathbb{R}_+\} \subset T(\mathcal{C}_1)$.
  Par stabilité d'une tribu par intersection, on a alors $\{[\alpha, \beta[,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+,\ \alpha < \beta\} \subset T(\mathcal{C}_1)$.
  Par stabilité d'une tribu par union dénombrable, on montre alors que $\{]\alpha, \beta[,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+,\ \alpha < \beta\} \subset T(\mathcal{C}_1)$ et $\{]\beta, \infty], \beta \in \mathbb{R}_+\} \subset T(\mathcal{C}_1)$.

  Comme tout ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles du type $]\alpha, \beta[$ (avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$), $[0, \beta[$ (avec $\beta \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$) et $]\beta, \infty]$ (avec $\beta \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$), on en déduit que tout ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ est dans $T(\mathcal{C}_1)$ et donc $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) \subset T(\mathcal{C}_1)$.

On a bien montré que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) = T(\mathcal{C}_1)$.

———————————————————————————————

2. Montrer que $\{[0, \beta[, \beta \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^\star\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

———————————————**corrigé**———————————————

On note $\mathcal{C}_2 = \{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^\star\}$. Si $\beta \in \mathbb{R}_+^\star$, on remarque que $[0,\beta[= \cup_{\alpha\in\mathbb{Q}\cap\mathbb{R}_+^\star,\alpha<\beta}[0,\alpha[$. On en déduit que $[0,\beta[\in T(\mathcal{C}_2)$. On a donc $\mathcal{C}_1 \subset T(\mathcal{C}_2)$ et $T(\mathcal{C}_1) \subset T(\mathcal{C}_2)$.

Comme $T(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, on a aussi $T(\mathcal{C}_2) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

---

3. Montrer que $\{]0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^\star\}$ n'engendre pas $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

—————————————**corrigé**—————————————

On prend un ensemble E (ayant au moins 2 éléments) et une tribu T sur E différente de $\mathcal{P}(E)$ (par exemple, $T = \{\emptyset, E\}$). Soit alors $A \subset E$, $A \notin T$. On définit f de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par $f(x) = \infty$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ si $x \notin A$. Comme $A \notin T$, la fonction f est non mesurable. On a pourtant $f^{-1}(]0,\beta[) = \emptyset \in T$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^\star$. Ceci montre que $\{]0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^\star\}$ n'engendre pas $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Corrigé 46

Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On se propose de montrer que le graphe de f est un borélien de $\mathbb{R}^2$. On admettra le résultat suivant, vu en TD :

$$A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2). \tag{12.11}$$

On munit aussi $\mathbb{R}^2$ de sa tribu borélienne. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $F(x,y) = f(x)$ et $H(x,y) = y$.

1. Montrer que F et H sont mesurables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

—————————————**corrigé**—————————————

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a $F^{-1}(A) = f^{-1}(A) \times \mathbb{R}$. Comme f est mesurable, $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, (12.11) donne $f^{-1}(A) \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et donc $F^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On a donc F mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Le fait que H est mesurable se démontre de manière semblable en remarquant que $H^{-1}(A) = \mathbb{R} \times A$ (ou en utilisant la continuité de H).

---

2. On pose $G(f) = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2;\ y = f(x)\}$ ($G(f)$ est donc le graphe de f). Montrer que $G(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

—————————————**corrigé**—————————————

L'ensemble de fonctions mesurables est un espace vectoriel, on a donc $F - H$ mesurable. On en déduit que $G(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ en remarquant que $G(f) = (F-H)^{-1}(\{0\})$ et $\{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Corrigé 47 (mesurabilité au sens de Lusin)

Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts de $\mathbb{R}^N$. On rappelle (cf. cours) que m est nécessairement régulière (c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F fermé et O ouvert t.q. $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) < \varepsilon$).

Soit $f \in \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. On dit que f est “mesurable au sens de Lusin” si pour tout compact K et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K_1 compact, $K_1 \subset K$, t.q. $m(K \setminus K_1) \le \varepsilon$ et $f_{|_{K_1}} \in C(K_1, \mathbb{R})$.

1. On suppose, dans cette question, que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Montrer que f est mesurable au sens de Lusin. [Construire K_1 avec K, F et O, où F et O sont donnés par la régularité de m appliquée à l'ensemble A.]

———————————————**corrigé**———————————————

Soit K compact et $\varepsilon > 0$. Par la régularité de m, il existe F fermé et O ouvert t.q. $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) < \varepsilon$. On prend $K_1 = (K \cap F) \cup (K \cap O^c)$.

Les ensembles $K \cap F$ et $K \cap O^c$ sont fermés (car l'intersection d'un compact et d'un fermé est un compact). L'ensemble K_1 est donc compact car il est l'union de deux compacts. Comme $K_1 = K \setminus (O \setminus F)$, on a bien $K_1 \subset K$ et $(K \setminus K_1) \subset (O \setminus F)$. On en déduit $m(K \setminus K_1) \leq m(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

On montre maintenant que $f_{|_{K_1}} \in C(K_1, \mathbb{R})$. Soit $x \in K_1$. On distingue deux cas :

Premier cas. Si $x \in K \cap F$, on a alors $x \in O$. Comme O est ouvert il existe δ t.q. $B(x, \delta) \subset O$ (où $B(x, \delta)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon δ). On a donc $K_1 \cap B(x, \delta) \subset K \cap F \subset A$. Ce qui prouve que $f_{|_{K_1}}$ est constante et égale à 1 sur $K_1 \cap B(x, \delta)$ et donc $f_{|_{K_1}}$ est continue en x (car constante dans un voisinage de x).

Deuxième cas. Si $x \in K \cap O^c$, on raisonne de manière similaire. On a $x \in F^c$. Comme F^c est ouvert il existe δ t.q. $B(x, \delta) \subset F^c$. On a donc $K_1 \cap B(x, \delta) \subset K \cap O^c \subset A^c$. Ce qui prouve que $f_{|_{K_1}}$ est constante et égale à 0 sur $K_1 \cap B(x, \delta)$ et donc $f_{|_{K_1}}$ est continue en x.

———————————————————————————————

2. On suppose, dans cette question, que f est étagée (c'est-à-dire $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$). Montrer que f est mesurable au sens de Lusin.

———————————————**corrigé**———————————————

Il existe $n \in \mathbb{N}^\star$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. On pose $f_i = 1_{A_i}$, de sorte que $f = \sum_{i=1}^n a_i f_i$.

Soit K compact et $\varepsilon > 0$. Par la question 1, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $K_1^{(i)}$ compact, $K_1^{(i)} \subset K$, t.q. $m(K \setminus K_1^{(i)}) \leq \varepsilon/n$ et $(f_i)_{|_{K_1^{(i)}}} \in C(K_1^{(i)}, \mathbb{R})$. On prend alors :

$$K_1 = \cap_{i=1}^n K_1^{(i)}.$$

On a bien K_1 compact (car intersection de compacts), $K_1 \subset K$. On a aussi $(K \setminus K_1) = \cup_{i=1}^n (K \setminus K_1^{(i)})$ et donc :

$$m(K \setminus K_1) \leq \sum_{i=1}^n m(K \setminus K_1^{(i)}) \leq \varepsilon.$$

Enfin, $f_{|_{K_1}}$ est continue car $f_{|_{K_1}} = \sum_{i=1}^n a_i (f_i)_{|_{K_1}}$ et $(f_i)_{|_{K_1}}$ est continue (puisque $(f_i)_{K_1^{(i)}}$ est continue et $K_1 \subset K_1^{(i)}$).

———————————————————————————————

3. On suppose que f est mesurable (c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$). Montrer que f est mesurable au sens de Lusin. [On rappelle qu'une fonction mesurable est limite simple de fonctions étagées. On pourra utiliser le théorème d'Egorov, Théorème 3.2, et la question précédente.]

———————————————corrigé———————————————

Comme $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ t.q. $f_n \to f$ p.p..

Soit K compact et $\varepsilon > 0$. Par la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $K_1^{(n)}$ compact, $K_1^{(n)} \subset K$, t.q. $m(K \setminus K_1^{(n)}) \le 2^{-n}$ et $(f_n)_{|_{K_1^{(n)}}} \in C(K_1^{(n)}, \mathbb{R})$. On prend tout d'abord :

$$K_2 = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_1^{(n)}.$$

On a bien K_2 compact (car intersection de compacts), $K_2 \subset K$. On a aussi $(K \setminus K_2) = \cup_{n\in\mathbb{N}}(K \setminus K_1^{(n)})$ et donc $m(K \setminus K_2) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(K \setminus K_1^{(n)}) \le 2\varepsilon$. Enfin, $(f_n)_{|_{K_2}}$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour trouver K_1, on utilise maintenant théorème d'Egorov. Comme $f_n \to f$ p.p. sur K_2 et que $m(K_2) < \infty$, il existe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ t.q. $A \subset K_2$, $m(K_2 \setminus A) \le \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A. En utilisant la régularité de m , on trouve aussi $F \subset A$, F fermé et $m(A \setminus F) \le \varepsilon$. On prend alors $K_1 = F$.

On a bien K_1 compact (car K_1 est fermé dans le compact K_2), $K_1 \subset K$. On a $(K \setminus K_1) = (K \setminus K_2) \cup (K_2 \setminus A) \cup (A \setminus F)$ et donc $m(K \setminus K_1) \le 4\varepsilon$. Enfin $f_{|_{K_1}}$ est continue car $f_{|_{K_1}}$ est limite uniforme de la suite de fonctions continues $((f_n)_{|_{K_1}})_{n\in\mathbb{N}}$.

———————————————————————————————

Corrigé 48 (V.a. mesurable par rapport à une autre v.a.)

Dans cet exercice, on démontre le théorème 3.1. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On veut veut montrer que Y est mesurable par rapport à la tribu engendrée par X (notée $\tau(X)$ si et seulement si il existe une fonction borélienne f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$ (c'est-à-dire , plus précisément, que $Y = f \circ X$).

1. Montrer que si Y est de la forme $Y = f(X)$ où f est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors Y est $\tau(X)$-mesurable.

———————————————corrigé———————————————

On rappelle que la tribu engendrée par X est $\tau(X) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $Y^{-1}(B) = X^{-1}(f^{-1}(B))$. Comme f est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ est muni de la tribu borélienne), on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \tau(X)$. Ce qui prouve que T est $\tau(X)$-mesurable.

———————————————————————————————

On suppose maintenant que Y est $\tau(X)$-mesurable.

2. On suppose, dans cette question, qu'il existe une suite de réels (a_j) tels que $a_j \neq a_k$ pour $j \neq k$ et une suite d'événements (A_j) disjoints deux à deux tels que

$$Y = \sum_j a_j 1_{A_j}.$$

On suppose aussi que $\cup_j A_j = \Omega$. Montrer que, pour tout j, $A_j \in \tau(X)$ et qu'il existe une fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$.

—————————————————**corrigé**—————————————————

Soit $j \in \mathbb{N}$. Comme les A_i sont disjoints deux à deux, $a_i \neq a_k$ si $i \neq k$ et $\cup_i A_i = \Omega$, on a $A_j = Y^{-1}(\{a_j\})$. Comme $\{a_j\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et Y est τ-mesurable, on en déduit que $A_j \in \tau(X)$. (On rappelle aussi que $\tau(X) \subset \mathcal{A}$ car X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.)

Pour tout i, il existe $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $A_i = X^{-1}(B_i)$ (car $A_i \in \tau(X)$). Comme les A_i sont disjoints deux à deux, on a, si $i \neq j$, $B_i \cap B_j \cap \operatorname{Im}(X) = \emptyset$ (avec $\operatorname{Im}(X) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$). On peut donc supposer les B_i disjoints deux à deux en remplaçant chaque B_i ($i > 0$) par $B_i \setminus \cup_{j<i} B_j$.

On pose $f = \sum_i a_i 1_{B_i}$. La fonction f est bien une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $\omega \in \Omega$, il existe i t.q. $\omega \in A_i$ (car $\Omega = \cup_i A_i$), on a donc $X(w) \in B_i$ et donc $f(X(\omega)) = a_i = Y(\omega)$. Ce qui donne bien $f(X) = Y$.

—————————————————————————————————

3. Soit n un entier. On définit la fonction $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par: $\phi_n(x) = \frac{1}{n}[nx]$ où $[\cdot]$ désigne la partie entière. ($[x]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.)

   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi_n(x)$ converge vers x, quand $n \to \infty$.

   —————————————————**corrigé**—————————————————

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $0 \leq nx - [nx] < 1$ et donc $0 \leq x - \phi_n(x) < \frac{1}{n}$. Ce qui prouve que $\phi_n(x) \to x$ quand $n \to \infty$.

   —————————————————————————————————

   (b) On pose $Y_n = \phi_n(Y)$. Montrer que Y_n est $\tau(X)$ mesurable.

   —————————————————**corrigé**—————————————————

   On remarque tout d'abord que ϕ_1 est borélienne. En effet, pour $p \in \mathbb{Z}$, on a $\phi_1^{-1}(\{p\}) = [p, p+1[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Puis, pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\phi_1^{-1}(B) = \cup_{p \in \mathbb{Z} \cap B} [p, p+1[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme $x \mapsto nx$ est continue, c'est une application borélienne. Par composition (et produit par $(1/n)$), on en déduit que la fonction ϕ_n est borélienne. On montre alors que Y_n est $\tau(X)$-mesurable, comme dans la première question car, pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $Y_n^{-1}(B) = Y^{-1}(\phi_n^{-1}(B)) \in \tau(X)$.

   —————————————————————————————————

4. Terminer la preuve du théorème.

   —————————————————**corrigé**—————————————————

   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme l'ensemble des valeurs prises par Y_n (définie dans la troisième question) est au plus dénombrable, on peut appliquer la deuxième question. On obtient l'existence de $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, borélienne, t.q. $Y_n = f_n(X)$.

   On note A l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est convergente. A est donc aussi l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est de Cauchy. On en déduit que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car A peut s'écrire :

$$A = \cap_{n \in \mathbb{N}^\star} \cup_{N \in \mathbb{N}^\star} \cap_{p,q \geq N} (f_p - f_q)^{-1}([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]).$$

   On pose maintenant $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ si $x \in A^c$. La fonction f est borélienne car f est limite simple des fonction boréliennes $f_n 1_{A^c}$ quand $n \to \infty$.

Enfin, si $\omega \in \Omega$, on a $Y_n(\omega) = f_n(X(\omega))$. La troisième question donne que $Y_n(\omega) = \phi_n(Y(\omega)) \to Y(\omega)$. On a donc $X(\omega) \in A$ et donc $f_n(X(\omega)) \to f(X(\omega))$. Ceci donne $Y(\omega) = f(X(\omega))$. On a bien montré que $Y = f(X)$ avec f borélienne.

Maintenant, on se demande dans quelle mesure la fonction f est unique. On note P_X la loi de X.

5. Soit f et g deux fonctions boréliennes t.q. $Y = f(X) = g(X)$. Montrer que

$$P_X(f = g) = 1.$$

———————————————**corrigé**———————————————

Soit $B = \{x \in \mathbb{R},\, f(x) = g(x)\}$. On a $B = (f - g)^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Si $\omega \in \Omega$, on a $f(X(\omega)) = g(X(\omega)) = Y(\omega)$ et donc $X(\omega) \in B$. Ceci prouve que $X^{-1}(B) = \Omega$ et donc que $P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = 1$, c'est-à-dire $P_X(f = g) = 1$.

Corrigé 49 (Composition de v.a.)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables alélatoires réelles. (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu des boréliens). On définit Z par

$$\forall \omega \in \Omega\,,\;\; Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega).$$

Montrer que Z est une variable aléatoire.

———————————————**corrigé**———————————————

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$A_n = \{N = n\} = \{\omega \in \Omega,\, N(\omega) = n\}$$

et

$$B_n = Y_n^{-1}(B) = \{Y_n \in B\} = \{\omega \in \Omega,\, Y_n(\omega) \in B\}.$$

(Notre que l'ensemble des A_n, $n \in \mathbb{N}^\star$, forme une partition de Ω.) On va montrer que $Z^{-1}(B) = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}(A_n \cap B_n)$.

En effet, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\omega \in A_{N(\omega)}$ et, si $\omega \in Z^{-1}(B)$, on a $Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega) \in B$. On a donc $\omega \in A_{N(\omega)} \cap B_{N(\omega)}$, ce qui donne bien $\omega \in \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}(A_n \cap B_n)$.

Réciproquement, si $\omega \in \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}(A_n \cap B_n)$, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\omega \in A_n \cap B_n$. On a donc $Z(\omega) = Y_n(\omega) \in B$. On a bien montré que $Z^{-1}(B) = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}(A_n \cap B_n)$.

Comme N et Y_n sont des v.a.r., on a $A_n, B_n \in \mathcal{A}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On en déduit que $Z^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Ceci donne bien que Z est mesurable.

N.B. : Une autre démonstration possible est de remarquer que $Z = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} 1_{A_n} Y_n$.

Corrigé 50 (Evénements, tribus et v.a. indépendantes)
Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (Indépendance de 2 évènements) Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Montrer que A_1 et A_2 sont indépendants (c'est-à-dire $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$) si et seulement si les tribus $\tau(\{A_1\})$ et $\tau(\{A_2\})$ sont indépendantes (c'est-à-dire $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2)$ pour tout $B_1 \in \tau(\{A_1\})$ et $B_2 \in \tau(\{A_2\})$).

—————————————**corrigé**—————————————

On a $\tau(\{A_1\}) = \{\emptyset, A_1, A_1^c, E\}$ et $\tau(\{A_2\}) = \{\emptyset, A_2, A_2^c, E\}$.

Si les tribus $\tau(\{A_1\})$ et $\tau(\{A_2\})$ sont indépendantes on donc :

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2) \text{ pour tout } B_1 \in \{\emptyset, A_1, A_1^c, E\} \text{ et tout } \{\emptyset, A_2, A_2^c, E\}. \tag{12.12}$$

En prenant, dans (12.12), $B_1 = A_1$ et $B_2 = A_2$, on en déduit que A_1 et A_2 sont indépendants.

Réciproquement, on suppose que A_1 et A_2 sont indépendants. Pour montrer que $\tau(\{A_1\})$ et $\tau(\{A_2\})$ sont indépendantes, il suffit de montrer (12.12). On remarque tout d'abord que (12.12) est vraie si $B_1 = \emptyset$ ou E et si $B_2 = \emptyset$ ou E (l'hypothèse d'indépendance de A_1 et A_2 est même inutile). Puis, on remarque que l'hypothèse d'indépendance de A_1 et A_2 donne que (12.12) est vraie si $B_1 = A_1$ et $B_2 = A_2$. Enfin, on remarque que C_1 et C_2 indépendants implique que C_1 et C_2^c sont indépendants. En effet, on a :

$$P(C_1 \cap C_2^c) = P(C_1 \setminus (C_1 \cap C_2)) = P(C_1) - P(C_1 \cap C_2).$$

Comme C_1 et C_2 sont indépendants, on en déduit :

$$P(C_1 \cap C_2^c) = P(C_1) - P(C_1)P(C_2) = P(C_1)(1 - P(C_2)) = P(C_1)P(C_2^c).$$

En appliquant cette propriété avec $C_1 = A_1$ et $C_2 = A_2$, on montre donc que A_1 et A_2^c sont indépendants. En prenant maintenant $C_1 = A_2^c$ et $C_2 = A_1$, on montre alors que A_1^c et A_2^c sont indépendants. Enfin, En prenant $C_1 = A_2$ et $C_2 = A_1$, on montre que A_1^c et A_2 sont indépendants. On a ainsi montré que (12.12) est vraie, c'est-à-dire que les tribus $\tau(\{A_1\})$ et $\tau(\{A_2\})$ sont indépendantes.

———————————————————————————————

2. (Indépendance de n évènements, $n \geq 2$) Soit $n \geq 2$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que les événements $A_1, \ldots, A_n$ vérifient "$P(\cap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$ pour tout $I \subset \{1, \ldots, n\}$" si et seulement si les tribus $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_n\})$ sont indépendantes (c'est-à-dire $P(\cap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i)$ pour tout $B_i \in \tau(\{A_i\})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$).

—————————————**corrigé**—————————————

Pour $p \in \{0, \ldots, n\}$, on introduit la propriété $\mathcal{P}_p$ suivante :

$$P(\cap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i) \text{ si } B_i \in \tau(\{A_i\}) \text{ pour } i \leq p \text{ et } B_i \in \{\emptyset, A_i, E\} \text{ pour } i > p.$$

Il est facile de voir que la propriété $\mathcal{P}_0$ est équivalente à "$P(\cap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$ pour tout $I \subset \{1, \ldots, n\}$". La propriété $\mathcal{P}_n$ signifie que les tribus $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_n\})$ sont indépendantes.

Le fait que $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_0$ est immédiat. On suppose maintenant que $\mathcal{P}_0$ est vérifiée et va montrer que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée. Pour cela, on raisonne par récurrence sur p. On suppose donc que $\mathcal{P}_{p-1}$ est vérifiée pour un $p \in \{1, \ldots, n\}$ et on doit montrer que $\mathcal{P}_p$ est vérifiée. Pour montrer que $\mathcal{P}_p$ est vérifiée, il suffit de prendre les B_i t.q. $B_i \in \tau(\{A_i\})$ pour $i \leq p - 1$, $B_p = A_p^c$ et $B_i \in \{\emptyset, A_i, E\}$

pour $i < p$ et de montrer que $P(\cap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i)$ (car les autres choix de B_p sont directement donnés par $\mathcal{P}_{p-1}$). Or, on a, pour ce choix des B_i :

$$P(\cap_{i=1}^n B_i) = P(\cap_{i=1}^n C_i) - P(\cap_{i=1}^n D_i),$$

avec $C_i = D_i = B_i$ si $i \neq p$, $C_p = E$ et $D_p = A_p$. En utilisant $\mathcal{P}_{p-1}$ on a $P(\cap_{i=1}^n C_i) = \prod_{i=1}^n P(C_i)$ et $P(\cap_{i=1}^n D_i) = \prod_{i=1}^n P(D_i)$ et donc :

$$P(\cap_{i=1}^n B_i) = \left(\prod_{i \neq p} P(B_i)\right)(P(E) - P(A_p)) = \left(\prod_{i \neq p} P(B_i)\right) P(A_p^c) = \prod_{i=1}^n P(B_i).$$

On a ainsi montré que $\mathcal{P}_p$ est vérifiée. Par récurrence (finie) sur p, on montre donc que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée, ce qui prouve que les tribus $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_n\})$ sont indépendantes.

---

3. En donnant un exemple (avec $n \geq 3$), montrer que l'on peut avoir n évévements, notés $A_1, \ldots, A_n$, indépendants deux à deux, sans que les événements $A_1, \ldots, A_n$ soient indépendants.

corrigé

On prend, par exemple, $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$ et P donnée par $P(\{i\}) = \frac{1}{4}$, pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Puis, on choisit $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1, 3\}$ et $A_3 = \{2, 3\}$. Les trois évévements A_1, A_2, A_3 sont bien indépendants deux à deux (car $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) = \frac{1}{4}$ si $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$) mais ne sont pas indépendants car $0 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

---

4. Soit $A \in \mathcal{A}$.

   (a) On suppose que $A \in \mathcal{A}_1$ et $A \in \mathcal{A}_2$ et que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus indépendantes (et contenues dans $\mathcal{A}$). Montrer que $P(A) \in \{0, 1\}$.

   corrigé

   Comme $A \in \mathcal{A}_1$, $A \in \mathcal{A}_2$ et que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus indépendantes, on doit avoir $P(A \cap A) = P(A)P(A)$, c'est-à-dire $P(A)(1 - P(A)) = 0$ et donc $P(A) \in \{0, 1\}$.

   (b) Montrer que $P(A) \in \{0, 1\}$ si et seulement si A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$.

corrigé

Si A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$, A est indépendant avec lui même. On en déduit, comme à la question précédente que $P(A) \in \{0, 1\}$.

Réciproquement, on suppose maintenant que $P(A) \in \{0, 1\}$ et on distingue deux cas.

Premier cas. On suppose que $P(A) = 0$. On a alors pour tout $B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \subset A$ et donc (par monotonie de P) $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0$. On en déduit $P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$. Ce qui prouve que A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$.

Deuxième cas. On suppose que $P(A) = 1$. On a alors $P(A^c) = 0$ et, pour tout $B \in \mathcal{A}$, $P(A \cap B) = 1 - P((A \cap B)^c) = 1 - P(A^c \cup B^c)$. Or (par monotonie et σ-sous additivité de P) $P(B^c) \leq P(A^c \cup B^c) \leq P(A^c) + P(B^c) = P(B^c)$. Donc, $P(A^c \cup B^c) = P(B^c)$ et donc $P(A \cap B) = 1 - P(B^c) = P(B) = P(A)P(B)$. Ce qui prouve que A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$.

---

5. Soit $n \geq 1$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants si et seulement si les v.a. $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ sont indépendantes.

   ————————————————————**corrigé**————————————————————

   Si X est une v.a.r., la tribu engendrée par X est $\tau(X) = \{X^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Pour $A \in \mathcal{A}$, on a donc $\tau(1_A) = \{\emptyset, A, A^c, E\}$, c'est-à-dire $\tau(1_A) = \tau(\{A\})$. L'indépendance des événements $A_1, \ldots, A_n$ correspond (par la définition 2.25) à l'indépendance des tribus $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_1\})$. L'indépendance des v.a.r. $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ correspond (par la définition 3.12)) à l'indépendance des tribus $\tau(1_{A_1}), \ldots, \tau(1_{A_n})$. Comme $\tau(\{A_i\}) = \tau(1_{A_i})$, pour tout i, on en déduit que les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants si et seulement si les v.a. $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ sont indépendantes.

   ——

Corrigé 51 (Convergence en mesure) $(\star\star)$
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si il existe f et g fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ telles que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f et g, alors $f = g$ p.p..

   [*On pourra commencer par montrer que, pour tout* $\delta > 0$, $m(\{x \in E\,;\ |f(x) - g(x)| > \delta\}) = 0$].

   ————————————————————**corrigé**————————————————————

   Pour $h : E \to \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, on note toujours $\{h > \delta\} = \{x \in E;\ h(x) > \delta\}$, $\{h \geq \delta\} = \{x \in E;\ h(x) \geq \delta\}$, $\{h < \delta\} = \{x \in E;\ h(x) < \delta\}$ et $\{h \leq \delta\} = \{x \in E;\ h(x) \leq \delta\}$.

   Soit $\delta > 0$. Pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)|$. On en déduit $\{|f - f_n| \leq \frac{\delta}{2}\} \cap \{|f_n - g| \leq \frac{\delta}{2}\} \subset \{|f - g| \leq \delta\}$ et donc, en passant au complémentaire,

   $$\{|f - g| > \delta\} \subset \{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\} \cup \{|f_n - g| > \frac{\delta}{2}\}. \tag{12.13}$$

   Par sous additivité de m, on a donc $m(\{|f - g| > \delta\}) \leq m(\{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\}) + m(\{|f_n - g| > \frac{\delta}{2}\})$. En passant à la limite quand $n \to \infty$, on en déduit $m(\{|f - g| > \delta\}) = 0$.

   On remarque maintenant que $\{x \in E;\ f(x) \neq g(x)\} = \{|f - g| > 0\} = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}\{|f - g| > \frac{1}{n}\}$ et donc, par σ-sous additivité de m, on obtient $m(\{x \in E;\ f(x) \neq g(x)\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(\{|f - g| > \frac{1}{n}\}) = 0$ et donc $f = g$ p.p..

   ——

2. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$.

   ————————————————————**corrigé**————————————————————

   Soit $\delta > 0$. En reprenant la démonstration de (12.13), on montre que

   $$\{|f + g - (f_n + g_n)| > \delta\} \subset \{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\} \cup \{|g - g_n| > \frac{\delta}{2}\}.$$

   Par sous additivité de m, ceci donne $m(\{|f+g-(f_n+g_n)| > \delta\}) \leq m(\{|f-f_n| > \frac{\delta}{2}\})+m(\{|g-g_n| > \frac{\delta}{2}\})$ et donc que $m(\{|f+g-(f_n+g_n)| > \delta\}) \to 0$ quand $n \to \infty$. On a bien montré que $f_n+g_n \to f+g$ en mesure quand $n \to \infty$.

   ——

3. On suppose maintenant que m est une mesure finie. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers g, alors $(f_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f\, g \in \mathcal{M}$.

   [*On pourra commencer par montrer que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que, si $n \geq n_0$ et $k \geq k_0$, on a $m(\{x \in E\,;\, |f_n(x)| \geq k\}) \leq \varepsilon$*]. Donner un contre-exemple au résultat précédent lorsque $m(E) = \infty$.

———————————————————**corrigé**———————————————————

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, la démonstration de (12.13) donne ici $\{|f_n| > k\} \subset \{|f| > \frac{k}{2}\} \cup \{|f_n - f| > \frac{k}{2}\}$ et donc

$$m(\{|f_n| > k\}) \leq m(\{|f| > \frac{k}{2}\}) + m(\{|f_n - f| > \frac{k}{2}\}. \tag{12.14}$$

On pose $A_k = \{|f| > \frac{k}{2}\}$. On a $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T$, $A_{k+1} \subset A_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\cap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \emptyset$ (car f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$). Comme E est de mesure finie, on a $m(A_k) < \infty$ (pour tout k) et on peut appliquer la continuité décroissante de m. Elle donne :

$$m(A_k) \to 0, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.15}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par (12.15), il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $m(A_{k_0}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par la convergence en mesure de f_n vers f, il existe alors n_0 t.q. $m(\{|f_n - f| > \frac{k_0}{2}\} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq n_0$ et l'inégalité (12.14) donne $m(\{|f_n| > k_0\}) \leq \varepsilon$ si $n \geq n_0$. On en déduit (comme $\{|f_n| > k\} \subset \{|f_n| > k_0\}$ si $k \geq k_0$) :

$$n \geq n_0,\ k \geq k_0 \Rightarrow m(\{|f_n| > k\}) \leq \varepsilon. \tag{12.16}$$

On montre maintenant que $f_n g_n \to fg$ en mesure.

Soit $\delta > 0$, on veut montrer que $m(\{|f_n g_n - fg| > \delta\} \to 0$ quand $n \to \infty$. Pour cela, on remarque que $|f_n g_n - fg| \leq |f_n||g_n - g| + |g||f_n - f|$. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on a donc

$$\{|f_n| \leq k\} \cap \{|g_n - g| \leq \frac{\delta}{2k}\} \cap \{|g| \leq k\} \cap \{|f_n - f| \leq \frac{\delta}{2k}\} \subset \{|f_n g_n - fg| \leq \delta\}$$

et, en passant au complémentaire,

$$\{|f_n g_n - fg| > \delta\} \subset \{|f_n| > k\} \cup \{|g_n - g| > \frac{\delta}{2k}\} \cup \{|g| > k\} \cup \{|f_n - f| > \frac{\delta}{2k}\},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} m(\{|f_n g_n - fg| > \delta\}) \leq m(\{|f_n| > k\}) + m(\{|g_n - g| > \frac{\delta}{2k}\}) \\ + m(\{|g| > k\}) + m(\{|f_n - f| > \frac{\delta}{2k}\}). \end{aligned} \tag{12.17}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe k_0 et n_0 de manière à avoir (12.16). En utilisant (12.15) avec g au lieu de f, il existe aussi k_1 t.q. $m(\{|g| > k\}) \leq \varepsilon$ pour $k \geq k_1$. On choisit alors $k = \max\{k_0, k_1\}$. En utilisant la convergence en mesure de f_n vers f et de g_n vers g, il existe n_1 t.q. $m(\{|g_n - g| > \frac{\delta}{2k}\}) \le \varepsilon$ et $m(\{|f_n - f| > \frac{\delta}{2k}\}) \le \varepsilon$ pour $n \ge n_1$. Finalement, avec $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ on obtient :

$$n \ge n_2 \Rightarrow m(\{|f_n g_n - fg| > \delta\}) \le 4\varepsilon.$$

Ce qui prouve la convergence en mesure de $f_n g_n$ vers fg, quand $n \to \infty$.

Pour obtenir un contre-exemple à ce résultat si $m(E) = \infty$, on prend $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \ge 1$ on définit f_n par $f_n(x) = \frac{1}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on définit g_n par $g_n(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il est clair que $f_n \to 0$ en mesure, $g_n \to g$ en mesure, avec $g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f_n g_n \not\to 0$ en mesure car $m(\{|f_n g_n| > \delta\}) = \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $\delta > 0$.

Corrigé 52 (Convergence presque uniforme et convergence p.p.)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ (c'est-à-dire une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$) et $f \in \mathcal{M}$. On suppose que $f_n \to f$ presque uniformément (c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \in T$ t.q. $m(A) \le \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c). Montrer que $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

———————————————**corrigé**———————————————

Soit $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) \le \frac{1}{n}$ et $f_n \to f$ uniformément sur A_n^c. On pose $A = \cap_{n\in\mathbb{N}^\star} A_n$, de sorte que $A \in T$ et $m(A) = 0$ car $m(A) \le m(A_n) \le \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Soit $x \in A^c$, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $x \in A_n$ et on a donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$. Comme $m(A) = 0$, ceci donne bien $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

Corrigé 53 (Théorème d'Egorov) $(\star\star)$
Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ p.p., lorsque $n \to +\infty$.
Pour $j \in \mathbb{N}^\star$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$A_{n,j} = \{x\,;\, |f(x) - f_n(x)| \ge \frac{1}{j}\}, \text{ et } B_{n,j} = \bigcup_{p\ge n} A_{p,j} \tag{12.18}$$

1. Montrer que à j fixé, $\lim_{n\to+\infty} m(B_{n,j}) = 0$.

———————————————**corrigé**———————————————

On remarque d'abord que $A_{n,j} = (|f - f_n|)^{-1}([\frac{1}{j}, \infty[) \in T$ car $|f - f_n| \in \mathcal{M}$. On a donc aussi $B_{n,j} \in T$.

D'autre part, comme $f_n \to f$ p.p., lorsque $n \to +\infty$, il existe $C \in T$ t.q. $m(C) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in C^c$.

On va montrer que $m(B_{n,j}) \to 0$, quand $n \to \infty$ (on rappelle que $j \in \mathbb{N}^\star$ est fixé), en utilisant la continuité décroissante de m. On remarque en effet que $m(B_{n,j}) < \infty$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) car $m(E) < \infty$ (et c'est seulement ici que cette hypothèse est utile), puis que $B_{n+1,j} \subset B_{n,j}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La continuité de décroissante de m donne donc

$$m(B_{n,j}) \to m(\cap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}).$$

Or, si $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}$, on a $x \in B_{n,j}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ t.q. $x \in A_{n,j}$, c'est-à-dire $|f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{j}$. Comme j est fixé, ceci montre que $f_n(x) \not\to f(x)$ quand $n \to \infty$, et donc que $x \in C$. On en déduit que $\cap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j} \subset C$ et donc que $m(\cap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}) = 0$ et finalement que $m(B_{n,j}) \to 0$, quand $n \to \infty$.

---

2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A tel que $m(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c lorsque $n \to +\infty$. En déduire le théorème d'Egorov (théorème 3.2).

   [*On cherchera A sous la forme : $\displaystyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}^\star} B_{n_j,j}$, avec un choix judicieux de n_j.*]

   corrigé

   Soit $\varepsilon > 0$. pour tout $j \in \mathbb{N}^\star$, la question précédente donne qu'il existe $n(j) \in \mathbb{N}$ t.q. $m(B_{n,j}) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$. On pose $B = \cup_{j\in\mathbb{N}^\star} B_{n(j),j}$, de sorte que $B \in T$ et, par σ-sous additivité de m :

   $$m(B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(B_{n(j),j}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

   On montre maintenant que $f_n \to f$ uniformémement sur B^c (ce qui conclut la question en prenant $A = B$).

   Comme $B = \cup_{j\in\mathbb{N}^\star}(\cup_{p\geq n(j)} A_{p,j})$, on a, en passant au complémentaire, $B^c = \cap_{j\in\mathbb{N}^\star}(\cap_{p\geq n(j)} A^c_{p,j})$.

   Soit $\eta > 0$. Il existe $j \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\frac{1}{j} \leq \eta$. Soit $x \in B^c$, comme $x \in \cap_{p\geq n(j)} A^c_{p,j}$, on a donc $x \in A^c_{p,j}$ pour tout $p \geq n(j)$, c'est-à-dire :

   $$p \geq n(j) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{j} \leq \eta.$$

   Comme $n(j)$ ne dépend que de j (et donc que de η) et pas de $x \in B^c$, ceci prouve la convergence uniforme de f_n vers f sur B^c.

   ---

3. Montrer, par un contre exemple, qu'on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$ dans la question précédente.

   corrigé

   On prend, par exemple, $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[, \lambda)$ (plus précisément, λ est ici la restriction à $\mathcal{B}(]0, 1[)$ de λ, qui est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

   Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on prend $f_n = 1_{]0,\frac{1}{n}[}$, de sorte que $f_n \to 0$ p.p., quand $n \to \infty$ (et même, $f_n(x) \to 0$ pour tout $x \in]0, 1[$).

   Soit maintenant $B \in \mathcal{B}(]0, 1[)$ t.q. $\lambda(B) = 0$. On va montrer que f_n ne peut pas tendre uniformément vers 0 sur B^c (ceci prouve bien qu'on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$ dans la question précédente, c'est-à-dire $\varepsilon = 0$ dans le théorème d'Egorov).

   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, Il est clair que $B^c \cap]0, \frac{1}{n}[\neq \emptyset$ (car sinon, $]0, \frac{1}{n}[\subset B$ et donc $\frac{1}{n} = \lambda(]0, \frac{1}{n}[) \leq \lambda(B) = 0$). Il existe donc $x \in B^c$ t.q. $f_n(x) = 1$. On a donc

   $$\sup_{x\in B^c} |f_n(x)| = 1,$$

ce qui prouve bien que f_n ne tends pas uniformément vers 0 sur B^c, quand $n \to \infty$.

---

4. Montrer, par un contre exemple, que le résultat du théorème d'Egorov est faux lorsque $m(E) = +\infty$.

———————————————**corrigé**———————————————

On prend, par exemple, $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\lambda)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on prend $f_n = 1_{]n,n+1[}$, de sorte que $f_n \to 0$ p.p., quand $n \to \infty$ (et même, $f_n(x) \to 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Soit maintenant $0 < \varepsilon < 1$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(B) \le \varepsilon$. On va montrer que f_n ne peut pas tendre uniformément vers 0 sur B^c (ceci prouve bien que théorème d'Egorov peut être mis en défaut si $m(E) = \infty$).

Soit $n \in \mathbb{N}$, Il est clair que $B^c \cap]n, n+1[\neq \emptyset$ (car sinon, $]n, n+1[\subset B$ et donc $1 = \lambda(]n, n+1[) \le \lambda(B) \le \varepsilon$, en contradiction avec $\varepsilon < 1$). Il existe donc $x \in B^c$ t.q. $f_n(x) = 1$. On a donc

$$\sup_{x \in B^c} |f_n(x)| = 1,$$

ce qui prouve bien que f_n ne tends pas uniformément vers 0 sur B^c, quand $n \to \infty$.

Corrigé 54 (Convergence en mesure et convergence p.p.)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On rappelle que, par définition, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0. \tag{12.19}$$

1. On suppose ici que $m(E) < +\infty$.

   (a) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f presque partout, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f en mesure [*Utiliser le théorème d'Egorov.*]

   ———————————————**corrigé**———————————————

   Soit $\varepsilon > 0$, on veut montrer que $m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = m(\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \to 0$, quand $n \to \infty$, c'est-à-dire que

   $$\begin{array}{l} \forall \delta > 0,\ \exists n_0,\ \text{t.q.} \\ n \ge n_0 \Rightarrow m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \le \delta. \end{array} \tag{12.20}$$

   Soit donc $\delta > 0$. D'après le théorème d'Egorov (théorème 3.2 page 64), il existe $A \in T$ t.q. $m(A) \le \delta$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c. La convergence uniforme sur A^c nous donne donc l'existence de n_0 t.q., $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ pour tout $x \in A^c$, si $n \ge n_0$. On a donc, pour $n \ge n_0$, $\{|f_n - f| > \varepsilon\} \subset A$, et donc $m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \le m(A) \le \delta$. On a bien montré (12.20) et donc la convergence en mesure de f_n vers f, quand $n \to \infty$.

(b) Montrer par un contrexemple que la réciproque de la question précédente est fausse.

corrigé

On reprend ici un exemple vu au début de la section 4.7 pour montrer que la convergence dans L^1 n'entraîne pas la convergence presque partout.

On prend $(E, T, m) = ([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), \lambda)$ (on a bien $m(E) < \infty$) et on construit ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe un unique $p \in \mathbb{N}^\star$ et $\frac{(p-1)p}{2} \le n < \frac{p(p+1)}{2}$. On pose alors $k = n - \frac{(p-1)p}{2}$ et on prend $f_n = 1_{[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}[}$. Il faut noter ici que $k+1 \le \frac{p(p+1)}{2} - \frac{(p-1)p}{2} = p$ et donc $\frac{k+1}{p} \le 1$.

Lorsque $n \to \infty$, on a $p \to \infty$ et donc $m(\{|f_n| > 0\}) = \frac{1}{p} \to 0$. Ce qui prouve, en particulier, que $f_n \to 0$ en mesure, quand $n \to \infty$.

Enfin, on remarque que, pour tout $x \in [0,1[$, $f_n(x) \not\to 0$ quand $n \to \infty$. En effet, soit $x \in [0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On choisit $p \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\frac{(p-1)p}{2} \ge n$, il existe alors $k \in \mathbb{N}$ t.q. $0 \le k \le p-1$ et $x \in [\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}[$, de sorte que $f_{\varphi(n)}(x) = 1$ en choisissant $\varphi(n) = \frac{(p-1)p}{2} + k$. On a ainsi construit $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, sous suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car $\varphi(n) \ge n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) t.q. $f_{\varphi(n)}(x) \not\to 0$ quand $n \to \infty$. ceci montre bien que $f_n(x) \not\to 0$ quand $n \to \infty$.

Corrigé 55 (Essentiellement uniforme versus presque uniforme)

Soit (E, T, m) un espace mesuré. Pour $f \in \mathcal{M}$, on pose $A_f = \{C \in \mathbb{R}, |f| \le C \text{ p.p.}\}$. Si $A_f \ne \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \inf A_f$. Si $A_f = \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \infty$.

1. Soit $f \in \mathcal{M}$ t.q. $A_f \ne \emptyset$. Montrer que $\|f\|_\infty \in A_f$.

   corrigé

   Comme $A_f \ne \emptyset$ et $\|f\|_\infty = \inf A_f$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_f$ t.q. $a_n \downarrow \|f\|_\infty$ quand $n \to \infty$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, de $a_n \in A_f$ on déduit qu'il existe $B_n \in T$ t.q. $m(B_n) = 0$ et $|f(x)| \le a_n$ pour tout $x \in B_n^c$.

   On pose $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. On a donc $B \in T$ et, par σ-additivité de m, $m(B) = 0$ (car $m(B) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n)$). Enfin, pour tout $x \in B^c = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n^c$, on a $|f(x)| \le a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant $n \to \infty$, on en déduit que $|f(x)| \le \|f\|_\infty$. On a donc $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p., c'est-à-dire $\|f\|_\infty \in A_f$.

   ---

2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}$.

   (a) On suppose, dans cette question, que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$ (on dit que $f_n \to f$ essentiellement uniformément). Montrer que $f_n \to f$ presque uniformément.

   corrigé

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $|(f_n - f)(x)| \le \|f_n - f\|_\infty$ pour tout $x \in A_n^c$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On a donc $A \in T$, $m(A) = 0$, $|(f_n - f)(x) \le \|f_n - f\|_\infty$ pour tout $x \in A^c$. Comme $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$, on en déduit que $f_n \to f$ uniformément sur A^c. Enfin, comme $m(A) \le \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré la convergence presque uniforme de f_n vers f.

(b) En donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement (E, T, m), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f), montrer qu'on peut avoir $f_n \to f$ presque uniformément, quand $n \to \infty$, et $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$.

———————————————**corrigé**———————————————

On prend, par exemple, $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $f = 0$ et $f_n = 1_{[0,\frac{1}{n}]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $A = [0, \varepsilon]$, de sorte que $m(A) = \varepsilon$. On a bien $f_n \to 0$ uniformément sur A^c, quand $n \to \infty$, car $f_n = 0$ sur A^c pour tout n t.q. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Donc, $f_n \to f$ presque uniformément quand $n \to \infty$.

Mais f_n ne tends pas vers 0 essentiellement uniformément, quand $n \to \infty$, car $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ (en effet, $f_n \leq 1$ sur tout $\mathbb{R}$, $f_n = 1$ sur $[0, \frac{1}{n}]$) et $\lambda([0, \frac{1}{n}]) > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$).

———————————————————————————————

Corrigé 56 (Mesurabilité des troncatures)
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours quand on ne le précise pas, de la tribu borélienne). Pour $a > 0$, on définit la fonction "tronquée" :

$$f_a(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad f(x) > a \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leq a \\ -a & \text{si} \quad f(x) < -a \end{cases}$$

Montrer que f_a est mesurable.

———————————————**corrigé**———————————————

Soit $a > 0$. On définit T_a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$T_a(s) = \begin{cases} a & \text{si} \quad s > a \\ s & \text{si} \quad |s| \leq a \\ -a & \text{si} \quad s < -a \end{cases}$$

La fonction T_a peut aussi s'écrire $T_a(s) = \max\{-a, \min\{a, s\}\}$ pour $s \in \mathbb{R}$. On remarque que la fonction T_a est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est donc borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne).

Comme $f_a = T_a \circ f$, on en déduit que f_a est mesurable car c'est la composée d'applications mesurables.

———————————————————————————————

Corrigé 57 (Exemple de tribu engendrée)
Dans cet exercice, on s'intéresse à la tribu $\tau(X)$ engendrée par la variable aléatoire X définie sur Ω, muni de la tribu $\mathcal{A}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne.

1. (Cas d'un lancer de dé) Dans cette question, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega))$ et X est la variable aléatoire définie par $X(\omega) = 1$ lorsque ω est pair, $X(\omega) = 0$ sinon. Montrer que $\tau(X)$ est formé de 4 éléments.

2. (Cas de n tirages à pile ou face) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $\Omega = \{0, 1\}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega))$ et $k \in \{1, \cdots, n\}$. La variable aléatoire X représente le k-ième tirage, X est donc l'application $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \mapsto \omega_k$. Montrer que $\tau(X)$ est ici aussi formé de 4 éléments.

3. Dans cette question, on prend $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \omega - [\omega]$, où $[\omega]$ désigne la partie entière de ω (c'est-à-dire $[\omega] = \max\{n \in \mathbb{Z}$, t.q. $n \leq \omega\}$. Si C est un borélien inclus dans $[0, 1[$ (ce qui est équivalent à dire $C \in \mathcal{B}([0, 1[)$), on pose $\varphi(C) = \cup_{k\in\mathbb{Z}} C_k$, avec $C_k = \{x + k$, $x \in C\}$. Montrer que $\tau(X) = \{\varphi(C), C \in \mathcal{B}([0, 1[)\}$.