12.4 Exercices du chapitre 4

12.4.1 Intégrale sur $\mathcal{M}_+$ et sur $\mathcal{L}^1$

Corrigé 59 (Sup de mesures)
Soit (E, T) un espace mesurable et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur T. On suppose que $m_{n+1}(A) \geq m_n(A)$ pour tout $A \in T$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $m(A) = \sup\{m_n(A), n \in \mathbb{N}\}$ pour $A \in T$.

1. (Lemme préliminaire) Soit $(a_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et $(a_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $a_{n+1,p} \geq a_{n,p}$, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, et $a_{n,p} \to a_p$ quand $n \to \infty$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Montrer $\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \to \sum_{p=0}^{\infty} a_p$ (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) quand $n \to \infty$. [On pourra utiliser $\sum_{p=0}^{N} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p$.]

   ---**corrigé**---

   On remarque tout d'abord que la suite $(\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle admet donc une limite dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on passe à la limite quand $n \to \infty$ dans les inégalités $\sum_{p=0}^{N} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p$.

   On obtient $\sum_{p=0}^{N} a_p \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p$.

   On passe maintenant à la limite quand $N \to \infty$ pour obtenir

   $\sum_{p=0}^{\infty} a_p \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p$.

   On a donc $\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} = \sum_{p=0}^{\infty} a_p$.

   ---

2. Montrer que m est une mesure.

   ---**corrigé**---

   - $m(\emptyset) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\emptyset) = 0$.
   - Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A_p \cap A_q = \emptyset$ si $p \neq q$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On a :
     $m(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(A) = \lim_{n\to\infty} m_n(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} m_n(A_p)$.
     En utilisant la question précédente avec $a_{n,p} = m_n(A_p)$, on en déduit $m(A) = \sum_{p=0}^{\infty} m(A_p)$.

   ---

3. Soit $f \in \mathcal{E}_+(E, T)$. (On rappelle que $\mathcal{E}_+(E, T)$ est l'ensemble des fonctions étagées de E dans $\mathbb{R}_+$.) Montrer que $\int f dm = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\int f dm_n)$.

   ---**corrigé**---

   Soit $\{a_1, \ldots, a_p\} \subset \mathbb{R}_+^\star$ et $\{A_1, \ldots, A_p\} \subset T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^{p} a_i 1_{A_i}$.

   On a $\int f dm_n = \sum_{i=1}^{p} a_i m_n(A_i)$, la suite $(\int f dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. Puis, en passant à la limite sur n, on obtient :

   $\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{p} a_i m_n(A_i)) = \sum_{i=1}^{p} a_i \lim_{n\to\infty}(m_n(A_i)) = \sum_{i=1}^{p} a_i m(A_i) = \int f dm$, et donc

   $\int f dm = \lim_{n\to\infty}(\int f dm_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\int f dm_n)$.

   ---

4. Soit $f \in \mathcal{M}_+(E, T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}_+(E, T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.)

(a) Montrer que $(\int fdm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée par $\int fdm$.

corrigé

Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_p \uparrow f$ quand $p \to \infty$. D'après la question précédente, on a (pour tout n et tout p) $\int f_p dm_n \le \int f_p dm_{n+1} \le \int f_p dm$.

En passant à la limite sur p (avec n fixé) on en déduit $\int fdm_n \le \int fdm_{n+1} \le \int fdm$. La suite $(\int fdm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par $\int fdm$.

(b) Montrer que $\int fdm_n \to \int fdm$ quand $n \to \infty$.

corrigé

On pose $A_f = \{g \in \mathcal{E}_+,\ g \le f\}$. On sait que $\int fdm = \sup_{g\in A_f} \int gdm$ et que $\int fdm_n = \sup_{g\in A_f} \int gdm_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La question 2 donne que $\int gdm = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int gdm_n$ pour tout $g \in \mathcal{E}_+$. On en déduit :

$$\int fdm = \sup_{g\in A_f}(\sup_{n\in\mathbb{N}} \int gdm_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{g\in A_f} \int gdm_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int fdm_n,$$

ce qui, avec la question précécdente, donne bien $\int fdm_n \to \int fdm$ quand $n \to \infty$.

---

5. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\int fdm_n \to \int fdm$ quand $n \to \infty$.

corrigé

On a $|f| \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. la question 4 donne $\int |f|dm_n \le \int |f|dm$, on en déduit que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

la question 4 donne aussi que

$\int f^+dm_n \to \int f^+dm$ et

$\int f^-dm_n \to \int f^-dm$.

Ces 2 convergences ayant lieu dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $\int fdm_n \to \int fdm$ quand $n \to \infty$.

Corrigé 60 (Somme de mesures)
Soient m_1 et m_2 deux mesures sur l'espace mesurable (E,T).

1. Montrer que $m = m_1 + m_2$ est une mesure.

corrigé

(a) $m(\emptyset) = m_1(\emptyset) + m_2(\emptyset) = 0$,

(b) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A_n \cap \mathcal{A}_m = \emptyset$ si $n \ne m$. On a :

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) = m_1(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) + m_2(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n).$$

Comme $m_i(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} m_i(A_p)$ pour $i = 1,2$, on en déduit

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{n}(m_1(A_p)+m_2(A_p)) = \lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{n}m(A_p),$$

ce qui prouve bien la σ-additivité de m.

Ceci montre bien que m est une mesure.

---

2. Montrer qu'une application f mesurable de E dans $\mathbb{R}$ est intégrable pour la mesure m si et seulement si elle est intégrable pour les mesures m_1 et m_2. Si f est intégrable pour la mesure m, montrer que $\int f dm = \int f dm_1 + \int f dm_2$.

corrigé

Soit $A \in T$, on pose $\varphi = 1_A$. La définition de m donne immédiatement

$$\int \varphi dm = \int \varphi dm_1 + \int \varphi dm_2. \tag{12.21}$$

Par linérarité de l'intégrale, (12.21) est aussi vrai pour $\varphi \in \mathcal{E}_+$.

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{M}_+$. Il existe $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $\varphi_n \uparrow \varphi$ quand $n \to \infty$. On écrit (12.21) avec φ_n au lieu de φ et on fait tendre n vers l'infini. La définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors (12.21).

On a donc montré que (12.21) était vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{M}_+$.

Soit $f \in \mathcal{M}$, en écrivant (12.21) avec $\varphi = |f|$ on obtient bien que $f \in \mathcal{L}^1(E,T,m)$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}^1(E,T,m_1) \cap \mathcal{L}^1(E,T,m_2)$.

Enfin, si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, on écrit (12.21) avec $\varphi = f^+$ et $\varphi = f^-$, la différence donne bien $\int f dm = \int f dm_1 + \int f dm_2$.

---

3. Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de mesures (positives) sur (E,T) et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^\star$. On pose, pour $A \in T$, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(A)$. Montrer que m est une mesure sur T ; soit f une application mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et intégrable pour la mesure m ; montrer que $\int f dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int f dm_n$.

corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}$. n définit $\tilde{m}_n$ par $\tilde{m}_n(A) = \alpha_n m_n(A)$ pour tout $A \in T$. Il est facile de voir que $\tilde{m}_n$ est une mesure sur T, que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m_n) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\tilde{m}_n)$ et que $\int f d\tilde{m}_n = \alpha_n \int f dm_n$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m_n)$.

On pose maintenant , par récurrence sur n, $\mu_0 = \tilde{m}_0$ et $\mu_n = \mu_{n-1} + \tilde{m}_n$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$. La question précédente montre, par récurrence sur n, que μ_n est une mesure sur T et donne que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\mu_n$ si et seulement si $f \in \cap_{p\le n}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\tilde{m}_n) = \cap_{p\le n}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m_n)$. Enfin, la question précédente donne aussi, toujours par récurrence sur n :

$$\int f d\mu_n = \sum_{p=0}^{n} \int f d\tilde{m}_n = \sum_{p=0}^{n} \alpha_n \int f dm_n.$$

Pour tout $A \in T$, on a $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A)$. On peut donc utiliser les résultats de l'exercice précédent. On obtient que m est une mesure sur T et que $f \in \mathcal{L}^1_R(E,T,m)$ implique $f \in \mathcal{L}^1_R(E,T,\mu_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\int f dm = \lim_{n\to\infty} \int f d\mu_n$. Si $f \in \mathcal{L}^1_R(E,T,m)$ on a donc $f \in \mathcal{L}^1_R(E,T,m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\int f dm = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} \alpha_p \int f dm_p$, c'est-à-dire $\int f dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int f dm_n$.

Corrigé 61 (Mesure de Dirac)
Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0, définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. (cf exemple 2.1.) Soit $f \in \mathcal{M}_+$, calculer $\int f d\delta_0$.

corrigé

Comme $\delta_0(\{0\}^c) = 0$, on a $f = f(0)1_{\{0\}}$ p.p., on en déduit $\int f d\delta_0 = f(0)\delta_0(\{0\}) = f(0)$.

Corrigé 62 (Restrictions de la mesure de Lebesgue)
Soit A et B deux boréliens de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset B$. On note λ_A [resp. λ_B] la restriction à $\mathcal{B}(A)$ [resp. $\mathcal{B}(B)$] de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B,\mathcal{B}(B),\lambda_B)$. Montrer que $f_{|_A} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(A,\mathcal{B}(A),\lambda_A)$ et que $\int f_{|_A} d\lambda_A = \int f 1_A d\lambda_B$. [Considérer d'abord le cas $f \in \mathcal{E}_+$ puis $f \in \mathcal{M}_+$ et enfin $f \in \mathcal{L}^1$.]

corrigé

On rappelle que $\mathcal{B}(A) = \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); C \subset A\}$ et $\mathcal{B}(B) = \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); C \subset B\}$ (voir l'exercice 2.3).

1. Soit $f \in \mathcal{E}_+(B,\mathcal{B}(B))$. Il existe donc $a_1,\ldots,a_p \in \mathbb{R}_+$ et $A_1,\ldots,A_p \in \mathcal{B}(B) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $f = \sum_{i=1}^{p} a_i 1_{A_i}$.

   La fonction $f1_A$ appartient donc aussi à $\mathcal{E}_+(B,\mathcal{B}(B))$ (car $A_i \cap A \in \mathcal{B}(B)$) et elle s'écrit $f = \sum_{i=1}^{p} a_i 1_{A_i} 1_A = \sum_{i=1}^{p} a_i 1_{A_i\cap A}$, de sorte que
   $$\int f 1_A d\lambda_B = \sum_{i=1}^{p} a_i \lambda(A_i \cap A).$$
   La fonction $f_{|_A}$ (c'est-à-dire la restriction de f à A) est définie sur A, elle s'écrit $f_{|_A} = \sum_{i=1}^{p} a_i 1_{A_i\cap A}$. Cette fonction appartient à $\mathcal{E}_+(A,\mathcal{B}(A))$ car $A_i \cap A \in \mathcal{B}(A)$ pour tout i et on a
   $$\int f_{|_A} d\lambda_A = \sum_{i=1}^{p} a_i \lambda(A_i \cap A).$$
   On a bien montré que
   $$\int f 1_A d\lambda_B = \int f_{|_A} d\lambda_A, \tag{12.22}$$
   pour tout $f \in \mathcal{E}_+(B,\mathcal{B}(B))$.

2. Soit $f \in \mathcal{M}_+(B,\mathcal{B}(B))$. il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+(B,\mathcal{B}(B))$ t.q. $f_n \uparrow f$, quand $n \to \infty$. On a donc aussi $(f_n 1_A)_{n\in\mathbb{N}} \uparrow f1_A$ et $(f_{n|_A})_{n\in\mathbb{N}} \uparrow f_{|_A}$, quand $n \to \infty$. Comme $f_{n|_A} \in \mathcal{E}_+(A,\mathcal{B}(A))$, la caractérisation de la mesurabilité positive (proposition 3.3) donne $f_{|_A} \in \mathcal{M}_+(A,\mathcal{B}(A))$. On a aussi $f1_A \in \mathcal{M}_+(B,\mathcal{B}(B))$. Puis, en écrivant (12.22) avec f_n au lieu de f et en passant à la limite quand $n \to \infty$, la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+(A,\mathcal{B}(A))$ et sur $\mathcal{M}_+(B,\mathcal{B}(B))$ donne (12.22).

   On a donc montré (12.22) pour tout $f \in \mathcal{M}_+(B,\mathcal{B}(B))$.

3. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B, \mathcal{B}(B), \lambda_B)$. On remarque d'abord que $f_{|_A} \in \mathcal{M}(A, \mathcal{B}(A))$. En effet, si $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $(f_{|_A})^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cap A \in \mathcal{B}(A)$. Puis, on applique (12.22) à $|f|$, qui appartient à $\mathcal{M}_+(B, \mathcal{B}(B))$, pour obtenir
$$\int |f_{|_A}| d\lambda_A = \int |f|_{|_A} d\lambda_A = \int |f| 1_A d\lambda_B < \int |f| d\lambda_B < \infty,$$
ce qui montre que $f_{|_A} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(A, \mathcal{B}(A)), \lambda_A)$.

Enfin, en appliquant (12.22) avec f^+ et f^- au lieu de f, on obtient
$$\int f^+ 1_A d\lambda_B = \int {f^+}_{|_A} d\lambda_A = \int (f_{|_A})^+ d\lambda_A < \infty$$
et
$$\int f^- 1_A d\lambda_B = \int {f^-}_{|_A} d\lambda_A = \int (f_{|_A})^- d\lambda_A < \infty,$$
ce qui donne, en faisant la différence,
$$\int f 1_A d\lambda_B = \int f_{|_A} d\lambda_A.$$

Corrigé 63 (Intégrale de Lebesgue et intégrale des fonctions continues)
Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ et que $\int f d\lambda = \int_0^1 f(x)dx$ (cette dernière intégrale est à prendre au sens de "l'intégrale des fonctions continues" vue au Chapitre 1). On rappelle que l'on note (un peu abusivement...) par λ la restriction à $\mathcal{B}([0,1])$ de la mesure de Lebesgue (aussi notée λ...) sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

corrigé

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^\star$, une famille $(\alpha_i)_{i \in \{0,\ldots,p\}}$, avec : $\alpha_0 = 0$, $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, pour tout $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $\alpha_p = 1$, et une famille $(a_i)_{i \in \{0,\ldots,p-1\}} \subset \mathbb{R}$ tels que :
$$g(x) = a_i, \quad \forall x \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[, \quad \forall i \in \{0, \ldots, p-1\}.$$
On sait que
$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$
D'autre part, cette fonction g est mesurable (c'est-à-dire $g \in \mathcal{M}([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ car, pour tout $C \subset \mathbb{R}$, $g^{-1}(C)$ est une réunion (finie) d'intervalles du type $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ à laquelle on ajoute éventuellement certains des points α_i. On a donc $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}([0,1])$. On a bien montré que $g \in \mathcal{M}([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$. Enfin, comme les singletons sont de mesure nulle, on a $|g| = \sum_{i=0}^{p-1} |a_i| 1_{]\alpha_i, \alpha_{i+1}[}$ p.p., et donc
$$\int |g| d\lambda = \sum_{i=0}^{p-1} |a_i|(\alpha_{i+1} - \alpha_i) < \infty.$$
Donc, $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Finalement, puisque $g = \sum_{i=0}^{p-1} a_i 1_{]\alpha_i, \alpha_{i+1}[}$ p.p., on a aussi

$$\int g d\lambda = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$

On a donc montré que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ et

$$\int g d\lambda = \int_0^1 g(x)dx. \tag{12.23}$$

Soit maintenant $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. On remarque tout d'abord que f est mesurable (parce que, par exemple, les ouverts de $[0,1]$ engendre $\mathcal{B}([0,1])$ et que l'image réciproque, par f, d'un ouvert de $[0,1]$ est un ouvert de $[0,1]$, donc un élément de $\mathcal{B}([0,1])$). Puis, on remarque que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1], \lambda)$ car $\int |f| d\lambda \leq \|f\|_u = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| < \infty$.

On compare maintenant $\int f d\lambda$ et $\int_0^1 f(x)dx$.

Il existe une suite de fonctions en escalier, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, t.q. $f_n \to f$ uniformément sur $[0,1]$, c'est-à-dire $\|f_n - f\|_u \to 0$, quand $n \to \infty$.

La définition de l'intégrale des fonctions continues donne que $\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$ quand $n \to \infty$.

D'autre part, on a aussi $\int f_n d\lambda \to \int f d\lambda$, quand $n \to \infty$, car $|\int f_n d\lambda - \int f d\lambda| \leq \int |f_n - f| d\lambda \leq \|f_n - f\|_u \to 0$, quand $n \to \infty$. En passant à la limite quand $n \to \infty$ dans (12.23) avec f_n au lieu de g, on obtient bien

$$\int f d\lambda = \int_0^1 f(x)dx.$$

Corrigé 64 (Fonctions continues et fonctions intégrables)

Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}([0,1])$. Montrer que $C([0,1], \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$.

corrigé

Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. On montre tout d'abord que f est mesurable.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Comme f est continue, l'ensemble $f^{-1}(O) = \{x \in [0,1],\ f(x) \in O\}$ est une ouvert de $[0,1]$ et donc $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}([0,1])$. Les ouverts de $\mathbb{R}$ engendrant la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, on en déduit que f est mesurable de $[0,1]$ (muni de sa tribu borélienne) dans $\mathbb{R}$ (muni de sa tribu borélienne).

On montre maintenant que f est intégrable. Comme la fonction f est continue sur le compact $[0,1]$, elle est bornée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $|f| \leq M$ sur $[0,1]$. On a donc, par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$:

$$\int |f| dm \leq M m([0,1]) < \infty.$$

On a donc $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$.

Corrigé 65 (f positive intégrable implique f finie p.p.)

Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Montrer que si $\displaystyle\int f dm < +\infty$, alors $f < +\infty$ p.p..

corrigé

Soit $A = f^{-1}(\{\infty\})$. On a $A \in T$ car f est mesurable et $\{\infty\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $f \geq n1_A$, donc, par monotonie de l'intégrale, $\int f dm \geq nm(A)$, ou encore

$$m(A) \leq \frac{1}{n} \int f dm.$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$, on en déduit $m(A) = 0$. On a donc $f < \infty$ p.p. car $f(x) < \infty$ pour tout $x \in A^c$.

Corrigé 66 (Une caractérisation de l'intégrabilité)
Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, u une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{x \in E, |u(x)| \geq n\}$ et $B_n = \{x \in E, n < |u(x)| \leq n + 1\}$.

1. Montrer que :

$$\int |u|dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty. \tag{12.24}$$

corrigé

On remarque tout d'abord que $B_n, A_n \in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n 1_{B_n} \leq |u| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) 1_{B_n}.$$

On en déduit (en utilisant le théorème de convergence monotone et la monotonie de l'intégrale) que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, m(B_n) \leq \int |u|dm \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) m(B_n). \tag{12.25}$$

Si $\int |u|dm < +\infty$, on a donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, m(B_n) < \infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, m(B_n) < \infty$, on a aussi $\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) m(B_n) < \infty$ car $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n) \leq m(E) < \infty$ (remarquer que $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$). On déduit donc de (12.25) que $\int |u|dm < +\infty$.

On a ainsi montré que :

$$\int |u|dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(B_n).$$

On peut utiliser le même raisonnement en remplaçant B_n par $C_n = \{x \in E, n \leq |u(x)| < n + 1\}$. On a donc aussi :

$$\int |u|dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n). \tag{12.26}$$

Pour terminer la question, il suffit de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty. \tag{12.27}$$

Pour montrer (12.27), on remarque que $C_n = A_n \backslash A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, comme $A_{n+1} \subset A_n$ et que $m(A_{n+1}) \leq m(A_n) \leq m(E) < \infty$:

$$m(C_n) = m(A_n) - m(A_{n+1}).$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n} p\, m(C_p) = \sum_{p=0}^{n} p\, m(A_p) - \sum_{p=0}^{n} p\, m(A_{p+1}) &= \sum_{p=0}^{n} p\, m(A_p) - \sum_{p=1}^{n+1} (p-1) m(A_p) \\ &= \sum_{p=1}^{n} m(A_p) - n\, m(A_{n+1}).\end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{p=0}^{n} p\, m(C_p) \leq \sum_{p=1}^{n} m(A_p), \tag{12.28}$$

et :

$$\sum_{p=1}^{n} m(A_p) = \sum_{p=0}^{n} p\, m(C_p) + n\, m(A_{n+1}). \tag{12.29}$$

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty$, on déduit donc de (12.28) que $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n) < +\infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n) < +\infty$. On a, par (12.26), $\int |u| dm < \infty$ et donc, comme $n\, 1_{A_{n+1}} \leq |u|$, on a aussi $n\, m(A_{n+1}) \leq \int |u| dm < \infty$. On déduit donc de (12.29) que $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$. Comme $m(A_0) \leq m(E) < \infty$, on a bien finalement $\sum_{n=0}^{\infty} m(A_n) < \infty$.

On a bien montré (12.27), ce qui termine la question.

---

2. Soit $p \in]1, +\infty[$, montrer que $|u|^p$ est une fonction mesurable et que :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1}\, m(A_n) < +\infty. \tag{12.30}$$

corrigé

La fonction $|u|^p$ est mesurable car composée d'une fonction mesurable et d'une fonction continue.

On reprend maintenant le raisonnement de la question précédente. On remarque que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n^p\, m(B_n) \leq \int |u|^p dm \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1)^p m(B_n). \tag{12.31}$$

Si $\int |u|^p dm < +\infty$, on a donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^p\, m(B_n) < \infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^p\, m(B_n) < \infty$, on a aussi $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^p m(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^p n^p m(B_n) < \infty$ et $m(B_0) \leq m(E) < \infty$. On a donc $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^p m(B_n) < \infty$. Ceci donne $\int |u|^p dm < +\infty$ par (12.31).

On a ainsi montré que :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(B_n) < +\infty.$$

Ici aussi, on peut utiliser le même raisonnement en remplaçant B_n par $C_n = \{x \in E, n \le |u(x)| < n+1\}$. On a donc aussi :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(C_n) < +\infty. \tag{12.32}$$

Pour terminer la question, il suffit donc de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(C_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1} m(A_n) < +\infty. \tag{12.33}$$

Pour montrer (12.33), on utilise, comme dans la question précédente que $C_n = A_n \setminus A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc :

$$m(C_n) = m(A_n) - m(A_{n+1}).$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N} n^p\, m(C_n) = \sum_{n=0}^{N} n^p\, m(A_n) - \sum_{n=0}^{N} n^p\, m(A_{n+1}) = \sum_{n=0}^{N} n^p\, m(A_n) - \sum_{n=1}^{N+1} (n-1)^p m(A_n) = \sum_{n=1}^{N} (n^p - (n-1)^p) m(A_n) - N^p\, m(A_{N+1})$. On a donc :

$$\sum_{n=0}^{N} n^p\, m(C_n) \le \sum_{n=1}^{N} (n^p - (n-1)^p) m(A_n), \tag{12.34}$$

et :

$$\sum_{n=1}^{N} (n^p - (n-1)^p) m(A_n) = \sum_{n=0}^{N} n^p\, m(C_n) + N^p\, m(A_{N+1}). \tag{12.35}$$

Pour conclure, on remarque que $\dfrac{n^p - (n-1)^p}{n^{p-1}} \to p$ quand $n \to \infty$. Il existe donc $\alpha, \beta > 0$ t.q. $\alpha n^{p-1} \le n^p - (n-1)^p \le \beta n^{p-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Si $\sum_{n=0}^{\infty} n^{p-1} m(A_n) < \infty$, on déduit alors de (12.34) que $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n) < +\infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(C_n) < +\infty$. On a, par (12.32), $\int |u|^p dm < \infty$ et donc, comme $N\, 1_{A_{N+1}} \le |u|$, on a aussi $N^p\, m(A_{n+1}) \le \int |u|^p dm < \infty$. On déduit alors de (12.35) que $\sum_{n=0}^{\infty} n^{p-1} m(A_n) < \infty$.

On a bien montré (12.33), ce qui termine la question.

Corrigé 67 (Sur l'inégalité de Markov)
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $a\, m(\{|f| > a\}) \le \int_{\{|f|>a\}} |f|\, dm$.

corrigé

Comme $|f| \in \mathcal{M}_+$, la méthode pour faire les questions 1 et 2 a déjà été vue dans le cours (voir l'inégalité (4.8)).

Soit $a > 0$. On remarque que $|f|1_{\{|f|>a\}} \ge a1_{\{|f|>a\}}$. Par monotonie de l'intégrale, on en déduit :

$$am(\{|f| > a\}) = \int a1_{\{|f|>a\}}dm \le \int |f|1_{\{|f|>a\}}dm = \int_{\{|f|>a\}} |f|dm.$$

---

2. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $m(\{|f| > a\}) \le (\int |f|\, dm)/a$. (Ceci est l'inégalité de Markov.)

corrigé

Comme $\int_{\{|f|>a\}} |f|dm \le \int |f|dm$, cette question découle immédiatement de ma précédente.

---

3. Montrer que

$$\lim_{a\to\infty} a\, m(\{|f| > a\}) = 0. \tag{12.36}$$

corrigé

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q. $a_n \to \infty$, quand $n \to \infty$. On pose $g_n = |f|1_{\{|f|>a_n\}}$. On a $g_n \to 0$ p.p. quand $n \to \infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|g_n| \le |f|$ p.p.. Grâce au théorème de convergence dominée, on en déduit que $\int g_n dm \to 0$ quand $n \to \infty$ et donc, avec la question 1, $a_n m(\{|f| > a_n\}) \to 0$ quand $n \to \infty$.

---

4. Donner des exemples de fonctions non intégrables qui vérifient la propriété (12.36) dans les 2 cas suivants : $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$.

corrigé

Dans le cas $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, il suffit de prendre $f = 1_{\mathbb{R}}$.

Dans le cas $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$, on peut prendre, par exemple, f définie par $f(x) = \frac{1}{x|\ln(2x)|}$ pour $x \in]0, 1[$. La fonction f est mesurable mais n'est pas intégrable. Pour $a > 0$, on a $am(\{|f| > a\}) = ax_a$ avec $x_a > 0$ t.q. $x_a|\ln(2x_a)| = \frac{1}{a}$. On a $x_a \to 0$ quand $a \to \infty$ et donc $am(\{|f| > a\}) = ax_a = \frac{1}{|\ln(2x_a)|} \to 0$ quand $a \to \infty$.

Corrigé 68 (Sur $f \ge 0$ p.p.)

Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que les 2 conditions suivantes sont équivalentes :

1. $f \ge 0$ p.p.,
2. $\int_A f\, dm \ge 0$ pour tout $A \in T$.

corrigé

- On suppose d'abord que $f \geq 0$ p.p.. Soit $A \in T$, on a alors $f1_A \geq 0$ p.p. et donc, par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ (proposition 4.4 page 84), $\int_A f dm = \int f1_A dm \geq 0$.

  En fait, pour être tout à fait précis, la proposition 4.4 est énoncée avec l'hypothèse "$f \geq g$" et non seulement "$f \geq g$ p.p.". Toutefois il est clair que cette proposition est aussi vraie avec seulement "$f \geq g$ p.p.". Il suffit de remarquer que, si $f \geq g$ p.p., il existe $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$ et $f \geq g$ sur B^c. On a donc $f1_{B^c} \geq g1_{B^c}$. Si $f, g \in \mathcal{L}^1$, la proposition 4.4 donne alors $\int f1_{B^c} dm \geq \int g1_{B^c} dm$. On en déduit $\int f dm \geq \int g dm$ car $\int f dm = \int f1_{B^c} dm$ et $\int g dm = \int g1_{B^c} dm$ (voir la proposition 4.5 page 86).

- On suppose maintenant que $\int_A f\, dm \geq 0$ pour tout $A \in T$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on choisit $A = A_n = \{f \leq -\frac{1}{n}\} = \{x \in E\colon\ f(x) \leq -\frac{1}{n}\}$, de sorte que $f1_{A_n} \leq -\frac{1}{n}1_{A_n}$. La monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ (proposition 4.4 page 84) donne alors

$$\int f1_{A_n} dm \leq -\frac{1}{n} m(A_n).$$

  Comme $\int f1_{A_n} dm \geq 0$ par hypothèse, on a donc nécessairement $m(A_n) = 0$.

  Par σ-sous additivité de m, on en déduit que $m(\{f < 0\}) = m(\cup_{n\in\mathbb{N}^\star}\{f \leq -\frac{1}{n}\}) = 0$, et donc $f \geq 0$ p.p..

Corrigé 69
Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1(= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$.

1. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ t.q. $\forall A \in T$, $m(A) \leq \delta \Rightarrow \displaystyle\int_A |f| dm \leq \varepsilon$. [*Introduire* $f_n = \inf(|f|, n)$].

   corrigé

   On pose $f_n = \inf(|f|, n)$. Comme $|f| - f_n \to 0$ p.p. (et même partout), quand $n \to \infty$, et que $0 \leq |f| - f_n \leq |f| \in \mathcal{L}^1$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(|f| - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou la proposition 4.6). Il donne que $\int (|f| - f_n) dm \to 0$ quand $n \to \infty$.

   Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\int (|f| - f_n) dm \leq \varepsilon$. Pour $A \in T$, on a donc :

$$\int_A |f| dm \leq \int_A (|f| - f_n) dm + \int_A f_n dm \leq \int (|f| - f_n) dm + \int_A f_n dm \leq \varepsilon + n m(A).$$

   En prenant $\delta = \frac{\varepsilon}{n}$, on en déduit :

$$A \in T,\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \leq 2\varepsilon.$$

   NB : Au lieu d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(|f| - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut aussi faire cet question en appliquant le théorème de convergence monotone à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en utilisant le fait que $f \in \mathcal{L}^1$.

   ---

2. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, C \in T$ t.q. :

(i) $m(C) < +\infty$,

(ii) $\displaystyle\int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon$,

(iii) $\sup_C |f| < +\infty$,

[*Considérer* $C_n = \{x \in E\,;\ \dfrac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\}$, *et montrer que pour* $n \geq n_0$ *où* n_0 *est bien choisi,* C_n *vérifie (i), (ii) et (iii).*]

corrigé

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $C_n = \{x \in E\,;\ \dfrac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $|f| \leq n$ sur C_n et $\frac{1}{n} m(C_n) \leq \int |f| dm < \infty$. Les conditions (i) et (iii) sont donc vérifiées si on prend $C = C_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. On va maintenant montrer qu'on peut choisir n de manière avoir aussi (ii). Pour cela, on pose $g_n = f 1_{C_n^c}$, de sorte que $g_n \to 0$ p.p. (et même partout) et $|g_n| \leq |f|$ p.p. (et même partout), pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou la proposition 4.6). Il donne que $\int |g_n| dm \to 0$ quand $n \to \infty$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^\star$ t.q. (ii) soit vérifiée. En prenant $C = C_n$, on a donc (i), (ii) et (iii).

Corrigé 70 ($m-$mesurabilité)
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et f une application de A^c dans $\mathbb{R}$. Montrer que :
il existe g mesurable de E dans $\mathbb{R}$ t.q. $f = g$ p.p. si et seulement si il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite de fonctions étagées, t.q. $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

corrigé

- On suppose d'abord qu'il existe g mesurable de E dans $\mathbb{R}$ t.q. $f = g$ p.p.. Il existe donc $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$ et $f = g$ sur B^c (et $B^c \subset A^c$, i.e. $A \subset B$).

  Comme $g \in \mathcal{M}$, la deuxième caractérisation de la mesurabilité (proposition 3.6 page 60) donne l'existence d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$. On a donc aussi $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in B^c$. Comme $m(B) = 0$, on a bien $f_n \to f$ p.p..

- On suppose maintenant qu'il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n \to f$ p.p.. Il existe donc $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in B^c$ (on a donc aussi $B^c \subset A^c$). On pose $g_n = f_n 1_{B^c}$ et on définit g par $g(x) = f(x)$ si $x \in B^c$ et $g(x) = 0$ si $x \in B$. Avec ces choix de g_n et g, on a $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ et $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$. On a donc, par la proposition 3.6, $g \in \mathcal{M}$. On a aussi $f = g$ p.p. car $f = g$ sur B^c et $m(B) = 0$.

Corrigé 71 (Mesure complète, suite de l'exercice 2.32)
On reprend les notations de l'exercice 2.32 page 49. On note donc $(E, \overline{T}, \overline{m})$ le complété de l'espace mesuré (E, T, m).

Montrer que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\overline{T},\overline{m})$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\overline{T},\overline{m})$, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q. $f = g$ p.p. et que $\displaystyle\int f d\overline{m} = \int g dm$.

corrigé

1. On commence par montrer que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\overline{T},\overline{m})$.

   Comme $T \subset \overline{T}$, on a $\mathcal{M}(E,T) \subset \mathcal{M}(E,\overline{T})$, $\mathcal{M}_+(E,T) \subset \mathcal{M}_+(E,\overline{T})$, $\mathcal{E}(E,T) \subset \mathcal{E}(E,\overline{T})$ et $\mathcal{E}_+(E,T) \subset \mathcal{E}_+(E,\overline{T})$. Puis, comme $\overline{m} = m$ sur T, on a $\int f dm = \int f d\overline{m}$ pour tout $f \in \mathcal{E}_+(E,T)$. Si $f \in \mathcal{M}_+(E,T)$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+(E,T)$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$, la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors :

$$\int f dm = \int f d\overline{m}, \text{ pour tout } f \in \mathcal{M}_+(E,T). \tag{12.37}$$

   Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, on a donc $f \in \mathcal{M}(E,T) \subset \mathcal{M}(E,\overline{T})$ et (12.37) donne $\int |f| d\overline{m} = \int |f| dm < \infty$. Donc, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\overline{T},\overline{m})$. En appliquant (12.37) à $f^{\pm}$, on montre aussi que $\int f dm = \int f d\overline{m}$.

2. On va montrer la deuxième partie de la question en raisonnant en 3 étapes :

   (a) Soit $C \in \overline{T}$. Il existe donc $A \in T$, $N \in \mathcal{N}_m$ t.q. $C = A \cup N$. Il existe $B \in T$ t.q. $N \subset B$ et $m(B) = 0$. On a $\{1_A \neq 1_C\} \subset N \subset B$. Donc, $\{1_A \neq 1_C\} \in \mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{\overline{m}}$, c'est-à-dire $1_A = 1_C$ m-p.p. et $\overline{m}$-p.p.. En fait, comme $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{\overline{m}}$, il est identique de dire "m-p.p." et "$\overline{m}$-p.p.", on dira donc simplement "p.p.".

   (b) Soit $f \in \mathcal{E}(E,\overline{T})$. Il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $C_1, \ldots, C_n \in \overline{T}$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{C_i}$. D'après (a), on trouve $A_1, \ldots, A_n \in T$ t.q. $1_{A_i} = 1_{C_i}$ p.p., pour tout i. On pose alors $g = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$, de sorte que $g \in \mathcal{E}(E,T)$ et $g = f$ p.p..

   (c) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\overline{T},\overline{m})$. Comme $f \in \mathcal{M}(E,\overline{T})$, il existe (d'après la proposition 3.6) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(E,\overline{T})$ t.q. $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$. D'après (b), pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n \in \mathcal{E}(E,T)$ t.q. $f_n = g_n$ p.p.. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $f_n = g_n$ sur A_n^c. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On a $A \in T$, $m(A) = 0$ et $f_n = g_n$ sur A^c, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit alors g par $g = f$ sur A^c et $g = 0$ sur A. On a $g \in \mathcal{M}(E,T)$ car g est limite simple de $(g_n 1_{A^c}) \in \mathcal{E}(E,T)$ (cf. proposition 3.6) et $f = g$ p.p. (car $f = g$ sur A^c).

   Comme $|f|, |g| \in \mathcal{M}_+(E,\overline{T})$ et $|f| = |g|$ p.p., on a $\infty > \int |f| d\overline{m} = \int |g| d\overline{m}$. Puis, comme $|g| \in \mathcal{M}_+(E,T)$, (12.37) donne $\int |g| d\overline{m} = \int |g| dm$. On en déduit donc que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

   Enfin, en utilisant le fait que $f^+ = g^+$ p.p., $f^- = g^-$ p.p. et (12.37) (avec g^+ et g^-) on a aussi :

$$\int f d\overline{m} = \int f^+ d\overline{m} - \int f^- d\overline{m} = \int g^+ d\overline{m} - \int g^- d\overline{m} = \int g^+ dm - \int g^- dm = \int g dm.$$

   On a bien trouvé $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q. $f = g$ p.p. et $\int f d\overline{m} = \int g dm$.

Corrigé 72 (Petit lemme d'intégration)

Soit (E,T,m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(E,T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}(E,T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.)

1. On suppose (dans cette question) que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T,\ m(A_n) \to 0 \ \Rightarrow \int f 1_{A_n} dm \to 0. \tag{12.38}$$

corrigé

Comme $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, La question 1 de l'exercice 4.14 page 103 donne :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ t.q. $(A \in T,\ m(A) \le \eta) \Rightarrow \int f 1_A dm \le \varepsilon$.
Ceci donne (12.38)...

2. On prend (dans cette question) $(E,T,m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Donner un exemple de $f \in \mathcal{M}(E,T)$ t.q. $f \ge 0$ (de sorte que $f \in \mathcal{M}_+(E,T)$), pour lequel (12.38) est faux.

corrigé

On prend $f(x) = x 1_{\mathbb{R}_+}(x)$ et $A_n =]n, n+1/n[$. On a $m(A_n) \to 0$ (quand $n \to \infty$) et $\int f 1_{A_n} d\lambda \ge 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $\int f 1_{A_n} d\lambda \not\to 0$.

3. On suppose (dans cette question) que $m(E) < \infty$ et que $f > 0$ (c'est à dire $f(x) > 0$ pour tout $x \in E$). Montrer que

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T,\ \int f 1_{A_n} dm \to 0 \ \Rightarrow m(A_n) \to 0. \tag{12.39}$$

On pourra utiliser le fait que, pour $p \in \mathbb{N}^\star$, $A_n \subset \{f < \frac{1}{p}\} \cup \{x \in A_n; f(x) \ge \frac{1}{p}\}$.

corrigé

On a $\{f < \frac{1}{p+1}\} \subset \{f < \frac{1}{p}\}$, $\cap_{p\in\mathbb{N}^\star}\{f < \frac{1}{p}\} = \emptyset$ et $m(\{f < \frac{1}{p}\}) < \infty$, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$ (car $m(E) < \infty$). La propriété de continuité décroissante de la mesure m donne alors que $m(\{f < \frac{1}{p}\}) \to 0$ quand $p \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $m(\{f < \frac{1}{p}\}) \le \varepsilon$. On a alors $m(A_n) \le \varepsilon + m(\{x \in A_n; f(x) \ge \frac{1}{p}\}) \le \varepsilon + p\int f 1_{A_n} dm$. Comme $\int f 1_{A_n} dm \to 0$, il existe donc n_0 t.q. $m(A_n) \le 2\varepsilon$ pour $n \ge n_0$. Ce qui prouve (12.39).

4. On prend (dans cette question) $(E,T,m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (de sorte que $m(E) = \infty$). Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $f > 0$, alors (12.39) est faux. Donner un exemple de $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q. $f > 0$.

corrigé

On prend $A_n =]n, n+1[$. En appliquant la proposition 4.6 page 87 (ou le théorème de convergence dominée) à la suite $(f 1_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient que $\int f 1_{A_n} d\lambda \to 0$ (quand $n \to \infty$). D'autre part $\lambda(A_n) = 1 \not\to 0$. La propriété (4.35) est donc fausse.

On obtient un exemple de $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $f > 0$ en prenant $f(x) = \exp(-|x|)$.

Corrigé 73 (Fatou sans positivité)
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $h \in \mathcal{M}(E, T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}(E, T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.)

1. On suppose que $f_n \to h$ p.p. quand $n \to \infty$, $f_n \geq f$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\int f_n dm \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer qu'il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q.

   - $f_n = g_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f = g$ p.p.,
   - $g_n(x) \to h(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in E$,
   - $g_n \geq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   corrigé

   Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to h(x)$ pour tout $x \in A^c$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $f_n(x) \geq f(x)$ pour tout $x \in (A_n)^c$.
   On pose $B = A \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. On a $B \in T$, $m(B) = 0$, $f_n(x) \to h(x)$ pour tout $x \in B^c$ et $f_n(x) \geq f(x)$ pour tout $x \in B^c$.
   On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n = f_n 1_{B^c} + h 1_B$ et $g = f 1_{B^c} + h 1_B$. On a bien $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et les 3 conditions demandées sont vérifiées.

   (b) Montrer que $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

   corrigé

   On applique le lemme de Fatou à la suite $(g_n - g)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ (noter aussi que $(h - g) \in \mathcal{M}_+$).
   On obtient $\int (h - g) dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g_n - g) dm \leq C - \int g dm < \infty$.
   On en déduit que $(h - g) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et donc $h = h - g + g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

   ---

2. (question plus difficile) On reprend les hypothèses de la question précédente sauf "$f_n \geq f$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$" que l'on remplace par l'hypothèse (plus faible) "il existe $D \in \mathbb{R}$ t.q. $\int f_n dm \geq D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$". Donner un exemple pour lequel $h \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. [Prendre $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.]

   corrigé

   On prend $f_n = 1_{[1/n, n+1/n]} - n^2 1_{[0,1/n[}$ et $h = 1_{\mathbb{R}_+}$. On a $f_n \to h$ p.p., $\int f_n dm = 0$ et $h \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Corrigé 74
Soient $T > 0$ et $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \lambda)$ (λ désigne donc ici la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}([0, T])$).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{nx} f(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1$.

   corrigé

   La fonction $x \mapsto e^{nx}$ est continue donc mesurable (de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, tous deux munis de la tribu borélienne). La fonction $x \mapsto e^{nx} f(x)$ est donc mesurable comme produit de fonctions mesurables.

On remarque ensuite que $\int |e^{nx}f(x)|d\lambda(x) \le e^n\|f\|_1 < \infty$. On en déduit que la fonction $x \mapsto e^{nx}f(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1$.

On suppose, dans la suite de l'exercice, que $f \ge 0$ p.p. et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. que $\int e^{nx}f(x)\,d\lambda(x) \le M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $f = 0$ p.p.. [Appliquer le théorème de convergence monotone.]

corrigé

On pose $A = \{f > 0\} = \{x \in E;\ f(x) > 0\}$ et $B = A \setminus \{0\}$. Comme f est mesurable, on a $A, B \in \mathcal{B}([0,1])$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = e^{nx}|f(x)|$ pour $x \in [0,1]$. On a $g_n \in \mathcal{M}_+$ et $g_n \uparrow g$ avec g définie par :

$$\begin{aligned} &g(x) = \infty, \ \text{ si } x \in B,\\ &g(x) = 0, \ \text{ si } x \in]0,1] \setminus B,\\ &g(0) = |f(0)|. \end{aligned}$$

Le théorème de convergence monotone donne que $g \in \mathcal{M}_+$ et $\int g_n dm \to \int g dm$ quand $n \to \infty$. Comme $g_n = e^{n\cdot}f$ p.p., on a $\int g_n dm = \int e^{nx}f(x)\,d\lambda(x) \le M$ et donc, en passant à limite quand $n \to \infty$, $\int g dm \le M$.

On a aussi $h_n \uparrow g$ avec $h_n = n1_B + |f(0)|1_{\{0\}}$. La définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors $\int g dm = \lim_{n\to\infty} n\lambda(B)$ et donc $\int g dm = \infty$ si $\lambda(B) > 0$. Comme $\int g dm \le M$, on a donc $\lambda(B) = 0$ et donc aussi $\lambda(A) = 0$. Ce qui donne $f = 0$ p.p..

---

3. On suppose de plus que f est continue. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,T]$.

corrigé

On pose toujours $A = \{f > 0\} = \{x \in E;\ f(x) > 0\}$. Comme f est continue, l'ensemble A est un ouvert de $[0,1]$. Si $A \ne \emptyset$, il existe un intervalle ouvert non vide inclus dans A et donc $\lambda(A) > 0$ en contradiction avec le résultat de la question précédente qui donne $\lambda(A) = 0$. On a donc $A = \emptyset$, c'est-à-dire $f = 0$ sur tout $[0,1]$.

12.4.2 Espace L^1

Corrigé 75 (Mesure de densité)
Soit (E,T,m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Pour $A \in T$, on pose $\mu(A) = \int_A f dm$.

1. Montrer que μ est une mesure sur T.

corrigé

On rappelle que, par définition, pour tout $A \in T$, on a $\int_A f dm = \int f1_A dm$ avec $f1_A = 0$ sur A^c et $f1_A = f$ sur A (on a bien $f1_A \in \mathcal{M}_+$ et donc $\int_A f dm$ est bien définie).

On montre maintenant que μ est une mesure.

Il est clair que $\mu(\emptyset) = 0$ car $f1_A = 0$ (sur tout E) si $A = \emptyset$. Pour montrer que μ est un mesure, il reste à montrer que μ est σ-additive.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et on remarque que $1_A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x)$ pour tout $x \in E$ et donc $f1_A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f1_{A_n}(x)$ pour tout $x \in E$. Le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.1) donne alors

$$\int f1_A dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f1_{A_n} dm,$$

c'est-à-dire $\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$. Ceci prouve que μ est σ-additive et donc que μ est une mesure.

---

2. Soit $g \in \mathcal{M}$. Montrer que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$ si et seulement si $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (on pose $fg(x) = 0$ si $f(x) = \infty$ et $g(x) = 0$). Montrer que, pour $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$, $\int g d\mu = \int fg dm$.

corrigé

On raisonne en 3 étapes :

(a) Soit $g \in \mathcal{E}_+ \setminus \{0\}$. Il existe donc $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}^\star_+$ et $A_1, \ldots, A_p \in T$ t.q. $g = \sum_{i=1}^p a_i 1_{A_i}$. On a alors (en posant $fg(x) = 0$ si $f(x) = \infty$ et $g(x) = 0$) $fg = \sum_{i=1}^p a_i f1_{A_i} \in \mathcal{M}_+$ et :

$$\int fg dm = \sum_{i=1}^p a_i \int f1_{A_i} dm = \sum_{i=1}^p a_i \mu(A_i) = \int g d\mu.$$

(Ce qui, bien sûr, est aussi vrai pour $g = 0$.)

(b) Soit $g \in \mathcal{M}_+$. Il existe alors $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $g_n \uparrow g$. L'item précédent donne que $\int fg_n dm = \int g_n d\mu$. Avec le théorème de convergence monotone (pour μ et pour m, puisque $fg_n \uparrow fg$ en posant toujours $fg(x) = 0$ si $f(x) = \infty$ et $g(x) = 0$), on en déduit que $fg \in \mathcal{M}_+$ et :

$$\int fg dm = \int g d\mu. \tag{12.40}$$

(c) Soit maintenant $g \in \mathcal{M}$. En appliquant (12.40) à $|g| \in \mathcal{M}_+$, on a :

$$\int |fg| dm = \int f|g| dm = \int |g| d\mu,$$

et donc :

$$fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m) \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu).$$

En fait, on peut ne pas avoir $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ car fg peut prendre les valeurs $\pm\infty$. L'assertion "$fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$" est à prendre, comme d'habitude, au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $fg = h$ p.p.". Ceci est vérifié car si $\int |fg| dm < \infty$, on a $|fg| < \infty$ p.p.. Il suffit alors de changer fg sur un ensemble de mesure nulle pour avoir une fonction mesurable prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$, en écrivant (12.40) avec g^+ et g^- (qui sont bien des éléments de $\mathcal{M}_+$) et en faisant la différence on obtient bien que $\int fg dm = \int g d\mu$.

Corrigé 76

Soit (E,T,m) un espace mesuré. On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f \in L^1$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$ p.p., que $f_n \to f$ p.p. et que $\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1. [*on pourra examiner la suite* $(f - f_n)^+$.]

———————————————**corrigé**———————————————

On pose $h_n = (f - f_n)^+$. On a donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $h_n \to 0$ p.p.. De plus, comme $f_n \geq 0$ p.p., on a $0 \leq h_n \leq f^+$ p.p.. En effet, soit $x \in E$ t.q. $h_n(x) \neq 0$. On a alors, si $f_n(x) \geq 0$ (ce qui est vrai pour presque tout x), $0 < h_n(x) = f(x) - f_n(x) \leq f(x) = f^+(x)$.

Comme $f^+ \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à cette suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il donne que $h_n \to 0$ quand $n \to \infty$, c'est-à-dire

$$\int (f - f_n)^+ dm \to 0, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.41}$$

On remarque ensuite que

$$\int (f - f_n)^- dm = \int (f - f_n)^+ dm - \int (f - f_n) dm,$$

et donc, comme $\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to +\infty$,

$$\int (f - f_n)^- dm \to 0, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.42}$$

De (12.41) et (12.42), on déduit

$$\int |f - f_n| dm \to 0, \text{ quand } n \to \infty,$$

c'est-à-dire $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, quand $n \to \infty$.

Corrigé 77 (Théorème de Beppo-Lévi)

Soient (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))$ et $f\colon E \to \mathbb{R}$, t.q. :

(i) $f_n \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$.

(ii) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, c'est-à-dire :

$f_{n+1} \geq f_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$,

ou

$f_{n+1} \leq f_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Construire $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1 (= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))$ et $g \in \mathcal{M}$ t.q. $f_n = g_n$ p.p., $f = g$ p.p., $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$, et $g_{n+1} \geq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou $g_{n+1} \leq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

———————————————**corrigé**———————————————

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, que l'on note encore f_n.

L'hypothèse (i) donne qu'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in A^c$.

L'hypothèse (ii) donne que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$est monotone. On suppose que cette suite est monotone croissante (le cas "monotone décroissante" est similaire). Il existe alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $f_{n+1} \geq f_n$ sur A_n^c.

On pose $B = A \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. On a donc $B \in T$ et $m(B) = 0$. Puis on pose $g_n = f_n 1_{B^c}$ et on définit g par $g(x) = f(x)$ si $x \in B^c$ et $g(x) = 0$ si $x \in B$. On a bien $f = g$ p.p., $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$, $f_n = g_n$ p.p. et $g_{n+1} \geq g_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$). Enfin $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$, et $g \in \mathcal{M}$ car g est limite simple d'éléments de $\mathcal{M}$ (voir la proposition 3.5 sur la stabilité de $\mathcal{M}$).

On remarque aussi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n et g_n sont deux répresentants du même élément de $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $\int f_n dm = \int g_n dm$.

---

2. Montrer que $f \in L^1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int f_n dm \in \mathbb{R}$.

corrigé

On reprend la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la fonction g construites à la question précédente et on distingue maintenant les 2 cas de l'hypothèse (ii).

Cas 1 : La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée monotone croissante.

Dans ce cas, on a $(g_n - g_0) \uparrow (g - g_0)$ quand $n \to \infty$ et, comme $(g_n - g_0) \in \mathcal{M}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut utiliser le théorème de convergence monotone dans $\mathcal{M}_+$ (théorème 4.1). Il donne $((g - g_0) \in \mathcal{M}_+$ et)

$$\int (g_n - g_0) dm \to \int (g - g_0) dm \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.43}$$

On sait déjà que $(g - g_0) \in \mathcal{M}$ et que $\int |g - g_0| dm = \int (g - g_0) dm$ car $(g - g_0) \in \mathcal{M}_+$. la propiétée (12.43) donne alors que $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement si la limite de la suite (croissante) $(\int (g_n - g_0) dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire différente de ∞).

Comme $g_n, g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, on a $\int (g_n - g_0) dm = \int g_n dm - \int g_0 dm$ et donc $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement si la limite de la suite (croissante) $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.

Enfin, comme $g = (g - g_0) + g_0$ et que $g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, on a $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et finalement on obtient bien que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement la limite de la suite (croissante) $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.

On conclut en remarquant que $\int f_n dm = \int g_n dm$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f = g$ p.p.. Plus précisement :

- Si la limite de la suite (croissante) $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$, on obtient que $g \in \mathcal{L}^1$) et donc que $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p." (on confond donc f et la classe de g, c'est-à-dire $\{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m); h = g \text{ p.p.}\}$).
- Réciproquement, si $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, cela signifie qu'il existe $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = h$ p.p. (on a donc confondu f et la classe de h). Comme $f = g$ p.p., on a aussi $h = g$ p.p.. Comme $g \in \mathcal{M}$, on obtient donc que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et donc $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ ce qui donne, par (12.43), que la limite de la suite (croissante) $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.

Cas 2 : La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée monotone décroissante.

La démonstration est très voisine de la précécende. On remarque que $(g_0 - g_n) \uparrow (g_0 - g)$ quand $n \to \infty$ et, comme $(g_0 - g_n) \in \mathcal{M}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut utiliser le théorème de convergence monotone dans $\mathcal{M}_+$ (théorème 4.1). Il donne ($(g_0 - g) \in \mathcal{M}_+$ et)

$$\int (g_0 - g_n)dm \to \int (g_0 - g)dm \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.44}$$

On sait déjà que $(g - g_0) \in \mathcal{M}$ et que $\int |g - g_0|dm = \int (g_0 - g)dm$ car $(g_0 - g) \in \mathcal{M}_+$. La propriétée (12.44) donne alors que $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement si la limite de la suite (croissante) $(\int (g_0 - g_n)dm)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire différente de ∞).

Comme $g_n, g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, on a $\int (g_0 - g_n)dm = \int g_0 dm - \int g_n dm$ et donc $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement si la limite de la suite (décroissante) $(\int g_n dm)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire différente de $-\infty$).

Enfin, comme $g = (g - g_0) + g_0$ et que $g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, on a $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et finalement on obtient bien que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement la limite de la suite (décroissante) $(\int g_n dm)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.

On conclut en remarquant que $\int f_n dm = \int g_n dm$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f = g$ p.p., comme dans le premier cas.

---

3. On suppose ici que $f \in L^1$, montrer que $f_n \to f$ dans L^1, lorsque $n \to +\infty$.

corrigé

On utilise toujours la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la fonction g construites à la première question.

Comme $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ on a $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et la propriété (12.43) (ou la propriété (12.44)) donne $\int g_n dm \to \int g dm$ quand $n \to \infty$ et donc

$$\int |g_n - g| dm \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

(On a utilisé ici le fait que $(g_n - g)$ a un signe constant et que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.)

Comme $\|f_n - f\|_1 = \int |g_n - g|dm$, on en déduit que $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, quand $n \to \infty$.

Corrigé 78 (Préliminaire pour le théorème de Vitali)
Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. :

$$A \in T,\ m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \le \varepsilon.$$

[*Choisir un représentant de* f *et introduire* $f_n = \inf(|f|, n)$].

corrigé

En choisissant un représentant de f, cette question est démontrée à la question 1 de l'exsercice 4.14.

---

2. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $C \in T$ t.q. $m(C) < +\infty$ et $\displaystyle\int_{C^c} |f|dm \leq \varepsilon$. [*Choisir un représentant de f et considérer $C_n = \{x \in E\,;\ \dfrac{1}{n} \leq |f(x)|\}$.*]

—————————————corrigé—————————————

On choisit un représentant de f, encore noté f et pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $C_n = \{|f| \geq \frac{1}{n}\}$.

Comme $|f| \geq \frac{1}{n}1_{C_n}$, on a, par monotonie de l'intégrale, $m(C_n) \leq n\|f\|_1 < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

On pose maintenant $g_n = |f|1_{C_n^c}$. On remarque que $g_n(x) \to 0$ pour tout $x \in E$ et que $|g_n| \leq |f|$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou la proposition préliminaire 4.6). Il donne que $\int g_n dm \to 0$ quand $n \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\int g_n dm \leq \varepsilon$. On prend alors $C = C_{n_0}$, on a bien $m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f|dm \leq \varepsilon$.

———————————————————————————————

Corrigé 79 (Théorème de Vitali)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et $f\colon E \to \mathbb{R}$ t.q. $f_n \to f$ p.p..

1. On suppose $m(E) < +\infty$. Montrer que : $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable (i.e. : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ t.q. $(A \in T,\ n \in \mathbb{N},\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f_n|dm \leq \varepsilon)$. [*Pour montrer le sens $\Rightarrow$, utiliser la question 1 de l'exercice 4.29. Pour le sens $\Leftarrow$, remarquer que $\int |f_n - f|dm = \int_A |f_n - f|dm + \int_{A^c} |f_n - f|dm$, utiliser le théorème d'Egorov et le lemme de Fatou...*]

—————————————corrigé—————————————

Sens($\Rightarrow$) Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'exercice 4.29 (première question), il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n > 0$ t.q. :

$$A \in T,\ m(A) \leq \delta_n \Rightarrow \int_A |f_n|dm \leq \varepsilon. \tag{12.45}$$

On ne peut pas déduire de (12.45) l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car on peut avoir $\min_{n\in\mathbb{N}} \delta_n = 0$.

Comme $f \in L^1$, il existe aussi $\delta > 0$ t.q. :

$$A \in T,\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f|dm \leq \varepsilon. \tag{12.46}$$

On va déduire l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant (12.45) et (12.46).

Soit $A \in T$, on a :

$$\int_A |f_n|dm \leq \int_A |f_n - f|dm + \int_A |f|dm \leq \int |f_n - f|dm + \int_A |f|dm. \tag{12.47}$$

Comme $f_n \to f$ dans L^1 quand $n \to \infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\|f_n - f\|_1 \leq \varepsilon$ si $n > n_0$. Pour $n > n_0$ et $m(A) \leq \delta$, (12.47) et (12.46) donne donc $\int_A |f_n|dm \leq 2\varepsilon$. On choisit alors $\overline{\delta} = \min\{\delta_0, \ldots, \delta_{n_0}, \delta\} > 0$ et on obtient, avec aussi (12.45) (pour tout $n \leq n_0$) :

$$n \in \mathbb{N}, A \in T,\ m(A) \leq \overline{\delta} \Rightarrow \int_A |f_n|dm \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui donne l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sens ($\Leftarrow$)
on veut montrer ici que $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. L'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne l'existence de $\delta > 0$ t.q. :

$$n \in \mathbb{N}, A \in T,\ m(A) \leq \bar{\delta} \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq 2\varepsilon. \tag{12.48}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit maintenant un représentant de f_n, encore noté f_n. Comme $f_n \to f$ p.p., il existe $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$ et $f_n \to f$ sur B^c. En remplaçant f par $f1_{B^c}$ (ce qui ne change f que sur un ensemble de mesure nulle, donc ne change pas les hypothèses du théorème), on a alors $f \in \mathcal{M}$ car f est limite simple de la suite $(f_n 1_{B^c})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ (noter que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$). Comme $m(E) < \infty$, on peut utiliser le théorème d'Egorov (théorème 3.2), il donne l'existence de $A \in T$ t.q. $f_n \to f$ uniformément sur A^c, c'est-à-dire $\sup_{x\in A^c} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ quand $n \to \infty$. On a donc aussi, pour ce choix de A,

$$\int_{A^c} |f_n - f| dm \leq m(E) \sup_{x\in A^c} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

Il existe donc $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ t.q. $\int_{A^c} |f_n - f| dm \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$. Avec (12.48), on en déduit, pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$:

$$\int |f_n - f| dm \leq \int_{A^c} |f_n - f| dm + \int_A |f_n| dm + \int_A |f| dm \leq 2\varepsilon + \int_A |f| dm.$$

Pour majorer par ε le dernier terme de l'inégalité précédente, on utilise le lemme de Fatou sur la suite $(|f_n|1_A)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. Comme $\liminf_{n\to\infty} |f_n|1_A = |f|1_A$, il donne avec (12.48),

$$\int_A |f| dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int |f_n| 1_A \leq \varepsilon.$$

On a donc, finalement,

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \int |f_n - f| dm \leq 3\varepsilon. \tag{12.49}$$

En choisissant $n = n_0(1)$, on déduit de (12.49) que $f_n - f \in L^1$ et donc que $f = (f - f_n) + f_n \in L^1$. Cette appartenance étant, comme d'habitude à prendre au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p." (en fait, ici, comme nous avons remplacé f par $f1_{B^c}$ ci dessus, on a même $f \in \mathcal{L}^1$).

Puis, (12.49) étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré que $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$.

---

2. On suppose maintenant $m(E) = +\infty$. Montrer que : $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable et vérifie : $\forall \varepsilon > 0, \exists C \in T$, $m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f_n| dm \leq \varepsilon$ pour tout n. [*Pour montrer le sens $\Rightarrow$, utiliser l'exercice 4.29. Pour le sens $\Leftarrow$, utiliser l'exercice 4.29, le lemme de Fatou et le résultat de la question 1.*]

corrigé

Sens ($\Rightarrow$)

(a) L'hypothèse $m(E) < \infty$ n'a pas été utilisée à la question précédente. La même démonstration donne donc ici l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) On utilise maintenant la deuxième question de l'exercice 4.29.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $C_n \in T$ t.q. $m(C_n) < \infty$ et $\int_{C_n^c} f_n dm \le \varepsilon$. Comme $f \in L^1$, il existe aussi $D \in T$ t.q. $m(D) < \infty$ et $\int_{D^c} f dm \le \varepsilon$. Enfin, comme $f_n \to f$ dans L^1 quand $n \to \infty$, il existe n_0 t.q. $\|f_n - f\|_1 \le \varepsilon$ pour tout $n \ge n_0$.

On choisit maintenant $C = D \cup (\cup_{n=0}^{n_0} C_n)$, de sorte que $m(C) < m(D) + \sum_{n=0}^{n_0} m(C_n) < \infty$, $C^c \subset D^c$ et $C^c \subset C_n^c$ si $n \le n_0$. Ce choix de C nous donne, pour tout $n \ge n_0$,

$$\int_{C^c} |f_n| dm \le \int_{D^c} |f| dm + \int |f_n - f| dm \le 2\varepsilon,$$

et, pour tout $n \le n_0$,

$$\int_{C^c} |f_n| dm \le \int_{C_n^c} |f_n| dm \le \varepsilon.$$

On a donc $m(C) < \infty$ et $\int_{C^c} |f_n| dm \le 2\varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sens $(\Leftarrow)$

on veut montrer ici que $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. La deuxième hypothèse donne l'existence de $C \in T$ t.q. $m(C) < \infty$ et

$$\int_{C^c} |f_n| dm \le \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{12.50}$$

Comme dans la question précédente, on peut supposer (en changeant éventuellement f sur un ensemble de mesure nulle) que $f \in \mathcal{M}$. En appliquant le lemme de Fatou à la suite $(|f_n| 1_{C^c})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, on déduit de (12.50) que

$$\int_{C^c} |f| dm \le \varepsilon. \tag{12.51}$$

La première hypothèse (c'est-à-dire l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$) donne l'existence de $\delta > 0$ t.q.

$$n \in \mathbb{N},\, A \in T,\, m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \varepsilon. \tag{12.52}$$

On peut maintenant utiliser le théorème d'Egorov sur la suite $(f_{n|_C})_{n\in\mathbb{N}}$ (qui converge p.p. vers $f_{|_C}$) dans l'espace mesurable (C, T_C) où T_C est la tribu $\{B \in T;\ B \subset C\}$. Il donne l'existence de $A \subset C$, $A \in T$, t.q. $m(A) \le \delta$ et $f_n \to f$ uniformément sur $A^c \cap C$. On en déduit que

$$\int_{A^c\cap C} |f_n - f| dm \le m(C) \sup_{x\in A^c\cap C} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Il existe donc n_0 t.q.

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int_{A^c\cap C} |f_n - f| dm \le \varepsilon. \tag{12.53}$$

Enfin, en appliquant le lemme de Fatou à la suite $(|f_n|1_A)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, on déduit de (12.52) que

$$\int_A |f|dm \leq \varepsilon. \tag{12.54}$$

Il suffit maintenant de remarquer que

$$\int |f_n - f|dm \leq \int_{A^c\cap C} |f_n - f|dm + \int_A |f_n|dm + \int_A |f|dm + \int_{C^c} |f_n|dm + \int_{C^c} |f|dm,$$

pour déduire de (12.53), (12.52), (12.54), (12.50) et (12.51) que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int |f_n - f|dm \leq 5\varepsilon.$$

On conclut comme à la question précédente. En prenant d'abord $\varepsilon = 1$, on montre que $f \in L^1$ puis, comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on montre que $f_n \to f$ dans L^1 quand $n \to \infty$.

---

3. Montrer que le théorème de convergence dominée de Lebesgue peut être vu comme une conséquence du théorème de Vitali.

corrigé

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $F \in L^1$ t.q. $|f_n| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En utilisant l'exercice 4.29 sur F, on montre facilement l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, de $C \in T$ t.q. $m(C) < \infty$ et $\int_{C^c} |f_n|dm \leq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (noter que si $m(E) < \infty$ cette propriété est immédiate en prenant $C = E$). Il est alors facile de montrer le théorème de convergence dominée à partir du théorème de Vitali.

Corrigé 80 (Théorème de "Vitali-moyenne")

Soit (E, T, m) un espace mesuré. On note $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$ et $f \in \mathcal{M}(E, T)$.

1. On suppose que $m(E) < \infty$. On se propose ici de montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{L}^1 \text{ et} \\ \|f_n - f\|_1 \to 0 \text{ quand } n \to \infty \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{1. } f_n \to f \text{ en mesure, quand } n \to \infty, \\ \text{2. } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ équi-intégrable.} \end{array}\right. \tag{12.55}$$

(a) Montrer le sens $(\Rightarrow)$ de (12.55).

corrigé

On montre tout d'abord la convergence en mesure. Soit $\eta > 0$. On a alors :

$$m(\{|f_n - f| \geq \eta\}) \leq \frac{1}{\eta}\int |f_n - f|dm \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

Ce qui donne que $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to \infty$.

Pour montrer l'équi-intégrabilité, il suffit de remarquer que, pour tout $A \in T$, on a :

$$\int_A |f_n|dm \leq \int |f_n - f|dm + \int_A |f|dm.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f \in \mathcal{L}^1$, il existe (voir la proposition 4.9) $\delta > 0$ t.q.

$$m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \le \varepsilon.$$

Comme $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$, il existe n_0 t.q.

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int |f_n - f| dm \le \varepsilon.$$

On en déduit :

$$(n \ge n_0 \text{ et } m(A) \le \delta) \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le 2\varepsilon. \tag{12.56}$$

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe (voir la proposition 4.9) $\delta_n > 0$ t.q.

$$m(A) \le \delta_n \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \varepsilon. \tag{12.57}$$

En posant $\overline{\delta} = \min\{\delta, \delta_0, \ldots, \delta_n\}$ on a donc, avec (12.56) et (12.57):

$$(n \in \mathbb{N} \text{ et } m(A) \le \overline{\delta}) \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le 2\varepsilon.$$

Ce qui montre l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Pour montrer le sens ($\Leftarrow$), on suppose maintenant que $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to \infty$, et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

i. Montrer que pour tout $\delta > 0$ et $\eta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. : $p, q \ge n \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| \ge \eta\} \le \delta$.

corrigé

On remarque que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$, $|f_p - f|(x) \le \frac{\eta}{2}$ et $|f_q - f|(x) \le \frac{\eta}{2}$ implique $|f_p - f_q|(x) \le \eta$. On a donc $\{|f_p - f_q| \ge \eta\} \subset \{|f_p - f| \ge \frac{\eta}{2}\} \cup \{|f_p - f| \ge \frac{\eta}{2}\}$. Ce qui donne :

$$m(\{|f_p - f_q| \ge \eta\}) \le m(\{|f_p - f| \ge \frac{\eta}{2}\}) + \{|f_q - f| \ge \frac{\eta}{2}\}.$$

Comme $f_n \to f$ en mesure, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. :

$$p \ge n \Rightarrow m(\{|f_p - f| \ge \frac{\eta}{2}\}) \le \frac{\delta}{2},$$

on en déduit :

$$p, q \ge n \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| \ge \eta\}) \le \delta.$$

---

ii. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^1.

corrigé

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$, on a :

$$\|f_p - f_q\|_1 = \int_{\{|f_p - f_q| \ge \eta\}} |f_p| dm + \int_{\{|f_p - f_q| \ge \eta\}} |f_q| dm + \eta m(E). \tag{12.58}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $\delta > 0$ t.q.

$$(A \in T,\ m(A) \leq \delta \text{ et } n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \int_A |f_n| \leq \varepsilon. \tag{12.59}$$

On commence à choisir $\eta > 0$ t.q. $\eta m(E) \leq \varepsilon$. Puis, la question précédente donne l'existence de n t.q. $m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\}) \leq \delta$ si $p, q \geq n$. On a donc, par (12.59) :

$$\int_{\{|f_p-f_q|\geq\eta\}} |f_p| \leq \varepsilon \text{ et } \int_{\{|f_p-f_q|\geq\eta\}} |f_q| \leq \varepsilon \text{ si } p, q \geq n.$$

Finalement, (12.58) donne :

$$p, q \geq n \Rightarrow \|f_p - f_q\|_1 \leq 3\varepsilon.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans L^1.

---

iii. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1$ et que $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$.

corrigé

Comme L^1 est complet, il existe $g \in L^1$ t.q. $f_n \to g$ dans L^1, quand $n \to \infty$. On peut supposer $g \in \mathcal{L}^1$ (en confondant g avec l'un de ses représentants). La question (a) donne alors que $f_n \to g$ en mesure, quand $n \to \infty$. Comme $f_n \to f$ en mesure, on a donc nécessairement $f = g$ p.p.. ce qui donne bien $f \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n - f\|_1 = \|f_n - g\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$.

---

2. On ne suppose plus que $m(E) < \infty$. Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{L}^1 \text{ et} \\ \|f_n - f\|_1 \to 0 \text{ quand } n \to \infty \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1.\ f_n \to f \text{ en mesure, quand } n \to \infty, \\ 2.\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ équi-intégrable,} \\ 3.\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in T \text{ t.q. } m(A) < \infty \text{ et ,} \\ \qquad \int_{A^c} |f_n| dm \leq \varepsilon, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{array}\right. \tag{12.60}$$

corrigé

Etape 1 On montre tout d'abord le sens $(\Rightarrow)$.

Les propriétés 1 et 2 ont déjà été démontrées dans la question 1-(a) (car l'hypothèse $m(E) < \infty$ n'avait pas été utilisée).

Pour démontrer la propriété 3, on utilise la proposition 4.9 du cours. Soit $\varepsilon > 0$. pour tout $n \in \mathbb{N}$, Il existe $B_n \in T$ t.q. $m(B_n) < \infty$ et

$$\int_{B_n^c} |f_n| dm \leq \varepsilon. \tag{12.61}$$

Il existe aussi $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$ et

$$\int_{B^c} |f| dm \leq \varepsilon. \tag{12.62}$$

En remarquant que

$$\int_{B^c} |f_n| dm \leq \int |f_n - f| dm + \int_{B^c} |f| dm,$$

on obtient, en utilisant le fait que $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$, et (12.62), l'existence de n_0 t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int_{B^c} |f_n| dm \leq 2\varepsilon.$$

En prenant $A = B \cup (\cup_{p=0}^{n_0} B_p)$, on obtient alors (avec (12.61)) $m(A) < \infty$ et :

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{A^c} |f_n| dm \leq 2\varepsilon.$$

Etape 1 On montre maintenant le sens ($\Leftarrow$).

On reprend la même méthode que dans le cas $m(E) < \infty$.

On remarque tout d'abord que pour tout $\delta > 0$ et $\eta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. : $p, q \geq n \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\} \leq \delta$. La démonstration est la même que précédemment (l'hypothèse $m(E) < \infty$ n'avait pas été utilisée).

On montre maintenant que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^1. Soit $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in T$ et $\eta > 0$, on a :

$$\|f_p - f_q\|_1 \leq \int_{A^c} (|f_p| + |f_q|) dm + \int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} (|f_p| + |f_q|) dm + \eta m(A). \tag{12.63}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $\delta > 0$ t.q.

$$(B \in T,\, m(B) \leq \delta \text{ et } n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \int_B |f_n| \leq \varepsilon. \tag{12.64}$$

D'après la propriété 3 de (12.60), il existe $A \in T$ t.q. $m(A) < \infty$ et

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{A^c} |f_n| dm \leq \varepsilon. \tag{12.65}$$

On commence à choisir $\eta > 0$ t.q. $\eta m(A) \leq \varepsilon$. Maintenant que δ et η sont fixés, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\}) \leq \delta$ si $p, q \geq n$. On a donc, par (12.64), $\int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_p| \leq \varepsilon$ et $\int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_q| \leq \varepsilon$ si $p, q \geq n$. Avec (12.63) et (12.65), on obtient alors :

$$p, q \geq n \Rightarrow \|f_p - f_q\|_1 \leq 5\varepsilon.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans L^1.

On conclut, comme dans le cas $m(E) < \infty$, que $f \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$ (car l'hypothèse $m(E) < \infty$ n'avait pas été utilisée pour cette partie).

Corrigé 81 (Continuité de $p \mapsto \|\cdot\|_p$)
Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(E, T)$.

1. Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose $\|f\|_p = \left(\int |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}}$ (noter que $|f|^p \in \mathcal{M}_+$) et on dit que $f \in \mathcal{L}^p$ si $\|f\|_p < +\infty$. On pose $I = \{p \in [1, +\infty[, f \in \mathcal{L}^p\}$.

(a) Soient p_1 et $p_2 \in [1,+\infty[$, et $p \in [p_1,p_2]$. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$, alors $f \in \mathcal{L}^p$. En déduire que I est un intervalle. [*On pourra introduire* $A = \{x; |f(x)| \le 1\}$.]

corrigé

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$. On remarque que $\alpha^p \le \alpha^{p_2}$ si $1 \le \alpha$ et $\alpha^p \le \alpha^{p_1}$ si $\alpha \le 1$. On en déduit que $|f|^p \le |f|^{p_1} + |f|^{p_2}$ (en fait, on a $|f|^p \le |f|^{p_1}$ sur $A = \{|f| \le 1\}$ et $|f|^p \le |f|^{p_2}$ sur A^c) et donc que $f \in \mathcal{L}^p$ si $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$.

On suppose que $I \ne \emptyset$. On pose $a = \inf I$ et $b = \sup I$. On a donc $1 \le a \le b \le \infty$ et $I \subset [a,b]$. On montre maintenant que $]a,b[\subset I$ (ce qui donne que I est bien un intervalle dont les bornes sont a et b).

Soit $p \in]a,b[$. La défintion de a et b permet d'affirmer qu'il existe $p_1 \in I$ t.q. $p_1 < p$ et qu'il existe $p_2 \in I$ t.q. $p_2 > p$. On a donc $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$ et $p \in]p_1,p_2[$, d'où l'on déduit que $p \in I$. on a donc bien monté que $]a,b[\subset I$ et donc que I est un intervalle.

(b) On montre sur des exemples que les bornes de I peuvent être ou ne pas être dans I. On prend pour cela: $(E,T,m) = ([2,+\infty[, \mathcal{B}([2,\infty[), \lambda)$ (λ est ici la restriction à $[2,\infty[$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Calculer I dans les deux cas suivants:

i. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [2,+\infty[$.
ii. $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}, x \in [2,+\infty[$.

corrigé

i. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [2,+\infty[$. Soit $1 \le p < \infty$. Pour savoir si $f \in \mathcal{L}^p$ ou non, on utilise le théorème de convergence monotone et l'intégrale des fonctions continues sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = |f|^p 1_{[2,n]}$. On a donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ et $f_n \uparrow |f|^p$ ce qui donne, grâce au théorème de convergence monotone,

$$\int f_n d\lambda \to \int |f|^p d\lambda, \text{ quand } n \to \infty.$$

Les intégrales ci dessus sont des intégrales sur l'espace mesuré $([2,+\infty[, \mathcal{B}([2,\infty[), \lambda)$. La comparaison entre l'intégrale des fonctions continues et l'intégrale de Lebesgue (voir les exercices corrigés 62 et 63) donne que

$$\int f_n d\lambda = \int_2^n \frac{1}{x^p} dx.$$

On distingue maintenant les cas $p = 1$ et $p > 1$.

Si $p > 1$, on a $\int f_n d\lambda = \frac{1}{p-1}(\frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}) \to \frac{1}{p-1}\frac{1}{2^{p-1}} < \infty$, quand $n \to \infty$. On a donc $f \in \mathcal{L}^p$.

Si $p = 1$, on a $\int f_n d\lambda = \ln(n) - \ln(2) \to \infty$ quand $n \to \infty$. On a donc $f \notin \mathcal{L}^1$.

On a donc $I =]1,\infty[$.

ii. $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}, x \in [2,+\infty[$. Pour $1 < p < \infty$, on a clairement $f \in \mathcal{L}^p$ car la fonction f est positive et majorée par $\frac{1}{\ln(2)^2} g$ où g est la fonction de l'exemple précédent, c'est-à-dire $g(x) = \frac{1}{x}$. Pour $p = 1$, on utilise la même méthode que pour l'exemple précédent :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = |f|1_{[2,n]}$, de sorte que $f_n \uparrow |f| = f$ et donc

$$\int f_n d\lambda \to \int |f| d\lambda, \text{ quand } n \to \infty.$$

On a ici

$$\int f_n d\lambda = \int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \ln(2)^{-1} - \ln(n)^{-1} \to \ln(2)^{-1} < \infty, \text{ quand } n \to \infty.$$

On en déduit que $f \in \mathcal{L}^1$, donc $I = [1, \infty[$.

(c) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ et $p \in \bar{I}$, ($\bar{I}$ désigne l'adhérence de I dans $\mathbb{R}$), t.q. $p_n \uparrow p$ (ou $p_n \downarrow p$). Montrer que $\displaystyle\int |f|^{p_n} dm \to \int |f|^p dm$ quand $n \to +\infty$. [*On pourra encore utiliser l'ensemble* A].

corrigé

On utilise ici $A = \{|f| \le 1\} \in T$.

(a) On suppose d'abord que $p_n \uparrow p$ quand $n \to \infty$. On pose $g_n = |f|^{p_n} 1_A$ et $h_n = |f|^{p_n} 1_{A^c}$, de sorte que $g_n \in \mathcal{L}^1$, $h_n \in \mathcal{L}^1$ et

$$\int g_n dm + \int h_n dm = \int |f|^{p_n} dm.$$

On remarque alors que $h_n \uparrow h = |f|^p 1_{A^c}$, quand $n \to \infty$. Comme $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, le théorème de convergence monotone donne

$$\int h_n dm \to \int h dm, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.66}$$

Noter que ceci est vrai même si $p \notin I$ (dans ce cas, on a, en fait, $\int h dm = \infty$).

On remarque maintenant que $g_n \to g = |f|^p 1_A$ p.p., quand $n \to \infty$, et que $0 \le g_n \le |f|^{p_0}$ car la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ici décroissante. Comme $p_0 \in I$, on a $|f|^{p_0} \in \mathcal{L}^1$ et on peut appliquer le théorème de convergence dominée (ou la proposition 4.6). Il donne

$$\int g_n dm \to \int g dm, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.67}$$

Avec (12.66) et (12.67) on obtient

$$\int |f|^{p_n} dm = \int g_n dm + \int h_n dm \to \int g dm + \int h dm = \int |f|^p dm, \text{ quand } n \to \infty.$$

(b) On suppose maintenant que $p_n \downarrow p$ quand $n \to \infty$ et on reprend la même méthode que ci dessus. On pose $g_n = |f|^{p_n} 1_A$ et $h_n = |f|^{p_n} 1_{A^c}$, de sorte que $g_n \in \mathcal{L}^1$, $h_n \in \mathcal{L}^1$ et

$$\int g_n dm + \int h_n dm = \int |f|^{p_n} dm.$$

les rôles de g_n et h_n sont inversés par rapport au cas précécent : On remarque que $g_n \uparrow g = |f|^p 1_A$, quand $n \to \infty$. Comme $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, le théorème de convergence monotone donne

$$\int g_n dm \to \int g dm, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.68}$$

Ceci est vrai même si $p \notin I$ (dans ce cas, on a, en fait, $\int g dm = \infty$).

On remarque que $h_n \to h = |f|^p 1_{A^c}$ p.p., quand $n \to \infty$, et que $0 \le h_n \le |f|^{p_0}$ car la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ici décroissante. Comme $p_0 \in I$, on a $|f|^{p_0} \in \mathcal{L}^1$ et on peut appliquer le théorème de convergence dominée (ou la proposition 4.6). Il donne

$$\int h_n dm \to \int h dm, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.69}$$

Avec (12.68) et (12.69) on obtient

$$\int |f|^{p_n} dm = \int g_n dm + \int h_n dm \to \int g dm + \int h dm = \int |f|^p dm, \text{ quand } n \to \infty.$$

La conséquence de cette question est que l'application $p \mapsto \|f\|_p$ est continue de $\overline{I}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, où $\overline{I}$ est l'adhérence de I dans $\mathbb{R}$. Dans la suite de l'exercice, on va introduire le cas $p = \infty$ et montrer la continuité de $p \mapsto \|f\|_p$ sur l'adhérence de I dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

---

2. On dit que $f \in \mathcal{L}^\infty$ s'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < C$ p.p.. On note $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < C$ p.p.$\}$. Si $f \notin \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = +\infty$.

   (a) Montrer que $f \le \|f\|_\infty$ p.p.. A-t-on $f < \|f\|_\infty$ p.p. ?

   corrigé

   Si $\|f\|_\infty = +\infty$, on a, bien sûr, $f \le \|f\|_\infty$ p.p.. On suppose donc maintenant que $\|f\|_\infty < +\infty$. Par définition d'une borne inférieure, il existe $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \{C \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < C$ p.p.$\}$ t.q. $C_n \downarrow \|f\|_\infty$ quand $n \to \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $|f| < C_n$ sur A_n^c.

   On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On a donc $A \in T$, $m(A) = 0$ et $|f(x)| < C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $x \in A^c$. Comme $C_n \downarrow \|f\|_\infty$ quand $n \to \infty$, on en déduit $|f| \le \|f\|_\infty$ sur A^c et donc que $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p..

   En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $\|f\|_\infty = 1$ et l'assertion $f < \|f\|_\infty$ p.p. est fausse.

   Noter aussi que $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| \le C$ p.p.$\}$.

   On pose $J = \{p \in [1, +\infty]; f \in \mathcal{L}^p\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$.

   (b) Remarquer que $J = I$ ou $J = I \cup \{+\infty\}$. Montrer que si $p \in I$ et $+\infty \in J$, alors $[p, +\infty] \subset J$. En déduire que J est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}_+$.

   corrigé

Soit $p \in I$ et on suppose que $\infty \in J$. Soit $q \in]p, \infty[$. Comme $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p., On a $|f|^q \leq \|f\|_\infty^{q-p}|f|^p$ p.p.. On en déduit que $f \in \mathcal{L}^q$, c'est-à-dire $q \in I$. On a ainsi montré que $]p, \infty[\subset I$ et donc $[p, \infty] \subset J$.

On raisonne maintenant comme dans la question 1. On pose $a = \inf J$ et $b = \sup J$, de sorte que $J \subset [a, b]$. Puis, soit p t.q. $a < p < b$. On a nécessairement $a < \infty$ et il existe $p_1 \in I$ t.q. $p_1 < p$. On a $b \leq \infty$ et il existe $p_2 \in J$ t.q. $p < p_2$. Si $p_2 \in I$, on utilise la question 1 pour montrer que $p \in I$ et si $p_2 = \infty$ la première partie de cette question donne que $p \in I$. On a bien ainsi montré que $]a, b[\subset J$. J est donc un intervalle dont les bornes sont a et b.

Noter aussi que $\inf I = \inf J$ et $\sup I = \sup J$.

(c) Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \uparrow +\infty$. On suppose que $\|f\|_\infty > 0$ (noter que $f = 0$ p.p. $\Leftrightarrow \|f\|_\infty = 0$).

i. Soit $0 < c < \|f\|_\infty$. Montrer que : $\liminf_{n \to +\infty} \|f\|_{p_n} \geq c$. [*On pourra remarquer que* $\int |f|^p dm \geq c^p m(\{x; |f(x)| \geq c\}$.]

corrigé

Comme $|f|^p \geq c^p 1_{\{|f| \geq c\}}$, la monotonie de l'intégrale donne bien

$$\int |f|^p dm \geq c^p m(\{|f| \geq c\}),$$

et donc, comme $\int |f|^p dm \neq 0$,

$$\|f\|_p \geq c m(\{|f| \geq c\})^{\frac{1}{p}}. \tag{12.70}$$

Comme $c < \|f\|_\infty$, on a $m(\{|f| \geq c\}) > 0$, d'où l'on déduit que $m(\{|f| \geq c\})^{\frac{1}{p}} \to 1$ quand $p \to \infty$ ($p \in [1, \infty[$).

En passant à la limite inférieure quand $n \to \infty$ dans (12.70) pour $p = p_n$, on obtient alors

$$\liminf_{n \to \infty} \|f\|_{p_n} \geq c.$$

Comme c est arbitrairement proche de $\|f\|_\infty$, on en déduit :

$$\liminf_{n \to \infty} \|f\|_{p_n} \geq \|f\|_\infty. \tag{12.71}$$

---

ii. On suppose que $\|f\|_\infty < +\infty$. Montrer que : $\limsup_{n \to +\infty} \|f\|_{p_n} \leq \|f\|_\infty$. [*On pourra considérer la suite* $g_n = \left(\frac{|f|}{\|f\|_\infty}\right)^{p_n}$ *et noter que* $g_n \leq g_0$ *p.p..*]

corrigé

Comme $\frac{f}{\|f\|_\infty} \leq 1$ p.p. et que $p_n \geq p_0$ (car la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante), on a $g_n \leq g_0$ p.p. et donc $\int g_n dm \leq \int g_0 dm$, d'où l'on déduit (en notant que toutes les normes de f sont non nulles) :

$$\|f_n\|_{p_n} \leq \|f\|_\infty (\int g_0 dm)^{\frac{1}{p_n}}.$$

On passe à la limite supérieure dans cette inégalité et, en remarquant que $\int g_0 dm \neq 0$, on obtient bien :

$$\limsup_{n\to\infty} \|f\|_{p_n} \leq \|f\|_\infty. \tag{12.72}$$

---

iii. Déduire de (a) et (b) que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

corrigé

On distingue deux cas :

Cas 1 On suppose ici que $\|f\|_\infty = \infty$. (12.71) donne alors que $\|f\|_{p_n} \to \infty$ et donc $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ quand $n \to \infty$.

Cas 2 . On suppose ici que $\|f\|_\infty < \infty$, de sorte que $0 < \|f\|_\infty < \infty$. Les assertions (12.71) et (12.72) donnent alors $\limsup_{n\to\infty} \|f\|_{p_n} \leq \|f\|_\infty \leq \liminf_{n\to\infty} \|f\|_{p_n}$ et donc que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ quand $n \to \infty$.

---

3. Déduire des deux parties précédentes que $p \to \|f\|_p$ est continue de $\overline{J}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, où $\overline{J}$ désigne l'adhérence de J dans $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $\overline{J} = [a,b]$ si $J = |a,b|$, avec $1 \leq a \leq b \leq +\infty$, et $|$ désigne $]$ ou $[$).

corrigé

Si $f = 0$ p.p., on a $J = \overline{J} = [1,\infty]$ et $\|f\|_p = 0$ pour tout $p \in J$. Donc, $p \to \|f\|_p$ est continue de $\overline{J}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

On suppose maintenant que f n'est pas "$= 0$ p.p.". On a donc $\|f\|_p > 0$ pour tout $p \in [1,\infty]$.

On pose $\overline{J} = [a,b]$ (si $J \neq \emptyset$). On distingue 3 cas :

Cas 1 . Soit $p \in]a,b[$, de sorte que $p \in I$.

(a) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \uparrow p$. La question 1-c donne que $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_p^p$ quand $n \to +\infty$. On en déduit que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_p$ quand $n \to \infty$ (pour s'en convaincre, on peut remarquer que $\ln(\|f\|_{p_n}) = \frac{1}{p_n}\ln(\|f\|_{p_n}^{p_n}) \to \frac{1}{p}\ln(\|f\|_p^p) = \ln(\|f\|_p)$). Ceci donne la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point p.

(b) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \downarrow p$. La question 1-c donne aussi $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_p^p$ quand $n \to +\infty$ et on en déduit, comme précédemment, que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_p$ quand $n \to \infty$. Ceci donne la continuité à droite de $q \to \|f\|_q$ au point p.

Cas 2 . On prend ici $p = a$ et on suppose $a \neq \infty$ (sinon $a = b$ et ce cas est étudié au Cas 3). Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \downarrow a$.

(a) On suppose d'abord que $a \in I$. Ici encore, la question 1-c donne $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_a^a$ quand $n \to +\infty$ et on en déduit que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_a$ quand $n \to \infty$. Ceci donne la continuité à droite de $q \to \|f\|_q$ au point a.

(b) On suppose maintenant que $a \notin I$, de sorte que $\|f\|_a = \infty$. La question 1-c donne alors $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \infty$ quand $n \to +\infty$ et donc $\|f\|_{p_n} \to \infty$ quand $n \to \infty$. Ceci donne la continuité à droite de $q \to \|f\|_q$ au point a.

Cas 2 . On prend ici $p = b$. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \uparrow a$.

(a) On suppose d'abord que $b \in I$. Ici encore, la question 1-c donne $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_b^b$ quand $n \to +\infty$ et on en déduit que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_b$ quand $n \to \infty$. Ceci donne la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point b.

(b) On suppose maintenant que $b \notin I$.

Si $b \neq \infty$, on a donc $\|f\|_b = \infty$. La question 1-c donne alors $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \infty$ quand $n \to +\infty$ et donc $\|f\|_{p_n} \to \infty$ quand $n \to \infty$. Ceci donne la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point b.

Si $b = \infty$, la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point b a été démontré à la question 2-c-iii.

Corrigé 82 (Continuité d'une application de L^1 dans L^1)

Soient (E, T, m) un espace mesuré fini et soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^\star\,;\ |g(s)| \leq C|s| + C,\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{12.73}$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

corrigé

u est mesurable de E (muni de la tribu T) dans $\mathbb{R}$ (muni de la tribu $\mathcal{B}(R)$) et g est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu $\mathcal{B}(R)$). On en déduit que $g \circ u$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

Puis, comme $|g \circ u(x)| = |g(u(x))| \leq C|u(x)| + C$ pour tout $x \in E$, on a

$$\int |g \circ u| dm \leq C\|u\|_1 + Cm(E).$$

Donc, $g \circ u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

On pose $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Pour $u \in L^1$, on pose $G(u) = \{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m);\ h = g \circ v \text{ p.p.}\} \in L^1$, avec $v \in u$.

2. Montrer que la définition précédente a bien un sens, c'est à dire que $G(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u.

corrigé

Soient $v, w \in u$. Il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $v = w$ sur A^c. On a donc aussi $g \circ v = g \circ w$ sur A^c et donc $g \circ v = g \circ w$ p.p.. On en déduit que $\{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m);\ h = g \circ v \text{ p.p.}\} = \{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m);\ h = g \circ w \text{ p.p.}\}$.

$G(u)$ ne dépend donc pas du choix de v dans u.

---

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1$. On suppose que $u_n \to u$ p.p. et qu'il existe $F \in L^1$ t.q. $|u_n| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^1.

corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de u_n, encore notée u_n. On choisit aussi des représentants de u et F, notés toujours u et F. Comme $u_n \to u$ p.p. quand $n \to \infty$ et que g est continu, il est facile de voir que $g \circ u_n \to g \circ u$ p.p.. On a donc $G(u_n) \to G(u)$ p.p..

On remarque aussi que $|g \circ u_n| \leq C|u_n| + C \leq CF + C$ p.p. et donc $|G(u_n)| \leq CF + C$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $CF+C \in L^1$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée, il donne que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^1 quand $n \to \infty$.

---

4. Montrer que G est continue de L^1 dans L^1. [*On pourra utiliser la question 3. et le théorème appelé "réciproque partielle de la convergence dominée".*]

corrigé

On raisonne par l'absurde. On suppose que G n'est pas continue de L^1 dans L^1. Il existe donc $u \in L^1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ t.q. $u_n \to u$ dans L^1 et $G(u_n) \not\to G(u)$ dans L^1 quand $n \to \infty$.

Comme $G(u_n) \not\to G(u)$, il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$ et :

$$\|G(u_{\varphi(n)}) - G(u)\|_1 \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{12.74}$$

(La suite $(G(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de la suite $(G(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.)

Comme $u_{\varphi(n)} \to u$ dans L^1, on peut appliquer le théorème appelé "réciproque partielle de la convergence dominée" (théorème 4.7). Il donne l'existence de $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et de $F \in L^1$ t.q. $\psi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$, $u_{\varphi\circ\psi(n)} \to u$ p.p. et $|u_{\varphi\circ\psi(n)}| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. (La suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$).

On peut maintenant appliquer la question 3 à la suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle donne que $G(u_{\varphi\circ\psi(n)}) \to G(u)$ dans L^1 quand $n \to \infty$. Ce qui est en contradiction avec (12.74).

12.4.3 Espérance et moments des variables aléatoires

Corrigé 83 (Inégalité de Jensen)
Rappel : Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe c_a t.q. $f(x) - f(a) \geq c_a(x - a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et X une v.a. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X et $f(X)$ sont intégrables. Montrer l'**inégalité de Jensen**, c'est-à-dire :

$$\int f(X)dP \geq f(\int XdP).$$

[Utiliser le rappel avec a bien choisi.]

corrigé

On utilise le rappel avec $a = E(X) = \int XdP$. On obtient pour tout $\omega \in \Omega$

$$f(X(\omega)) - f(a) \geq X(\omega) - a.$$

Comme les fonctions $f(X) - f(a)$ et $X - a$ sont intégrables, la monotonie de l'intégrale donne alors

$$\int (f(X) - f(a))dP \geq \int (X - a)dP.$$

Comme $\int X dp = a$, on en déduit $\int (f(X) - f(a))dP \geq 0$, ce qui donne le résultat demandé.

Corrigé 84 (Sur l'équi-intégrabilité)
Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. (réelles). On rappelle que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable si $\int_A |X_n|dP \to 0$, quand $P(A) \to 0$ (avec $A \in \mathcal{A}$), uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

1. $\lim_{a\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n|dP = 0$,
2. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |X_n|dP < +\infty$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équi-intégrable.

corrigé

En attente.

Corrigé 85 (Caractérisation de l'indépendance)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $n \geq 2$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles. Montrer que l'indépendance de $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ est équivalente à la propriété suivante :

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in]-\infty, +\infty[^n, P[X_1 \leq a_1, \ldots, X_n \leq a_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \leq a_i].$$

(La notation $P[X \leq a]$ est identique à $P(\{X \leq a\})$, elle désigne la probabilité de l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq a\}$.)

corrigé

En attente.

Corrigé 86 (Sign(X) et $|X|$ pour une gaussienne)
Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose sign(s)=1 si $s > 0$, sign(s)=-1 si $s < 0$ et sign(0)= 0. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. gaussienne centrée (c'est-à-dire $P_X = f\lambda$ avec, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, où $\sigma > 0$ est la racine carré de la variance de X). Montrer que sign(X) et $|X|$ sont indépendantes et préciser leurs lois. Même question avec sign(X) et X^2.

corrigé

En attente.

Corrigé 87 (V.a. gaussiennes dépendantes)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ et X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes et telles que :

$$X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2) \text{ et } X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2).$$

(le signe "$\sim$" signifie "a pour loi".) Construire deux v.a. Y_1 et Y_2 t.q. $X_1 \sim Y_1$, $X_2 \sim Y_2$ et Y_1 et Y_2 soient dépendantes.

corrigé

En attente.

Corrigé 88 (V.a. gaussiennes dépendantes, à covariance nulle)
soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilités et X, S deux v.a. réelles, indépendantes, t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et S a pour loi $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. (Il est possible de construire un espace de probabilités et des v.a. indépendantes ayant des lois prescrites, voir le Chapitre 7.)

1. Montrer que $SX \sim \mathcal{N}(0,1)$.

corrigé

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ de sorte que la loi de X est de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on note $-A = \{-x, \, x \in A\}$. Comme f est paire, on a :

$$P(X \in (-A)) = \int_{-A} f(x)dx = \int_A f(-x)dx = \int_A f(x)dx = P(X \in A).$$

On remarque maintenant que $P(SX \in A) = P(S = 1, X \in A) + P(S = -1, X \in (-A))$. Comme S et X sont indépendantes, on a :

$$P(S = 1, X \in A) = P(S = 1)P(X \in A) = \frac{1}{2}P(X \in A),$$

$$P(S = -1, X \in (-A)) = P(S = -1)P(X \in (-A)) = \frac{1}{2}P(X \in (-A)).$$

Comme $P(X \in (-A)) = P(X \in A)$, on en déduit $P(SX \in A) = P(X \in A)$. Les v.a.r. SX et X ont donc même loi, et donc $SX \sim \mathcal{N}(0,1)$.

---

2. Montrer que SX et X sont dépendantes.

corrigé

On raisonne par l'absurde. On suppose que SX et X sont indépendantes. La proposition 4.10 donne alors $E(|SX||X|) = E(|SX|)E(|X|)$ (noter que la fonction $s \mapsto |s|$ est borélienne positive). Comme $|S| = 1$ p.s., on a donc :

$$E(X^2) = E(|SX||X|) = E(|SX|)E(|X|) = E(|X|)^2.$$

Comme $E(|X|) < +\infty$, on en déduit que $\text{Var}(|X|) = 0$, ce qui est impossible car $|X|$ n'est pas égale p.s. à sa moyenne (sinon, la loi de $|X|$ serait une masse de Dirac et non pas une loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue).

---

3. Montrer que $\mathrm{Cov}(SX, X) = 0$.

corrigé

Comme $SX \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a $E(SX) = E(X) = 0$. Comme S et X sont indépendantes (et S et X^2 intégrables), on a (proposition 4.10) SX^2 intégrable et $E(SX^2) = E(S)E(X^2) = 0$. On en déduit $\mathrm{Cov}(SX, X) = E([SX - E(SX)][X - E(X)]) = E(SX^2) = E(S)E(X^2) = 0$.

4. (Question subsidiaire.) On ne suppose plus l'existence de S, mais on suppose qu'il existe Y v.a. gaussienne indépendante de X. Montrer que si $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\sigma > 0$, il est possible d'utiliser Y pour construire S, v.a. indépendante de X et telle que $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$.

corrigé

Il suffit de prendre $S = \mathrm{sign}(Y)$ avec $\mathrm{sign}(s) = -1$ si $s < 0$, $\mathrm{sign}(s) = 1$ si $s > 0$ et (par exemple) $\mathrm{sign}(0) = 0$ (la fonction sign est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On a bien X et S indépendantes (par la proposition 3.10, mais la preuve est facile ici car la tribu engendrée par $\varphi(Y)$ est incluse dans celle engendrée par Y dés que φ est borélienne). Enfin, on a $P(S = 1) = P(Y > 0) = \frac{1}{2} = P(Y < 0) = P(S = -1)$, ce qui donne bien $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$.

Corrigé 89 (Identités de Wald)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ une suite v.a.r.i.i.d. et N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$. On pose $S_N = X_1 + \ldots + X_N$ (c'est-à-dire que, pour $\omega \in \Omega$, $S_N(\omega) = \sum_{n=1}^{N(\omega)} X_n(\omega)$).

1. On suppose, dans cette question, que les v.a.r. $N, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sont indépendantes. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $A_n = \{\omega \in \Omega,\ N(w) = n\}$ (on note, en général, $A_n = \{N = n\}$), $Y_n = \sum_{p=1}^{n} X_p$ et $Z_n = \sum_{p=1}^{n} |X_p|$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que 1_{A_n} et Y_n sont des v.a.r. indépendantes et que 1_{A_n} et Z_n sont des v.a.r. indépendantes.

   (b) On suppose que N et X_1 sont intégrables . Montrer que S_N est intégrable et calculer $E(S_N)$ en fonction de $E(N)$ et $E(X_1)$. [On pourra remarquer que $S_N = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} Y_n$ et $|S_N| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} Z_n$.]

   (c) On suppose que N et X_1 sont de carré intégrable, montrer que S_N est de carré intégrable et calculer sa variance en utilisant les variances de N et X_1.

2. On suppose maintenant que $\{N = n\} \in \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ (où $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$ est la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$) et que $E(X_1) = 0$.

   (a) Montrer que $1_{\{n \leq N\}}$ et X_n sont des v.a.r. indépendantes.

   (b) Reprendre les questions 1(b) et 1(c). [On pourra écrire $S_N = \sum_{n \in \mathbb{N}^\star} 1_{\{n \leq N\}} X_n$.]

   N.B. : Le cas $E(X_1) \neq 0$ peut aussi être traité. Il se ramène au cas $E(X_1) = 0$ en considérant $Y_n = X_n - E(X_n)$.

corrigé

En attente.

Corrigé 90 (Limite p.s. et indépendance)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite v.a.r. et X, Y deux v.a.r.. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, X_n et Y sont indépendantes et on suppose que $X_n \to X$ p.s., quand $n \to \infty$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

corrigé

Soit ϕ, $\psi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Comme X_n et Y sont indépendantes, on a (voir la proposition 4.10), pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$E(\varphi(X_n)\psi(Y)) = E(\varphi(X_n))E(\psi(Y)). \tag{12.75}$$

Comme φ est continue, on a $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ p.s. et $\varphi(X_n)\psi(Y) \to \varphi(X)\psi(Y)$ p.s.. les convergences sont dominées car $|\varphi(X_n)| \le \sup\{\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ (et $|\psi(Y)| \le \sup\{\psi(x),\ x \in \mathbb{R}\}$). On peut donc utiliser le théprème de convergence dominée, il donne $\lim_{n\to\infty} E(\varphi(X_n)\psi(Y)) = E(\varphi(X)\psi(Y))$ et $\lim_{n\to\infty} E(\varphi(X_n)) = E(\varphi(X))$. En passant à la limite dans (12.75), on en déduit que

$$E(\varphi(X)\psi(Y)) = E(\varphi(X))E(\psi(Y)).$$

La proposition 4.12 permet de conclure que X et Y sont indépendantes.

12.5 Exercices du chapitre 5

Corrigé 91

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ convergeant simplement vers la fonction $f :]0,1[\to\mathbb{R}$; on suppose que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\subset C(]0,1[,\mathbb{R})$) converge simplement vers la fonction constante et égale à 1.

1. A-t-on $f \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et $f' = 1$?

———————————————corrigé———————————————

La réponse est “non”. La fonction f peut même ne pas être continue, comme le montre l'exemple suivant :

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, on définit g_n de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{l} g_n(x) = 1, \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ g_n(x) = 1 + n^2(x - \frac{1}{2}), \text{ si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ g_n(x) = 1 - n^2(x - \frac{1}{2} - \frac{2}{n}), \text{ si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{n}, \\ g_n(x) = 1, \text{ si } \frac{1}{2} + \frac{2}{n} < x \leq 1. \end{array}$$

Il est facile de voir que $g_n \in C([0,1],\mathbb{R})$ et que $g_n(x) \to 1$ pour tout $x \in [0,1]$.

Pour $n \geq 4$, on définit f_n par :

$$f_n(x) = \int_0^x g_n(t)dt, \text{ pour tout } x \in]0,1[,$$

de sorte que $f_n \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et $f'_n = g_n$ sur $]0,1[$. On a donc bien que $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante et égale à 1. (On prend n'importe quelles fonctions C^1 pour f_n, $0 \leq n \leq 3$).

On remarque maintenant que, pour $n \geq 4$, $f_n(x) = x$ pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}]$ et que $f_n(x) = x + 1$ pour tout $x \in]\frac{1}{2} + \frac{2}{n}, 1[$. On en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f :]0,1[\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}]$ et $f_n(x) = x + 1$ pour tout $x \in]\frac{1}{2}, 1[$. Cette fonction n'est pas continue en $\frac{1}{2}$, donc $f \notin C^1(]0,1[,\mathbb{R})$.

———————————————————————————————

2. On suppose maintenant que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction constante et égale à 1 dans $L^1_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$. A-t-on $f \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et $f' = 1$?

———————————————corrigé———————————————

La réponse maintenant est “oui”. En effet, soit $0 < x < 1$. Comme $f_n \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$, on a $f_n(x) = f_n(\frac{1}{2}) + \int_{\frac{1}{2}}^x f'_n(t)dt$, c'est-à-dire

$$f_n(x) = f_n(\frac{1}{2}) + s_x \int f'_n 1_{I_x} d\lambda, \tag{12.76}$$

avec $s_x = 1$ et $I_x =]\frac{1}{2}, x[$ si $x \geq \frac{1}{2}$, $s_x = -1$ et $I_x =]x, \frac{1}{2}[$ si $x < \frac{1}{2}$.

Quand $n \to \infty$, on a

$$|\int f'_n 1_{I_x} d\lambda - \int 1_{I_x} d\lambda| \leq \|f'_n - 1\|_1 \to 0,$$

et $f_n(x) \to f(x)$ (ainsi que $f_n(\frac{1}{2}) \to f(\frac{1}{2})$). On déduit donc de (12.76), quand $n \to \infty$,

$$f(x) = f(\frac{1}{2}) + s_x \int 1_{I_x} d\lambda,$$

c'est-à-dire $f(x) = f(\frac{1}{2}) + x - \frac{1}{2}$.

On a bien montré que $f \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et $f' = 1$.

Corrigé 92 (Intégrale impropre)
On définit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{l} f(x) = 0, \text{ si } x \leq 0, \\ f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}, \text{ si } x > 0. \end{array}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

corrigé

La fonction f est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}^\star$ et on a $f'(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ si $x > 0$.

Pour montrer la continuité et la dérivablité de f en 0, il suffit de remarquer que, pour tout $x > 0$, on a $|f(x)| \leq x^2$ et donc $|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}| \leq x$. On en déduit que f est continue et dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

---

2. Soit $0 < a < b < \infty$. Montrer que $f' 1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On pose $\int_a^b f'(t)dt = \int f' 1_{]a,b[} d\lambda$. Montrer que :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

corrigé

La fonction f' est continue sur $]0, \infty[$. La restriction de f' à $[a,b]$ est donc continue (on utilise ici le fait que $a > 0$). On a donc, voir la proposition 5.1 (ou l'exercice 4.5) :

$$f'_{|[a,b]} \in \mathcal{L}^1([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda_{[a,b)}),$$

où $\lambda_{[a,b)}$ désigne la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $[a,b]$ (c'est-à-dire la restriction à $\mathcal{B}([a,b])$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) et l'intégrale (de Lebesgue) de $f'_{|[a,b]}$ coïncide avec l'intégrale des fonctions continues, c'est-à-dire :

$$\int f'_{|[a,b]} d\lambda_{[a,b)} = \int_a^b f'(x)dx.$$

Le terme de droite de l'égalité précédente est à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues. Comme f est de classe C^1 sur un intervalle ouvert contenant $[a,b]$, il est alors classique que :

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Pour se convaincre de cette dernière égalité, on rappelle que f et $x \mapsto \int_a^x f'(t)dt$ sont deux primitives de f', leur différence est donc constante sur $[a,b]$.

Enfin, comme $f'_{|[a,b]} \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathcal{B}([a,b]),\lambda_{[a,b)})$, il est facile d'en déduire que $f'1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et que

$$\int f'_{|[a,b]}d\lambda_{[a,b)} = \int f'1_{]a,b[}d\lambda.$$

Plus précisement, on pose $f' = g$ et on considère d'abord le cas $g_{|[a,b]} \in \mathcal{E}_+([a,b],\mathcal{B}([a,b])$ puis $g_{|[a,b]} \in \mathcal{M}_+([a,b],\mathcal{B}([a,b])$ et enfin $g_{|[a,b]} \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathcal{B}([a,b]),\lambda_{[a,b)})$, comme dans l'exercice 4.4. Ceci termine la question.

Un autre moyen de montrer $f'1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ est de procéder de la manière suivante :

La fonction f' est la limite simple, quand $n \to \infty$, de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ où f_n est défnie, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, par :

$$f_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f est mesurable (c'est-à-dire borélienne car $\mathbb{R}$ est muni de la tribu de Borel). Grâce à la stabilité de l'ensemble des fonctions mesurables (voir la proposition 3.5), on en déduit que f_n est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et donc que f' est mesurable (comme limite simple de fonctions mesurables). La fonction $f'1_{]a,b[}$ est donc aussi mesurable (comme produit de fonctions mesurables). La mesurabilité de $f'1_{]a,b[}$ est donc vraie pour tout $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ (noter cependant que f' n'est pas continue en 0).

Pour montrer que $f'1_{]a,b[}$ est intégrable, il suffit de remarquer que f' est bornée sur $]a,b[$, car f' est continue sur $[a,b]$ (on utilise ici le fait que $a > 0$) et que $\lambda(]a,b[) < \infty$. On a donc bien montré que $f'1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

---

3. Soit $a > 0$.

   (a) Montrer $f'1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

   corrigé

   La restriction de f' à $]0,a[$ est continue, c'est donc une fonction mesurable (c'est-à-dire borélienne) de $]0,a[$ dans $\mathbb{R}$. On en déduit facilement que $f'1_{]0,a[}$ est borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. (On a aussi vu à la question précédente que f' était borélienne. Ceci montre également que $f'1_{]0,a[}$ est borélienne.)

   On a $f'1_{]0,a[} = g_1 1_{]0,a[} - g_2 1_{]0,a[}$, avec :

   $$g_1(x) = 2x \sin\frac{1}{x^2} \text{ et } g_2(x) = \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} \text{ si } x \in]0,a[.$$

   Il est clair que $g_1 1_{]0,a[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (car g_1 est continue et bornée sur $]0,a[$). Pour montrer que $f'1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, il suffit donc de montrer que $g_2 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Pour cela, on remarque maintenant que :

   $$|g_2(x)| \ge \sqrt{2}\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}, \text{ si } \frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}},\ n \ge n_0, \tag{12.77}$$

avec $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\frac{1}{\sqrt{n_0\pi - \frac{\pi}{4}}} \le a$. On déduit alors de (12.77), par monotonie de l'intégrale, que, pour tout $N \ge n_0$:

$$\int |g_2| 1_{]0,a[} d\lambda \ge \sum_{n=n_0}^{N} \sqrt{2}\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}}\right) = \sum_{n=n_0}^{N} \sqrt{2}\frac{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}} - \sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}},$$

et donc :

$$\int |g_2| 1_{]0,a[} d\lambda \ge \sum_{n=n_0}^{N} \frac{\sqrt{2}\pi}{2\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}} + \sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}\right)} \ge \sum_{n=n_0}^{N} \frac{\sqrt{2}\pi}{4(n\pi + \frac{\pi}{4})}.$$

En faisant tendre N vers ∞, on en déduit que $\int |g_2| 1_{]0,a[} d\lambda = \infty$ et donc que $g_2 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f' 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

(b) Pour $0 < x < a$, on pose $g(x) = \int_x^a f'(t)dt$. Montrer que $g(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to 0$, avec $x > 0$, et que cette limite est égale à $f(a) - f(0)$. (Cette limite est aussi notée $\int_0^a f'(t)dt$, improprement… car $f' 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, la restriction de f' à $]0, a[$ n'est donc pas intégrable pour la mseure de Lebesgue sur $]0, a[$.)

corrigé

On a $g(x) = f(a) - f(x)$, pour tout $x > 0$. Comme f est continue en 0, on en déduit bien que $g(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to 0$, avec $x > 0$, et que cette limite est égale à $f(a) - f(0)$.

Corrigé 93

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On définit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par: $F(x) = \int f 1_{[0,x]} d\lambda (= \int_0^x f(t)dt)$, pour $x \ge 0$, et $F(x) = -\int f 1_{[x,0]} d\lambda (= -\int_x^0 f(t)dt)$ pour $x < 0$. Montrer que F est uniformément continue.

corrigé

On remarque que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$,

$$F(y) - F(x) = \int f 1_{]x,y[} d\lambda = \int_{]x,y[} f d\lambda.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, l'exercice 4.14 (ou l'exercice 4.29) montre qu'il existe $\delta > 0$ t.q.

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f| d\lambda \le \varepsilon.$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. On a donc, comme $\lambda(]x, y[) = y - x$,

$$|y - x| \le \delta \Rightarrow |F(y) - F(x)| \le \int_{]x,y[} |f| d\lambda \le \varepsilon,$$

ce qui montre bien la continuité uniforme de F.

Corrigé 94 (Intégrabilité et limite à l'infini)

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) = \mathcal{L}^1$.

1. On suppose que $f(x)$ admet une limite quand $x \to \infty$. Montrer que cette limite est nulle.

corrigé

On pose $l = \lim_{x\to\infty} f(x)$ et on suppose $l \neq 0$. Il existe alors $a \in \mathbb{R}$ t.q. $|f(x)| \geq \frac{|l|}{2}$ pour tout $x > a$. On en déduit, par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$,

$$\int |f| d\lambda \geq \int_{]a,\infty[} \frac{|l|}{2} d\lambda = \infty,$$

en contradiction avec l'hypothèse $f \in \mathcal{L}^1$.

---

2. On suppose que $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; a-t-on : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

corrigé

La réponse est "non", comme le montre l'exemple suivant. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, f_n par :

$$\begin{aligned}
&f_n(x) = 0, \text{ si } x \leq n - \tfrac{1}{n^2},\\
&f_n(x) = n^2(x - n + \tfrac{1}{n^2}), \text{ si } n - \tfrac{1}{n^2} < x \leq n,\\
&f_n(x) = -n^2(x - n - \tfrac{1}{n^2}), \text{ si } n < x \leq n + \tfrac{1}{n^2},\\
&f_n(x) = 0, \text{ si } x > n + \tfrac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Puis, on pose $f(x) = \sum_{n\geq 2} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série définissant $f(x)$ a au plus 1 terme non nul. Plus précisément, il existe n (dépendant de x) t.q. $f = f_n$ dans un voisinage de x. On en déduit que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et que f est continue (car les f_n sont continues).

Comme $f_n \in \mathcal{M}_+$ pour tout n, le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.1) donne que $f \in \mathcal{M}_+$ et

$$\int f dm = \sum_{n\geq 2} \int f_n dm = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

On a donc $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f(x) \not\to 0$ quand $x \to \infty$ car $f_n(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

---

3. On suppose que f est uniformément continue ; a-t-on : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$? [On pourra commencer par montrer que, pour $\eta > 0$ quelconque et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta} |f(x)| d\lambda(x) = 0.] \tag{12.78}$$

corrigé

On commence par montrer le résultat prélimaire suggéré. Soient $\eta > 0$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

On pose $f_n = |f|1_{]x_n-\eta,x_n+\eta[}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$ (on a même $f_n(x) = 0$ pour n t.q. $x_n - \eta > x$). On a aussi $|f_n| \le |f| \in \mathcal{L}^1$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (ou la proposition préliminaire 4.6). Il donne que $\int f_n dm \to 0$, c'est-à-dire :

$$\int |f|1_{]x_n-\eta,x_n+\eta[}d\lambda \to 0, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.79}$$

On montre maintenant que $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.

On raisonne par l'absurde. On suppose que $f(x) \not\to 0$ quand $x \to \infty$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q. $x_n \to \infty$ quand $n \to \infty$ et $|f(x_n)| \ge \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La continuité uniforme de f donne l'existence de $\eta > 0$ t.q.

$$x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \le \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc $|f(x)| \ge \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \in]x_n-\eta, x_n+\eta[$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\int |f|1_{]x_n-\eta,x_n+\eta[}d\lambda \ge \varepsilon\eta > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est en contradiction avec (12.79).

On a donc bien finalement montré que $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.

---

4. On suppose que $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f' \in L^1$; a-t-on : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

corrigé

Comme $f \in C^1$, on a, pour $y > x$, $f(y)-f(x) = \int_x^y f'(t)dt = \int_{]x,y[} f'd\lambda$. Comme $f' \in \mathcal{L}^1$, l'exercice 5.7 donne que f est uniformément continue. La question précédente donne alors que $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$ (c'est seulement pour ce dernier point qu'on utilise $f \in \mathcal{L}^1$).

Une autre démonstration possible est :

Comme $f \in C^1$, on a $f(x) = f(0) + \int_{]0,x[} f'd\lambda$. Comme $f' \in \mathcal{L}^1$, on en déduit que $f(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to \infty$. En effet, le théorème de convergence dominée donne que $\int_{]0,x[} f'd\lambda \to \int_{]0,\infty[} f'd\lambda$ (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to \infty$. Enfin, la première question donne que la limite de $f(x)$ quand $x \to \infty$ est nécessairement 0 (et ici aussi, c'est seulement pour ce dernier point qu'on utilise $f \in \mathcal{L}^1$).

Corrigé 95 (Continuité en moyenne)

Pour $f \in L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$, on définit f_h ("translatée" de f) par : $f_h(x) = f(x + h)$, pour $x \in \mathbb{R}$. (noter que $f_h \in L^1$).

1. Soit $f \in C_c = C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$.

corrigé

Comme $f \in C_c$, f est uniformément continue, ce qui donne

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x + h) - f(x)| \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

Soit $a > 0$ t.q. $f = 0$ sur $[-a, a]^c$. Pour $h \in \mathbb{R}$ t.q. $|h| \leq 1$, on a donc, comme $f(x+h) - f(x) = 0$ si $x \notin [-a-1, a+1]$,

$$\int |f(x+h) - f(x)|dx \leq (2a+2) \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)| \to 0, \text{ quand } h \to 0,$$

et donc que $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.

---

2. Soit $f \in L^1$, montrer que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$.

corrigé

L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne que $f(\cdot + h) \in L^1$ pour tout $h \in \mathbb{R}$. On veut maintenant montrer que $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la densité de C_c dans L^1 (théorème 5.5), il existe $\varphi \in C_c$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne $\|f(\cdot + h) - \varphi(\cdot + h)\|_1 = \|f - \varphi\|_1$. On a donc, pour tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\|f(\cdot + h) - f\|_1 \leq 2\|f - \varphi\|_1 + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \leq 2\varepsilon + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1.$$

D'après la première question, il existe $\eta > 0$ t.q.

$$|h| \leq \eta \Rightarrow \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \leq \varepsilon.$$

Donc,

$$|h| \leq \eta \Rightarrow \|f(\cdot + h) - f\|_1 \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $f(\cdot + h) \to f$ dans L^1, quand $h \to 0$.

Corrigé 96 (Sur la concentration d'un borélien)

Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $A \in \mathcal{B}(]a, b[)$ et $\rho \in]0, 1[$. On suppose que $\lambda(A \cap]\alpha, \beta[) \leq \rho(\beta - \alpha)$ pour tout α, β t.q. $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Montrer que $\lambda(A) = 0$. [On pourra, par exemple, commencer par montrer que $\lambda(A \cap O) \leq \rho\lambda(O)$ pour tout ouvert O de $]a, b[$.]

Conséquence de cet exercice : Soit $A \in \mathcal{B}(]a, b[)$ t.q. $\lambda(A) > 0$. Alors, pour tout $\rho < 1$, il existe α, β t.q. $a \leq \alpha < \beta \leq b$ et $\lambda(A \cap]\alpha, \beta[) \geq \rho(\beta - \alpha)$.

corrigé

Soit O un ouvert de $]a, b[$. Comme O est un ouvert de $\mathbb{R}$, il peut s'écrire comme une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2 (lemme 2.4). On a donc $O = \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ avec $I_n \cap I_m = \emptyset$ si $n \neq m$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n =]a_n, b_n[$ avec $a \leq a_n \leq b_n \leq b$. La $\sigma-$additivité de λ et l'hypothèse $\lambda(A \cap]\alpha, \beta[) \leq \rho(\beta - \alpha)$ pour tout α, β t.q. $a \leq \alpha < \beta \leq b$ donne alors :

$$\lambda(A \cap O) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A \cap]a_n, b_n[) \leq \rho \sum_{n \in \mathbb{N}} (b_n - a_n) = \rho \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(]a_n, b_n[) = \rho\lambda(O). \tag{12.80}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. D'après la régularité de λ (et le fait que $A \in \mathcal{B}(]a, b[) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$), il existe O ouvert de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset O$ et $\lambda(O \setminus A) \leq \varepsilon$. En remplaçant O par $O \cap]a, b[$, on peut supposer que O est un ouvert de $]a, b[$. En utilisant (12.80) et l'additivité de λ, on a donc :

$$\lambda(A) = \lambda(A \cap O) \leq \rho\lambda(O) = \rho(\lambda(A) + \lambda(O \setminus A)) \leq \rho(\lambda(A) + \varepsilon).$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, on en déduit $\lambda(A) \leq \rho\lambda(A)$, ce qui n'est possible (comme $\rho < 1$) que si $\lambda(A) = 0$ ou si $\lambda(A) = \infty$.

Il reste donc à montrer que le cas $\lambda(A) = \infty$ est impossible. Pour cela, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = A \cap [-n, n]$. Soit $n \in \mathbb{N}$, la monotonie de λ donne $\lambda(A_n \cap]\alpha, \beta[) \leq \lambda(A \cap]\alpha, \beta[)$, on a donc aussi $\lambda(A_n \cap]\alpha, \beta[) \leq \rho(\beta - \alpha)$ pour tout α, β t.q. $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Comme $\lambda(A_n) < \infty$, la démonstration précédente, appliquée à A_n au lieu de A, donne $\lambda(A_n) = 0$. Enfin, comme $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, on en déduit $\lambda(A) = 0$.

Corrigé 97 (Points de Lebesgue)

On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$, par L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^1$ l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$. On note $dt = d\lambda(t)$.

1. Soit $(I_1, \ldots, I_n)$ des intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ t.q. chaque intervalle n'est pas contenu dans la réunion des autres. On pose $I_k =]a_k, b_k[$ et on suppose que la suite $(a_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante. Montrer que la suite $(b_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante et que les intervalles d'indices impairs [resp. pairs] sont disjoints 2 à 2.

———————————————**corrigé**———————————————

Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Comme $a_k \leq a_{k+1}$, on a $b_k < b_{k+1}$ (sinon $I_{k+1} \subset I_k$). La suite $(b_k)_{k \in \{1,\ldots,n\}}$ est donc (strictement) croissante.

Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. On a $b_k \leq a_{k+2}$ (sinon $I_k \cup I_{k+2} =]a_k, b_{k+2}[$ et donc $I_{k+1} \subset I_k \cup I_{k+2}$ car $a_k \leq a_{k+1} < b_{k+1} \leq b_{k+2}$). On a donc $I_k \cap I_{k+2} = \emptyset$. ceci prouve (avec la croissance de $(a_k)_{k=1,\ldots,n}$) que les intervalles d'indices impairs [resp. pairs] sont disjoints 2 à 2.

---

2. Soit J une famille finie d'intervalles ouverts non vide de $\mathbb{R}$ dont la réunion est notée A. Montrer qu'il existe une sous-famille finie de J, notée $(I_1, \ldots, I_m)$, formée d'intervalles disjoints 2 à 2 et t.q. $\lambda(A) \leq 2 \sum_{k=1}^{m} \lambda(I_k)$. [Utiliser la question 1.]

———————————————**corrigé**———————————————

On commence par montrer la propriété suivante :

Pour toute famille finie, notée J, d'intervalles ouverts non vide de $\mathbb{R}$, il existe une sous famille, notée K, t.q. :

(a) Chaque élément de K n'est pas contenu dans la réunion des autres éléments de K,

(b) La réunion des éléments de K est égale à la réunion des éléments de J.

Cette propriété se démontre par récurrence sur le nombre d'éléments de J. Elle est immédiate si J a 1 élément (on prend K= J). Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que la propriété est vraie pour toutes les familles de n éléments. Soit J une famille de $(n+1)$ éléments. Si chaque élément de J n'est pas contenu dans la réunion des autres éléments de J, on prend K= J. Sinon, on choisit un élément de J, noté I, contenu dans la réunion des autres éléments de J. On applique alors l'hypothèse de récurrence à la famille J $\setminus\{I\}$, on obtient une sous famille de J $\setminus\{I\}$ (et donc de J), notée K, vérifiant bien les assertions (a) et (b) (en effet, La réunion des éléments de J $\setminus\{I\}$ est égale à la réunion des éléments de J). Ceci termine la démonstration de la propriété désirée.

Soit maintenant J une famille finie d'intervalles ouverts non vide de $\mathbb{R}$ dont la réunion est notée A (remarquer que $A \in B(\mathbb{R})$). Grâce à la propriété démontrée ci dessus, on peut supposer que chaque élément de J n'est pas contenu dans la réunion des autres éléments de J. On note J_1, $\ldots J_n$ les éléments de J, $J_i =]a_i, b_i[$, $i = 1, \ldots, n$. En réordonnant, on peut aussi supposer que la suite $(a_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante. On peut alors appliquer la question 1, elle donne, en posant $P = \{i = 1, \ldots, n;\ i \text{ pair}\}$ et $I = \{i = 1, \ldots, n;\ i \text{ impair}\}$ que les familles $(J_i)_{i\in P}$ et $(J_i)_{i\in I}$ sont formées d'éléments disjoints 2 à 2, de sorte que :

$$\lambda(\cup_{i\in P} J_i) = \sum_{i\in P} \lambda(J_i), \quad \lambda(\cup_{i\in I} J_i) = \sum_{i\in I} \lambda(J_i).$$

Enfin, comme $A = \cup_{i=1}^n J_i$, la sous-additivité de λ donne $\lambda(A) \le \sum_{i\in P} \lambda(J_i) + \sum_{i\in I} \lambda(J_i)$.

Une sous-famille de J satisfaisant les conditions demandées est alors $(J_i)_{i\in P}$ si $\sum_{i\in P} \lambda(J_i) \ge \sum_{i\in I} \lambda(J_i)$ et $(J_i)_{i\in I}$ si $\sum_{i\in I} \lambda(J_i) > \sum_{i\in P} \lambda(J_i)$.

On se donne maintenant $f \in L^1$ et on suppose qu'il existe $a > 0$ t.q. $f = 0$ p.p. sur $[-a, a]^c$. Le but de l'exercice est de montrer que :

$$\frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt \to f(x), \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.81}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on définit $f_\varepsilon^\star$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_\varepsilon^\star(x) = \sup_{h\ge\varepsilon} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t)|dt. \tag{12.82}$$

3. (a) Montrer que $f_\varepsilon^\star$ est bornée.

corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, pour $h \ge \varepsilon$, $\frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t)|dt \le \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_1$ donc $f_\varepsilon^\star(x) \in \mathbb{R}$ et $|f_\varepsilon^\star(x)| \le \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_1$. La fonction $f_\varepsilon^\star$ est donc bornée par $\frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_1$.

(b) Montrer que $f_\varepsilon^\star$ est borélienne. [On pourra montrer que $f_\varepsilon^\star$ est le sup de fonctions continues.]

corrigé

Soit $h > 0$. On définit f_h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_h(x) = \int_{-h}^{h} |f(x+t)|dt$. La fonction f_h est continue car

$$\begin{aligned} |f_h(x+\eta) - f_h(x)| = |\int_{-h}^{h} (|f(x+\eta+t)| - |f(x+t)|)dt| &\le \int_{-h}^{h} |f(x+\eta+t) - f(x+t)|dt \\ &\le \int |f(x+\eta+t) - f(x+t)|dt = \|f(\cdot+\eta) - f\|_1 \to 0, \text{ quand } \eta \to 0, \end{aligned}$$

par le théorème de continuité en moyenne. (Ceci donne même la continuité uniforme.)

On en déduit que $f_\varepsilon^\star$ est borélienne comme "sup" de fonctions continues (en effet, si $\alpha \in \mathbb{R}$, $(f_\varepsilon^\star)^{-1}(]\alpha, \infty[) = \cup_{h\ge\varepsilon} (\frac{1}{2h} f_h)^{-1}(]\alpha, \infty[)$ est un ouvert, et donc aussi un borélien).

(c) Montrer que $f_\varepsilon^\star(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$.

corrigé

Soit $\eta > 0$. On a (avec la notation de la question précédente), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2h} f_h(x) \leq \eta$ si $h \geq \frac{\|f\|_1}{2\eta}$. D'autre part, on a $f_h(x) = 0$ si $h \leq \frac{\|f\|_1}{2\eta}$ et $|x| \geq a + \frac{\|f\|_1}{2\eta}$. On en déduit que $0 \leq f_\varepsilon^\star(x) \leq \eta$ si $|x| \geq a + \frac{\|f\|_1}{2\eta}$. Ceci prouve que $f_\varepsilon^\star(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$.

---

4. Pour $y > 0$, on pose $B_{y,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R},\ f_\varepsilon^\star(x) > y\}$.

(a) Montrer que tout $x \in B_{y,\varepsilon}$ est le centre d'un intervalle ouvert $I(x)$ t.q.

i. $\lambda(I(x)) \geq 2\varepsilon$,

ii. $\frac{1}{\lambda(I(x))} \int_{I(x)} |f| d\lambda > y$.

Montrer que parmi les intervalles $I(x)$, $x \in B_{y,\varepsilon}$, ainsi obtenus, il en existe un nombre fini $I(x_1), \ldots I(x_n)$ dont la réunion recouvre $B_{y,\varepsilon}$. [On pourra d'abord remarquer que $B_{y,\varepsilon}$ est borné.]

corrigé

Si $x \in B_{y,\varepsilon}$, il existe $h \geq \varepsilon$ t.q. $\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t)| dt = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t)| dt > y$. On choisit alors $I(x) =]x-h, x+h[$. On a bien i. et ii..

$B_{y,\varepsilon}$ est borné car $f_\varepsilon^\star(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$. $\overline{B}_{y,\varepsilon}$ est donc fermé et borné (donc compact). De plus, Si $z \in \overline{B}_{y,\varepsilon}$, il existe $x \in B_{y,\varepsilon}$ t.q. $|x - z| < \varepsilon$. On a donc $z \in I(x)$. Ceci montre que $\{I(x),\ x \in B_{y,\varepsilon}\}$ forme un recouvrement ouvert de $\overline{B}_{y,\varepsilon}$. Par compacité, on peut donc en extraire un sous recouvrement fini. Il existe donc $x_1, \ldots, x_n \in B_{y,\varepsilon}$ t.q. $B_{y,\varepsilon} \subset \cup_{i=1}^n I(x_i)$.

(b) Montrer que $\lambda(B_{y,\varepsilon}) \leq \frac{2}{y} \|f\|_1$. [Utiliser la question 2.]

corrigé

En appliquant la question 2 à la famille $\{I(x_i),\ i \in \{1, \ldots, n\}\}$, il existe $E \subset \{1, \ldots, n\}$ t.q. $I(x_i) \cap I(x_j) = \emptyset$, si $i, j \in E$ $i \neq j$, et t.q. $\lambda(B_{y,\varepsilon}) \leq \lambda(\cup_{i=1}^n I(x_i)) \leq 2 \sum_{i \in E} \lambda(I(x_i))$. Comme $\lambda(I(x_i)) < \frac{1}{y} \int_{I(x_i)} |f(t)| dt$ et comme $I(x_i) \cap I(x_j) = \emptyset$, si $i, j \in E$ $i \neq j$, on a aussi $\sum_{i \in E} \lambda(I(x_i)) < \frac{1}{y} \int |f(t)| dt$ et donc $\lambda(B_{y,\varepsilon}) \leq \frac{2}{y} \|f\|_1$.

On définit maintenant $f^\star$ de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$f^\star(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t)| dt. \tag{12.83}$$

5. Montrer que $f^\star$ est borélienne et que $\lambda(\{f^\star > y\}) \leq \frac{2}{y} \|f\|_1$, pour tout $y > 0$.

corrigé

$f^\star$ est borélienne (de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) car c'est le "sup" de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On remarque ensuite que $\{f^\star > y\} = \{x \in \mathbb{R},\ f^\star(x) > y\} = \cup_{n \in \mathbb{N}^\star} B_{y,\frac{1}{n}}$ et que $B_{y,\frac{1}{n}} \subset B_{y,\frac{1}{n+1}}$ (car $f^\star_{\frac{1}{n}} \leq f^\star_{\frac{1}{n+1}}$). Par continuité croissante de λ, on a donc $\lambda(\{f^\star > y\}) = \lim_{n \to \infty} \lambda(B_{y,\frac{1}{n}}) \leq \frac{2}{y} \|f\|_1$.

---

6. Montrer (12.81) si f admet un représentant continu. [cette question n'utilise pas les questions précédentes.]

corrigé

On confond f (qui est dans L^1) avec ce représentant continu. On a alors $\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt \to f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, quand $n \to \infty$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, par continuité de f, il existe $\theta_{x,n} \in]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$ t.q. $\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt = f(\theta_{x,n})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $f(\theta_{x,n}) \to f(x)$, quand $n \to \infty$ (par continuité en x de f).

---

7. Montrer (12.81). [Approcher f, dans L^1 et p.p., par une suite d'éléments de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, notée $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$. On pourra utiliser $(f-f_p)^\star$.]

corrigé

On confond f (qui est dans L^1) avec l'un de ses représentants (de sorte que $f \in \mathcal{L}^1$). Par densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans L^1, il existe une suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $f_p \to f$ dans L^1. Après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut supposer aussi que $f_p \to f$ p.p..

Pour $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$|f(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt| \le |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_p(x+t)dt| + (f-f_p)^\star(x). \quad (12.84)$$

Pour $m \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose :

$$A_{m,p} = \{(f-f_p)^\star > \frac{1}{m}\},\ B_{m,p} = \cap_{q\ge p} A_{m,q} \text{ et } B = \cup_{m\in\mathbb{N}^\star}(\cup_{p\in\mathbb{N}} B_{m,p}).$$

On remarque que, par la question 5, $\lambda(A_{m,p}) \le 2m\|f-f_p\|_1 \to 0$ quand $p \to \infty$ (avec m fixé). On a donc $\lambda(B_{m,p}) \le \inf_{q\ge p} \lambda(A_{m,q}) = 0$. On en déduit, par σ-sous-additivité de λ, que $\lambda(B) = 0$.

On choisit $C \in B(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(C) = 0$ et $f_p(x) \to f(x)$ pour tout $x \in C^c$.

On va maintenant montrer (grâce à (12.84)) que $(f(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt) \to 0$ pour tout $x \in (B\cup C)^c$ (ce qui permet de conclure car $\lambda(B\cup C) = 0$).

Soit donc $x \in (B\cup C)^c$ et soit $\eta > 0$. Comme $x \in C^c$, il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ t.q. $|f(x) - f_p(x)| \le \eta$ pour $p \ge p_1$. Comme $x \in B^c$, $x \in \cap_{m\in\mathbb{N}^\star}(\cap_{p\in\mathbb{N}} B^c_{m,p})$. On choisit $m \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\frac{1}{m} \le \eta$. On a $x \in \cap_{p\in\mathbb{N}} B^c_{m,p} = \cap_{p\in\mathbb{N}} \cup_{q\ge p} A^c_{m,q} \subset \cup_{q\ge p_1} A^c_{m,q}$. Il existe donc $p \ge p_1$ t.q. $x \in A^c_{m,p}$, on en déduit $(f-f_p)^\star(x) \le \frac{1}{m} \le \eta$. Enfin, p étant maintenant fixé, la question 6 donne l'existence de $n_1 \in \mathbb{N}$ t.q. $|f_p(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_p(x+t)dt| \le \eta$ pour $n \ge n_1$. On a donc $|f(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt| \le 3\eta$ pour $n \ge n_1$. Ce qui termine la démonstration.

Corrigé 98 (Convergence vague et convergence etroite)

Soit $(m_n)n \in \mathbb{N}$ une suite de mesures (positives) finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ($d \ge 1$) et m une mesure (positive) finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On suppose que :

- $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to \infty$, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$.

- $m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R}^d)$ quand $n \to \infty$.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to \infty$. [On pourra utiliser le fait que φ est limite uniforme d'une suite d'élement de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.]

corrigé

Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\rho \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$ et $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on définit ρ_p par $\rho_p(x) = p^d \rho(px)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$, de sorte que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_p(x)dx = 1$ et $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq 1/p$. La suite $(\rho_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ s'appelle "suite régularisante" (ou "suite de noyaux régularisants").

Soit $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on définit la suite $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ en posant $\psi_p(x) = \int \psi(y)\rho_p(x-y)dy$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Comme ρ_p et ψ sont des fonctions à support compact, il est clair que ψ_p est aussi une fonction à support compact. Grâce au théorème de dérivabilité sous le signe intégral (théorème 4.10), il est assez facile de voir que ψ_p est indéfiniment dérivable. On a donc $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. Enfin, du fait que ψ est uniformément continue, on déduit que ψ_p converge uniformément (sur $\mathbb{R}^d$) vers ψ quand $p \to \infty$. Plus précisément, en notant $\|\cdot\|_u$ la norme de la convergence uniforme, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$,

$$\|\psi_p - \psi\|_u \leq \sup_{z\in\mathbb{R}^d,\, |z|\leq 1/p} \|\psi(\cdot + z) - \psi\|_u,$$

dont on déduit bien $\|\psi_p - \psi\|_u \to 0$ quand $p \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. On remarque maintenant que, pour $p \in \mathbb{N}^\star$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \psi dm_n - \int \psi dm = \int (\psi - \psi_p)dm_n + \int \psi_p dm_n - \int \psi_p dm + \int (\psi_p - \psi)dm,$$

on a donc $|\int \psi dm_n - \int \psi dm| \leq \|\psi_p - \psi\|_u(\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R}^d) + m(\mathbb{R}^d)) + |\int \psi_p dm_n - \int \psi_p dm|$. Comme $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R}^d) + m(\mathbb{R}^d) < \infty$ (car $\lim_{n\to\infty} m_n(\mathbb{R}^d) = m(\mathbb{R}^d)$), il existe donc $p_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\int \psi dm_n - \int \psi dm| \leq \varepsilon + |\int \psi_{p_0} dm_n - \int \psi_{p_0} dm|.$$

Comme $\psi_{p_0} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, la première hypothèse sur la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne qu'il existe n_0 t.q. $n \geq n_0$ implique $|\int \psi_{p_0} dm_n - \int \psi_{p_0} dm| \leq \varepsilon$. on a donc, finalement,

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\int \psi dm_n - \int \psi dm| \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $\int \psi dm_n \to \int \psi dm$, quand $n \to \infty$, pour tout $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

---

2. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on note B_p la boule fermée de centre 0 et de rayon p (pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$). Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star} \subset C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q., pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $0 \leq \varphi_p \leq 1$, $\varphi_p = 1$ sur B_p et $\varphi_p \leq \varphi_{p+1}$. On utilise cette suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ dans les questions suivantes.

corrigé

Il suffit de prendre φ_p définie ainsi :

$\varphi_p(x) = 1$ si $x \in B_p$,
$\varphi_p(x) = p + 1 - |x|$ si $x \in B_{p+1} \setminus B_p$,
$\varphi_p(x) = 0$ si $x \notin B_{p+1}$.

---

3. Soit $\varepsilon > 0$.

   (a) Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. : $p \geq p_0 \Rightarrow \displaystyle\int (1-\varphi_p)dm \leq \varepsilon$.

   corrigé

   On utilise ici le théorème de convergence dominée, la suite $(1-\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ converge p.p. vers 0 et est dominée par la fonction constante et égale à 1 (qui est bien une fonction intégrable pour la mesure m). On a donc $\lim_{p\to\infty} \int (1-\varphi_p)dm = 0$, ce qui donne le résultat demandé.

   (b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\int (1-\varphi_p)dm_n \to \int (1-\varphi_p)dm$ quand $n \to \infty$.

   corrigé

   On a $\int (1-\varphi_p)dm_n = m_n(\mathbb{R}^d) - \int \varphi_p dm_n$. comme $\varphi_p \in C_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$, on a $\int \varphi_p dm_n \to \int \varphi_p dm$ (quand $n \to \infty$). D'autre part, on a $\lim_{n\to\infty} m_n(\mathbb{R}^d) = m(\mathbb{R}^d)$. On a donc finalement, quand $n \to \infty$,

   $$\int (1-\varphi_p)dm_n \to m(\mathbb{R}^d) - \int \varphi_p dm = \int (1-\varphi_p)dm.$$

   (c) Montrer qu'il existe $p_1 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. : $n \in \mathbb{N}$, $p \geq p_1 \Rightarrow \displaystyle\int (1-\varphi_p)dm_n \leq \varepsilon$.

   corrigé

   D''après a), il existe p_2 t.q. $\int (1-\varphi_{p_2})dm \leq \varepsilon/2$. D''après b), il existe n_0 t.q.

   $$n \geq n_0 \Rightarrow \int (1-\varphi_{p_2})dm_n \leq \int (1-\varphi_{p_2})dm + \varepsilon/2.$$

   On a donc

   $$n \geq n_0 \Rightarrow \int (1-\varphi_{p_2})dm_n \leq \varepsilon.$$

   Comme $(1-\varphi_p) \leq (1-\varphi_{p_2})$ si $p \geq p_2$, on a aussi

   $$n \geq n_0,\ p \geq p_2 \Rightarrow \int (1-\varphi_p)dm_n \leq \varepsilon.$$

   D''autre part, le théorème de convergence dominée donne (comme en a)) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{p\to\infty} \int (1-\varphi_p)dm_n = 0$. Pour tout $n \in 0,\ldots,n_0$, il existe donc $p_{2,n}$ t.q.

   $$p \geq p_{2,n} \Rightarrow \int (1-\varphi_p)dm_n \leq \varepsilon.$$

   On choisit donc $p_1 = \max\{p_2, \max_{n=0,\ldots,n_0} p_{2,n}\}$ et on obtient bien $p \in \mathbb{N}^\star$ et :

   $$n \in \mathbb{N},\ p \geq p_1 \Rightarrow \int (1-\varphi_p)dm_n \leq \varepsilon.$$

   ---

4. Montrer que $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to \infty$, pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ (on dit alors que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement vers m).

   corrigé

Soit $\varphi \in C_b[\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. En écrivant que $\varphi = \varphi\varphi_p + \varphi(1 - \varphi_p)$, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$,

$$|\int \varphi dm_n - \int \varphi dm| \leq |\int \varphi\varphi_p dm_n - \int \varphi\varphi_p dm| + \|\varphi\|_u \int (1 - \varphi_p) dm_n + \|\varphi\|_u \int (1 - \varphi_p) dm.$$

Les questions 2a) et 2c) permettent de trouver $p_0 \in \mathbb{N}^\star$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. les deux derniers de la précédente inégalité soient inférieurs à ε pour $p = p_0$ et $n \geq n_0$. Puis, comme $\varphi\varphi_{p_0} \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, il existe n_1 t.q. le premier du membre de droite de la précédente inégalité soit inférieur à ε pour $p = p_0$ et $n \geq n_1$. On a donc finalement

$$n \geq \max\{n_0, n_1\} \Rightarrow |\int \varphi dm_n - \int \varphi dm| \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve la convergence étroite de m_n vers m (quand $n \to \infty$).

---

5. Indiquer brièvement comment obtenir le même résultat (c'est-à-dire le résultat de la question 4) si on remplace "$\mathbb{R}^d$" (dans les hypothèses et dans la question 4) par "Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$".

corrigé

Pour la question 1, on remarque que toute fonction de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions de $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ (la démonstration, semblable au cas $\Omega = \mathbb{R}^d$ utilise le fait que, si $\varphi \in C_c(\Omega, \mathbb{R})$, la disatnce entre le support de φ, qui est compact, et le complémentaire de Ω, qui est ouvert, est strictement positive. On rappelle que le support de φ est l'adhérence de l'ensemble des points où φ est non nulle).

Pour la question 2, on construit (avec la fonction "distance") une suite φ_p comme demandée en remplaçant simplement B_p par $B_p \cap \{x \in \Omega,\, d(x, \Omega^c) \geq 1/p\}$, avec $d(x, \Omega^c) = \max\{|x - y|,\, y \in \Omega^c\}$.

Pour les questions 3 et 4, on remplace simplement $\mathbb{R}^d$ par Ω.
