12.6 Exercices du chapitre 6

12.6.1 Espaces L^p, $1 \le p \le \infty$

Corrigé 99

Soit (E, T, m) un espace mesuré, $p \in [1, \infty[$ et $A \in T$. On pose $F = \{f \in L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m);\ f = 0$ p.p. sur $A\}$. Montrer que F est fermé (dans $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$).

———————————————corrigé———————————————

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ et $f \in L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Grâce à l'inégalité de Hölder (inégalité (6.3) pour $1 < p < \infty$ ou inégalité (6.13) qui contient aussi le cas $p = 1$), on a, pour tout $g \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ avec $q = \frac{p}{p-1}$,

$$|\int f_n g dm - \int f g dm| \le \int |(f_n - f)g| dm \le \|f_n - f\|_p \|g\|_q \to 0, \text{ quand } n \to \infty,$$

et donc

$$\int f_n g dm \to \int f g dm, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.85}$$

On prend alors $g = (|f|)^{p-1} 1_{\{f>0\}} 1_A - (|f|)^{p-1} 1_{\{f<0\}} 1_A \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si $p > 1$ et on prend $g = 1_{\{f>0\}} 1_A - 1_{\{f<0\}} 1_A \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si $p = 1$.

Comme $f_n g = 0$ p.p., on déduit de (12.85) que $\int |f|^p 1_A dm = 0$ et donc que $f = 0$ p.p. sur A.

Un autre démonstration est possible en utilisant la réciproque partielle du théorème de convergence dominée (théorème 6.2).

———————————————————————————————

Corrigé 100

Soit $p \in [1, \infty]$ et $C = \{f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda);\ f \ge 0$ p.p.$\}$. Montrer que C est d'intérieur vide pour $p < \infty$ et d'intérieur non vide pour $p = \infty$.

———————————————corrigé———————————————

Cas $p < \infty$

Soit $f \in C$ et soit $\varepsilon > 0$. On va construire $g \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $g \notin C$ et $\|f - g\|_p \le \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, ceci montrera bien que f n'est pas dans l'intérieur de C et donc, comme f est arbitraire, que C est d'intérieur vide.

On choisit, comme d'habitude, un représentant de f. On pose $A_n = \{0 \le f \le n\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{f \ge 0\}$. Par continuité croissante de λ, on a donc $\lambda(A_n) \to \lambda(\{f \ge 0\}) = \infty$ quand $n \to \infty$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\lambda(A_n) > 0$. On choisit cette valeur de n et on pose $A = A_n$.

On prend maintenant $m > (\frac{n+1}{\varepsilon})^p$ (ce choix sera bientôt compréhensible...) et, pour $i \in \mathbb{Z}$, on pose $B_i = A \cap [\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}[$. Comme les B_i sont disjoints 2 à 2 et que $\cup_{i\in\mathbb{Z}} B_i = A$, on a $\lambda(A) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda(B_i)$. Il existe donc $i \in \mathbb{Z}$ t.q. $\lambda(B_i) > 0$. On choisit cette valeur de i et on pose $B = B_i$ (noter que $\lambda(B) \le 1/m$).

On construit maintenant g en prenant $g(x) = f(x)$ si $x \in B^c$ et $g(x) = -1$ si $x \in B$. On a g mesurable et :

$$\int |g|^p dm = \int_{B^c} |g|^p dm + \int_B |g|^p dm \le \int |f|^p dm + \lambda(B) < \infty.$$

On a donc $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (et $g \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ en confondant g avec sa classe d'équivalence). On a aussi $g \notin C$ car $\lambda(B) > 0$ et $g < 0$ sur B. Enfin $\|f - g\|_p^p \le (n+1)^p \lambda(B) \le \frac{(n+1)^p}{m} \le \varepsilon^p$ (par le choix de m), donc $\|f - g\|_p \le \varepsilon$.

Ceci montre bien que C est d'intérieur vide.

Cas $p = \infty$

On prend $f = 1_{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (et donc $f \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ en confondant f avec sa classe d'équivalence). On note $B(f, 1)$ la boule (dans L^∞) de centre f et de rayon 1. Soit $g \in B(f, 1)$. On a $|1 - g| = |f - g| \le \|f - g\|_\infty \le 1$ p.p.. On en déduit que $g \ge 0$ p.p. et donc que $g \in C$. La fonction f appartient donc à l'intérieur de C, ce qui prouve que C est d'intérieur non vide.

Corrigé 101 (Convergence essentiellement uniforme)

Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, quand $n \to \infty$, si et seulement si il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c, quand $n \to \infty$.

corrigé

On suppose que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, quand $n \to \infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n - f| \le \|f_n - f\|_\infty$ p.p. (voir, par exemple, l'exercice corrigé 4.32). Il existe donc $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $|(f_n - f)(x)| \le \|f_n - f\|_\infty$ pour tout $x \in A_n^c$.

On pose $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, on a alors, par $\sigma-$additivité de m, $m(A) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{x \in A^c} |f_n(x) - f(x)| \le \|f_n - f\|_\infty.$$

On en déduit que $f_n \to f$ uniformément sur A^c, quand $n \to \infty$. Ce qui donne la propriété désirée.

Réciproquement, on suppose maintenant qu'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c, quand $n \to \infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a, pour tout $x \in A^c$, $|f_n(x) - f(x)| \le \sup_{y \in A^c} |f_n(y) - f(y)|$. Comme $m(A) = 0$, on en déduit :

$$|f_n - f| \le \sup_{y \in A^c} |f_n(y) - f(y)| \text{ p.p.},$$

et donc :

$$\|f_n - f\|_\infty \le \sup_{y \in A^c} |f_n(y) - f(y)|.$$

Comme $f_n \to f$ uniformément sur A^c, quand $n \to \infty$, ceci donne bien $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, quand $n \to \infty$.

Corrigé 102 (Densité et continuité en moyenne)

1. Soit $p \in [1, \infty[$. Montrer que $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, montrer que $\|f - f(\cdot + h)\|_p \to 0$ quand $h \to 0$.

corrigé

Densité de C_c **dans** L^p

On reprend ici la démonstration faite pour $p = 1$ (voir le théorème 5.5)

Il est clair que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. En confondant un élément de $\mathcal{L}^p$ avec sa classe d'équivalence, on a donc aussi $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^p = L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (ceci est aussi vrai pour $p = \infty$). L'objectif est donc de montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}^p$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\|f-\varphi\|_p \le \varepsilon$. On va raisonner en plusieurs étapes (fonctions caractéristiques, $\mathcal{E}_+$, $\mathcal{M}_+$ et enfin $\mathcal{L}^p$).

(a) On suppose ici que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(A) < \infty$.
Soit $\varepsilon > 0$. On prend la même fonction φ que pour $p = 1$ (démonstration du téorème 5.5). On a $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\varphi = 1$ sur K, $\varphi = 0$ sur O^c et $0 \le \varphi \le 1$ (partout). Les ensembles K et O sont t.q. $K \subset A \subset O$ et $\lambda(O \setminus K) \le 2\varepsilon$. On en déduit que $f - \varphi = 0$ sur $K \cup O^c$ et $0 \le |f - \varphi| \le 1$, ce qui donne
$$\|f - \varphi\|_p^p \le \lambda(O \setminus K) \le 2\varepsilon,$$
et donc
$$\|f - \varphi\|_p \le (2\varepsilon)^{\frac{1}{p}}.$$
Comme ε est arbitrairement petit, ceci termine la première étape.

(b) On suppose ici que $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^p$. Comme $f \in \mathcal{E}_+$, il existe $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $A_1, \ldots, A_n \in T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. Comme $f \in \mathcal{L}^p$, on a, pour tout i, $a_i^p \lambda(A_i) \le \int |f|^p dm < \infty$. Donc, $\lambda(A_i) < \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$, l'étape 1 donne, pour tout i, l'existence de $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\|1_{A_i} - \varphi_i\|_p \le \varepsilon$. On pose $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on obtient $\|f - \varphi\|_p \le (\sum_{i=1}^n a_i)\varepsilon$ (ce qui est bien arbitrairement petit).

(c) On suppose ici que $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^p$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f \in \mathcal{M}_+$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$. La suite $(f - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc dominée par $f \in \mathcal{L}^p$. Le théorème de convergence dominée donne alors que $(f - f_n) \to 0$ dans L^p quand $n \to \infty$. On peut donc choisir $g = f_n \in \mathcal{E}_+$ t.q. $\|f - g\|_p \le \varepsilon$.

L'étape 2 donne alors l'existence de $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\|g - \varphi\|_p \le \varepsilon$. D'où l'on déduit $\|f - \varphi\|_p \le 2\varepsilon$. Ce qui termine l'étape 3.

(d) On suppose enfin que $f \in \mathcal{L}^p$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f^\pm \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^p$, l'étape 3 donne qu'il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\|f^+ - \varphi_1\|_p \le \varepsilon$ et $\|f^- - \varphi_2\|_p \le \varepsilon$. On pose alors $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. On a $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\|f - \varphi\|_p \le 2\varepsilon$. Ce qui prouve bien la densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans L^p.

Continuité en moyenne

On raisonne ici en 2 étapes :

(a) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La fonction φ est donc uniformément continue, ce qui donne
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x+h) - \varphi(x)| \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$
Soit $a > 0$ t.q. $\varphi = 0$ sur $[-a,a]^c$. Pour $h \in \mathbb{R}$ t.q. $|h| \le 1$, on a donc, comme $\varphi(x+h) - \varphi(x) = 0$ si $x \notin [-a-1, a+1]$,
$$\int |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p dx \le (2a+2) \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p \to 0, \text{ quand } h \to 0.$$

On en déduit que $\|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_p \to 0$ quand $h \to 0$.

(b) Soit $f \in L^p$. L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne que $f(\cdot + h) \in L^p$ pour tout $h \in \mathbb{R}$. On veut maintenant montrer que $\|f(\cdot + h) - f\|_p \to 0$ quand $h \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la densité de C_c dans L^p, il existe $\varphi \in C_c$ t.q. $\|f - \varphi\|_p \leq \varepsilon$. L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne $\|f(\cdot + h) - \varphi(\cdot + h)\|_p = \|f - \varphi\|_p$. On a donc, pour tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\|f(\cdot + h) - f\|_p \leq 2\|f - \varphi\|_p + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_p \leq 2\varepsilon + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_p.$$

D'après la première étape, il existe $\eta > 0$ t.q.

$$|h| \leq \eta \Rightarrow \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_p \leq \varepsilon.$$

Donc,

$$|h| \leq \eta \Rightarrow \|f(\cdot + h) - f\|_p \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $f(\cdot + h) \to f$ dans L^p, quand $h \to 0$.

---

2. Les assertions précédentes sont-elles vraies pour $p = \infty$?

corrigé

Les assertions précédentes sont fausses pour $p = \infty$, comme cela est montré dans l'exercice 8.3.

(a) On a bien $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ mais le résultat de densité est faux. On prend, par exemple, $f = 1_{]0,1[}$. Il est facile de voir que $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$, pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) On prend ici aussi $f = 1_{]0,1[}$. Il est facile de voir que $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty = 1$ pour tout $h \neq 0$.

Corrigé 103 (Produit $L^p - L^q$)

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $p \in [1, +\infty]$ et q le conjugué de p (i.e. $q = \frac{p}{p-1}$). Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f \in L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $g \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $g_n \to g$ dans $L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $\int f_n g_n dm \to \int fg dm$ lorsque $n \to +\infty$.

corrigé

On remarque d'abord que le lemme 6.2 (ou la proposition 6.9 pour avoir aussi le cas $p = \infty$ ou $q = \infty$) donne que $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $f_n g_n \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, on utilise l'inégalité de Hölder (lemme 6.2 et proposition 6.9) pour obtenir

$$\begin{aligned}|\textstyle\int f_n g_n dm - \int fg dm| &\leq |\textstyle\int (f_n - f) g_n dm| + |\int f(g_n - g) dm| \\ &\leq \|f_n - f\|_p \|g_n\|_q + \|f\|_p \|g - g_n\|_q \to 0, \text{ quand } n \to \infty,\end{aligned}$$

car $\|f_n - f\|_p \to 0$, $\|g - g_n\|_q \to 0$ (quand $n \to \infty$) et la suite $(\|g_n\|_q)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans L^q.

Corrigé 104

Soient (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On suppose que $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

1. On suppose que $g_n \to g$ dans $L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

corrigé

Cette question a été faite dans l'exercice 6.7, corrigé 103.

---

2. On suppose maintenant que $g_n \to g$ p.p.. Montrer par un contre exemple qu'on peut ne pas avoir $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

corrigé

On prend $(E,T,m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On prend $f = g = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$f_n = g_n = \sqrt{n} 1_{]0,\frac{1}{n}[}.$$

On a bien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ (comme d'habitude, on confond un élément de $\mathcal{L}^p$ avec sa classe d'équivalence).

On a aussi $f_n \to 0$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ (car $\|f_n\|_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$), $g_n \to 0$ p.p. et $f_n g_n \not\to 0$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ car $\|f_n g_n\|_1 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

3. On suppose maintenant que $g_n \to g$ p.p. et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $\|g_n\|_\infty \le M$. Montrer qu'on a alors $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

corrigé

On remarque d'abord que $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $f_n g_n \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir la proposition 6.9). Puis, on écrit

$$|\int f_n g_n dm - \int fg dm| \le \int |f_n - f||g_n| dm + \int |f||g_n - g| dm. \tag{12.86}$$

Le premier terme du membre de droite de cette inégalité tend vers 0 car il est majoré par $M\|f_n - f\|_1$ qui tend vers 0 quand $n \to \infty$.

Pour montrer que le deuxième terme de cette inégalité tend aussi vers 0, on pose $h_n = |f||g_n - g|$. On a $h_n \to 0$ p.p. car $g_n \to g$ p.p., quand $n \to \infty$. On a aussi $0 \le h_n \le 2M|f| \in L^1_R(E,T,m)$ (en effet, comme $g_n \to g$ p.p. et $|g_n| \le M$ p.p., on a aussi $|g| \le M$ p.p.). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée. Il donne que $\int h_n dm \to 0$. On en déduit que le deuxième terme de (12.86) tend vers 0 quand $n \to \infty$ et donc que $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ quand $n \to \infty$.

Corrigé 105 (Inégalité de Hardy)

Soit $p \in]1,\infty[$. On note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(]0,\infty[, \mathcal{B}(]0,\infty[), \lambda)$ (λ est donc ici la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,\infty[$).

Soit $f \in \mathcal{L}^p$. Pour $x \in]0,\infty[$, on pose $F(x) = \frac{1}{x}\int f 1_{]0,x[} d\lambda$. Le but de l'exercice est de montrer que $F \in \mathcal{L}^p$ et $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

1. On suppose, dans cette question, que $f \in C_c(]0,\infty[)$ (c'est-à-dire que f est continue et à support compact dans $]0,\infty[$).

   (a) Montrer $F \in C^1(]0,\infty[) \cap \mathcal{L}^p$. Montrer que $xF'(x) = -F(x) + f(x)$ pour tout $x > 0$.

   corrigé

   On pose $G(x) = \int f 1_{]0,x[} d\lambda$ pour $x \in]0,\infty[$. Comme f est continue, la fonction g est de classe C^1 sur $]0,\infty[$ (et $G' = f$). On en déduit que F est aussi de classe C^1 sur $]0,\infty[$.

   Comme f est à support compact dans $]0,\infty[$, il existe $a, A \in]0,\infty[$, $a \le A$, t.q. $f(x) = 0$ si $x < a$ ou $x > A$. La fonction f est bornée (car continue sur le compact $[a, A]$ et nulle en dehors de ce compact), on note $M = \sup\{|f(x)|;\ x \in [a, A]\}$. On a alors $|F(x)| \le \frac{M(A-a)}{x} 1_{[a,\infty[}(x)$ pour tout $x \in]0,\infty[$. On en déduit que $F \in \mathcal{L}^p$ car $p > 1$ (et on aussi $F \in \mathcal{L}^\infty$).

   Comme $xF(x) = G(x)$, on a bien $xF'(x) + F(x) = G'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0,\infty[$.

   (b) On suppose, dans cette question, que $f(x) \ge 0$ pour tout $x \in]0,\infty[$.

   Montrer que $\int_0^\infty F^p(x)dx = \frac{p}{p-1} \int_0^\infty F^{p-1}(x) f(x) dx$. [On pourra utiliser une intégration par parties.]

   Montrer que $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1} \|f\|_p$.

   corrigé

   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En intégrant par parties (entre F^p et 1) sur $]0, n[$, on obtient :

   $$\int_0^n F^p(x)dx = -\int_0^n pF^{p-1}F'(x)xdx + F^p(n)n = \int_0^n pF^p(x)dx - \int_0^n pF^{p-1}f(x)dx + F^p(n)n,$$

   et donc :

   $$(p-1)\int_0^n F^p(x)dx = \int_0^n pF^{p-1}f(x)dx - F^p(n)n.$$

   Comme $0 \le F^p(n)n \le \frac{1}{n^{p-1}} M(A-a) \to 0$, quand $n \to \infty$ (où a, A, M sont définis à la question précédente) et que $F, f \in \mathcal{L}^p$, on en déduit :

   $$\int_0^\infty F^p(x)dx = \frac{p}{p-1}\int_0^\infty F^{p-1}(x)f(x)dx.$$

   En utilisant l'inégalité de Hölder (entre $f \in \mathcal{L}^p$ et $F^{p-1} \in \mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}$) on déduit de la précédente inégalité :

   $$\int_0^\infty F^p(x)dx \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p \Big(\int_0^\infty F^p(x)dx\Big)^{\frac{p-1}{p}},$$

   et donc (comme $F \in \mathcal{L}^p$) $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

   (c) Monter que $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$ (on ne suppose plus que $f(x) \ge 0$ pour tout $x \in]0,\infty[$).

   corrigé

Il suffit de considérer $H(x) = \frac{1}{x}\int |f| 1_{]0,x[} d\lambda$ pour $x > 0$. La question précédente donne que $H \in \mathcal{L}^p$ et $\|H\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$. Comme $|F(x)| \le H(x)$ pour tout $x > 0$, on a donc $\|F\|_p \le \|H\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

2. On ne suppose plus que $f \in C_c(]0,\infty[)$.

   (a) Montrer qu'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(]0,\infty[)$ t.q $\|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to \infty$. [On pourra utiliser la densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, exercice 6.4.]

   corrigé

   On définit g par $g = f$ sur $]0,\infty[$ et $g = 0$ sur $]-\infty,0]$. On a donc $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. il existe donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $g_n \to g$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ quand $n \to \infty$. On note $\overline{g}_n$ la restriction de la fonction g_n à $]0,\infty[$. La suite $(\overline{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers f dans $\mathcal{L}^p$, mais les fonctions $\overline{g}_n$ ne sont pas nécessairement à support compact dans $]0,\infty[$. Il faut donc les modifier "légèrement".

   On se donne une fonction $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\varphi = 0$ sur $]-1,1[$ et $\varphi = 1$ sur $]-2,2[^c$. On pose $\varphi_m(x) = \varphi(mx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^\star$. Le théorème de convergence dominée donne alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi_m\overline{g}_n \to \overline{g}_n$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ quand $m \to \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut donc choisir $m_n \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\|\varphi_{m_n}\overline{g}_n - \overline{g}_n\|_p \le \frac{1}{n+1}$. On pose $f_n = \varphi_{m_n}\overline{g}_n$, on a bien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(]0,\infty[)$ et $\|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to \infty$.

   (b) Montrer que $F \in C(]0,\infty[) \cap \mathcal{L}^p$ et que $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

   corrigé

   On pose $G(x) = \int f1_{]0,x[}d\lambda$ pour $x \in]0,\infty[$. On remarque que $G \in C(]0,\infty[)$ car si $0 < x < y < \infty$, on a (en utilisant l'inégalité de Hölder) $|G(x)-G(y)| \le \int |f|1_{]x,y[}d\lambda \le \|f\|_p(y-x)^{1-\frac{1}{p}}$. On a donc aussi $F \in C(]0,\infty[)$.

   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(]0,\infty[)$ t.q. $\|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to \infty$. On pose $F_n(x) = \frac{1}{x}\int f_n 1_{]0,x[}d\lambda$. On a donc $F_n \in \mathcal{L}^p$ et

   $$\|F_n\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f_n\|_p. \tag{12.87}$$

   Pour $x \in]0,\infty[$, on a (en utilisant l'inégalité de Hölder) $|F_n(x) - F(x)| \le \frac{1}{x}\|f_n - f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}$. On en déduit que $F_n \to F$ p.p.. Il suffit alors d'appliquer le lemme de Fatou à la suite $(|F_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ pour déduire de (12.87) que $F \in \mathcal{L}^p$ et $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

   ---

3. Montrer que $\sup\{\frac{\|F\|_p}{\|f\|_p},\ f \in \mathcal{L}^p,\ \|f\|_p \ne 0\} = \frac{p}{p-1}$ (dans cette formule, F est donné comme précédemment à partir de f). [On pourra considérer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $f_n(t) = t^{-\frac{1}{p}}1_{]1,n[}(t)$ pour $t \in]0,\infty[$.]

   corrigé

   Soit $n \ge 2$ et f_n définie par $f_n(t) = t^{-\frac{1}{p}}1_{]1,n[}(t)$ pour $t \in]0,\infty[$. On a $f_n \in \mathcal{L}^p$ et $\|f_n\|_p = (\log n)^{\frac{1}{p}}$.

   On pose $F_n(x) = \frac{1}{x}\int f_n 1_{]0,x[}d\lambda$ et on cherche maintenant à minorer $\|F_n\|_p$. On remarque que $F_n(x) \ge 0$ pour tout $x \in]0,\infty[$ et :

   $$F_n(x) = \frac{p}{p-1}\frac{1}{x}(x^{\frac{p-1}{p}} - 1), \text{ pour } x \in [1,n]. \tag{12.88}$$

   Soit $\eta > 0$. Il existe $A > 1$ t.q. :

   $$x > A \Rightarrow x^{\frac{p-1}{p}} - 1 \ge (1-\eta)x^{\frac{p-1}{p}},$$

et donc, en utilisant (12.88), on obtient :

$$n > A \Rightarrow \|F_n\|_p \geq \frac{p}{p-1}(1-\eta)(\int_A^n \frac{1}{x}dx)^{\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}(1-\eta)(\log n - \log A)^{\frac{1}{p}}.$$

Comme $\|f_n\|_p = (\log n)^{\frac{1}{p}}$, on en déduit que $\limsup_{n\to\infty} \frac{\|F_n\|_p}{\|f_n\|_p} \geq \frac{p}{p-1}(1-\eta)$. Comme $\eta > 0$ est arbitrairement petit, on a donc $\limsup_{n\to\infty} \frac{\|F_n\|_p}{\|f_n\|_p} \geq \frac{p}{p-1}$, ce qui donne :

$$\sup\{\frac{\|F\|_p}{\|f\|_p},\ f \in \mathcal{L}^p,\ \|f\|_p \neq 0\} \geq \frac{p}{p-1}.$$

La mojoration donnée à la question 3 permet de conclure :

$$\sup\{\frac{\|F\|_p}{\|f\|_p},\ f \in \mathcal{L}^p,\ \|f\|_p \neq 0\} = \frac{p}{p-1}.$$

Corrigé 106 (Continuité d'une application de L^p dans L^q)
Soit (E,T,m) un espace mesuré fini, $p,q \in [1,\infty[$ et g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. :

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+^\star\,;\ |g(s)| \leq C|s|^{\frac{p}{q}} + C,\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{12.89}$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

corrigé

Cet exercice est très voisin de l'exercice 4.35 correspondant au cas $p = q = 1$, le corrigé des 3 premières questions va donc suivre essentiellement le corrigé 82.

La fonction u est mesurable de E (muni de la tribu T) dans $\mathbb{R}$ (muni de la tribu $\mathcal{B}(R)$) et g est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu $\mathcal{B}(R)$). On en déduit, par composition, que $g \circ u$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

Pour $s \in [-1,1]$, on a $|g(s)| \leq 2C$ et donc $|g(s)|^q \leq 2^q C^q$. Pour $s \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$, on a $|g(s)| \leq 2C|s|^{\frac{p}{q}}$ et donc $|g(s)|^q \leq 2^q C^q |s|^p$. On a donc, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $|g(s)|^q \leq 2^q C^q + 2^q C^q |s|^p$. On en déduit que, pour tout $x \in E$, $|g \circ u(x)|^q = |g(u(x))|^q \leq 2^q C^q + 2^q C^q |u(x)|^p$, et donc :

$$\int |g \circ u|^q dm \leq 2^q C^q \|u\|_p^p + 2^q C^q m(E),$$

ce qui donne $g \circ u \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

On pose $L^r = L^r_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, pour $r = p$ et $r = q$. Pour $u \in L^p$, on pose $G(u) = \{h \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E,T,m);$ $h = g \circ v$ p.p.$\}$, avec $v \in u$. On a donc $G(u) \in L^q$ et cette définition a bien un sens, c'est à dire que $G(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u.

corrigé

La démonstration du fait que cette définition a bien un sens est essentiellement identique à celle du cas $p = q = 1$ (exercice 4.35, corrigé 82). Elle n'est pas demandée ici.

---

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$. On suppose que $u_n \to u$ p.p., quand $n \to \infty$, et qu'il existe $F \in L^p$ t.q. $|u_n| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^q.

corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de u_n, encore notée u_n. On choisit aussi des représentants de u et F, notés toujours u et F. Comme $u_n \to u$ p.p. quand $n \to \infty$ et que g est continu, il est facile de voir que $g \circ u_n \to g \circ u$ p.p.. On a donc $G(u_n) \to G(u)$ p.p..

On remarque aussi que $|g \circ u_n| \le C|u_n|^{\frac{p}{q}} + C \le C|F|^{\frac{p}{q}} + C$ p.p. et donc $|G(u_n)| \le C|F|^{\frac{p}{q}} + C$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $F \in F^p$, on a $|F|^{\frac{p}{q}} \in L^q$. Les fonctions constantes sont aussi dans L^q (car $m(E) < \infty$). On a donc $C|F|^{\frac{p}{q}} + C \in L^q$. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée dans L^q (théorème 6.1), il donne que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^q quand $n \to \infty$.

---

3. Montrer que G est continue de L^p dans L^q.

corrigé

On raisonne par l'absurde. On suppose que G n'est pas continue de L^p dans L^q. Il existe donc $u \in L^p$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ t.q. $u_n \to u$ dans L^p et $G(u_n) \not\to G(u)$ dans L^q quand $n \to \infty$.

Comme $G(u_n) \not\to G(u)$, il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$ et :

$$\|G(u_{\varphi(n)}) - G(u)\|_q \ge \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{12.90}$$

(La suite $(G(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de la suite $(G(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.)

Comme $u_{\varphi(n)} \to u$ dans L^p, on peut appliquer le théorème 6.2 ("réciproque partielle de la convergence dominée dans L^q"). Il donne l'existence de $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et de $F \in L^p$ t.q. $\psi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$, $u_{\varphi\circ\psi(n)} \to u$ p.p. et $|u_{\varphi\circ\psi(n)}| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. (La suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$).

On peut maintenant appliquer la question 2 à la suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle donne que $G(u_{\varphi\circ\psi(n)}) \to G(u)$ dans L^q quand $n \to \infty$. Ce qui est en contradiction avec (12.90).

---

4. On considère ici $(E, T, m) = ([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et on prend $p = q = 1$. On suppose que g ne vérifie pas (12.89). On va construire $u \in L^1$ t.q. $G(u) \notin L^1$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que : $|g(\alpha_n)| \ge n|\alpha_n|$ et $|\alpha_n| \ge n$.

   corrigé

   On raisonne par l'absurde. On suppose que $|g(s)| < n|s|$ pour tout s t.q. $|s| \ge n$. On pose $M = \max\{|g(s)|,\ s \in [-n, n]\}$. On a $M < \infty$ car g est continue sur le compact $[-n, n]$ (noter que n est fixé). en posant $C = \max\{n, M\}$, on a donc :

   $$|g(s)| \le C|s| + C, \text{ pour tout } s \in \mathbb{R},$$

   en contradiction avec l'hypothèse que g ne vérifie pas (12.89).

Il existe donc s, t.q. $|s| \geq n$ et $|g(s)| \geq n|s|$. Ceci prouve l'existence de α_n.

(b) On choisit une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ vérifiant les conditions données à la question précédente. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{|\alpha_n|n^2} = 1.$$

corrigé

Comme $\alpha_n \geq n$, on a $\frac{1}{|\alpha_n|n^2} \leq \frac{1}{n^3}$ et donc :

$$0 < \beta = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{1}{|\alpha_n|n^2} < \infty.$$

On choisit alors $\alpha = \frac{1}{\beta}$.

(c) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite définie par : $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n - \dfrac{\alpha}{|\alpha_n|n^2}$ (où α_n et α sont définies dans les 2 questions précédentes). On pose $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n 1_{[a_{n+1},a_n[}$. Montrer que $u \in L^1$ et $G(u) \notin L^1$.

corrigé

Pour $n \geq 2$, on a $a_n = 1 - \sum_{p=1}^{n-1} \dfrac{\alpha}{|\alpha_p|p^2}$.

Grâce au choix de α, on a donc $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et $a_n \downarrow 0$, quand $n \to \infty$.

La fonction u est bien mesurable et, par le théorème de convergence monotone (plus précisément, on utilise sa première conséquence, le corollaire 4.1) :

$$\int |u| d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} |\alpha_n|(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\alpha}{n^2} < \infty.$$

Donc, $u \in \mathcal{L}^1$ et aussi $u \in L^1$ en confondant, comme d'habitude, u avec sa classe.

on remarque ensuite que $g \circ u = \sum_{n=1}^{+\infty} g(\alpha_n) 1_{[a_{n+1},a_n[}$. On a donc :

$$\int |g \circ u| d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} |g(\alpha_n)|(a_n - a_{n+1}) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\alpha}{n} = \infty.$$

ceci montre que $g \circ u \notin \mathcal{L}^1$ et donc $G(u) \notin L^1$.

Corrigé 107 (Convergence p.p. et convergence des normes, par Egorov)

Soit (E, T, m) un espace mesuré et $1 \leq p \leq \infty$. On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de L^p et $f \in L^p$. On suppose que $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

1. Montrer que $\|f\|_p \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p$. [Traiter séparément le cas $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$.]

corrigé

On suppose que $\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p < \infty$ (sinon, l'inégalité à démontrer est immédiate). Comme d'habitude, on choisit des représentants de f_n et de f (qui sont donc dans $\mathcal{L}^p$).

Pour $p < \infty$, on utilise le lemme de Fatou (lemme 4.6) à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $g_n = |f_n|^p$. Comme $g_n \to |f|^p$ p.p., Il donne :

$$\int |f|^p dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int |f_n|^p dm.$$

On en déduit que $\|f\|_p \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p$.

Pour $p = \infty$, il existe $A \in T$ t.q. $m(A^c) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in A$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in T$ t.q. $m(A_n^c) = 0$ et $f_n(x) \leq \|f_n\|_\infty$ pour tout $x \in A_n$. On pose $B = A \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$, de sorte que $B \in T$ et $m(B^c) = 0$. Pour $x \in B$, on a :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \|f\|_\infty.$$

On en déduit que $\|f\|_\infty \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty$.

---

2. En prenant $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ (où λ est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$), donner un exemple pour lequel la suite $(\|f_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ et $\|f\|_p < \lim_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p$. [On pourra aussi traiter séparément les cas $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$.]

corrigé

Pour $p < \infty$, on peut prendre $f_n = n^{\frac{1}{p}} 1_{]0,\frac{1}{n}[}$ (et $f = 0$ p.p.).

Pour $p = \infty$, on peut prendre $f_n = 1_{]0,\frac{1}{n}[}$ (et $f = 0$ p.p.).

Pour la suite de l'exercice, on suppose que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, quand $n \to \infty$.

3. Dans cette question, on suppose que $p = 1$.

(a) On suppose que $m(E) < \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. On choisit aussi un représentant de f, encore noté f. Soit $A \in T$ et $\varepsilon > 0$. On suppose que $f_n \to f$ uniformément sur A^c. Montrer qu'il existe n_0 t.q. :

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \varepsilon + \int_A |f| dm.$$

corrigé

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_A |f_n| dm &= \int_A |f| dm + \int_A (|f_n| - |f|) dm \\ &= \int_A |f| dm + \|f_n\|_1 - \|f\|_1 + \int_{A^c} (|f| - |f_n|) dm.\end{aligned} \tag{12.91}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme de f_n vers f sur A^c (qui est de mesure finie car $m(E) < \infty$), il existe n_1 t.q.

$$n \geq n_1 \Rightarrow \int_{A^c} (|f| - |f_n|) dm \leq \int_{A^c} |f_n - f| dm \leq \varepsilon.$$

Comme $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$, quand $n \to \infty$, il existe n_2 t.q. $n \geq n_2 \Rightarrow \|f_n\|_1 - \|f\|_1 \leq \varepsilon$. Pour $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a donc :

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \int_A |f| dm + 2\varepsilon.$$

ce qui donne le résultat demandé.

(b) On suppose que $m(E) < \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1, quand $n \to \infty$. [On pourra utiliser le théorème d'Egorov.]

corrigé

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la proposition 4.9 page 93, il existe $\delta > 0$ t.q.

$$(A \in T,\ m(A) \leq \delta) \Rightarrow \int_A |f| dm \leq \varepsilon.$$

Le théorème d'Egorov (théorème 3.2) donne l'existence de $A \in T$ t.q. $m(A) \leq \delta$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c. On a donc :

$$\int |f_n - f| dm \leq \int_{A^c} |f_n - f| dm + \int_A |f_n| dm + \int_A |f| dm.$$

On a $\int_A |f| dm \leq \varepsilon$. Par la question précédente, il existe n_0 t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \int_A |f| dm + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon.$$

Par convergence uniforme de f_n vers f sur A^c, il existe n_1 t.q.

$$n \geq n_1 \Rightarrow \int_{A^c} |f_n - f| dm \leq m(E) \sup_{A^c} |f_n - f| \leq \varepsilon.$$

On a donc finalement :

$$n \geq \max(n_0, n_1) \Rightarrow \int |f_n - f| dm \leq 5\varepsilon.$$

Ce qui prouve que $f_n \to f$ dans L^1, quand $n \to \infty$.

(c) On suppose que $m(E) = \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $C \in T$ t.q. :

$$m(C) < \infty \text{ et } \int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon.$$

corrigé

Cette question est résolue dans la proposition 4.9 page 93.

(d) On suppose que $m(E) = \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1, quand $n \to \infty$.

corrigé

Soit $\varepsilon > 0$. La question précédente donne l'existence de $C \in T$ t.q. $m(C) < \infty$ et $\int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon$.

La proposition 4.9 donne ici aussi l'existence de $\delta > 0$ t.q. $(A \in T,\, m(A) \le \delta) \Rightarrow \int_A |f| dm \le \varepsilon$.

Le théorème d'Egorov (appliqué à la mesure définie par $m_C(B) = m(B \cap C)$ pour $B \in T$, qui est bien une mesure finie sur T) donne l'existence de $A \in T$ t.q. $m(A \cap C) \le \delta$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c. On a donc :

$$\int |f_n - f| dm \le \int_{A^c \cap C} |f_n - f| dm + \int_{A \cup C^c} |f_n| dm + \int_{A \cup C^c} |f| dm.$$

Par le choix de A et de C, on a $\int_{A \cup C^c} |f| dm = \int_{(A \cap C) \cup C^c} |f| dm \le \int_{A \cap C} |f| dm + \int_{C^c} |f| dm \le 2\varepsilon$.

En reprenant la question 3a, on remarque que l'hypothèse $m(E) < \infty$ n'a été utilisée que pour dire que $m(A^c) < \infty$. Ici, comme $m(A^c \cap C) < \infty$, la même démonstration donne donc qu'il il existe n_0 t.q.

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int_{A \cup C^c} |f_n| dm \le \int_{A \cup C^c} |f| dm + 2\varepsilon \le 4\varepsilon.$$

Enfin, par convergence uniforme de f_n vers f sur A^c, il existe n_1 t.q.

$$n \ge n_1 \Rightarrow \int_{A^c \cap C} |f_n - f| dm \le m(C) \sup_{A^c} |f_n - f| \le \varepsilon.$$

On a donc :

$$n \ge \max(n_0, n_1) \Rightarrow \int |f_n - f| dm \le 7\varepsilon.$$

Ce qui prouve que $f_n \to f$ dans L^1, quand $n \to \infty$.

---

4. Dans cette question, on suppose que $1 < p < \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^p, quand $n \to \infty$. [S'inspirer de la méthode suggérée pour le cas $p = 1$.]

corrigé

On traite directement le cas général (c'est-à-dire $m(E) \le \infty$). Soit $\varepsilon > 0$. Comme $|f|^p \in L^1$, La proposition 4.9 donne l'existence de $C \in T$ t.q. $m(C) < \infty$ et $\int_{C^c} |f|^p dm \le \varepsilon$. Elle donne ici aussi l'existence de $\delta > 0$ t.q. $(A \in T,\, m(A) \le \delta) \Rightarrow \int_A |f|^p dm \le \varepsilon$.

On applique maintenant le théorème d'Egorov avec la mesure m_C (comme à la question précédente) et pour les suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(|f_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$. On obtient (en prenant l'union des ensembles donnés par le théorème pour ces deux suites) l'existence de $A \in T$ t.q. $m(A \cap C) \le \delta$, $f_n \to f$ uniformément sur A^c et $|f_n|^p \to |f|^p$ uniformément sur A^c . On a :

$$\int |f_n - f|^p dm \le \int_{A^c \cap C} |f_n - f|^p dm + 2^p \int_{A \cup C^c} |f_n|^p dm + 2^p \int_{A \cup C^c} |f|^p dm.$$

Par le choix de A et de C, on a $\int_{A \cup C^c} |f|^p dm = \int_{(A \cap C) \cup C^c} |f|^p dm \le \int_{A \cap C} |f|^p dm + \int_{C^c} |f|^p dm \le 2\varepsilon$.

Comme à la question précédente, en reprenant la question 3a, on obtient qu'il existe n_0 t.q.

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int_{A \cup C^c} |f_n|^p dm \le \int_{A \cup C^c} |f|^p dm + 2\varepsilon \le 4\varepsilon.$$

En fait, pour montrer cette inégalité avec la question 3a, on remplace (12.91) par :

$$\begin{aligned}\int_{A\cup C^c}|f_n|^p dm &= \int_{A\cup C^c}|f|^p dm + \int_{A\cup C^c}(|f_n|^p-|f|^p)dm\\ &= \int_{A\cup C^c}|f|^p dm + \|f_n\|_p^p - \|f\|_p^p + \int_{A^c\cap C}(|f|^p-|f_n|^p)dm,\end{aligned}$$

et on utilise la convergence de $\|f_n\|_p^p$ vers $\|f\|_p^p$, la convergence uniforme de $|f_n|^p$ vers $|f|^p$ et le fait que $m(C)<\infty$.

Enfin, par convergence uniforme de f_n vers f sur A^c, il existe n_1 t.q.

$$n\geq n_1 \Rightarrow \int_{A^c\cap C}|f_n-f|^p dm \leq m(C)\sup_{A^c}|f_n-f|^p \leq \varepsilon.$$

On a donc :

$$n\geq \max(n_0,n_1) \Rightarrow \int |f_n-f|^p dm \leq 2^p(7\varepsilon).$$

Ce qui prouve que $f_n \to f$ dans L^p, quand $n\to\infty$.

---

5. Dans cette question, on suppose que $p=\infty$ et que $(E,T,m)=(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$. Donner un exemple pour lequel $f_n \not\to f$ dans L^∞, quand $n\to\infty$.

corrigé

Pour $n\geq 2$, on pose $f=1_{]\frac{1}{2},1[}$ et on définit f_n ainsi :

$$\begin{aligned}&f_n(x)=0 \text{ si } 0\leq x\leq \tfrac{1}{2},\\ &f_n(x)=n(x-\tfrac{1}{2}) \text{ si } \tfrac{1}{2}\leq x\leq \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{n},\\ &f_n(x)=1 \text{ si } \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{n}\leq x\leq 1.\end{aligned}$$

On a bien, quand $n\to\infty$, $f_n\to f$ p.p., $\|f_n\|_\infty\to\|f\|_\infty$ et $f_n\not\to f$ dans L^∞ (car $\|f_n-f\|_\infty=1$ pour tout $n\geq 2$).

Corrigé 108 (Conv. p.p. et conv. des normes, par Fatou)

Soit (E,T,m) un espace mesuré. Pour $p\in[1,\infty]$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

Soit $p\in[1,\infty[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p et $f\in L^p$. On suppose que $f_n\to f$ p.p. et que $\|f_n\|_p\to\|f\|_p$, quand $n\to\infty$.

1. On suppose que $p=1$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $g_n=|f_n|+|f|-|f_n-f|$ (en ayant choisi des représentants de f_n et f). Montrer que $g_n\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En utilisant le lemme de Fatou, montrer que $f_n\to f$ dans L^1.

corrigé

Comme $|f-f_n|\leq|f|+|f_n|$, on a bien $g_n\geq 0$.Comme g_n tends p.p. vers $2|f|$, le lemme de Fatou (lemme 4.6) donne :

$$\int 2|f|dm \leq \liminf_{n\to\infty}\int g_n dm.$$

Comme $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$, on a $\liminf_{n\to\infty} \int g_n dm = 2\int |f|dm - \limsup_{n\to\infty} \int |f - f_n|dm$. On a donc :

$$\int 2|f|dm \leq 2\int |f|dm - \limsup_{n\to\infty} \int |f - f_n|dm.$$

On en déduit que $\limsup_{n\to\infty} \int |f - f_n|dm \leq 0$, et donc que $f_n \to f$ dans L^1.

---

2. On suppose maintenant que $p \in]1, \infty[$. En utilisant le lemme de Fatou pour une suite convenable, montrer que $f_n \to f$ dans L^p.

corrigé

On prend maintenant $g_n = 2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p - |f_n - f|^p$. Comme $|f - f_n| \leq |f| + |f_n| \leq 2\max\{|f_n|, |f|\}$, on a $|f - f_n|^p \leq 2^p \max\{|f_n|, |f|\}^p \leq 2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p$. On a donc $g_n \geq 0$. Comme g_n tends p.p. vers $2^{p+1}|f|^p$, le lemme de Fatou (lemme 4.6) donne :

$$\int 2^{p+1}|f|^p dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int g_n dm.$$

Comme $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, on a $\liminf_{n\to\infty} \int g_n dm = 2^{p+1} \int |f|^p dm - \limsup_{n\to\infty} \int |f - f_n|^p dm$. On a donc :

$$\int 2^{p+1}|f|^p dm \leq 2^{p+1} \int |f|^p dm - \limsup_{n\to\infty} \int |f - f_n|^p dm.$$

On en déduit que $\limsup_{n\to\infty} \int |f - f_n|^p dm \leq 0$, et donc que $f_n \to f$ dans L^p.

Corrigé 109 (Compacité $L^p - L^q$)

Dans cet exercice, (E, T, m) est un espace mesuré. Pour tout $1 \leq r \leq \infty$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (et $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$).

1. Soit $r > 1$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^r. Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable, c'est-à-dire que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ t.q. } n \in \mathbb{N},\ A \in T,\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |g_n|dm \leq \varepsilon.$$

[Utiliser l'inégalité de Hölder.]

corrigé

En utilsant l'inégalité de Hölder (inégalité (6.3)) entre $r \in]1, \infty]$ et son conjugué et les fonctions g_n et 1_A, on obtient, pour tout $A \in T$ de mesure finie :

$$\int_A |g_n|dm \leq \|g_n\|_r m(A)^{1-\frac{1}{r}}.$$

Si C est un majorant de $\{\|g_n\|_r,\ n \in \mathbb{N}\}$, il suffit donc de prendre $\delta > 0$ t.q. $C\delta^{1-\frac{1}{r}} \leq \varepsilon$ (ce qui est possible car $r > 1$) pour avoir le résultat demandé.

Soit $1 \leq p < q \leq \infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^q. On suppose dans toute la suite que $f_n \to f$ p.p. quand $n \to \infty$.

2. (Compacité $L^p - L^q$.) On suppose que $m(E) < \infty$.

   (a) Montrer que $f \in L^q$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^q$ t.q. $f = g$ p.p.").

   corrigé

   Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. Il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in A^c$. On pose $g(x) = f(x)$ pour $x \in A^c$ et $g(x) = 0$ pour $x \in A$, de sorte que $g = f$ p.p. et $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n 1_{A^c}(x)$ pour tout $x \in E$.

   Si $q < \infty$, on applique le lemme de Fatou à la suite $(|f_n|^q)_{n\in\mathbb{N}}$. Il donne :

   $$\int |g|^q dm \le \liminf_{n\to\infty} \int |f_n|^q dm \le C^q,$$

   où C est un majorant de $\{\|f_n\|_q,\ n \in \mathbb{N}\}$. On a donc $g \in \mathcal{L}^q$ et donc $f \in L^q$ (au sens demandé).

   Si $q = \infty$, comme $|f_n| \le \|f_n\|_\infty$ p.p., on déduit de $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n 1_{A^c}(x)$ pour tout $x \in E$ le fait que $\|g\|_\infty \le C$ p.p., où C est un majorant de $\{\|f_n\|_\infty,\ n \in \mathbb{N}\}$. On a donc, ici aussi, $g \in \mathcal{L}^\infty$ et donc $f \in L^\infty$ (au sens demandé).

   (b) Montrer que $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to \infty$. [Utiliser la question 1 avec $g_n = |f_n - f|^p$ et un théorème du cours.]

   corrigé

   La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^r, avec $r = \frac{q}{p} > 1$. Elle est donc équi-intégrable (par la question 1). Comme elle converge p.p. vers 0 et que $m(E) < \infty$, le théorème de Vitali (théorème 4.8) donne que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans L^1 et donc que $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to \infty$.

   ---

3. On suppose que $m(E) = \infty$.

   (a) Soit $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$. Montrer que $f_n 1_B \to f 1_B$ dans L^p quand $n \to \infty$.

   corrigé

   On définit la mesure m_B sur T en posant $m(A) = m(A \cap B)$ pour tout $A \in T$. la mesure m_B est finie. On peut donc appliquer la question 2 avec cette mesure. On obtient que $f_n \to f$, quand $n \to \infty$, dans l'espae $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m_B)$. Ceci qui donne que $f_n 1_B \to f 1_B$ dans L^p quand $n \to \infty$ (car, $\int |f_n - f|^p 1_B dm = \int |f_n - f|^p dm_B$).

   (b) On prend ici $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $q = 2$, $p = 1$, $f = 0$. Donner un exemple pour lequel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$, $f_n \not\to 0$ dans L^1 quand $n \to \infty$ (et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans L^2, $f_n \to 0$ p.p. quand $n \to \infty$).

   corrigé

   On peut prendre, par exemple, $f_n = 1_{]n,n+1[}$.

Corrigé 110 (Caractérisation de $\mathcal{L}^\infty$)

Soit (X, T, m) un espace mesuré. Pour $p \in [1, \infty]$, on note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(X, T, m)$. Soit f une application de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ il existe $f_n \in \mathcal{L}^\infty$ et $g_n \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = f_n + g_n$, $\|f_n\|_\infty \leq 1$ et $\|g_n\|_1 \leq \frac{1}{n}$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|f\|_\infty \leq 1$.

corrigé

En attente

Corrigé 111 (Exemples de v.a. appartenant à L^q)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X une v.a. (réelle). Dans les trois cas suivants, donner les valeurs de $q \in [1, \infty]$ pour lesquels la variable aléatoire X appartient à l'espace $L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

1. X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ ($\lambda > 0$) (c'est-à-dire que la loi de X a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, avec $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{]0,+\infty[}$ pour $x \in \mathbb{R}$).

   corrigé

   Soit $q \in [1, \infty[$, on a :
   $$\int_\Omega |X|^q dP = \int_{\mathbb{R}} |x|^q dP_X(x) = \int_0^\infty x^q \lambda \exp(-\lambda x) dx < \infty,$$
   car la fonction $x \mapsto |x|^q \lambda \exp(-\lambda x)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $X \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   Soit maintenant $q = \infty$. Pour tout $a > 0$, on a, avec $A =]a, \infty[$:
   $$P[X > a] = \int_\Omega 1_A(X) dP = \int_{\mathbb{R}} 1_A(x) dP_X(x) = \int_a^\infty \lambda \exp(-\lambda x) dx > 0,$$
   car $\lambda \exp(-\lambda x) > 0$ pour tout $x > a$. Donc $X \notin L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   ---

2. X suit une loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ (la loi de X a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, avec $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{x^2 + c^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$).

   corrigé

   Il suffit ici de considérer le cas $q = 1$. On a :
   $$\int_\Omega |X| dP = \int_{\mathbb{R}} |x| dP_X(x) \geq \frac{c}{\pi} \int_0^\infty \frac{x}{x^2 + c^2} dx \geq \frac{c}{\pi} \int_c^\infty \frac{1}{2x} dx = \infty.$$
   On a donc $X \notin L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ce qui donne aussi $X \notin L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pour tout $q \in [1, \infty]$ (car $L^q(\Omega, \mathcal{A}, P) \subset L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pour $q > 1$).

   ---

3. X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ ($p \in]0, 1[$) (c'est-à-dire que $P(\{X = k\}) = p(1-p)^{k-1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$).

   corrigé

   On note $A_k = \{X = k\} = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = k\}$ et $A = \cup_{k=1}^\infty A_k$. Par σ-additivité de P, on a $P(A) = \sum_{k=1}^\infty P(A_k) = \sum_{k=1}^\infty p(1-p)^{k-1} = 1$. On a donc $P(A^c) = 0$.

   Soit $q \in [1, \infty[$, on a :
   $$\int_\Omega |X|^q dP = \int_A |X|^q dP = \sum_{k=1}^\infty \int_{A_k} |X|^q dP = \sum_{k=1}^\infty k^q p(1-p)^{k-1} < \infty,$$

car la série de terme général $k^q p(1-p)^{k-1}$ est convergente (pour le voir, il suffit, par exemple, de remarquer que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^q p(1-p)^k}{k^q p(1-p)^{k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^q (1-p)}{k^q} = 1-p < 1.$$

On a donc $X \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit maintenant $q = \infty$. Pour tout $a > 0$, on a $P[X > a] \geq P(A_k) > 0$ si $k > a$. On a donc $X \notin L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

12.6.2 Espaces de Hilberts, espace L^2

Corrigé 112
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ deux à deux orthogonaux. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge (dans L^2) si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2^2$ est convergente (dans $\mathbb{R}$).

corrigé

Comme $L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est un espace complet, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est convergente dans $L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement la suite des sommes partielles, $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n\in\mathbb{N}}$, est de Cauchy (dans L^2). Cette suite des sommes partielles est de Cauchy si et seulement si elle vérifie :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \text{ t.q. } m \geq n \geq n_0 \Rightarrow \|\sum_{k=n}^{m} f_k\|_2^2 \leq \varepsilon. \tag{12.92}$$

Le fait que les f_n soient deux à deux orthogonaux nous donne (théorème de Pythagore) que

$$\|\sum_{k=n}^{m} f_k\|_2^2 = \sum_{k=n}^{m} \|f_k\|_2^2.$$

L'assertion 12.92 est donc équivalente à dire que la suite $(\sum_{k=0}^n \|f_k\|_2^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (dans $\mathbb{R}$), ce qui est équivalent à dire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2^2$ est convergente (dans $\mathbb{R}$).

Corrigé 113 (L^p n'est pas un espace de Hilbert si $p \neq 2$)
Montrer que $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (muni de sa norme usuelle) n'est pas un espace de Hilbert si $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$. [Pour $p \neq 2$, chercher des fonctions f et g mettant en défaut l'identité du parallèlogramme, c'est-à-dire l'identité (6.18) page 145.]

corrigé

On prend $f = 1_{]0,1[}$ et $g = 1_{]1,2[}$, de sorte que $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $g \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (avec la confusion habituelle entre une classe et l'un de ses représentants) et que :

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 1,\ \|f+g\|_p = \|f-g\|_p = 2^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p \neq 2$, on a donc $\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 2(2^{\frac{2}{p}}) \neq 4 = 2\|f\|_p^2 + 2\|g\|_p^2$.
L'identité du parallèlogramme, c'est-à-dire l'identité (6.18) page 145, n'est donc pas satisfaite (pour $p \neq 2$), ce qui prouve que, pour $p \neq 2$, la norme $\|\cdot\|_p$ (sur $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$) n'est pas induite par un produit scalaire.

Corrigé 114 (projection sur le cône positif de L^2)
Soit (X,T,m) un espace mesuré et $E = L^2_{\mathbb{R}}(X,T,m)$. On pose $C = \{f \in E, \ f \geq 0 \text{ p.p.}\}$.

1. Montrer que C est une partie convexe fermée non vide de E.

———————————corrigé———————————

- $C \neq \emptyset$ car $0 \in C$.
- Soit $f, g \in C$ et $t \in [0,1]$. On a $tf + (1-t)g \in L^2 = L^2_{\mathbb{R}}(X,T,m)$, car L^2 est un e.v., et $tf + (1-t)g \geq 0$ p.p.. On a donc $tf + (1-t)g \in C$, ce qui prouve que C est convexe.
- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ t.q. $f_n \to f$ dans L^2 quand $n \to \infty$. On veut montrer que $f \in C$ (pour en déduire que C est fermée).

  Pour tout $\varphi \in L^2$, on a $\int f_n \varphi dm \to \int f\varphi dm$ (car $|\int f_n\varphi dm - \int f\varphi dm| \leq \|f_n - f\|_2 \|\varphi\|_2$).
  On choisit $\varphi = f^- \in L^2$. Comme $f_n f^- \geq 0$ p.p., on en déduit $-\int (f^-)^2 dm = \int f f^- dm \geq 0$. Ce qui prouve que $f^- = 0$ p.p. et donc que $f \geq 0$ p.p.. On a donc montré que $f \in C$ et donc que C est fermée.

  Pour montrer que C est fermée, il est aussi possible d'utiliser la réciproque partielle du théorème de convergence dominée (théorème 6.2).

———————————————————————————

2. Soit $f \in E$. Montrer que $P_C f = f^+$.

———————————corrigé———————————

On a $f^+ \in C$. Pour montrer que $P_C f = f^+$, on utilise la première caractérisation de la projection (proposition 6.15).

Soit $g \in C$, on a $(f - f^+ / f^+ - g)_2 = -(f^- / f^+ - g)_2 = \int f^- g dm \geq 0$ (on a utilisé ici le fait que $f^- f^+ = 0$ p.p.). La proposition 6.15 donne alors $P_C f = f^+$.

———————————————————————————

Corrigé 115 (Exemple de non existence de la projection sur un s.e.v. fermé)
Dans cet exercice, on donne un exemple t.q. :
E est un espace de Banach réel, F est un sous espace vectoriel fermé de E, $g \in E \setminus F$ (et donc $d(g,F) = \inf\{\|g - f\|_E, \ f \in F\} > 0 \ldots$) et il n'existe pas d'élément $f \in E$ t.q. $d(g,F) = \|g - f\|_E$.

On prend $E = C([0,1],\mathbb{R})$, on munit E de la norme habituelle, $\|f\|_E = \max\{|f(x)|, \ x \in [0,1]\}$. On pose $F = \{f \in E; \ f(0) = 0, \ \int_0^1 f(x)dx = 0\}$. Enfin, on prend $g \in E$ défini par $g(x) = x$, pour tout $x \in [0,1]$.

1. Montrer que E est un espace de Banach (réel).

———————————corrigé———————————

Il est clair que E est un e.v. sur $\mathbb{R}$ et que $\|\cdot\|_E$ est une norme sur E, c'est la norme associée à la convergence uniforme. On montre maintenant que E est complet.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $n(\varepsilon)$ t.q. :

$$x \in [0,1], \ n, m \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon. \tag{12.93}$$

De (12.93) on déduit que, pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Il existe donc $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ t.q. $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$, pour tout $x \in [0,1]$. Pour montrer que la convergence de f_n vers f est uniforme, il suffit de reprendre (12.93) avec un x fixé et un n fixé ($n \geq n(\varepsilon)$) et de faire tendre m verts ∞, on obtient :

$$x \in [0,1],\ n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \tag{12.94}$$

ce qui donne bien la convergence uniforme de f_n vers f. Comme les f_n sont continues, on en déduit que f est continue (comme limite uniforme de fonctions continues), c'est-à-dire $f \in E$. Enfin, (12.94) donne $\|f_n - f\|_E \leq \varepsilon$ si $n \geq n(\varepsilon)$ et donc $f_n \to f$ dans E, quand $n \to \infty$. Ce qui prouve que E est complet.

---

2. Montrer que F est un sous espace vectoriel fermé de E.

corrigé

On note T et S les applications de E dans $\mathbb{R}$ définies par $T(f) = f(0)$ et $S(f) = \int_0^1 f(x)dx$. Il s'agit donc d'applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$. Elles sont également continues car $|T(f)| \leq \|f\|_E$ et $|S(f)| \leq \|f\|_E$ pour tout $f \in E$.

On en déduit que F est un s.e.v. fermé de E en remarquant que $F = \mathrm{Ker}T \cap \mathrm{Ker}S$.

---

3. Soit $f \in F$. Montrer que $\|g - f\|_E \geq 1/2$. [On pourra remarquer que $\int_0^1 |(g-f)(x)|dx \geq \int_0^1 (g-f)(x)dx = 1/2$.]

corrigé

Comme $(g - f)(x) \leq |(g-f)(x)|$ pour tout $x \in [0,1]$, on a bien

$$\int_0^1 (g-f)(x)dx \leq \int_0^1 |(g-f)(x)|dx.$$

On remarque ensuite que, puisque $f \in F$, on a $\int_0^1 (g-f)(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$. Et donc :

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 |(g-f)(x)|dx.$$

Puis, comme $\int_0^1 |(g-f)(x)|dx \leq \|g-f\|_E$, on en déduit que $\|g - f\|_E \geq 1/2$.

---

4. Montrer qu'il n'existe pas d'élément $f \in F$ t.q. $\|g - f\|_E = 1/2$.

corrigé

Dans le raisonnement de la question précédente, on remarque que les $\|g - f\|_E > 1/2$ sauf si $\int_0^1 |(g-f)(x)|dx = \|g-f\|_E$ et $\int_0^1 (g-f)(x)dx = \int_0^1 |(g-f)(x)|dx$.

Soit $f \in F$ t.q. $\|g-f\|_E = 1/2$. On a donc $\int_0^1 (g-f)(x)dx = \int_0^1 |(g-f)(x)|dx$ et $\int_0^1 |(g-f)(x)|dx = \|g-f\|_E$. On en déduit que $(g-f)(x) = |(g-f)(x)| = \|g-f\|_E = 1/2$ pour tout $x \in [0,1]$. En effet, si il existe, par exemple, $x_0 \in [0,1]$ t.q. $(g-f)(x_0) < |(g-f)(x_0)|$, on peut alors trouver (par continuité de $g - f$) un intervalle ouvert non vide sur lequel $(g - f) < |(g-f)|$ et on en déduit

$\int_0^1 (g-f)(x)dx < \int_0^1 |(g-f)(x)|dx$ (un raisonnement analogue donne $|(g-f)(x)| = \|g-f\|_E$ pour tout $x \in [0,1]$).

On a donc montré que $f(x) = g(x) - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [0,1]$ ce qui est en contradiction avec $f(0) = 0$.

---

5. Montrer que $d(g,F) = 1/2$. [On pourra, par exemple, montrer que $\|g - f_n\|_E \to 1/2$, avec f_n défini par $f_n(x) = -\beta_n x$, pour $x \in [0, 1/n]$, $f_n(x) = (x - 1/n) - \beta_n/n$, pour $x \in [1/n, 1]$, et β_n choisi pour que $f_n \in F$.]

corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et f_n définie par $f_n(x) = -\beta_n x$, pour $x \in [0, 1/n]$, $f_n(x) = (x - 1/n) - \beta_n/n$, pour $x \in [1/n, 1]$. En prenant $\beta_n = (n-1)^2/(2n-1)$ on a $\int_0^1 f_n(x)dx = 0$ et donc $f_n \in F$. On remarque ensuite que $\|f_n - g\|_E = 1/n - \beta_n/n \to 1/2$ quand $n \to \infty$. On en déduit que $d(g,F) = 1/2$.

Corrigé 116 (Lemme de Lax-Milgram)

Soit E est un espace de Hilbert réel et a une application bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$. On note $(\cdot/\cdot)$ le produit scalaire dans E et $\|\cdot\|$ la norme dans E. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ t.q. :

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|, \ \forall u, v \in E \text{ (continuité de } a),$$

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2, \ \forall u \in E \text{ (coercivité de } a).$$

Soit $T \in E'$. On va montrer, dans cet exercice, qu'il existe un et un seul $u \in E$ t.q. $T(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$ (ceci est le lemme de Lax-Milgram).

1. On suppose, dans cette question, que a est symétrique. On définit une application bilinéaire, notée $(\cdot/\cdot)_a$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par $(u/v)_a = a(u,v)$. Montrer que $(\cdot/\cdot)_a$ est un produit scalaire sur E et que la norme induite par ce produit scalaire est équivalente à la norme $\|\cdot\|$. En déduire qu'il existe un et un seul $u \in E$ t.q. $T(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$. [Utiliser le théorème de représentation de Riesz.]

corrigé

L'application $(\cdot/\cdot)_a : E \times E \to \mathbb{R}$ est symétrique, linéaire par rapport à son premier argument, et $(u/u)_a > 0$ pour $u \in E \setminus \{0\}$ (grâce à la coercivité de a). C'est donc un produit scalaire sur E.

La norme induite par ce produit scalaire est équivalente à la norme sur E, notée $\|\cdot\|$. En effet, les hypothèses de continuité et coercivité de a donnent

$$\sqrt{\alpha}\|u\| \leq \|u\|_a \leq \sqrt{C}\|u\|, \ \forall u \in E.$$

Comme T est dans E', c'est-à-dire linéaire et continu pour la norme $\|\cdot\|$, T est aussi linéaire et continu pour la norme $\|\cdot\|_a$. Or, E muni de la norme $\|\cdot\|_a$ est un espace de Hilbert car la norme $\|\cdot\|_a$ est induite par un produit scalaire et E est complet avec cette norme car il est complet avec la norme $\|\cdot\|$ qui est équivalente. On peut donc appliquer le théorème de représentation de

Riesz (théorème 6.8) avec E muni de la norme $\|\cdot\|_a$. Il donne qu'il existe un et seul $u \in E$ t.q. $T(v) = (u/v)_a$ pour tout $v \in E$, c'est-à-dire qu'il existe un et un seul $u \in E$ t.q. :

$$T(v) = a(u, v) \text{ pour tout } v \in E.$$

---

2. On ne suppose plus que a est symétrique.

   (a) Soit $u \in E$, Montrer que l'application $v \mapsto a(u, v)$ est un élément de E'. En déduire qu'il existe un et un seul élément de E, notée Au, t.q. $(Au/v) = a(u, v)$ pour tout $v \in E$.

   corrigé

   L'application $\psi_u \ : \ E \to \mathbb{R}$, définie par $\psi_u(v) = a(u, v)$ pour tout $v \in E$, est bien linéaire de E dans $\mathbb{R}$. Elle est aussi continue car $|\psi_u(v)| = |a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$ pour tout v dans E. On a donc $\psi_u \in E'$ (et $\|\psi_u\|_{E'} \leq C\|u\|$).

   Comme $\psi_u \in E'$, le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8) donne qu'il existe un élément de E, noté Au t.q. $(Au/v) = \psi_u(v)$ pour tout $v \in E$, c'est-à-dire :

   $$(Au/v) = a(u, v) \text{ pour tout } v \in E.$$

   On note, dans la suite A l'application qui à $u \in E$ associe $Au \in E$.

   (b) Montrer que A est linéaire continue de E dans E.

   corrigé

   Soit $u_1, u_2 \in E$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. On note $w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. Comme a est linéaire par rapport à son premier argument, on a :

   $$a(w, v) = \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v) \text{ pour tout } v \in E,$$

   et donc $(Aw/v) = \alpha_1(Au_1/v) + \alpha_2(Au_2/v)$ pour tout $v \in E$, ou encore

   $$(Aw - \alpha_1 Au_1 - \alpha_2 Au_2/v) = 0 \text{ pour tout } v \in E.$$

   On en déduit que $Aw = \alpha_1 Au_1 - \alpha_2 Au_2$ (il suffit de prendre $v = Aw - \alpha_1 Au_1 - \alpha_2 Au_2$ dans l'égalité précédente) et donc que A est une application linéaire de E dans E.

   Pour montrer la continuité de A, on remarque que (pour tout $u \in E$) $|(Au/v)| = |a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$ pour tout $v \in E$. D'où l'on déduit, en prenant $v = Au$, que $\|Au\| \leq C\|u\|$.

   L'application A est donc linéaire continue de E dans E.

   Il est important, pour la suite, de remarquer que la coercivité de a donne :

   $$\alpha\|u\|^2 \leq a(u, u) = (Au/u) \leq \|Au\|\|u\|, \text{ pour tout } u \in E,$$

   et donc :

   $$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|Au\|, \text{ pour tout } u \in E. \tag{12.95}$$

(c) Montrer que $\mathrm{Im}(A)$ est fermé

corrigé

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Im}(A)$ et $f \in E$ t.q. $f_n \to f$ dans E quand $n \to \infty$. On veut montrer que $f \in \mathrm{Im}(A)$.

Comme $f_n \in \mathrm{Im}(A)$, il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in E$ t.q. $Au_n = f_n$. L'inégalité (12.95) donne alors, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n - u_m\| \leq \frac{1}{\alpha}\|f_n - f_m\|.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy (car convergente), on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc convergente (car E est complet).

Il existe donc $u \in E$ t.q. $u_n \to u$ (dans E) quand $n \to \infty$. D'où l'on déduit, comme A est continue, que $f_n = Au_n \to Au$ (dans E) quand $n \to \infty$. On a donc $f = Au$, ce qui prouve que $f \in \mathrm{Im}(A)$ et donc que $\mathrm{Im}(A)$ est fermé.

(d) Montrer que $(\mathrm{Im}(A))^\perp = \{0\}$.

corrigé

Soit $u \in (\mathrm{Im}(A))^\perp$. On a donc $(Av/u) = 0$ pour tout $v \in E$. On prend $v = u$, on obtient, grâce à la coercivité de a :

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u,u) = (Au/u) = 0,$$

et donc $u = 0$. Ceci prouve bien que $(\mathrm{Im}(A))^\perp = \{0\}$.

(e) Montrer que A est bijective et en déduire qu'il existe un et un seul $u \in E$ t.q. $T(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$.

corrigé

L'inégalité (12.95) donne l'injectivité de A. Pour montrer la surjectivité de A, on remarque que $\mathrm{Im}(A)$ est un s.e.v. fermé de E, on a donc $E = \mathrm{Im}(A) \oplus (\mathrm{Im}(A))^\perp$ (cf. théorème 6.7). Comme $(\mathrm{Im}(A))^\perp = \{0\}$, on a donc $E = \mathrm{Im}(A)$, c'est-à-dire A surjective.

On a bien bien montré que A est bijective.

Le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8) donne l'existence d'un et un seul $z \in E$ t.q.

$$T(v) = (z/v),\ \forall v \in E.$$

D'autre part, la définition de A donne :

$$a(u,v) = (Au/v),\ \forall v \in E.$$

Pour $u \in E$, on a donc :

$$(T(v) = a(u,v),\ \forall v \in E) \Leftrightarrow (z = Au).$$

La bijectivité de A donne l'existence d'un et d'un seul $u \in E$ t.q. $Au = z$. On a donc un et un seul $u \in E$ t.q. $T(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$.

Corrigé 117 (Exemple de projection dans L^2)
On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$, par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(]0,1[,B(]0,1[),\lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(]0,1[,B(]0,1[),\lambda)$.

Soit $g \in L^2$.

1. Soit $v \in L^2$ et $\phi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$ (on rappelle que $\phi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$ signifie que ϕ est une application de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, et qu'il existe $K \subset]0,1[$, K compact, t.q. $\phi(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1[\setminus K)$. Montrer que $vg\phi' \in L^1$.

corrigé

Comme d'habitude, on va confondre un élément de L^p avec l'un de ses représentants.

Comme $g, v \in L^2$, on a $vg \in L^1$ (d'après le lemme 6.2). Puis, comme $\phi' \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$, on a $\phi' \in L^\infty$ et donc (par la proposition 6.9) $vg\phi' \in L^1$.

On pose $\mathcal{C} = \{v \in L^2;\ v \leq 1$ p.p., $\int vg\phi' d\lambda \leq \int \phi d\lambda$, pour tout $\phi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$, $\phi \geq 0\}$. (On rappelle que $\phi \geq 0$ signifie $\phi(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0,1[$.)

2. Montrer que $\mathcal{C}$ est un convexe fermé non vide de L^2.

corrigé

- $\mathcal{C} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathcal{C}$.
- On montre la convexité de $\mathcal{C}$. Soient $v, w \in \mathcal{C}$ et $t \in [0,1]$. On a $tv + (1-t)w \in L^2$ (car L^2 est un e.v.). Du fait que $v \leq 1$ p.p. et $w \leq 1$ p.p., on déduit immédiatement (comme $t \geq 0$ et $(1-t) \geq 0$) que $tv + (1-t)w \leq t + (1-t) = 1$ p.p.. Enfin, soit $\phi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$, $\phi \geq 0$. Comme $t \geq 0$ et $(1-t) \geq 0$, on remarque que

$$t\int vg\phi' d\lambda \leq t\int \phi d\lambda,$$
$$(1-t)\int wg\phi' d\lambda \leq (1-t)\int \phi d\lambda.$$

  Ce qui donne, en additionnant,

$$\int (tv + (1-t)w)g\phi' d\lambda \leq \int \phi d\lambda.$$

  On en déduit que $(tv + (1-t)w) \in \mathcal{C}$ et donc que $\mathcal{C}$ est convexe.
- On montre enfin que $\mathcal{C}$ est fermée. Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ et $v \in L^2$ t.q. $v_n \to v$ dans L^2 quand $n \to \infty$. On veut montrer que $v \in \mathcal{C}$.

  On remaque tout d'abord que, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (inégalité (6.14)), on a :

$$\int v_n w d\lambda \to \int vw d\lambda, \text{ quand } n \to \infty, \forall w \in L^2. \tag{12.96}$$

  On prend $w = v1_{v>1} \in L^2$ dans (12.96). Comme $v_n w \leq w$ p.p., on a $\int v_n w d\lambda \leq \int w d\lambda$. On déduit alors de (12.96) que $\int vw d\lambda \leq \int w d\lambda$ et donc que $\int (v-1)v1_{v>1} d\lambda \leq 0$. Comme $v(v-1)1_{v>1} \geq 0$ p.p., on a donc nécessairement $v(v-1)1_{v>1} = 0$ p.p. et donc $\lambda(\{v > 1\}) = 0$, c'est-à-dire $v \leq 1$ p.p..

Soit maintenant $\phi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$, $\phi \geq 0$. Par les inégalités de Cauchy-Schwarz et Hölder, on a :

$$\int v_n g\phi' d\lambda \to \int vg\phi' d\lambda, \text{ quand } n \to \infty.$$

En effet, $|\int v_n g\phi' d\lambda - \int vg\phi' d\lambda| \leq \|\phi'\|_\infty \int |v_n - v||g|d\lambda \leq \|\phi'\|_\infty \|v_n - v\|_2 \|g\|_2 \to 0$, quand $n \to \infty$.

Du fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int v_n g\phi' d\lambda \leq \int \phi d\lambda$, on obtient donc, passant à limite quand $n \to \infty$, que $\int vg\phi' d\lambda \leq \int \phi d\lambda$. Ce qui montre bien que $v \in \mathcal{C}$.

On a bien montré que $\mathcal{C}$ est fermée.

---

3. On désigne par $\mathbf{1}$ la fonction constante et égale à 1 sur $]0,1[$. Soit $u \in \mathcal{C}$. Montrer que :
$(\|u - \mathbf{1}\|_2 \leq \|v - \mathbf{1}\|_2$ pour tout $v \in \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\int(\mathbf{1} - u)(u - v)d\lambda \geq 0$ pour tout $v \in \mathcal{C})$.

corrigé

On remarque d'abord que

$$(\|u - \mathbf{1}\|_2 \leq \|v - \mathbf{1}\|_2 \text{ pour tout } v \in \mathcal{C}) \Leftrightarrow u = P_{\mathcal{C}}\mathbf{1}.$$

On utilise maintenant la première caractérisation de la projection (proposition 6.15), elle donne que

$$u = P_{\mathcal{C}}\mathbf{1} \Leftrightarrow ((\mathbf{1} - u/u - v)_2 \geq 0 \text{ pour tout } v \in \mathcal{C}),$$

et donc que

$$u = P_{\mathcal{C}}\mathbf{1} \Leftrightarrow (\int(\mathbf{1} - u)(u - v)d\lambda \geq 0 \text{ pour tout } v \in \mathcal{C}). \tag{12.97}$$

---

4. Soit $u \in \mathcal{C}$ t.q. $\|u - \mathbf{1}\|_2 \leq \|v - \mathbf{1}\|_2$ pour tout $v \in \mathcal{C}$. On suppose que $u, g \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que $(ug)'(x) \geq -1$ pour tout $x \in]0,1[$.

   corrigé

   On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $c \in]0,1[$ t.q. $(ug)'(c) < -1$. Par continuité de $(ug)'$ en c, il existe donc a, b t.q. $0 < a < c < b < 1$ et $(ug)'(x) < -1$ pour tout $x \in]a,b[$.

   On peut construire $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$ t.q. $\varphi \geq 0$, $\varphi(c) > 0$ et $\varphi = 0$ sur $]a,b[^c$. une telle fonction φ est obtenue, par exemple, en prenant :

$$\varphi(x) = \varphi_0(\frac{2y - (a+b)}{b-a}),\ x \in]0,1[, \tag{12.98}$$

   avec :

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x) = \exp \tfrac{1}{x^2-1},\ x \in]-1,1[, \\ &\varphi_0(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}\setminus]-1,1[. \end{aligned} \tag{12.99}$$

   Comme $u \in \mathcal{C}$, on a, d'après la définition de $\mathcal{C}$ (car φ est un choix possible pour ϕ) :

$$\int_a^b u(x)g(x)\varphi'(x)dx = \int ug\varphi' d\lambda \leq \int \phi d\lambda = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Comme ug est de classe C^1 sur $[a,b]$, on peut intégrer par parties sur $[a,b]$ pour obtenir (noter que $\varphi(a)=\varphi(b)=0$) $\int_a^b -(ug)'(x)\varphi(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$, ou encore :

$$\int_a^b ((ug)'(x)+1)\varphi(x)dx \ge 0.$$

Ce qui impossible car $((ug)'+1)\varphi$ est une fonction continue négative, non identiquement nulle sur $[a,b]$ (car non nulle au point c).

(b) Soit $x \in]0,1[$ t.q. $u(x)<1$. Montrer que $(ug)'(x)=-1$.

corrigé

On raisonne encore par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $c \in]0,1[$ t.q. $u(c)<1$ et $(ug)'(c) \ne -1$. Comme on sait déjà que $(ug)'(x) \ge -1$ pour tout $x \in]0,1[$, on a donc $(ug)'(c) > -1$.

Par continuité de u et $(ug)'$ en c, il existe donc a,b, avec $0<a<c<b<1$, et $\delta>0$ t.q. $u(x) \le 1-\delta$ et $(ug)'(x) > -1+\delta$ pour tout $x \in]a,b[$.

On utilise la même fonction φ qu'à la question précédente, c'est-à-dire donnée, par exemple, par (12.98) et (12.99). La propriété importante est que $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$ soit t.q. $\varphi \ge 0$, $\varphi(c)>0$ et $\varphi=0$ sur $]a,b[^c$.

On va montrer que pour $\varepsilon>0$ assez petit, on a $u+\varepsilon\varphi \in \mathcal{C}$.

On remarque d'abord que $u+\varepsilon\varphi \in L^2$ (pour tout $\varepsilon>0$). Puis, en prenant $0<\varepsilon\le\varepsilon_1=\frac{\delta}{\|\varphi\|_\infty}$, on a $u+\varepsilon\varphi \le 1$ p.p.. Enfin, soit $\phi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$, $\phi \ge 0\}$. On a, en utilisant une intégration par parties sur un intervalle compact de $]0,1[$ contenant le support de ϕ :

$$\int ((u+\varepsilon\varphi)g)\phi' d\lambda = -\int (ug)'\phi d\lambda - \varepsilon \int (\varphi g)'\phi d\lambda.$$

En utilisant le fait que $(ug)' \ge -1$ (partout) et $(ug)' > -1+\delta$ sur $]a,b[$, on en déduit

$$\int ((u+\varepsilon\varphi)g)\phi' d\lambda \le \int \phi d\lambda - \delta \int_a^b \phi(x)dx - \varepsilon \int_a^b (\varphi g)'\phi d\lambda \le \int \phi d\lambda,$$

si $0<\varepsilon\le\frac{\delta}{M}$, avec $M=\max_{x\in[a,b]}|(\varphi g)'(x)|<\infty$ car $(\varphi g)'$ est continue sur $[a,b]$.

En prenant $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)>0$, on obtient donc $u+\varepsilon\varphi \in \mathcal{C}$. Comme $u=P_{\mathcal{C}}\mathbf{1}$, on peut maintenant prendre $v=u+\varepsilon\varphi$ dans la caractérisation de $P_{\mathcal{C}}\mathbf{1}$, on obtient, comme $\varepsilon>0$:

$$\int_a^b (1-u(x))\varphi(x)dx = \int (1-u)\varphi d\lambda \le 0.$$

Ce qui est impossible car $(1-u)\varphi$ est une fonction continue positive, non identiquement nulle sur $]a,b[$ (car non nulle en c).

(c) Montrer que u est solution du problème suivant:
$(ug)'(x) \ge -1$, pour tout $x \in]0,1[$,
$u(x) \le 1$, pour tout $x \in]0,1[$,

$(1 + (ug)'(x))(u(x) - 1) = 0$, pour tout $x \in]0, 1[$.

corrigé

Cette question est immédiate. On a déjà vu que $(ug)'(x) \geq -1$, pour tout $x \in]0, 1[$. Comme $u \in \mathcal{C}$, on a $u \leq 1$ p.p.. Mais, comme u est continue sur $]0, 1[$, l'ensemble $\{u > 1\}$ est un ouvert, cet ensemble est donc vide (car un ouvert de mesure de Lebesgue nulle est toujours vide). On a donc $u \leq 1$ partout. Enfin, le fait que $(1 + (ug)'(x))(u(x) - 1) = 0$, pour tout $x \in]0, 1[$, découle de la question précédente qui montre justement que $(1 + (ug)'(x)) = 0$ si $u(x) < 1$.

Corrigé 118 (Approximation dans L^2)

On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$, par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$. On note $dt = d\lambda(t)$.
Pour $f \in L^2$ et $k \in \mathbb{N}^\star$, on définit $T_k f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$T_k f(x) = k \int_{\frac{n(x)}{k}}^{\frac{n(x)+1}{k}} f(t)dt, \tag{12.100}$$

où $n(x)$ est l'entier de $\mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{n(x)}{k} \leq x < \dfrac{n(x)+1}{k}$ (l'entier n dépend donc de x).

1. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$ et $f \in L^2$. Montrer que $T_k f \in L^2$ (plus précisément, $T_k f \in \mathcal{L}^2$ et on confond alors, comme d'habitude, $T_k f$ avec $\{g \in \mathcal{L}^2,\ g = T_k f \text{ p.p.}\}$) et que $\|T_k f\|_2 \leq \|f\|_2$, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

corrigé

Comme $f\mathbf{1}_{]\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}[} \in L^1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $T_k(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose $c_n = k \int_{\frac{n}{k}}^{\frac{n+1}{k}} f(t)dt$, pour $n \in \mathbb{Z}$, de sorte que $T_k(x) = c_n$ pour tout $x \in [\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}[$.

$T_k f$ est mesurable car $(T_k f)^{-1}(A) = \cup_{n \in \mathbb{Z}, c_n \in A} [\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}[\in B(\mathbb{R})$, pour tout $A \subset \mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in [\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}[$, on a (en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz) $(T_k(x))^2 = c_n^2 \leq k \int_{\frac{n}{k}}^{\frac{n+1}{k}} f^2(t)dt$. On déduit (on utilise ici le premier corollaire du théorème de convergence monotone, corollaire 4.1) :

$$\int (T_k f)^2 d\lambda = \sum_{n \in Z} \frac{1}{k} c_n^2 \leq \sum_{n \in Z} \int_{\frac{n}{k}}^{\frac{n+1}{k}} f^2(t)dt = \int f^2 d\lambda.$$

On a donc $T_k f \in L^2$ et $\|T_k f\|_2 \leq \|f\|_2$.

2. Soit $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (i.e. f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact). Montrer que $T_k f \to f$ dans L^2 quand $k \to \infty$.

corrigé

Soit $a > 0$ t.q. $f = 0$ sur $[-a, a]^c$. Comme f est uniformément continue, on a $T_k f \to f$ uniformément (sur $\mathbb{R}$) quand $k \to \infty$. En remarquant que $T_k f = 0$ sur $[-a-1, a+1]^c$pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on en déduit

$$\|T_k f - f\|_2^2 = \int (T_k f - f)^2 d\lambda \leq 2(a+1)\|T_k f - f\|_\infty^2 \to 0, \text{ quand } k \to \infty.$$

---

3. Soit $f \in L^2$. Montrer que $T_k f \to f$ dans L^2 quand $k \to \infty$.

corrigé

Soit $\varepsilon > 0$. Par densité de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans L^2, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_2 \leq \varepsilon$. Comme T_k est un opérateur linéaire, on a, en utilisant la question 1 :

$$\|T_k f - f\|_2 \leq \|T_k f - T_k\varphi\|_2 + \|T_k\varphi - \varphi\|_2 + \|\varphi - f\|_2 \leq 2\|\varphi - f\|_2 + \|T_k\varphi - \varphi\|_2. \quad (12.101)$$

La question 2 donne l'existence de $k_0 \in \mathbb{N}$ t.q. le dernier terme de (12.101) soit inférieur à ε pour $k \geq k_0$. On a donc $\|T_k f - f\|_2 \leq 3\varepsilon$ pour $k \geq k_0$, ce qui prouve que $T_k f \to f$, dans L^2, quand $k \to \infty$.

Corrigé 119 (Projections orthogonales)
On pose $H = L^2_{\mathbb{R}}(]-1,+1[, \mathcal{B}(]-1,+1[), \lambda)$. (On rappelle que $\mathcal{B}(]-1,+1[)$ est la tribu borélienne de $]-1,1[$ et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(]-1,+1[)$.) Soit $F = \{f \in H \text{ t.q. } \int_{]-1,+1[} f\, d\lambda = 0\}$. Soit $G = \{f \in H \text{ t.q. } \int_{]-1,0[} f\, d\lambda = \int_{]0,1[} f\, d\lambda\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels fermés de H. Déterminer les sous-espaces $F^\perp$, $G^\perp$ et $F \cap G$.

corrigé

Pour $f \in H$, on pose $T(f) = \int_{]-1,+1[} f\, d\lambda$ et $S(f) = \int_{]-1,0[} f\, d\lambda - \int_{]0,1[} f\, d\lambda$.

L'inégalité de Cauchy Scharwz entre f et $1_{]-1,+1[}$, pour T, et f et $(1_{]-1,0[} - 1_{]0,1[})$, pour S, montre que $T(f)$ et $S(f)$ sont bien définis pour tout $f \in H$ et que, pour tout $f \in H$:

$$|T(f)| \leq \sqrt{2}\|f\|_2, \ |S(f)| \leq \sqrt{2}\|f\|_2.$$

On en déduit que T et S sont des éléments de H' et donc que $F = \mathrm{Ker}T$ et $G = \mathrm{Ker}S$ sont des s.e.v. fermés de H.

De plus, comme $T \neq 0$ et $S \neq 0$, on a $\dim(F^\perp) = \dim(G^\perp) = 1$. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre $v \in F^\perp$, $v \neq 0$ (un tel v existe car $T \neq 0$ et $H = F \oplus F^\perp$). Pour tout $w \in F^\perp$, on a alors $w = w - \frac{T(w)}{T(v)}v + \frac{T(w)}{T(v)}v$. On en déduit que $(w - \frac{T(w)}{T(v)}v) \in F \cap F^\perp = \{0\}$ et donc que $w \in \mathbb{R}v = \mathrm{vect}\{v\}$. Ce qui donne $F^\perp = \mathbb{R}v$ et donc $\dim(F^\perp) = 1$. Un raisonnement semblable donne $\dim(G^\perp) = 1$.

Soit f l'élément de H t.q. $f = 1$ p.p.. On a clairement $f \in F^\perp$ (car $(f/h)_2 = T(h) = 0$ pour tout $h \in F$) et donc, comme $\dim F^\perp = 1$, $F^\perp = \mathbb{R}f$.

Soit g l'élément de H t.q. $g = 1$ p.p. sur $]-1,0[$ et $g = -1$ sur $]0,1[$. On a clairement $g \in G^\perp$ (car $(g/h)_2 = S(h) = 0$ pour tout $h \in G$) et donc, comme $\dim G^\perp = 1$, $G^\perp = \mathbb{R}g$.

Il reste à déterminer $F \cap G$. Soit $h \in F \cap G$. On a donc $\int_{]-1,0[} h \, d\lambda = \int_{]0,1[} h \, d\lambda$, car $h \in G$, et donc, comme $h \in F$, $0 = \int_{]-1,+1[} f \, d\lambda = 2 \int_{]-1,0[} h \, d\lambda = 2 \int_{]0,1[} h \, d\lambda$. Ce qui donne $\int_{]-1,0[} h \, d\lambda = \int_{]0,1[} h \, d\lambda = 0$.

Réciproquement, si $h \in H$ est t.q. $\int_{]-1,0[} h \, d\lambda = \int_{]0,1[} h \, d\lambda = 0$, on a bien $S(h) = T(h) = 0$ et donc $h \in F \cap G$. On a donc :

$$F \cap G = \{h \in H; \int_{]-1,0[} h \, d\lambda = \int_{]0,1[} h \, d\lambda = 0\}.$$

---

2. Calculer, pour $g \in H$, les projections orthogonales $P_F(g)$ et $P_G(g)$ de g sur F et G.

corrigé

Soit $h \in H$. Comme $h - P_F h \in F^\perp$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $h - P_F h = \alpha$ p.p.. Comme $P_F h \in F$, on a $T(P_F h) = 0$. On en déduit que $2\alpha = \int_{-1}^{1} h(t)dt$ et donc

$$P_F h = h - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} h(t)dt \text{ p.p..}$$

Comme $h - P_G h \in G^\perp$, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ t.q. $h - P_G h = \beta$ p.p. sur $]-1,0[$ et $h - P_G h = -\beta$ p.p. sur $]0,1[$. Comme $P_G h \in G$, on a $S(P_G h) = 0$. On en déduit que $2\beta = \int_{-1}^{0} h(t)dt - \int_{0}^{1} h(t)dt$ et donc

$$\begin{array}{l} P_G h = h - \frac{1}{2}(\int_{-1}^{0} h(t)dt - \int_{0}^{1} h(t)dt) \text{ p.p. sur }]-1,0[, \\ P_G h = h + \frac{1}{2}(\int_{-1}^{0} h(t)dt - \int_{0}^{1} h(t)dt) \text{ p.p. sur }]1,0[. \end{array}$$

Corrigé 120 (Projection orthogonale dans L^2)
On pose $L^2 = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (muni de sa structure hilbertienne habituelle) et, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ donnés, $\alpha < \beta$, $\mathcal{C} = \{f \in L^2; \alpha \leq f \leq \beta \text{ p.p.}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est vide si et seulement si $\alpha\beta > 0$.

corrigé

- Si $\alpha\beta > 0$ (c'est-à-dire α et β non nuls et de même signe), on a alors pour tout $f \in \mathcal{C}$, $f \geq \gamma = \min(|\alpha|, |\beta|) > 0$ p.p.. Donc, $\int f^2 d\lambda \geq \gamma^2 \lambda(\mathbb{R}) = \infty$, en contradiction avec $f \in L^2$. On a donc $\mathcal{C} = \emptyset$.
- On suppose maintenant $\alpha\beta \leq 0$. On a alors $\alpha \leq 0 \leq \beta$ et donc $0 \in \mathcal{C}$. Ce qui prouve que $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

---

2. On suppose maintenant que $\alpha\beta \leq 0$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une partie convexe fermée non vide de L^2. Soit $f \in L^2$, montrer que $P_{\mathcal{C}} f(x) = \max\{\min\{f(x), \beta\}, \alpha\}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. ($P_{\mathcal{C}} f$ désigne la projection de f sur $\mathcal{C}$.)

corrigé

(a) On sait déjà que $\mathcal{C} \neq \emptyset$. On montre maintenant que $\mathcal{C}$ est convexe. Soient $f, g \in \mathcal{C}$ et $t \in [0,1]$. On a $tf + (1-t)g \in L^2$ car L^2 est un e.v.. Puis, du fait que $\alpha \leq f \leq \beta$ p.p. et $\alpha \leq g \leq \beta$ p.p., on déduit immédiatement que $\alpha \leq tf + (1-t)g \leq \beta$ p.p.. Donc, $tf + (1-t)g \in \mathcal{C}$.

Pour montrer que $\mathcal{C}$ est fermée, soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ et $f \in L^2$ t.q. $f_n \to f$ dans L^2, quand $n \to \infty$. On peut montrer que $\alpha \leq f \leq \beta$ p.p. comme dans le corrigé 117 (question 2) ou (pour changer de méthode...) de la manière suivante :

D'après le théorème 6.2 (réciproque partielle de la convergence dominée), il existe une sous suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant p.p. vers f, c'est-à-dire il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$ et $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p. quand $n \to \infty$. Comme $\alpha \leq f_{\varphi(n)} \leq \beta$ p.p., on en déduit $\alpha \leq f \leq \beta$ p.p., et donc que $f \in \mathcal{C}$. ce qui prouve que $\mathcal{C}$ est fermée.

(b) On montre maintenant que $P_{\mathcal{C}} f = \max\{\min\{f, \beta\}, \alpha\}$.

On confond comme d'habitude f avec l'un de ses représentants, et on définit g par

$$g = \max\{\min\{f, \beta\}, \alpha\} = \alpha 1_{\{f<\alpha\}} + f 1_{\{\alpha\leq f\leq\beta\}} + \beta 1_{\{f>\beta\}}.$$

g est donc une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Puis, comme $|g| \leq |f|$ p.p., on a bien $g \in \mathcal{L}^2$ (et donc $g \in L^2$ avec la confusion habituelle). Enfin, il est immédiat que $\alpha \leq g \leq \beta$ p.p.. Donc, $g \in \mathcal{C}$.

Pour montrer que $g = P_{\mathcal{C}} f$, on utilise la première caractérisation de la projection (proposition 6.15). Soit $h \in \mathcal{C}$, on a :

$$(f-g/g-h)_2 = \int (f-g)(g-h)d\lambda = \int (f-\alpha)(\alpha-h)1_{\{f<\alpha\}}d\lambda + \int (f-\beta)(\beta-h)1_{\{f>\beta\}}d\lambda \geq 0,$$

car $\alpha \leq h \leq \beta$ p.p.. On en déduit que $g = P_{\mathcal{C}} f$.

Corrigé 121

Soit (E, T, m) un espace mesuré et $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. On suppose ici qu' il existe A et $B \in T$ t.q. $A \cap B = \emptyset$, et $0 < m(B) < +\infty$, $0 < m(A) < +\infty$. Montrer que L^p est un Hilbert si et seulement si $p = 2$. [On pourra utiliser l'identité du parallèlogramme avec des fonctions de L^p bien choisies.]

corrigé

On sait déjà que L^2 est un espace de Hilbert.

On suppose maintenant que $p \neq 2$ (et $p \in [1, \infty]$) et on va montrer que L^p n'est pas un espace de Hilbert. Pour cela , On pose $f = 1_A$ et $g = 1_B$. On a bien $f, g \in L^p$. On va montrer que l'identité du parallèlogramme n'est pas vérifiée pour ces deux fonctions. On distingue les cas $p < \infty$ et $p = \infty$.

Premier cas : $p < \infty$. On pose $a = m(A)$ et $b = m(B)$ (noter que $a, b \in]0, \infty[$). On a :

$$\frac{1}{2}(\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2) = (a+b)^{\frac{2}{p}},\ \|f\|_p^2 + \|g\|_p^2 = a^{\frac{2}{p}} + b^{\frac{2}{p}}.$$

On en déduit $\frac{1}{2}(\|f+g\|_p^2+\|f-g\|_p^2)-\|f\|_p^2+\|g\|_p^2=(a+b)^\alpha(1-h_a(t))$ avec $\alpha=\frac{2}{p}$ et $h_\alpha(t)=t^\alpha+(1-t)^\alpha$, $t=\frac{a}{a+b}\in]0,1[$.

Un étude de la fonction h_α montre que :

- Si $\alpha\in]0,1[$, on a $h_\alpha(t)>1$ pour tout $t\in]0,1[$,
- Si $\alpha\in]1,\infty[$, on a $h_\alpha(t)<1$ pour tout $t\in]0,1[$.

L'identité du parallèlogramme n'est donc pas vérifiée pour ces fonctions f et g, ce qui prouve que la norme de L^p n'est pas induite pas un produit scalaire.

Deuxième cas : $p=\infty$. Dans ce cas, on a :

$$\frac{1}{2}(\|f+g\|_p^2+\|f-g\|_p^2)=1,\ \|f\|_p^2+\|g\|_p^2=2.$$

On en déduit $\frac{1}{2}(\|f+g\|_p^2+\|f-g\|_p^2)-\|f\|_p^2+\|g\|_p^2=-1\neq 0$. L'identité du parallèlogramme n'est donc pas vérifiée pour ces fonctions f et g, ce qui prouve que la norme de L^p n'est pas induite pas un produit scalaire.

---

2. Montrer que pour $m=\delta_0$ (mesure de Dirac en 0), $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$ est un Hilbert pour tout $p\in[1,+\infty]$.

corrigé

Soit $f\in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$. On a $\|f\|_p=|f(0)|$ (noter que tous les représentants de f ont la même valeur en 0 car $m(\{0\})>0$).

Il est facile de voir que la norme de L^p est induite pas un produit scalaire, notée $(\cdot/\cdot)$, ce produit scalaire est défini par :

$$(f/g)=f(0)g(0),\ \text{pour } f,g\in L^p.$$

L'espace L^p est donc un espace de Hilbert.

Corrigé 122 (Espace l^2)
On note m la mesure du dénombrement sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, c'est-à-dire $m(A)=\text{card}(A)$ si A est fini et $m(A)=\infty$ si A n'est pas fini.
On note $l^2=L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),m)$.

1. Montrer que chaque élément de l^2 ne contient qu'un seul élément de l'espace $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),m)$.

corrigé

(Noter d'abord que m est bien une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.)

Soient $f,g\in\mathcal{L}^2=\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),m)$ t.q. $f=g$ p.p.. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $f(n)=g(n)$ car $m(\{n\})=1>0$. On en déduit que $f=g$. Ceci montre bien que chaque élément de l^2 ne contient qu'un seul élément de l'espace $\mathcal{L}^2$.

---

2. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l^2 donne :

$$(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n)^2 \le \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2$$

pour toutes suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ t.q. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2 < \infty$.

corrigé

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ t.q. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2 < \infty$ (on peut aussi prendre $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}_+$).

On définit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ par $f(n) = a_n$ et $g(n) = b_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions f et g sont mesurables (toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable car la tribu choisie sur $\mathbb{N}$ est $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) et on a bien $f, g \in \mathcal{L}^2$ car :

$$\int f^2 dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty \text{ et } \int g^2 dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2 < \infty. \tag{12.102}$$

En effet, pour montrer (12.102), il suffit, par exemple, de remarquer que $f^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 1_{\{n\}}$ (et $g^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n^2 1_{\{n\}}$) et d'utiliser le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.1).

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors que $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n b_n| < \infty,$$

et que $(f/g)_2 \le \|f\|_2 \|g\|_2$. On en déduit :

$$(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n)^2 \le \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2.$$

---

3. Soit $\varphi : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$, bijective. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \infty$. [On pourra commencer par montrer que $\sum_{p=1}^n \frac{1}{\varphi(p)} \le \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.]

corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On peut ordonner l'ensemble des $\varphi(p)$, $p \in \{1, \ldots, n\}$, selon l'ordre croissant, c'est-à-dire : $\{\varphi(p),\ p \in \{1, \ldots, n\}\} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ avec $p_i < p_{i+1}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ (on utilise ici l'injectivité de φ). Comme φ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^\star$, on a $p_1 \ge 1$. On en déduit (par récurrence finie sur i) que $p_i \ge i$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, et donc :

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{\varphi(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \le \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}. \tag{12.103}$$

On utilise maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz de la question précédente avec $a_p = \frac{\sqrt{\varphi(p)}}{p}$, $b_p = \frac{1}{\sqrt{\varphi(p)}}$ pour $p = 1, \ldots, n$ et $a_p = b_p = 0$ pour $p > n$, on obtient :

$$(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p})^2 = (\sum_{p=1}^n a_p b_p)^2 \le \sum_{p=1}^n \frac{\varphi(p)}{p^2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{\varphi(p)}.$$

En utilisant (12.103), on en déduit :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \le \sum_{p=1}^{n} \frac{\varphi(p)}{p^2},$$

et donc $\lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{p=1}^{n} \frac{\varphi(p)}{p^2} \ge \lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = \infty$.

(Noter que cette démonstration reste vraie lorsque φ est seulement injective.)

Corrigé 123 (Isométrie d'un espace de Hilbert avec l^2)
Soit H un espace de Hilbert réel, de dimension infinie et séparable. Soit $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H (une telle base existe, cf. proposition 6.17).

Pour $u \in H$, on définit $a_u \in l^2$ (l^2 est défini à l'exercice 6.32) par $a_u(n) = (u/e_n)_H$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. (On montrera tout d'abord que a_u est bien un élément de l^2.)

Montrer que l'application $A\ : u \mapsto a_u$ (est linéaire et) est une isométrie de H dans l^2, c'est-à-dire que $\|a_u\|_{l^2} = \|u\|_H$ pour tout $u \in H$.

Montrer que A est bijective (il faut donc montrer que, pour tout $a \in l^2$, il existe $u \in H$ t.q. $a = a_u$).

corrigé

La fonction a_u est mesurable de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable car la tribu choisie sur $\mathbb{N}$ est $\mathcal{P}(\mathbb{N})$). En notant m la mesure du dénombrement sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (voir l'exercice 6.32, corrigé 122), on a $\int a_u^2 dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u/e_n)_H^2$. L'égalité de Bessel (voir la proposition 6.18) donne alors que $a_u \in l^2$ et $\|a_u\|_{l^2} = \|u\|_H$.

Il est immédiat de voir que l'application $A\ : u \mapsto a_u$ est linéaire, l'application A est donc une isométrie de H dans l^2 (ceci donne, en particulier, que A est injective). Il reste à montrer que A est surjective.

Soit $a \in l^2$. On note $a_n = a(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, de sorte que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = \sum_{p=1}^{n} a_p e_p$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H car, pour $m > n$, $\|f_m - f_n\|_H^2 = \sum_{p=n+1}^{m} a_p^2 \le \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p^2 \to 0$ quand $n \to \infty$. Il existe donc $u \in H$ t.q. $f_n \to u$, dans H, quand $n \to \infty$. Le troisième item de la proposition 6.18 page 156 donne alors que $a = a_u$. Ceci montre bien que A est surjective.

12.6.3 Théorème de Radon-Nikodym et Dualité dans les espaces L^p

Corrigé 124 (Fonctions absolument continues)
Soit $-\infty < a < b < +\infty$. On admet les 2 résultats suivant :

- Toute fonction monotone définie sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est dérivable en presque tout point de $]a, b[$.
- Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$. Pour $x \in [a, b]$, on pose $F(x) = \int f 1_{]a,x[} d\lambda$. La fonction F est alors dérivable en presque tout point de $]a, b[$ et on a $F' = f$ p.p..

1. (Fonctions monotones.) Soit f une fonction monotone croissante définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que $f' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$ et que

$$\int f' 1_{]a,b[} d\lambda \leq f(b) - f(a).$$

[On pourra poser $f(x) = f(b)$ pour $x > b$, considérer $f_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$ et remarquer que $f_n \to f'$ p.p. sur $]a,b[$.]

corrigé

On remarque tout d'abord que f est mesurable (de $]a,b[$, muni de la tribu borélienne, dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne) car l'image réciproque par f d'un intervalle de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $]a,b[$). Comme $|f|$ est bornée (par $\max(|f(b)|,|f(a)|)$), on a aussi $f \in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$.

On pose $f(x) = f(b)$ pour $x > b$ (de sorte que f est maintenant monotone croissante, et donc mesurable, de $]a,\infty[$ dans $\mathbb{R}$), et on définit pour $n \in \mathbb{N}^\star$ la fonction f_n par $f_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$ pour $x \in]a,b[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est donc mesurable (de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$) positive et (en notant que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$ et $f(\cdot + \frac{1}{n}) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$) on a :

$$\int_{]a,b[} f_n d\lambda = f(b) - n\int_{]a,a+\frac{1}{n}[} f d\lambda \leq f(b) - f(a) \tag{12.104}$$

Comme f est dérivable p.p., on a $f_n \to f'$ p.p. sur $]a,b[$, c'est-à-dire qu'il existe $A \in \mathcal{B}(]a,b[)$ t.q. $\lambda(]a,b[\setminus A) = 0$ et $f_n(x) \to f'(x)$ pour tout $x \in A$. On pose $g(x) = f'(x)$ si $x \in A$ et $g(x) = 0$ sinon. Le lemme de Fatou appliqué à la suite f_n donne (par (12.104)) que g est mesurable positive (de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}_+$) et

$$\int_{]a,b[} g d\lambda \leq f(b) - f(a).$$

On a donc $f' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$ (au sens où l'on confond f' et la classe de g car $f' = g$ p.p.) et

$$\int_{]a,b[} f' d\lambda \leq f(b) - f(a).$$

(b) Donner un exemple pour lequel l'inégalité de la question précédente est stricte. (Les courageux pourront chercher un exemple pour lequel f est continue...)

corrigé

Un exemple facile est obtenu en prenant $f(x) = 0$ si $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$ et $f(x) = 1$ si $x \in]\frac{a+b}{2}, b]$. On a alors $f' = 0$ p.p. et $f(b) - f(a) = 1$.

On peut obtenir un exemple avec f continue en construisant f à partir de l'ensemble de Cantor (f est prise constante sur chacun des intervalles ouverts formant le complémentaire de l'ensemble de Cantor, on a ainsi $f' = 0$ p.p.).

---

2. (Fonctions absolument continues.)

Une fonction définie sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite *absolument continue* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles deux à deux disjoints $(]a_k,b_k[)_{1 \leq k \leq n}$ dont la somme des longueurs est inférieure à δ, on a $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

(a) Montrer que “absolue continuité” implique “uniforme continuité”.

corrigé

Il suffit de prendre $n = 1$, on remarque alors que :

$$a \leq a_1 < b_1 \leq b,\ b_1 - a_1 \leq \delta \Rightarrow |f(b_1) - f(a_1)| < \varepsilon.$$

Ce qui donne l’uniforme continuité de f.

(b) Montrer que l’ensemble des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ forme un espace vectoriel.

corrigé

Soit f, g deux fonction absolument continues. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ [resp. $\delta_2 > 0$] t.q. pour toute famille finie d’intervalles deux à deux disjoints $(]a_k, b_k[)_{1\leq k\leq n}$ dont la somme des longueurs est inférieure à δ_1 [resp. δ_2], on a $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ [resp. $\sum_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| < \varepsilon$]. On en déduit que pour toute famille finie d’intervalles deux à deux disjoints $(]a_k, b_k[)_{1\leq k\leq n}$ dont la somme des longueurs est inférieure à $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, on a $\sum_{k=1}^{n} |(f + g)(b_k) - (f + g)(a_k)| < 2\varepsilon$. Ce qui prouve que $f + g$ est absolument continue.

Il est facile de voir que αf est absolument continue si f est absolument continue et $\alpha \in \mathbb{R}$.

L’ensemble des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ forme donc un espace vectoriel.

---

3. (Fonctions absolument continues et fonctions monotones.) Une fonction f définie sur $[a, b]$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}$) est dite *à variation bornée* s’il existe C t.q. pour toute subdivision du segment $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, on ait $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C$. Pour une fonction f à variation bornée, on peut définir, pour $a < x \leq b$, $V_a^x[f]$ par :

$$V_a^x[f] = \sup\{\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|\,,\ a = x_0 < x_1 < ... < x_n = x,\ n \in \mathbb{N}^\star\}.$$

On pose aussi $V_a^a[f] = 0$.

(a) Montrer que toute fonction absolument continue est à variation bornée.

(b) Montrer pour toute fonction f (définie sur $[a, b]$ et) absolument continue, la fonction $x \mapsto V_a^x[f]$ est absolument continue sur $[a, b]$. En déduire que toute fonction absolument continue (définie sur $[a, b]$) est la différence de deux fonctions absolument continues monotones croissantes (et est donc dérivable en presque tout point de $]a, b[$).

corrigé

La question 3 est admise.

---

4. Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$. Pour $x \in [a, b]$, on pose $F(x) = \int f 1_{]a,x]} d\lambda$. Montrer que F absolument continue.

corrigé

Cette question est une conséquence de la proposition 4.9 du cours. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q.

$$(A \in \mathcal{B}(]a, b[),\ \lambda(A) \leq \delta) \Rightarrow \int_A |f| d\lambda \leq \varepsilon.$$

Si $(]a_k, b_k[)_{1\le k\le n}$ est une famille finie d'intervalles deux à deux disjoints dont la somme des longueurs est inférieure à δ, on pose $A = \cup_{k=1}^n]a_k, b_k[$. On a $\lambda(A) = \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \le \delta$ et donc $\int_A |f| d\lambda \le \varepsilon$. On en déduit le résultat désiré car :

$$\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^n \Big| \int_{]a_k,b_k[} f d\lambda \Big| \le \sum_{k=1}^n \int_{]a_k,b_k[} |f|\, d\lambda = \int_A |f| d\lambda \le \varepsilon.$$

---

5. Soit F une fonction absolument continue et monotone croissante de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On prolonge cette fonction sur $\mathbb{R}$ en posant $F(x) = F(a)$ si $x < a$ et $F(x) = F(b)$ si $x > b$. Une version étendue du théorème de Carathéodory (cette version étendue est donnée par le théorème de Lebesgue-Stieltjes, théorème 2.5, pour ce résultat il suffit de F continue croissante) donne l'existence d'une (et une seule) mesure m_F sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $m_F(]\alpha, \beta[) = F(\beta) - F(\alpha)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.

   (a) Montrer que m_F est absolument continue par rapport à λ. [Utiliser la régularité de λ et l'absolue continuité de F.]

   corrigé

   Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(A) = 0$. On veut montrer que $m_F(A) = 0$ (ceci donnera bien que m_F est absolument continue par rapport à λ).

   Soit $\varepsilon > 0$. Comme F est absolument continue sur $[a, b]$, il existe $\delta > 0$ t.q. pour toute famille finie d'intervalles (de $[a, b]$) deux à deux disjoints $(]a_k, b_k[)_{1\le k\le n}$ dont la somme des longueurs est inférieure à δ, on a $\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$. Comme F est constante et égale à $F(a)$ sur $]-\infty, a]$ et constante et égale à $F(b)$ sur $[b, +\infty[$, cette propriété est aussi vrai si les intervalles sont des intervalles de $\mathbb{R}$ non nécessairement inclus dans $[a, b]$.

   Par la régularité de λ, il existe un ouvert $O \supset A$ t.q. $\lambda(O) \le \delta$. Cet ouvert O peut s'écrire comme une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux, $O = \cup_{k=1}^\infty]a_k, b_k[$ (avec éventuellement $a_k = b_k$ pour certaines valeurs de k). Pout tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \le \sum_{k=1}^\infty (b_k - a_k) = \lambda(O) \le \delta$ et donc :

   $$m_F(\cup_{k=1}^n]a_k, b_k[) = \sum_{k=1}^n (F(b_k) - F(a_k)) \le \varepsilon.$$

   En faisant tendre n vers l'infini, la continuité croissante de m_F donne :

   $$m_F(O) = \lim_{n\to\infty} m_F(\cup_{k=1}^n]a_k, b_k[) \le \varepsilon,$$

   et donc $m_F(A) \le \varepsilon$ (car $A \subset O$). Comme $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, on en déduit bien $m_F(A) = 0$.

   (b) Montrer qu'il existe $g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $F(\beta) - F(\alpha) = \int g 1_{]\alpha,\beta[} d\lambda$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Montrer que $g = F'$ p.p. sur $]a, b[$.

   corrigé

   Comme m_F est absolument continue par rapport à λ, le théorème de Radon-Nikodym (théorème 6.10) donne l'existence de $g \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q. $m_F = g\lambda$. On a donc, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $\alpha < \beta$:

   $$F(\beta) - F(\alpha) = m_F(]\alpha, \beta[) = \int g 1_{]\alpha,\beta[} d\lambda.$$

En faisant tendre α vers $-\infty$ et β vers $+\infty$, on en déduit $\int g d\lambda = F(b)-F(a) < \infty$ et donc $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\lambda)$ (au sens de la confusion habituelle, c'est-à-dire “il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\lambda)$ t.q. $g = h$ p.p.”).

Pour tout $x \in [a, b]$, on a $F(x) = F(a) + \int g 1_{]a,x[} d\lambda$. Le deuxième résultat admis donné au début de l'énoncé donne donc que F est dérivable p.p. sur $]a, b[$ et $F' = g$ p.p. sur $]a, b[$.

---

6. Soit F une fonction absolument continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que F est dérivable en presque tout point de $]a, b[$, que $F' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$ et que pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$F(x) - F(a) = \int F' 1_{]a,x[} d\lambda.$$

corrigé

D'après la question 3-(b), la fonction F est la différence de deux fonctions absolument continues monotones croissantes, notées F_1 et F_2. On peut alors appliquer la question 5-(b) à F_1 et F_2, elle donne que F_1 et F_2 sont dérivables p.p. sur $]a, b[$, que $F'_1, F'_2 \in L^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$ et que, pour tout $x \in [a, b]$:

$$F_1(x) - F_1(a) = \int F'_1 1_{]a,x[} d\lambda, \; F_2(x) - F_2(a) = \int F'_2 1_{]a,x[} d\lambda.$$

Comme $F = F_1 - F_2$, on en déduit que F est dérivable p.p. sur $]a, b[$, que $F' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$ et que, pour tout $x \in [a, b]$:

$$F(x) - F(a) = \int F' 1_{]a,x[} d\lambda.$$

Corrigé 125 (Dualité L^1-L^∞ par le théorème de Radon-Nikodym)

Soit (E, T, m) un espace mesuré fini et $T \in (L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))'$. On suppose que T est positive, c'est à dire que, pour $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f \geq 0$ p.p. implique $T(f) \geq 0$.

1. Pour $A \in T$, on pose $\mu(A) = T(1_A)$. Montrer que μ est bien définie et que μ est une mesure finie sur T.

   Attention, il y a toujours cette confusion malheureuse de notations, la même lettre T désigne la tribu sur E et un elément de $(L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))'$.

   On note $L^r = L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $\mathcal{L}^r = \mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (pour $r = 1$ et $r = \infty$).

corrigé

Soit $A \in T$ (tribu sur E), comme m est une mesure finie, on a $1_A \in \mathcal{L}^1$ (et donc $1_A \in L^1$ en confondant un élément de $\mathcal{L}^1$ avec sa classe dans L^1). On peut définir $\mu(A)$ par $T(1_A)$.

Pour montrer que μ est une mesure sur T, on remarque tout d'abord que $\mu(\emptyset) = T(1_\emptyset) = T(0) = 0$. Puis, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. En utilisant le théorème de convergence dominée, on remarque que $\sum_{n=0}^{N} 1_{A_n} \to 1_A$ dans L^1 quand $N \to \infty$ (en effet, on a bien une convergence p.p. et une domination par 1_E qui est intégrable). Comme $T \in (L^1)'$, on a donc $\sum_{n=0}^{N} T(1_{A_n}) = T(\sum_{n=0}^{N} 1_{A_n}) \to T(1_A)$ quand $N \to \infty$. Avec la définition de μ, on en déduit :

$$\sum_{n=0}^{N} \mu(A_n) \to \mu(A) \text{ quand } N \to \infty.$$

Ce qui montre bien que μ est une mesure sur T.

Pour montrer que μ est finie, il suffit de remarquer que $\mu(E) = T(1_E) \in \mathbb{R}$ (noter que $1_E \in \mathcal{L}^1$).

---

2. En utilisant le théorème de Radon-Nikodym, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $T(1_A) = \int g 1_A dm$ pour tout $A \in T$.

corrigé

Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$. On a donc $1_A = 0$ p.p.. On en déduit que $\mu(A) = T(1_A) = 0$ (la fonction 1_A est un élément de la classe de 0 dans L^p).

La mesure μ est donc absolument continue par rapport à la mesure m. On peut appliquer le théorème de Radon-Nikodym (théorème 6.10), il donne l'existence de $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. :

$$T(1_A) = \mu(A) = \int g 1_A dm \text{ pour tout } A \in T. \tag{12.105}$$

---

3. Montrer que $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (plus précisément, il existe $h \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $h = g$ p.p.). [On pourra montrer que $\|g\|_\infty \le \|T\|_{(L^1)'}$ en choisissant bien A dans la formule trouvée à la question précédente.]

corrigé

On prend $A = \{g > \|T\|_{(L^1)'}\}$. Si $m(A) > 0$, on a, avec (12.105), en remarquant que $\|1_A\|_1 = m(A)$:

$$\|T\|_{(L^1)'} m(A) < \int g 1_A dm = T(1_A) \le \|T\|_{(L^1)'} m(A),$$

ce qui est impossible. On a donc $m(A) = 0$, ce qui prouve que $g = h$ p.p. avec h définie par $h = g$ sur A^c et $h = 0$ sur A. Comme $h \in \mathcal{L}^\infty$, on a donc $g \in L^\infty$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $h = g$ p.p.").

On a aussi montré que $\|g\|_\infty = \|h\|_\infty \le \|T\|_{(L^1)'}$.

---

4. Montrer que $T(f) = \int g f dm$ pour tout $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

corrigé

Grâce à (12.105), on a, pour tout $f = 1_A$ avec $A \in T$:

$$T(f) = \int g f dm. \tag{12.106}$$

Par linéarité de T (sur L^1) et par linéarité de l'intégrale, on en déduit que (12.106) est encore vraie si $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1$ (on confond encore f et sa classe).

Puis, si $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$. Comme $f \in \mathcal{L}^1$ et $gf \in \mathcal{L}^1$, le théorème de convergence dominée donne $f_n \to f$ dans L^1 et $gf_n \to gf$ dans L^1 quand $n \to \infty$ (noter que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par f et $(gf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par gf). En écrivant (12.106) avec $f = f_n$ et en faisant $n \to \infty$, on en déduit (12.106). L'égalité (12.106) est donc vraie pour tout $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$.

Soit enfin $f \in L^1$ (on confond f avec l'un de ses représentants). On écrit alors (12.106) pour $f = f^+ \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$ et $f = f^- \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$. En faisant la différence on en déduit (12.106).

L'égalité (12.106) est donc vraie pour tout $f \in L^1$.

Corrigé 126 (Une démonstration de la dualité $L^p - L^q$ pour $p < 2$)
Soit (E, T, m) un espace mesuré $\sigma-$fini et $1 \le p < 2$. On pose $q = p/(p-1)$ et on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (pour $r = p$, $r = q$ et $r = 2$). Soit $T \in (L^p)'$. (Attention aux notations maladroites car T représente à la fois la tribu sur E et la forme linéaire continue sur L^p..., cette confusion de notations sera corrigée dans une prochaine version !)

1. On considére d'abord le cas où $m(E) < +\infty$.

   (a) Montrer que $L^2 \subset L^p$ et que l'injection canonique de L^2 dans L^p est continue.

   corrigé

   Cette question est faite dans la proposition 6.8 page 140. En particulier, l'inégalité (6.12) donne $\|f\|_p \le C\|f\|_2$ pour tout $f \in L^2$ avec C ne dépendant que de p et $m(E)$. En fait, si $m(E) > 0$, le plus petit C possible dans cette inégalité est $C = (m(E))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$ (voir la remarque 6.6).

   (b) Montrer qu'il existe $g \in L^2$ t.q. $T(f) = \int fgdm$ pour tout $f \in L^2$.

   corrigé

   On appelle S la restriction de T a L^2. La question précédente montre que S est bien défini est que $S \in (L^2)'$. Comme L^2 est un espace de Hilbert, le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8) donne l'existence (et l'unicité) de $g \in L^2$ t.q. $S(f) = (f/g)_2 = \int fgdm$ pour tout $f \in L^2$. Comme $S = T$ sur L^2, on a donc bien :

   $$T(f) = \int fgdm \text{ pour tout } f \in L^2. \tag{12.107}$$

   (c) Montrer que la fonction g, trouvée à la question précédente, appartient à L^q [distinguer les cas $p > 1$ et $p = 1$. Dans le cas $p > 1$, on pourra considérer les fonctions $f_n = |g|^{(q-2)}g1_{\{|g|\le n\}}$. Dans le cas $p = 1$, prendre $f = sgn(g)1_A$ où $A = \{|g| > \|T\|_{(L^p)'}\}$.]

   corrigé

   Dans toute la suite, on posera aussi $\mathcal{L}^r = \mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (pour $r = p$, $r = q$ et $r = 2$).

   Cas $p > 1$**.** Dans ce cas, on a $2 < q < \infty$. On confond, comme d'habitude, g avec l'un de ses représentants, de sorte que $g \in \mathcal{L}^2$. On pose alors $f_n = |g|^{(q-2)}g1_{\{|g|\le n\}}$. La fonction f_n est mesurable (comme produit de fonctions mesurables et bornée, on a donc $f_n \in \mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^p$.

On peut donc prendre $f = f_n$ dans (12.107), on obtient $\int f_n g dm = T(f_n)$ et donc, en notant $B_n = \{|g| \le n\}$:

$$\int_{B_n} |g|^q dm = T(f_n) \le \|T\|_{(L^p)'} \|f_n\|_p.$$

Comme $\|f_n\|_p^p = \int_{B_n} |g|^{p(q-1)} dm = \int_{B_n} |g|^q dm$, on en déduit :

$$(\int_{B_n} |g|^q dm)^{\frac{1}{q}} \le \|T\|_{(L^p)'}. \tag{12.108}$$

On remarque maintenant que $|g|^q 1_{B_n} \uparrow |g|^q$ quand $n \to \infty$. On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone à la suite $(|g|^q 1_{B_n})_{n\in\mathbb{N}}$, l'inégalité (12.108) donne alors :

$$(\int |g|^q dm)^{\frac{1}{q}} \le \|T\|_{(L^p)'}.$$

On a donc $g \in \mathcal{L}^q$ (et $g \in L^q$ en confondant g avec sa classe d'équivalence dans L^q) et $\|g\|_q \le \|T\|_{(L^p)'}$.

Cas $p = 1$**.** Dans ce cas, on a $q = \infty$. On confond aussi g avec l'un de ses représentants, de sorte que $g \in \mathcal{L}^2$. On pose maintenant $A = \{|g| > \|T\|_{(L^1)'}\}$ et $f = sgn(g)1_A$. La fonction f est donc étagée et on a $f \in \mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1$.

On obtient alors, avec (12.107) :

$$\int_A |g| dm = \int f g dm = T(f) \le \|T\|_{(L^1)'} \|f\|_1 = \|T\|_{(L^1)'} (m(A)). \tag{12.109}$$

Or, si $m(A) > 0$, on a (par la définition de A), $\int_A |g| dm > \|T\|_{(L^1)'} m(A)$, en contradiction avec (12.109). On a donc $m(A) = 0$, ce qui donne $g \in \mathcal{L}^\infty$ (et $g \in L^\infty$ en confondant g avec sa classe d'équivalence dans L^∞) et $\|g\|_\infty \le \|T\|_{(L^1)'}$.

(d) Si $f \in L^p$, montrer que $f_n = f 1_{\{|f| \le n\}} \in L^2$. En déduire que il existe $g \in L^q$ t.q. $T(f) = \int f g dm$, pour tout $f \in L^p$.

corrigé

La fonction g recherchée est, bien sûr, celle trouvée dans les questions précédentes.

Soit $f \in L^p$. On confond f avec l'un de ses représentants, de sorte que $f \in \mathcal{L}^p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = f 1_{\{|f| \le n\}}$. La fonction f_n est donc mesurable (comme produit de fonctions mesurables) et bornée, donc $f_n \in \mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^2$. On peut donc prendre $f = f_n$ dans (12.107), on obtient :

$$T(f_n) = \int f_n g dm \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{12.110}$$

Le théorème de convergence dominée dans L^p (théorème 6.1) donne que $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to \infty$ (la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien p.p. vers f et est dominée par $|f| \in L^p$). Comme $T \in (L^p)'$, on a donc $T(f_n) \to T(f)$ quand $n \to \infty$. D'autre part, comme $g \in L^q$, on a $\int f_n g dm \to \int f g dm$ quand $n \to \infty$ (en effet, l'inégalité de Hölder donne $|\int f_n g dm - \int f g dm| \le \|f_n - f\|_p \|g\|_q$). On déduit donc de (12.110), quand $n \to \infty$, que $T(f) = \int f g dm$.

---

2. On considére maintenant le cas où $m(E) = +\infty$. Comme m est σ-finie, on peut écrire $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, avec $An \subset A_{n+1}$ et $m(A_n) < +\infty$. On note $T_n = \{A \in T,\ A \subset A_n\}$, $m_n = m_{|T_n}$ et $L^r(m_n) = L^r_{\mathbb{R}}(A_n, T_n, m_n)$ ($r = p$ ou q).

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $f \in L^p(m_n)$, on pose $T_n(f) = T(\tilde{f})$ avec $\tilde{f} = f$ p.p. sur A_n et $\tilde{f} = 0$ p.p. sur $(A_n)^c$. Montrer que $T_n \in (L^p(m_n))'$ et qu'il existe $g_n \in L^q(m_n)$ t.q. :

$$T_n(f) = \int f g_n dm_n,\ \forall f \in L^p(m_n).$$

corrigé

On a déjà vu que T_n est une tribu sur A_n (tribu trace) et que m_n est une mesure sur T_n (mesure trace, voir l'exercice 2.16 par exemple).

Attention ici aussi à la confusion de notations entre T_n tribu et T_n forme linéaire sur $L^p(m_n)$.

La définition de T_n est cohérente car, si $f \in L^p(m_n)$, on confond f avec l'un de ses représentants et la fonction $\tilde{f}$ est alors p.p. égale à f prolongée par 0 hors de A_n, qui est bien un élément de $\mathcal{L}^p$. On a donc $\tilde{f} \in L^p$ (avec la confusion habituelle) et $T(\tilde{f})$ est bien défini (il ne dépend du représentant choisi dans la classe de f).

On remarque aussi que T_n est linéaire et que, pour $f \in L^p(m_n)$,

$$|T_n(f)| = |T(\tilde{f})| \leq \|T\|_{(L^p)'} \|\tilde{f}\|_{L^p} = \|T\|_{(L^p)'} \|f\|_{L^p(m_n)}.$$

Donc, $T_n \in (L^p(m_n))'$ et $\|T_n\|_{(L^p(m_n))'} \leq \|T\|_{(L^p)'}$. Comme $m_n(A_n) = m(A_n) < \infty$, on peut alors utiliser la première partie, elle donne qu'il existe $g_n \in L^q(m_n)$ t.q. :

$$T_n(f) = \int f g_n dm_n,\ \forall f \in L^p(m_n).$$

La première partie donne aussi :

$$\|g_n\|_{L^q(m_n)} \leq \|T_n\|_{(L^p(m_n))'} \leq \|T\|_{(L^p(m))'}. \tag{12.111}$$

On utilise $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les questions suivantes.

   (b) Montrer que si $m \geq n$, $g_n = g_m$ p.p. sur A_n.

corrigé

Soit $f \in \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = 0$ p.p. sur A_n^c. On note f_n la restriction de f à A_n et f_m la restriction de f à A_m. En confondant, comme d'habitude, un élément de L^p avec l'un de ses représentants, on a $f_n \in L^p(m_n)$, $f_m \in L^p(m_m)$ et $T_n(f_n) = T_m(f_m) = T(f)$. Donc,

$$\int f_n g_n dm_n = \int f_m g_m dm_m.$$

Comme $f_n = f_m = f$ sur A_n et que m_n est aussi la restriction de m_m sur A_n, on a donc :

$$\int f_n (g_n - g_m) dm_n = 0.$$

En prenant $f = \text{sign}(g_n - g_m)1_{\{g_n \neq g_m\}}$ sur A_n et $f = 0$ sur A_n^c (on a ici choisi des représentants pour g_n et g_m), on en déduit $g_n = g_m$ m_n-p.p. sur A_n, c'est-à-dire $g_n = g_m$ p.p. sur A_n, car m_n est la restriction de m sur A_n (p.p. est alors pris au sens m-p.p.).

(c) On définit $g : E \to \mathbb{R}$ par $g = g_n$ sur A_n.

i. Montrer que $g \in L^q(E)$. (Distinguer les cas $q < +\infty$ et $q = +\infty$.)

corrigé

Plus précisément, on peut choisir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ un représentant de g_n de manière à avoir $g_n = g_m$ sur tout A_n pour $m \geq n$. On peut alors définir $g : E \to \mathbb{R}$ par $g = g_n$ sur A_n. La fonction g est mesurable de E dans $\mathbb{R}$ (car g_n est mesurable de A_n dans $\mathbb{R}$).

Cas $p > 1$**.** (c'est-à-dire $q < \infty$). Dans ce cas, on remarque que $h_n \uparrow |g|$ quand $n \to \infty$ avec h_n défini par $h_n = |g_n|$ sur A_n et $h_n = 0$ sur A_n^c. Le théorème de convergence monotone donne alors :

$$\int |g|^q dm = \lim_{n\to\infty} \int h_n^q dm = \lim_{n\to\infty} \int |g_n|^q dm_n.$$

Comme $\int |g_n|^q dm_n \leq \|T\|^q_{(L^p)'}$ (d'après 12.111), on en déduit que $g \in \mathcal{L}^q$ (et $\|g\|_q \leq \|T\|_{(L^p)'}$). Donc, $g \in L^q$ (en confondant g avec sa classe).

Cas $p = 1$**.** (c'est-à-dire $q = \infty$). Dans ce cas, on a, par (12.111), $\|g_n\|_{L^\infty(m_n)} \leq \|T\|_{(L^1)'}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\|g\|_\infty \leq \|T\|_{(L^1)'}$ (car $\{g > \|T\|_{(L^1)'}\} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{g_n > \|T\|_{(L^1)'}\}$). Donc, $g \in L^\infty$ (en confondant g avec sa classe).

---

ii. Montrer que $T(f) = \int fg dm$, pour tout $f \in L^p$.

corrigé

Soit $f \in L^p$, on pose $f_n = f1_{A_n}$. D'après théorème de convergence dominé dans L^p (théorème 6.1), on a $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to \infty$. Donc :

$$T(f_n) \to T(f) \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.112}$$

Or, $T(f_n) = T_n(h_n)$, où h_n est la restriction de f_n à A_n. On remarque alors que

$$T_n(h_n) = \int g_n h_n dm_n = \int g f_n dm.$$

Comme $g \in L^q$, l'inégalité de Hölder donne que $\int g f_n dm. \to \int g f dm$ quand $n \to \infty$ (car $|\int g f_n dm. - \int g f dm| \leq \|g\|_q \|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to \infty$).
On a donc $T(f_n) = T_n(h_n) \to \int g f dm$ quand $n \to \infty$, ce qui, avec (12.112) donne $T(f) = \int f g dm$.

12.6.4 Convergence faible, faible-$\star$, étroite, en loi...

Corrigé 127

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2 = L^2(E, T, m)$ et $f \in L^2$ t.q. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende faiblement vers f dans L^2, c'est-à-dire : $\int f_n \varphi dm \to \int f \varphi dm$ pour toute fonction $\varphi \in L^2$.

1. Montrer que $\|f\|_2 \le \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_2$.

corrigé

Comme $f_n \to f$ faiblement vers f dans L^2 (quand $n \to \infty$) et que $f \in L^2$, on a :

$$\int f_n f dm \to \int f^2 dm = \|f\|_2^2 \text{ quand } n \to \infty.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\int f_n f dm \le \|f_n\|_2 \|f\|_2$. On en déduit, en faisant tendre n vers l'infini :

$$\|f\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \int f_n f dm = \liminf_{n\to\infty} \int f_n f dm \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_2 \|f\|_2 = \|f\|_2 \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_2,$$

et donc $\|f\|_2 \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_2$.

2. On suppose de plus que $\|f_n\|_2 \to \|f\|_2$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f dans L^2.

corrigé

On remarque que $\|f_n - f\|_2^2 = (f_n - f/f_n - f)_2 = \|f_n\|_2^2 + \|f\|_2^2 - 2\int f_n f dm$. On a $\|f_n\|_2^2 \to \|f\|_2^2$ et, comme $f_n \to f$ faiblement dans L^2, on a aussi $\int f_n f dm \to \int f^2 dm = \|f\|_2^2$, quand $n \to \infty$. On en déduit donc que $\|f_n - f\|_2 \to 0$ quand $n \to \infty$.

Corrigé 128 (Convergence faible)
Soit (E, T, m) un espace mesuré $\sigma-$fini. Pour $1 \le r \le \infty$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $1 \le p < \infty$ et $q = p/(p-1)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ et $f \in L^p$.

1. Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^p quand $n \to \infty$ (voir la dénition 6.17) si et seulement si

$$\int f_n g dm \to \int f g dm,\ \forall g \in L^q. \tag{12.113}$$

corrigé

Le cours (théorème de dualité 6.9 page 163) donne que $\{\varphi_g,\ g \in L^q\} = (L^p)'$, avec φ_g défini par $\varphi_g(f) = \int f g dm$ (pour $f \in L^p$). Ceci donne bien le résultat demandé (c'est-à-dire : $f_n \to f$ faiblement dans L^p si et seulement si $\varphi_g(f_n) \to \varphi_g(f)$ pour tout $g \in L^q$).

2. Montrer que $\|f\|_p \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p$ si $f_n \to f$ faiblement dans L^p, quand $n \to \infty$. [Utiliser (6.48) avec un choix convenable de g.]

corrigé

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ et $f \in L^p$ t.q. $f_n \to f$ faiblement dans L^p, quand $n \to \infty$. On confond f avec l'un de ses représentant et on pose $g = |f|^{p-1}\text{sign}(f)$. La fonction est mesurable (comme produit de fonctions mesurables). On a aussi $g \in \mathcal{L}^q$ et, comme $q(p-1) = p$, $\|g\|_q^q = \|f\|_p^p$. On en déduit, par l'inégalité de Hölder :

$$\int f_n g dm \le \|f_n\|_p \|g\|_q = \|f_n\|_p \Big(\int |f|^p dm\Big)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Quand $n \to \infty$, on obtient :

$$\int |f|^p dm = \int fgdm = \lim_{n\to\infty} \int f_n gdm \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p (\int |f|^p dm)^{1-\frac{1}{p}},$$

et donc $\|f\|_p \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p$.

On suppose dans les questions suivantes (questions 3 à 7) que:

$$m(E) < \infty,\ f_n \to f \text{ p.p., } \exists C \text{ t.q. } \|f_n\|_p \le C, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{12.114}$$

3. On suppose, dans cette question, que $p > 1$.

   (a) Soit $N \in \mathbb{N}$ et $g \in L^q$ t.q. $g = 0$ p.p. sur E_N^c avec $E_N = \cap_{n\ge N}\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| \le 1\}$. Montrer que $\int f_n gdm \to \int fgdm$, quand $n \to \infty$.

   corrigé

   Pour définir E_N, on a, comme d'habitude, confondu les fonctions f_n et f avec l'un de leurs représentants.

   On remarque que $g(f_n - f) \to 0$ p.p. et que, pour $n \ge N$, $|g(f_n - f)| \le |g|$ p.p.. Comme $g \in L^q \subset L^1$ (car $m(E) < \infty$), on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Il donne que $g(f_n - f) \to 0$ dans L^1 et donc :

   $$\int gf_n dm \to \int gfdm, \text{ quand } n \to \infty.$$

   (b) Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^p. [Pour $g \in L^q$, introduire $g_N = g1_{E_N}$.]

   corrigé

   Soit $g \in L^q$ (on confond g avec l'un de ses représentants). On pose $g_N = g1_{E_N}$ avec $E_N = \cap_{n\ge N}\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| \le 1\}$. On a alors :

   $$\int f_n gdm - \int fgdm = \int f_n(g - g_N)dm + \int f_n g_N dm - \int fg_N dm + \int f(g_N - g)dm. \tag{12.115}$$

   Comme $g_N \to g$ p.p. quand $N \to \infty$ (car $f_n \to f$ p.p. quand $n \to \infty$), et que $|g_N| \le |g|$ p.p. (pour tout N), on peut appliquer le théorème de convergence dominée dans L^q (théorème 6.1) car $g \in L^q$ et $q < \infty$ (on a besoin ici de l'hypothèse $p > 1$). Il donne :

   $$g_N \to g \text{ dans } L^q, \text{ quand } N \to \infty. \tag{12.116}$$

   Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant l'inégalité de Hölder, l'hypothèse $\|f_n\|_p \le C$ et (12.116), on peut donc choisir N t.q. :

   $$|\int f_n(g_N - g)dm| \le \|f_n\|_p \|g_N - g\|_q \le C\|g_N - g\|_q \le \varepsilon, \tag{12.117}$$

   pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

   $$|\int f(g_N - g)dm| \le \|f\|_p \|g_N - g\|_q \le \varepsilon, \tag{12.118}$$

Puis, N étant fixé, la question précédente nous donne que $\int f_n g_N dm \to \int f g_N dm$ quand $n \to \infty$. Il existe donc $n(\varepsilon)$ t.q. :

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |\int f_n g_N dm - \int f g_N dm| \leq \varepsilon. \tag{12.119}$$

Avec (12.117), (12.118) et (12.119), on déduit alors de (12.115) :

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |\int f_n g dm - \int f g dm| \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien la convergence faible de f_n vers f dans L^p.

(c) Donner un exemple avec $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ pour lequel $f_n \not\to f$ dans L^p.

corrigé

On prend $f_n = n^{\frac{1}{p}} 1_{]0,\frac{1}{n}[}$. On a $\|f_n\|_p = 1$, $f_n \to 0$ p.p. et $f_n \not\to 0$ dans L^p (quand $n \to \infty$).

---

4. On suppose, dans cette question, que $p = 1$. Montrer que $\|f\|_1 \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_1$. Donner un exemple avec $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ pour lequel $f_n \not\to f$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$.

corrigé

Le fait que $\|f\|_1 \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_1$ est une conséquence immédiate du lemme de Fatou, lemme 4.6 (en choisissant des représentants pour f_n et f).

On peut prendre, comme exemple, $f_n = n 1_{]0,\frac{1}{n}[}$. On a $f_n \to 0$ p.p., $\|f_n\|_1 = 1$ et $\int f_n \varphi dm \to 1 \neq 0$ si $\varphi = 1_{]0,1[}$ (donc $f_n \not\to 0$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$).

---

5. On suppose, dans cette question, que $p > 1$ et on prend $1 \leq r < p$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^r, quand $n \to \infty$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de Vitali pour la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $g_n = |f_n - f|^r$.]

corrigé

On pose $g_n = |f_n - f|^r$. On a $g_n \to 0$ p.p. et, pour tout $A \in T$, on obtient en utilisant l'inégalité de Hölder avec les fonctions g_n et 1_A et les exposants $\frac{p}{r}$ et son conjugué :

$$\int_A g_n dm = \int_A |f_n - f|^r \leq (\int_A |f_n - f|^p dm)^{\frac{r}{p}} (m(A))^{1-\frac{r}{p}} \leq \|f_n - f\|_p^r (m(A))^{1-\frac{r}{p}}.$$

On en déduit, comme $\|f_n\|_p \leq C$:

$$\int_A g_n dm \leq (C + \|f\|_p)^r (m(A))^{1-\frac{r}{p}},$$

d'où l'on déduit que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équiintégrable. Le théorème de Vitali (théorème 4.8, voir aussi l'exercice 4.30) donne alors que $g_n \to 0$ dans L^1, d'où l'on conclut que $f_n \to f$ dans L^r, quand $n \to \infty$.

---

6. Pour cette question, on retire dans (6.49) l'hypothèse $m(E) < \infty$ et on suppose que $p > 1$. Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^p.

corrigé

Il suffit ici de reprendre la même démonstration qu'à la question 3 avec E_N remplacé par $\tilde{E}_N = E_N \cap A_N$ où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ est t.q. $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$, $A_{n+1} \supset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

7. Dans cette question, on conserve l'hypothèse (6.49) mais on ne suppose plus que $f \in L^p$. Montrer que f appartient nécessairement à L^p.

corrigé

Le fait que $f \in L^p$ est une conséquence immédiate du lemme de Fatou (appliqué à la suite $(|f_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$).

---

8. On prend maintenant $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$ et on définit f_n, pour $n \in \mathbb{N}$ par $f_n = 1$ p.p. sur $]2k/n, (2k + 1)/n[$ pour $k \in \mathbb{N}$, $(2k + 1)/n \leq 1$ et $f_n = -1$ p.p. sur $]2k - 1/n, 2k/n[$ pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $2k/n \leq 1$. Montrer que $f_n \to 0$ faiblement dans L^p, pour tout $1 \leq p < \infty$. [On pourra, par exemple, utiliser la densité de $C([0, 1], \mathbb{R})$ dans L^1.]

corrigé

On se limite à n pair (la démonstration pour n impair est similaire).

On prend d'abord $\varphi \in C([0, 1], \mathbb{R})$. On a alors :

$$\int f_n \varphi d\lambda = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \int_{\frac{2k}{n}}^{\frac{2k+1}{n}} (\varphi(x) - \varphi(x + \frac{1}{n}))dx.$$

On en déduit :

$$|\int f_n \varphi d\lambda| \leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} |\varphi(x) - \varphi(x + \frac{1}{n})|dx \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \quad (12.120)$$

Soit maintenant $\varphi \in L^1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\psi \in C([0, 1], \mathbb{R})$ t.q. $\|\varphi - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. On a alors :

$$|\int f_n \varphi d\lambda| \leq |\int f_n \psi d\lambda| + |\int f_n(\psi - \varphi)d\lambda| \leq |\int_0^1 f_n \psi d\lambda| + \varepsilon.$$

Comme $\psi \in C([0, 1], \mathbb{R})$, on peut utiliser (12.120) (avec ψ au lieu de φ). Il existe donc $n(\varepsilon)$ t.q. $|\int_0^1 f_n \psi d\lambda| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n(\varepsilon)$, et donc :

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |\int f_n \varphi d\lambda| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui donne bien $\int f_n \varphi d\lambda \to 0$, quand $n \to \infty$, pour tout $\varphi \in L^1$.

On en déduit bien que $f_n \to 0$ faiblement dans L^p pour tout $1 \le p < \infty$ en utilisant la question 1 et le fait que $L^q \subset L^1$ pour tout $q \ge 1$.

Corrigé 129 (Convergence faible et non linéarité)
On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$, par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(]0,1[,B(]0,1[),\lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(]0,1[,B(]0,1[),\lambda)$.

1. (Unicité de la limite faible). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $u, v \in L^1$. On suppose que $u_n \to u$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$, (c'est-à-dire que $T(u_n) \to T(u)$ pour toute application T linéaire continue de L^1 dans $\mathbb{R}$) et que $u_n \to v$ faiblement dans L^1.

   (a) Montrer que $\int (u-v)\phi d\lambda = 0$, pour tout $\phi \in L^\infty$.

   corrigé

   Soit $\phi \in L^\infty$. On sait que l'application $w \mapsto \int w\phi d\lambda$ est une application T linéaire continue de L^1 dans $\mathbb{R}$ (voir la section 6.3). On a donc, quand $n \to \infty$:

   $$\int u_n \phi d\lambda \to \int u\phi d\lambda \;\text{ et }\; \int u_n\phi d\lambda \to \int v\phi d\lambda.$$

   On en déduit bien que $\int u\phi d\lambda = \int v\phi d\lambda$ c'est-à-dire $\int (u-v)\phi d\lambda = 0$.

   (b) Montrer que $u = v$ p.p.. [Choisir convenablement ϕ dans l'égalité précécente.]

   corrigé

   On choisit des représentants de u et v et on prend $\phi = \mathrm{sign}(u-v)1\{u \ne v\}$. La fonction ϕ est mesurable (et même étagée) et bornée, donc $\phi \in \mathcal{L}^\infty$ (ou $\phi \in L^\infty$ avec la confusion habituelle). Ce choix de ϕ dans la question précédente donne alors $\|u-v\|_1 = 0$ et donc $u = v$ p.p..

   ---

2. (Convergence forte contre convergence faible) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$ et $v \in L^\infty$. On suppose qu'il existe $C > 0$ t.q. $\|v_n\|_\infty \le C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $v_n \to v$ p.p., quand $n \to \infty$.

   (a) Montrer que $v_n \to v$ dans L^p, quand $n \to \infty$, pour tout $1 \le p < \infty$.

   corrigé

   Ceci est une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée dans L^p (pour $1 \le p < \infty$, théorème 6.1). En effet, on a $v_n \to v$ p.p., $|v_n| \le C1_{]0,1[}$ p.p. (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et la fonction $C1_{]0,1[}$ appartient à L^p.

   (b) Donner un exemple pour lequel $v_n \not\to v$ dans L^∞.

   corrigé

   Il suffit de prendre $v_n = 1_{]0,\frac{1}{n}[}$ (plus précisément, v_n est l'élément de L^∞ donc $1_{]0,\frac{1}{n}[}$ est l'un des représentants) et $v = 0$. On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$, $\|v_n\|_\infty = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \to 0$ p.p. et $v_n \not\to 0$ dans L^∞ (quand $n \to \infty$),

   ---

(c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $u \in L^1$. On suppose que $\|u_n\|_\infty \le C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_n \to u$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$. Montrer que $\int u_n v_n d\lambda \to \int uvd\lambda$, quand $n \to \infty$. [Ecrire $v_n = v + (v_n - v)$.]

corrigé

On remarque que

$$\int u_n v_n d\lambda = \int u_n v d\lambda + \int u_n(v_n - v)d\lambda. \qquad (12.121)$$

Comme $u_n \to u$ faiblement dans L^1, on a $\int u_n v d\lambda \to \int uvd\lambda$, quand $n \to \infty$.

Le deuxième terme de (12.121) tends vers 0 car $|\int u_n(v_n - v)d\lambda| \le \|u_n\|_\infty \|v_n - v\|_1 \le C\|v_n - v\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$, car on a montré précédemment que $v_n \to v$ dans L^1.

On en déduit bien que $\int u_n v_n d\lambda \to \int uvd\lambda$, quand $n \to \infty$.

On se donne maintenant une fonction $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Soit $u \in \mathcal{L}^\infty$. Montrer que $\varphi \circ u \in \mathcal{L}^\infty$.

corrigé

- Comme $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, φ est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ étant muni de la tribu de Borel). On en déduit que $\varphi \circ u$ est mesurable comme composée de fonctions mesurables.
- On note $M = \max\{|\varphi(s)|,\ |s| \le \|u\|_\infty\}$. On a $M < \infty$ (car φ est continue sur le compact $[-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$) et $|\varphi \circ u| \le M$ p.p. car $|u| \le \|u\|_\infty$ p.p.. On en déduit que $\varphi \circ u \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|\varphi \circ u\|_\infty \le M$.

---

4. Soit $u \in L^\infty$ et $v, w \in u$. Montrer que $\{h \in \mathcal{L}^\infty;\ h = \varphi \circ v \text{ p.p.}\} = \{h \in \mathcal{L}^\infty;\ h = \varphi \circ w \text{ p.p.}\}$.

corrigé

On a $v = w$ p.p. et donc $\varphi \circ v = \varphi \circ w$ p.p., puisque, pour $x \in]0,1[$. $u(x) = v(x)$ implique $\varphi(u(x)) = \varphi(v(x))$.

Si $h\ :\ ]0,1[\to \mathbb{R}$, on a donc :

$$h = \varphi \circ u \text{ p.p. } \Leftrightarrow h = \varphi \circ v \text{ p.p. },$$

ce qui donne bien $\{h \in \mathcal{L}^\infty;\ h = \varphi \circ v \text{ p.p.}\} = \{h \in \mathcal{L}^\infty;\ h = \varphi \circ w \text{ p.p.}\}$.

Grâce aux 2 questions précédentes, pour $u \in L^\infty$, on pose, si $v \in u$:

$\underline{\varphi}(u) = \{h \in \mathcal{L}^\infty;\ h = \varphi \circ v \text{ p.p.}\}$, de sorte que $\underline{\varphi}(u) \in L^\infty$.

On se donne maintenant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$. On suppose qu'il existe $C > 0$ t.q. $\|u_n\|_\infty \le C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'il existe $u \in L^1$ et $f\ :\ ]0,1[\to \mathbb{R}$ t.q. :

- $u_n \to u$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$,
- $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

Le but de l'exercice est de comparer f et $\underline{\varphi}(u)$.

5. Montrer que $|\int u 1_A d\lambda| \leq C\lambda(A)$ pour tout $A \in B(]0,1[)$. Montrer que $u \in L^\infty$ que $\|u\|_\infty \leq C$.

corrigé

Soit $A \in B(]0,1[)$. De l'hypothèse $\|u_n\|_\infty \leq C$, on déduit :

$$|\int u_n 1_A d\lambda| \leq \|u_n\|_\infty \|1_A\|_1 \leq C\lambda(A). \tag{12.122}$$

Comme $u_n \to u$ faiblement dans L^1 quand $n \to \infty$, on a $\int u_n 1_A d\lambda \to \int u 1_A d\lambda$ quand $n \to \infty$. On déduit donc de (12.122), quand $n \to \infty$:

$$|\int u 1_A d\lambda| \leq C\lambda(A). \tag{12.123}$$

On choisit alors un représentant de u et on prend dans (12.123), $A = A_+ = \{u > C\}$. Si $\lambda(A_+) > 0$, on a $\int u 1_{A_+} d\lambda > C\lambda(A_+)$, en contradiction avec (12.123). Ce qui prouve que $\lambda(A_+) = 0$.

On prend ensuite $A = A_- = \{u < -C\}$. Si $\lambda(A_-) > 0$, on a $|\int u 1_{A_-} d\lambda| = \int(-u) 1_{A_-} d\lambda > C\lambda(A_-)$, en contradiction avec (12.123). Ce qui prouve que $\lambda(A_-) = 0$.

On a donc $\lambda(\{|u| > C\}) = \lambda(A_+) + \lambda(A_-) = 0$. Ce qui donne $u \in L^\infty$ et $\|u\|_\infty \leq C$.

---

6. On suppose, dans cette question, que φ est affine (c'est-à-dire qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(s) = \alpha s + \beta$ pour tout $s \in \mathbb{R}$). Montrer que $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p.. [Utiliser, en particulier, la question 1.]

corrigé

On rappelle d'abord (voir la section 6.3) que si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $w \in L^1$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tends vers w faiblement dans L^1 (quand $n \to \infty$) si et seulement $\int w_n \phi d\lambda \to \int w\phi d\lambda$ pour tout $\phi \in L^\infty$.

Soit $\phi \in L^\infty$, on a $\int \underline{\varphi}(u_n)\phi d\lambda = \int(\alpha u_n + \beta)\phi d\lambda = \alpha \int u_n \phi d\lambda + \beta \int \phi d\lambda$. Comme $u_n \to u$ faiblement dans L^1, on en déduit que $\int \underline{\varphi}(u_n)\phi d\lambda \to \alpha \int u\phi d\lambda + \beta \int \phi d\lambda = \int \underline{\varphi}(u)\phi d\lambda$ (quand $n \to \infty$). Ceci montre que $\underline{\varphi}(u_n) \to \underline{\varphi}(u)$ faiblement dans L^1 quand $n \to \infty$.

On utilse maintenant le fait que $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p.. En notant $M = \max\{|\varphi(s)|, |s| \leq C\}$, on a $M < \infty$ et $|\underline{\varphi}(u_n)| \leq M$ p.p. (car $|u_n| \leq C$ p.p.) pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (car les fonctions constantes sont intégrables, sur $(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$). Il donne $f \in L^1$ et $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ dans L^1 quand $n \to \infty$. On en déduit alors aussi que $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ faiblement dans L^1 quand $n \to \infty$ (il suffit de remarquer que $|\int \underline{\varphi}(u_n)\phi d\lambda - \int f\phi d\lambda| \leq \|\underline{\varphi}(u_n) - f\|_1 \|\phi\|_\infty \to 0$, quand $n \to \infty$, pour tout $\phi \in L^\infty$).

Par la question 1 (unicité de la limite faible), on peut donc conclure que $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..

---

7. On suppose, dans cette question, que φ est injective. Montrer qu'il existe $v \in L^\infty$ t.q. $u_n \to v$ p.p. quand $n \to \infty$. En déduire que $v = u$ et $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..

corrigé

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de u_n, encore noté u_n. Comme $|u_n| \le C$ p.p. (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $\varphi(u_n) \to f$ p.p., il existe $A \in \mathcal{B}(]0,1[)$ t.q. $\lambda(A) = 0$, $|u_n(x)| \le C$, pour tout $x \in A^c$ et tout $n \in \mathbb{N}$, et $\varphi(u_n(x)) \to f(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in A^c$.

Soit $x \in A^c$. La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est incluse dans le compact $[-C, C]$. Soit a une valeur d'adhérence de cette suite (c'est-à-dire la limite d'une sous suite convergente). Par continuité de φ, $\varphi(a)$ est alors une valeur d'adhérence de de la suite $(\varphi(u_n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$. Or, la suite $(\varphi(u_n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Donc, $\varphi(a) = f(x)$. Comme φ est injective, ceci montre que la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence et donc qu'elle est convergente (on rappelle qu'une suite dans un compact, qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence, est convergente). On pose alors $v(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$.

On a ainsi défini v p.p. (car $\lambda(A) = 0$), et on a $u_n \to v$ p.p.. On a aussi obtenu que $\underline{\varphi}(v) = f$ p.p. (car $\varphi(v(x)) = f(x)$ pour tout $x \in A^c$).

Comme $|u_n| \le C$ p.p. (pour tout n), le théorème de convergence dominée donne que $u_n \to v$ dans L^1 (quand $n \to \infty$). On en déduit, comme à la question précédente, que $u_n \to v$ faiblement dans L^1. La question 1 (unicité de la limite faible) donne alors $u = v$ p.p..

Enfin, on a déjà montré que $\underline{\varphi}(v) = f$ p.p. et donc $\underline{\varphi}(u) = f$ p.p..

---

8. (Astuce de Minty) On suppose, dans cette question, que φ est croissante.

   (a) Soit $v \in L^\infty$. Montrer que $\int (f - \underline{\varphi}(v))(u - v) d\lambda \ge 0$. [Utiliser la croissance de φ et la question 2 (c).]

   corrigé

   Soit $v \in L^\infty$. Comme φ est croissante, on a $(\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v))(u_n - v) \ge 0$ p.p. et donc $\int (\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v))(u_n - v) d\lambda \ge 0$.

   On remarque maintenant que :

   - $(\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v)) \to (f - \underline{\varphi}(v))$ p.p. (quand $n \to \infty$) et $\|\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v)\|_\infty \le M_1 + M_2$ (pour tout n) avec $M_1 = \max\{|\varphi(s)|, |s| \le C\}$ et $M_2 = \max\{|\varphi(s)|, |s| \le \|v\|_\infty\}$ (pour tout n).
   - $(u_n - v) \to (u - v)$ faiblement dans L^1 (quand $n \to \infty$) et $\|u_n - v\|_\infty \le C + \|v\|_\infty$.

   On peut utiliser la question 2 (c) et en déduire que $\int (\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v))(u_n - v) d\lambda \to \int (f - \underline{\varphi}(v))(u - v) d\lambda$ quand $n \to \infty$ et donc :

$$\int (f - \underline{\varphi}(v))(u - v) d\lambda \ge 0.$$

   (b) Soit $w \in L^\infty$. Montrer que $\int (f - \underline{\varphi}(u)) w d\lambda \le 0$. [Utiliser la question précédente avec $v = u + (1/n)w$.]

   corrigé

La question précédente avec $v = u + (1/n)w$ donne :

$$\int (f - \underline{\varphi}(u + \frac{1}{n}w))wd\lambda \leq 0.$$

Comme φ est continue, on a $\underline{\varphi}(u+\frac{1}{n}w) \to \underline{\varphi}(u)$ p.p. quand $n \to \infty$. On a aussi $|\underline{\varphi}(u+\frac{1}{n}w)| \leq M$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $M = \max\{|\varphi(s)|, |s| \leq \|u\|_\infty + \|w\|_\infty\}$. Le théorème de convergence dominée donne alors $(f - \underline{\varphi}(u + \frac{1}{n}w)) \to (f - \underline{\varphi}(u))$ dans L^1, quand $n \to \infty$, et donc, comme $w \in L^\infty$:

$$\int (f - \underline{\varphi}(u + \frac{1}{n}w))wd\lambda \to \int (f - \underline{\varphi}(u))wd\lambda.$$

On en déduit que $\int (f - \underline{\varphi}(u))wd\lambda \leq 0$.

(c) Montrer que $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..

corrigé

On choisit des représentants de f et $\underline{\varphi}(u)$ et on pose $w = \text{sign}(f - \underline{\varphi}(u))1_{\{f \neq \underline{\varphi}(u)\}}$. La question précédente donne alors, avec ce choix de w, $\|f - \underline{\varphi}(u)\|_1 = 0$ et donc $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..

---

9. On définit u_n, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 1$ p.p. sur $]2k/2n, (2k+1)/2n[$ pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, et $u_n = -1$ p.p. sur $]2k - 1/2n, 2k/2n[$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$.

(a) Montrer que $\int u_n \phi d\lambda \to 0$, quand $n \to \infty$, pour tout $\phi \in C([0,1], \mathbb{R})$.

corrigé

Cette question et la suivante ont déjà faites dans le corrigé 128. On reprend la même démonstration.

Soit $\phi \in C([0,1], \mathbb{R})$. On a :

$$\int u_n \phi d\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}} (\phi(x) - \phi(x + \frac{1}{2n}))dx.$$

On en déduit, grâce à la continuité uniforme de ϕ :

$$|\int u_n \phi d\lambda| \leq \int_0^{1-\frac{1}{2}n} |\phi(x) - \phi(x + \frac{1}{2n})|dx \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \quad (12.124)$$

(b) Montrer que $u_n \to 0$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$. [On pourra, par exemple, utiliser la densité de $C([0,1], \mathbb{R})$ dans L^1.] Montrer que $u_n \not\to 0$ dans L^1, quand $n \to \infty$.

corrigé

Soit $\phi \in L^1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\psi \in C([0,1], \mathbb{R})$ t.q. $\|\phi - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. On a alors :

$$|\int u_n \phi d\lambda| \leq |\int u_n \psi d\lambda| + |\int u_n(\psi - \phi)d\lambda| \leq |\int_0^1 u_n \psi d\lambda| + \varepsilon.$$

Comme $\psi \in C([0,1],\mathbb{R})$, on peut utiliser la question précédente. Il existe donc $n(\varepsilon)$ t.q. $|\int_0^1 u_n\psi d\lambda| \le \varepsilon$ pour $n \ge n(\varepsilon)$, et donc :

$$n \ge n(\varepsilon) \Rightarrow |\int u_n \phi d\lambda| \le 2\varepsilon.$$

Ceci donne que $\int u_n\phi d\lambda \to 0$, quand $n \to \infty$, pour tout $\phi \in L^1$.

On en déduit bien que $u_n \to 0$ faiblement dans L^1 car $L^\infty \subset L^1$.

D'autre part, $u_n \not\to 0$ dans L^1, quand $n \to \infty$, car $\|u_n\|_1 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Donner un exemple de fonction $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lequel $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p. et $f \neq \underline{\varphi}(0)$ p.p.. (et donc φ n'est pas croissante et n'est pas injective).

corrigé

Il suffit de prendre $\varphi(s) = s^2$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On a alors $\underline{\varphi}(u_n) = 1$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p. avec $f = 1$ p.p. alors que $\underline{\varphi}(0) = 0$ p.p..

(d) Donner un exemple de fonction $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ croissante pour lequel $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p. (et donc $f = \underline{\varphi}(0)$ p.p., par la question 8, et φ est non injective, par les questions 7 et 9 (b)).

corrigé

Il suffit de prendre $\varphi(s) = 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On a alors $\underline{\varphi}(u_n) = 0$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p. avec $f = \underline{\varphi}(0) = 0$ p.p..

Corrigé 130 (Convergence faible et convergence forte dans L^1)

Soit (X,T,m) un espace mesuré fini. Pour $p \in [1,\infty]$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(X,T,m)$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$, $f \in L^1$ et $C \in \mathbb{R}$. On suppose que

- $f_n \to f$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$ (c'est-à-dire que $\int f_n g dm \to \int f g dm$ pour tout $g \in L^\infty$).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \ge C$ p.p..

1. Montrer que $f \ge C$ p.p..
2. On suppose maintenant que $f = C$ p.p..
   Montrer que $f_n \to f$ dans L^1 (c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$).

corrigé

En attente

Corrigé 131 (Convergence étroite de mesures)

Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (on rappelle que "m_n finie" signifie que "$m_n(\mathbb{R}) < \infty$") et m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On rappelle que $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$.

On suppose que :

$$\int g dm_n \to \int g dm, \text{ pour tout } g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On ne suppose pas que f est bornée, mais on suppose que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose $\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\alpha < \infty$.

   corrigé

   La fonction constante et égale à 1 appartient à $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'hypothèse donne donc $m_n(\mathbb{R}) \to m(\mathbb{R})$, quand $n \to \infty$. La suite $(m_n(\mathbb{R}))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée (car convergente dans $\mathbb{R}$). Ce qui donne $\alpha < \infty$.

   ---

2. On suppose, dans cette question, que :

$$\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f|^2 dm_n < \infty.$$

   (a) Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à support compact et t.q. $0 \le \varphi(x) \le 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de α et β (définis ci dessus), t.q. :

$$\int |f|\varphi dm \le C.$$

   corrigé

   En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\int |f|\varphi dm_n \le (\int f^2 dm_n)^{\frac{1}{2}} (\int \varphi^2 dm_n)^{\frac{1}{2}} \le \beta^{\frac{1}{2}} m_n(\mathbb{R})^{\frac{1}{2}} \le (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}.$$

   Comme $|f|\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'hypothèse donne $\int |f|\varphi dm = \lim_{n\to\infty} \int |f|\varphi dm_n$. On déduit donc de la majoration précédente que $\int |f|\varphi dm \le (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$.

   (b) Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$.

   corrigé

   On définit φ_1 en posant :

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x) = 1, \text{ si } 0 \le x \le 1,\\
&\varphi_1(x) = 2 - x, \text{ si } 1 < x \le 2,\\
&\varphi_1(x) = 0, \text{ si } 2 < x,\\
&\varphi_1(x) = \varphi_1(-x), \text{ si } x < 0.
\end{aligned}$$

   Puis, pour $p \ge 2$, $\varphi_p(x) = \varphi_1(\frac{x}{p})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   La question précédente donne $\int |f|\varphi_p dm \le (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$ pour tout $p \ge 1$. Comme la suite $(\varphi_p)_{p\ge1}$ converge simplement et en croissant vers la fonction constante égale à 1, le théorème de convergence monotone donne que $\int |f| dm \le (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$ et donc que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$.

(c) Montrer que $\displaystyle\int f dm_n \to \int f dm$, quand $n \to \infty$.

corrigé

On utilise encore la suite $(\varphi_p)_{p\geq 1}$ définie à la question précédente et on remarque que, pour tout $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}|\int f dm_n - \int f dm| \leq \int |f|(1-\varphi_p)dm_n + \int |f|(1-\varphi_p)dm \\ +|\int f\varphi_p dm_n - \int f\varphi_p dm|.\end{aligned} \tag{12.125}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $p \geq 1$, on a $|f|(1-\varphi_p) \leq |f|$ p.p.. Comme $(1-\varphi_p) \to 0$ p.p. et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Il donne $\int |f|(1-\varphi_p)dm \to 0$ quand $p \to \infty$. Il existe donc $p_0 \geq 1$ t.q.

$$p \geq p_0 \Rightarrow \int |f|(1-\varphi_p)dm \leq \varepsilon.$$

En utilisant encore le théorème de convergence dominée (les constantes étant intégrables pour la mesure m), il existe aussi $p_1 \geq 1$ t.q.

$$p \geq p_1 \Rightarrow \beta \int (1-\varphi_p)dm < \varepsilon^2.$$

On choisit maintenant $p = \max(p_0, p_1)$. Comme $(1-\varphi_p) \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a donc $\int(1-\varphi_p)dm_n \to \int(1-\varphi_p)dm$ quand $n \to \infty$. Il existe donc n_0 t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \beta \int (1-\varphi_p)dm_n < \varepsilon^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $(1-\varphi_p)^2 \leq (1-\varphi_p)$, on en déduit, pour $n \geq n_0$,

$$\int |f|(1-\varphi_p)dm_n \leq \beta^{\frac{1}{2}}(\int (1-\varphi_p)dm_n)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon.$$

Enfin, comme $f\varphi_p \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a $\int f\varphi_p dm_n \to \int f\varphi_p dm$ quand $n \to \infty$. Il existe donc n_1 t.q.

$$n \geq n_1 \Rightarrow |\int f\varphi_p dm_n - \int f\varphi_p dm| \leq \varepsilon.$$

Finalement, avec ce choix de $p = \max(p_0, p_1)$, on déduit donc de (12.125) que

$$n \geq \max(n_0, n_1) \Rightarrow |\int f dm_n - \int f dm| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci prouve bien que $\displaystyle\int f dm_n \to \int f dm$, quand $n \to \infty$.

---

3. On ne suppose plus que $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f|^2 dm_n < \infty$.

Montrer (en choisissant convenablement $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, m et f) que l'on peut avoir $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$.

corrigé

On peut prendre, par exemple, $m_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $m_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}\delta_p$ (où δ_p est la masse de Dirac en p). On prend f définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les hypothèses sur la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et m sont bien vérifiées avec $m = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}\delta_p$.

On a bien $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_n) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$.

Corrigé 132 (Convergence faible et convexité)

Dans cet exercice (E, T, m) est un espace mesuré et on suppose que la mesure m est $\sigma-$finie.. Pour tout $1 \leq r \leq \infty$, on note L^r l'espace $L^r(E, T, m)$ (et $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r(E, T, m)$). Soit $1 \leq p < \infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^p et $u \in L^p$ t.q. $u_n \to u$ faiblement dans L^p quand $n \to \infty$ (on rappelle que ceci signifie $T(u_n) \to T(u)$, quand $n \to \infty$, pour tout T dans $(L^p)'$, c'est-à-dire dans le dual topologique de L^p).

1. On pose $r = p/(p-1)$ si $p > 1$ et $r = \infty$, si $p = 1$. Montrer que, pour tout $v \in L^r$:

$$\int u_n v dm \to \int uv dm.$$

corrigé

Soit $v \in L^r$. Pour tout $w \in L^p$, on pose $T(w) = \int wv dm$. Comme cela a été vu en cours, l'inégalité de Hölder (proposition 6.9) donne que $T \in (L^p)'$, on a donc $T(u) = \lim_{n\to\infty} T(u_n)$.

Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que φ est strictement convexe (ce qui est équivalent à dire que φ' est strictement croissante).

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $h_a(x) = \varphi(x) - \varphi(a) - \varphi'(a)(x - a)$.

   (a) Montrer que $h_a(x) > 0$ si $x \neq a$.

   corrigé

   Soit $x \neq a$. Le théorème des accroissements finis donne qu'il existe $y \in]a, x[$, si $x > a$, ou $y \in]x, a[$, si $x < a$, t.q. $\varphi(x)-\varphi(a) = \varphi'(y)(x-a)$. On a donc $h_a(x) = (\varphi'(y)-\varphi'(a))(x-a) > 0$.

   (b) Montrer que h_a est décroissante sur $]-\infty, a[$ et croissante sur $]a, \infty($.

   corrigé

   La fonction h_a est de classe C^1 et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h'_a(x) = \varphi'(x) - \varphi'(a)$. on a donc $h'_a(x) < 0$ si $x < a$ et $h'_a(x) > 0$ si $x > a$.

Soit $1 \leq q < \infty$. On suppose maintenant que la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^q et qu'elle converge faiblement dans L^q, quand $n \to \infty$, vers une (classe de) fonction(s) $\overline{\varphi} \in L^q$.

Précision de notation : On choisit un représentant pour u_n. On désigne alors par $\varphi(u_n)$ la fonction (de E dans $\mathbb{R}$) $x \mapsto \varphi(u_n(x))$. Cette fonction est supposée être dans $\mathcal{L}^q$ et on l'identifie, comme d'habitude, avec l'élément de L^q qu'elle représente.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = [\varphi(u_n) - \varphi(u) - \varphi'(u)(u_n - u)]$.

Précision de notation : Ici aussi, pour définir f_n, on choisit un représentant pour u. On désigne alors par $\varphi(u)$ et $\varphi'(u)$ les fonctions $x \mapsto \varphi(u(x))$ et $x \mapsto \varphi'(u(x))$.

3. Soit $k \in \mathbb{R}_+^\star$ et $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$. On pose $A_k = \{|u| \le k\}$ (c'est-à-dire $A_k = \{x \in E$ t.q. $|u(x)| \le k\}$.

Montrer que $\int f_n 1_{A_k} 1_B dm \to \int (\overline{\varphi} - \varphi(u)) 1_{A_k} 1_B dm$, quand $n \to \infty$.

corrigé

la fonction φ' est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc bornée sur $[-k, k]$. On en déduit que $\varphi'(u)1_{A_k} \in L^\infty$. Comme $m(B) < \infty$, on a donc $\varphi'(u)1_{A_k}1_B \in L^r$ pour tout $r \in [1, \infty]$ en en particulier si r est le conjugué de p (c'est-à-dire $r = p/(p-1)$ si $p > 1$ et $r = \infty$, si $p = 1$). La question 1 donne donc :

$$\int \varphi'(u) 1_{A_k} 1_B (u_n - u) dm \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

Puis, comme $\varphi(u_n) \to \overline{\varphi}$ faiblement dans L^q et que $1_{A_k}1_B \in L^r$ où r est maintenant le conjugué de q, on a aussi :

$$\int \varphi(u_n) 1_{A_k} 1_B dm \to \int \overline{\varphi} 1_{A_k} 1_B dm, \text{ quand } n \to \infty.$$

Enfin, on remarque que $\varphi(u)1_{A_k}1_B \in L^1$ (car $m(B) < \infty$ et φ bornée sur $[-k, k]$). Ce qui donne finalement que $f_n 1_{A_k} 1_B \in L^1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\int f_n 1_{A_k} 1_B dm \to \int (\overline{\varphi} - \varphi(u)) 1_{A_k} 1_B dm$, quand $n \to \infty$.

---

4. Montrer $\overline{\varphi} \ge \varphi(u)$ p.p.. [Utiliser les questions 2(a) et 3.]

corrigé

La question 2(a) donne que $f_n \ge 0$ p.p.. On a donc, grâce à la question 3, avec les notations de la question 3 :

$$\int (\overline{\varphi} - \varphi(u)) 1_{A_k} 1_B dm \ge 0, \tag{12.126}$$

pour tout $k \in \mathbb{R}_+^\star$ et tout $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$.

On va déduire de (12.126) que $\overline{\varphi} \ge \varphi(u)$ p.p.. Pour cela, On choisit des représentants de u et $\overline{\varphi}$ et on pose $N = \{\overline{\varphi} - \varphi(u) < 0\} = \{x \in E; \overline{\varphi}(x) - \varphi(u(x)) < 0\}$.

Comme m est $\sigma-$finie, il existe une suite $(E_p)_{p \in \mathbb{N}^\star} \subset T$ t.q. $E = \cup_{p \in \mathbb{N}^\star} E_p$, $m(E_p) < \infty$ et $E_p \subset E_{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$. Comme u prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, on a donc aussi $E = \cup_{p \in \mathbb{N}^\star}(E_p \cap A_p)$ et finalement $N = \cup_{p \in \mathbb{N}^\star} N_p$, avec $N_p = N \cap E_p \cap A_p$.

Soit $p \in \mathbb{N}^\star$, on prend $k = p$ et $B = E_p \cap N$ dans (12.126), de sorte que $A_k \cap B = A_p \cap E_p \cap N = N_p$. Comme $\overline{\varphi} - \varphi(u) < 0$ sur N_p, on obtient que $(\overline{\varphi} - \varphi(u))1_{N_p} = 0$ p.p. et donc $m(N_p) = 0$. Comme $N = \cup_{p \in \mathbb{N}^\star} N_p$, on a finalement $m(N) = 0$ et donc $\overline{\varphi} \ge \varphi(u)$ p.p..

On suppose maintenant que $\overline{\varphi} = \varphi(u)$ p.p..

5. Soit $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$, $k \in \mathbb{R}_+^\star$ et $A_k = \{|u| \le k\}$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers 0 sur $A_k \cap B$.

corrigé

La question 2(a) donne $f_n \ge 0$ p.p. (pour tout n) et la question 3 donne que $f_n 1_{A_k \cap B} = f_n 1_{A_k} 1_B \in L^1$ et $\|f_n 1_{A_k} 1_B\|_1 = \int f_n 1_{A_k} 1_B dm \to 0$, quand $n \to \infty$. D'après la réciproque partielle de convergence dominée (théorème 4.7), la suite $(f_n 1_{A_k} 1_B)_{n \in \mathbb{N}}$ admet donc une sous suite convergeant p.p.

vers 0. Autrement dit, il existe une application strictement croissante ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 sur $A_k \cap B$.

---

6. (Question plus difficile.) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers 0 sur E. [Utiliser le fait que la mesure m est $\sigma-$finie et un "procédé diagonal".]

corrigé

On reprend la suite $(E_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ introduite à la question 4 (c'est-à-dire $(E_p)_{p\in\mathbb{N}^\star} \subset T$ t.q. $E = \cup_{p\in\mathbb{N}^\star} E_p$, $m(E_p) < \infty$ et $E_p \subset E_{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$).

La question 5 donne que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers 0 sur $A_p \cap E_p$. Plus précisément, le raisonnement de la question 5 donne que de toute sous suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous suite convergeant p.p. vers 0 sur $A_p \cap E_p$. Comme $E = \cup_{p\in\mathbb{N}^\star}(A_p \cap E_p)$, le procédé diagonal va nous permettre ci après de construire une sous suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant p.p. vers 0 sur E.

Dans une première épape, on montre, par récurrence, l'existence d'une suite d'applications strictement croissantes $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q., pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, la suite $(f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_p}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 sur $A_p \cap E_p$.

L'existence de ψ_1 découle de de la question 5 avec $k = 1$ et $B = E_1$. Puis, pour $p \geq 1$, en supposant $\psi_1, \ldots, \psi_p$ construits, on utilise le raisonnement de la question 5 avec la suite $(f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, $k = p+1$ et $B = E_{p+1}$. On obtient l'existence d'une application srtictement croissante ψ_{p+1} de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. la suite $(f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_{p+1}}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 sur $A_{p+1} \cap E_{p+1}$. Ce qui termine la récurrence.

La deuxième étape consiste à définir ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant

$$\psi(n) = \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_n(n), \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

La fonction ψ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et on va montrer que la suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 (sur E). En effet, soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Pour $n > p$, on a :

$$\psi(n) = \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_p(\psi_{p+1} \circ \ldots \circ \psi_n(n)).$$

La suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc extraite, à partir de $n = p$, de la suite $(f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci prouve que $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 sur $A_p \cap E_p$. Comme $E = \cup_{p\in\mathbb{N}^\star}(A_p \cap E_p)$, on en déduit bien que la suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 (sur E).

---

7. Soit $x \in E$ t.q. $f_n(x) \to 0$, montrer que $u_n(x) \to u(x)$. [Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$, limite d'une sous suite de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Utiliser la question 2 pour montrer que $b = u(x)$.]

corrigé

Le point x est ici fixé. On pose $a = u(x)$. On remarque alors que $f_n(x) = h_a(u_n(x))$ (avec h_a défini à la question 2).

Si la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée, il existe une sous suite, encore notée $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, t.q. $u_n(x) \notin [a-1, a+1]$ (on peut même supposer que $\lim_{n\to\infty} |u_n(x)| = \infty$). On a donc, grâce à la question 2 :

$$f_n(x) = h_a(u_n(x)) \geq \min(h_a(a+1), h_a(a-1)) > 0,$$

en contradiction avec $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

Si b est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une sous suite de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, t.q. $b = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$. On a donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = h_a(b)$. Comme $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, la question 2(a) donne $b = a$. On a ainsi montré que $u(x)$ est la seule valeur d'adhérence de la suite bornée $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui prouve que $u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$.

---

8. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers u.

corrigé

La question 6 montre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers 0. Il existe donc ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. la suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0. Le raisonnement de la question 7 montre que

$$x \in E,\ \lim_{n\to\infty} f_{\psi(n)}(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x).$$

On en déduit que $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers u.

---

9. On suppose ici que $p > 1$. Montrer que $u_n 1_B \to u 1_B$ dans L^r pour tout $r \in [1, p[$ et tout $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$. [Utiliser l'exercice 6.18.]

corrigé

On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $r \in [1, p[$ et $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$ et $u_n 1_B \not\to u 1_B$ dans L^r. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une sous suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(u_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec g strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$), t.q.

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|u_{g(n)} 1_B - u 1_B\|_r \geq \varepsilon. \tag{12.127}$$

La suite $(u_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les mêmes propriétés que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par la question 8, on peut donc extraire de $(u_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite convergeant p.p. vers u. Cette sous suite, notée $(u_{g\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$), étant bornée dans L^p, l'exercice 6.18 (corrigé 109 page 400) donne que $u_{g\circ\psi(n)}) 1_B \to u 1_B$ dans L^r, en contradiction avec (12.127).

---

10. En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $\varphi(s) = s^2$, donner un exemple pour lequel $u_n \not\to u$ p.p. sur E (toutefois, d'après la question 8, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers u).

corrigé

Il suffit de reprendre l'exemple vu en cours pour montrer que la convergence L^1 n'entraîne pas la convergence p.p.

Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $m \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $n \in \{\frac{m(m-1)}{2}, \ldots, \frac{m(m+1)}{2} - 1\}$ et on a :

$$n = \frac{m(m-1)}{2} + k \text{ avec } k \in \{0, \ldots m-1\}.$$

On prend alors $u_n = 1_{]\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]}$.

On remarque que $\|u_n\|_p^p = \frac{1}{m}$ pour $n \in \{\frac{m(m-1)}{2}, \ldots, \frac{m(m+1)}{2} - 1\}$ et donc $u_n \to 0$ dans L^p quand $n \to \infty$. Comme $\varphi(u_n) = u_n$, on a aussi $\varphi(u_n) \to 0$ dans L^q quand $n \to \infty$ (et donc $\overline{\varphi} = \varphi(u)$). Enfin, pour cet exemple, $u_n \not\to 0$ p.p.

Corrigé 133 (Produit de convergences faibles)
Soit (E, T, m) un espace mesuré fini. Pour $p \in [1, \infty]$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.
Soit $\alpha, \beta > 0$. Pour $a \in \mathbb{R}_+$, on définit ψ_a de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par $\psi_a(t) = (t^\alpha - a^\alpha)(t^\beta - a^\beta)$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\psi_a(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t \neq a$.

   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives appartenant à L^∞ et $l_\alpha, l_\beta, l_{\alpha+\beta} \in L^\infty$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^∞ et que $f_n^\gamma \to l_\gamma$ $\star-$faiblement dans L^∞, quand $n \to \infty$, pour $\gamma = \alpha$, $\gamma = \beta$ et $\gamma = \alpha + \beta$.

   On rappelle que $f_n^\gamma \to l_\gamma$ $\star-$faiblement dans L^∞ signifie que $\int f_n^\gamma \varphi dm \to \int l_\gamma \varphi dm$, quand $n \to \infty$, pour tout $\varphi \in L^1$.

2. Soit $\varphi \in L^1$ t.q. $\varphi \geq 0$ p.p.. Montrer que $\int l_a \varphi dm \geq 0$.
3. Montrer que $l_\alpha \geq 0$ p.p..
4. Montrer que $l_{\alpha+\beta} \geq l_\alpha l_\beta$ p.p.. [On pourra utiliser $\psi_a(t) \geq 0$ avec $t = f_n(x)$ et $a = (l_\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha}}$.]
5. On suppose maintenant que $l_{\alpha+\beta} = l_\alpha l_\beta$ p.p.. On pose $f = l_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}$ et $g_n = (f_n^\alpha - f^\alpha)(f_n^\beta - f^\beta)$.
   (a) Montrer que $g_n \to 0$ dans L^1, quand $n \to \infty$.
   (b) Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante t.q. $g_{\varphi(n)} \to 0$ p.p., quand $n \to \infty$. Montrer que $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p., quand $n \to \infty$. [Utiliser la question 1.]
   (c) Montrer que $f_n \to f$ dans L^q, quand $n \to \infty$, pour tout $q \in [1, \infty[$.

———————————————**corrigé**———————————————

En attente. . .

———————————————————————————————————

Corrigé 134 (Conv. étroite et conv. des mesures des intervalles)
Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose que $m_n \to m$ étroitement, quand $n \to \infty$, et que m est diffuse (c'est-à-dire que $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, montrer que $m_n(I) \to m(I)$ quand $n \to \infty$. Montrer (en donnant un contre-exemple) que cette propriété peut être fausse si m n'est pas diffuse.

———————————————**corrigé**———————————————

On remarque tout d'abord que $m_n(I) \to m(I)$ si $I = \mathbb{R}$, car $\int 1_{\mathbb{R}} dm_n \to \int 1_{\mathbb{R}} dm$.

Soit maintenant $a \in \mathbb{R}$, on va montrer que $m_n(I) \to m(I)$ si $I =]-\infty, a]$ ou $I =]-\infty, a]$. Pour cela, on définit, pour $p \in \mathbb{N}^\star$, φ_p, $\psi_p \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en posant :

$$\begin{aligned}
&\varphi_p(x) = 1 \text{ si } x \leq a - \tfrac{1}{p},\\
&\varphi_p(x) = -p(x - a) \text{ si } a - \tfrac{1}{p} < x < a,\\
&\varphi_p(x) = 0 \text{ si } a \leq x,\\
&\psi_p(x) = \varphi_p(x - \tfrac{1}{p}) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Comme $\varphi_p \leq 1_I \leq \psi_p$ on a $\int \varphi_p dm_n \leq m_n(I) \leq \int \psi_p dm_n$ pour tout p, $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite quand $n \to \infty$, on a donc, pour tout $p \in \mathbb{R}$:

$$\int \varphi_p dm \leq \liminf_{n\to\infty} m_n(I) \leq \limsup_{n\to\infty} m_n(I) \leq \int \psi_p dm.$$

Le théorème de convergence dominée donne $\lim_{p\to\infty}\int \varphi_p dm = m(]-\infty,a[)$ et $\lim_{p\to\infty}\int \psi_p dm = m(]-\infty,a])$. On en déduit :

$$m(]-\infty,a[) \le \liminf_{n\to\infty} m_n(I) \le \limsup_{n\to\infty} m_n(I) \le m(]-\infty,a]).$$

Comme $m(]-\infty,a]) = m(]-\infty,a[) + m(\{a\}) = m(]-\infty,a[) = m(I)$, on a, finalement, $m(I) \le \liminf_{n\to\infty} m_n(I) \le \limsup_{n\to\infty} m_n(I) \le m(I)$, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} m_n(I) = m(I)$.
En écrivant que $m_n(J) = m(\mathbb{R}) - m(J^c)$, il est facile de voir que l'on a aussi $m_n(J) \to m(J)$ pour tout intervalle J de la forme $[a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$. Enfin, si $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, un intervalle, noté K, dont les bornes sont a et b peut s'écrire comme différence de deux intervalles dont les bornes supérieures sont a et b et dont la borne inférieure est $-\infty$. On en déduit alors facilement que $m_n(K) \to m(K)$, ce qui termine la démonstration.

La propriété démontré peut être fausse si m n'est pas diffuse. Pour le voir, il suffit de prendre, par exemple, $m = \delta_0$ et $m_n = \delta_{1/n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On a bien $m_n \to m$ étroitement et pour $I =]-\infty,0]$ (par exemple) on a $\lim_{n\to\infty} m_n(I) = 0 \ne 1 = m(I)$.

Corrigé 135 (Convergence en loi)
Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace de probabilités et X une v.a. réelle de loi uniforme sur $[-1,1]$.

1. Montrer que $-X$ est une v.a. de même loi que X.

corrigé

On pose $Y=-X$ et on cherche à déterminer la loi de la v.a.r. Y. Soit φ une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (il suffit en fait de prendre pour φ la fonction caractéristique d'un borélien de $\mathbb{R}$). En posant $\psi(x) = \varphi(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, On remarque que $\int_\Omega \varphi(Y)dP = \int_\Omega \varphi(-X)dP = \int_\Omega \psi(X)dP = \int_\mathbb{R} \psi(x)dP_X(x) = \int_\mathbb{R} \varphi(-x)dP_X(x)$. Comme $X \sim \mathcal{U}(-1,1)$, on a donc :

$$\int_\Omega \varphi(Y)dP = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(-x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(x)dx,$$

ce qui prouve que $Y \sim \mathcal{U}(-1,1)$.

---

2. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. t.q. :

   (a) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X,

   (b) $(X_n - X)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en loi vers 0.

corrigé

On prend $X_n = -X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $P_{X_n} = P_X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui donne bien la convergence en loi de X_n vers X quand $n \to \infty$. Mais, $X_n - X = -2X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $X_n - X$ ne converge pas en loi vers 0 car $P_0 = \delta_0$ et $P_{-2X} \ne \delta_0$. (Il est facile de voir, en raisonnant comme à la première question, que $-2X \sim \mathcal{U}(-2,2)$.)

---

3. Donner un exemple de trois v.a. X,Y,Z t.q. X et Y aient la même loi, mais sans que XZ et YZ aient la même loi.

corrigé

On prend $Y = -X$ (toujours avec $X \sim \mathcal{U}(-1,1)$) et $Z = X$. les v.a.r. X et Y ont donc même loi. Mais, on va montrer que XZ et YZ n'ont pas la même loi. En effet, soit φ une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\int_\Omega \varphi(XZ)dP = \int_\Omega \varphi(X^2)dP = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \varphi(x^2)dx = \int_0^1 \varphi(x^2)dx = \int_0^1 \varphi(s)\frac{1}{2\sqrt{s}}ds.$$

Ce qui prouve que $P_{XZ} = g\lambda$ avec $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x \in]0,1[$ et $g(x) = 0$ si $x \notin]0,1[$. Comme $XY = -XZ$, on a $P_{XY} = h\lambda$ avec $h(x) = g(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que $P_{XZ} \neq P_{XY}$.

Corrigé 136 (Convergence en loi + convergence en probabilité)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité, X une v.a. réelle et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de v.a. réelles t.q. :

$$X_n \to X \text{ en loi, } Y_n \to 0 \text{ en probabilité, quand } n \to \infty.$$

Montrer que

$$X_n + Y_n \to X \text{ en loi, quand } n \to \infty.$$

[On pourra utiliser la convergence vague.]

corrigé

D'après la proposition 6.21, il suffit de démontrer la convergence vague de $P_{X_n+Y_n}$ vers P_X quand $n \to \infty$, c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi(X_n + Y_n)dP = \int_\Omega \varphi(X)dP$ pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Soit $\varphi \in \mathbb{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On a $\int_\Omega \varphi(X_n + Y_n)dP - \int_\Omega \varphi(X)dP = A_n + B_n$ avec :

$$A_n = \int_\Omega \varphi(X_n + Y_n)dP - \int_\Omega \varphi(X_n)dP, \qquad B_n = \int_\Omega \varphi(X_n)dP - \int_\Omega \varphi(X)dP.$$

On sait déjà que $\lim_{n\to\infty} B_n = 0$ (car $X_n \to X$ en loi). Il suffit donc de montrer que $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$.

Soit $\eta > 0$. Comme $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, φ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (on rappelle, par contre, que $\varphi \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \not\Rightarrow \varphi$ uniformément continue), il existe donc $\varepsilon > 0$ t.q. :

$$x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \le \varepsilon \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \le \eta.$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $\|\varphi\|_u = \max_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|(< \infty)$:

$$|A_n| \le \int_{|Y_n|\le\varepsilon} |\varphi(X_n + Y_n) - \varphi(X_n)|dP + \int_{|Y_n|>\varepsilon} |\varphi(X_n + Y_n) - \varphi(X_n)|dP \le \eta + 2\|\varphi\|_u P[|Y_n| > \varepsilon].$$

Comme $Y_n \to 0$ en probabilité, il existe n_0 (dépendant seulement de ε et donc de η et φ) t.q. :

$$n \ge n_0 \Rightarrow 2\|\varphi\|_u P[|Y_n| > \varepsilon] \le \eta,$$

et donc :

$$n \ge n_0 \Rightarrow |A_n| \le 2\eta.$$

Ce qui prouve que $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$ et termine la démonstration.

Corrigé 137 (Convergence en loi versus convergence en probabilité)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, X une v.a. réelle et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles.

1. On suppose, dans cette question, que $X_n \to X$ en probabilité, quand $n \to \infty$. Montrer que :

$$X_n \to X \text{ en loi, quand } n \to \infty.$$

[Remarquer qu'il suffit de démontrer une convergence vague de P_{X_n} vers P_X.]

corrigé

Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Nous allons montrer que $\int_\Omega \varphi(X_n)dP \to \int_\Omega \varphi(X)dP$, quand $n \to \infty$ (ce qui prouve la convergence vague de P_{X_n} vers P_X, quand $n \to \infty$, voir la définition 6.20).

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, φ est uniformément continue (ceci serait faux si on prenant φ arbitrairement dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Il existe donc $\eta > 0$ t.q. :

$$x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \le \eta \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(y) \le \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
|\int_\Omega \varphi(X_n) - \varphi(X)dP| &\le \int_{|X_n - X| \le \eta} |\varphi(X_n) - \varphi(X)|dP + \int_{|X_n - X| > \eta} |\varphi(X_n) - \varphi(X)|dP \\
&\le \varepsilon + 2\|\varphi\|_u P(|X_n - X| > \eta),
\end{aligned}$$

avec $\|\varphi\|_u = \max\{|\varphi(s)|,\ s \in \mathbb{R}\} < \infty$. Comme $X_n \to X$ en probabilité, quand $n \to \infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. :

$$n \ge n_0 \Rightarrow 2\|\varphi\|_u P(|X_n - X| > \eta) \le \varepsilon.$$

On a donc finalement

$$n \ge n_0 \Rightarrow |\int_\Omega \varphi(X_n) - \varphi(X)dP| \le 2\varepsilon,$$

ce qui prouve bien que $\int_\Omega \varphi(X_n)dP \to \int_\Omega \varphi(X)dP$, quand $n \to \infty$.

Pour conclure, on utilise la proposition 6.25 (qui donne que si $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et m sont des probabilités sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, la convergence étroite de m_n vers m, quand $n \to \infty$, est équivalente à la convergence vague de m_n vers m). On obtient ainsi la convergence étroite de P_{X_n} vers P_X c'est-à-dire la convergence en loi de X_n vers X, quand $n \to \infty$.

---

2. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $X = a$ p.s.. On suppose aussi que $X_n \to X$ en loi, quand $n \to \infty$. Montrer que :

$$X_n \to X \text{ en probabilité, quand } n \to \infty.$$

corrigé

Soit $\eta > 0$, on va montrer que $P(|X_n - X| > \eta) \to 0$, quand $n \to \infty$. Pour cela, on choisit une fonction φ continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et t.q. $\varphi(x) = 1$ si $|x - a| \ge \eta$, $\varphi(a) = 0$ et $0 \le \varphi(x) \le 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (Une telle fonction est facile à construire, il suffit de la prendre affine par morceaux). Comme $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a $\int_\Omega \varphi(X_n)dP \to \int_\Omega \varphi(X)dP$, quand $n \to \infty$. Comme $X = a$ p.s. et $\varphi(a) = 0$, on a $\int_\Omega \varphi(X)dP = 0$. Enfin, comme $\varphi(x) = 1$ si $|x - a| \ge \eta$ et $\varphi \ge 0$, on a $\int_\Omega \varphi(X_n)dP \ge P(|X_n - X| > \eta)$. On en déduit finalement que $P(|X_n - X| > \eta) \to 0$ quand $n \to \infty$ et donc que $X_n \to X$ en probabilité quand $n \to \infty$.
