

12.7 Exercices du chapitre 7

12.7.1 Mesure produit

Corrigé 138

Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. [S'inspirer de la démonstration faite pour $n = 2$ dans l'exercice 2.6.]

corrigé

On note $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la tribu (sur $\mathbb{R}^n$) engendrée par $\{A \times B; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On veut montrer que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Etape 1, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset T$.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On va montrer que $O \in T$. On suppose $O \neq \emptyset$ (on sait déjà que $\emptyset \in T$). Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)^t \in O$, il existe $r > 0$ t.q. $\prod_{i=1}^n]x_i - r, x_i + r[\subset O$. Comme les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$, on peut trouver, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $y_i \in \mathbb{Q} \cap]x_i - r, x_i[$ et $z_i \in \mathbb{Q} \cap]x_i, x_i + r[$. On a donc $x \in \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[\subset O$.

On note alors $I = \{(y, z) \in \mathbb{Q}^{2n}; \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[\subset O\}$ (avec $y = (y_1, \dots, y_n)^t$ et $z = (z_1, \dots, z_n)^t$). Pour tout $x \in O$, il existe donc $(y, z) \in I$ t.q. $x \in \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[$. On en déduit que $O = \cup_{(y,z) \in I} \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[$.

L'ensemble $\prod_{i=1}^{n-1}]y_i, z_i[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$, il appartient donc à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ (qui est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^{n-1}$). L'ensemble $]y_n, z_n[$ appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Donc, $\prod_{i=1}^n]y_i, z_i[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme I est au plus dénombrable (car $\mathbb{Q}^{2n}$ est dénombrable), on en déduit que $O \in T$. On a ainsi montré que T est une tribu contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^n$, et donc contenant la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$). Donc, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset T$.

Etape 2, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \supset T$.

On reprend ici aussi le même démarche que dans l'exercice 2.6.

1. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $T_1 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$. On montre d'abord que T_1 est une tribu (sur $\mathbb{R}$)
 - $\emptyset \in T_1$ car $A \times \emptyset = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
 - On montre ici que T_1 est stable par passage au complémentaire. Soit $B \in T_1$, on a donc $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \times B^c = A \times (\mathbb{R} \setminus B) = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B)$. Or, $(A \times \mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (car A est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$), on a donc $(A \times \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. D'autre part, $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (car $B \in T_1$). Donc, $A \times B^c = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Ce qui prouve que $B^c \in T_1$ et donc que T_1 est stable par passage au complémentaire.
 - Enfin, T_1 est stable par union dénombrable. En effet, si $(B_p)_{p \in \mathbb{N}} \subset T_1$, on a $A \times (\cup_{p \in \mathbb{N}} B_p) = \cup_{p \in \mathbb{N}} (A \times B_p) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (car $A \times B_p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$). Donc, $\cup_{p \in \mathbb{N}} B_p \in T_1$.

On a donc montré que T_1 est une tribu.

On montre maintenant que T_1 contient les ouverts de $\mathbb{R}$.

Soit B un ouvert de $\mathbb{R}$. On a donc $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et, comme $A \times B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on a $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. On a donc $B \in T_1$.

T_1 est donc une tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}$, donc contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Donc, $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

La conséquence de ce résultat est :

$$A \text{ ouvert de } \mathbb{R}^{n-1} \text{ et } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \quad (12.128)$$

2. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $T_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}); A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$. On va montrer que $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$.

On commence par remarquer que (12.128) donne que T_2 contient les ouverts de $\mathbb{R}^{n-1}$. En effet, soit A un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$, la propriété (12.128) donne que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, et donc $A \in T_2$.

On montre maintenant que T_2 est une tribu (on en déduira que $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$).

- $\emptyset \in T_2$ car $\emptyset \times B = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
- On montre ici que T_2 est stable par passage au complémentaire. Soit $A \in T_2$, on a $A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ et $A^c \times B = (\mathbb{R}^{n-1} \times B) \setminus (A \times B)$. La propriété (12.128) donne $(\mathbb{R}^{n-1} \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ car $\mathbb{R}^{n-1}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$. D'autre part, $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (car $A \in T_2$). Donc, $A^c \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Ce qui prouve que $A^c \in T_2$ et donc que T_2 est stable par passage au complémentaire.
- Enfin, T_2 est stable par union dénombrable. En effet, si $(A_p)_{p \in \mathbb{N}} \subset T_2$, on a $(\cup_{p \in \mathbb{N}} A_p) \times B = \cup_{p \in \mathbb{N}} (A_p \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (car $A_p \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$). Donc, $\cup_{p \in \mathbb{N}} A_p \in T_2$.

T_2 est donc une tribu (sur $\mathbb{R}^{n-1}$) contenant les ouverts de $\mathbb{R}^{n-1}$, ce qui prouve que $T_2 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ et donc, finalement, $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$.

On a donc obtenu le résultat suivant :

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \quad (12.129)$$

3. On montre maintenant que $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (et donc que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$).

Grâce à (12.129), on a $\{A \times B; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. On en déduit que $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. On a donc bien, avec l'étape 1, $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Corrigé 139

Soient E_1, E_2 deux ensembles, T_1 une tribu sur E_1 et T_2 une tribu sur E_2 . On note $E = E_1 \times E_2$ et on rappelle que $T_1 \times T_2 = \{A_1 \times A_2, A_1 \in T_1, A_2 \in T_2\}$.

Montrer que l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ est égale à l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $T_1 \times T_2$ c'est-à-dire que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, A appartient à l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ si et seulement si il existe $(A^{(p)})_{p=1, \dots, n} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \cup_{p=1}^n A^{(p)}$.

corrigé

On note $\mathcal{A}$ l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $T_1 \times T_2$.

Comme $\mathcal{A}$ contient $T_1 \times T_2$ et que $\mathcal{A}$ est stable par union finie, il est immédiat que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Pour montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, il suffit alors de montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre (puisque $\mathcal{A}$ est la plus petite algèbre contenant $T_1 \times T_2$ et que $\mathcal{B}$ contient $T_1 \times T_2$).

Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre, on montre d'abord (étape 1) que $T_1 \times T_2$ est stable par intersection finie et que le complémentaire d'un élément de $T_1 \times T_2$ est la réunion de 2 éléments disjoints de $T_1 \times T_2$.

(en fait, pour montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre, il suffirait de savoir que le complémentaire d'un élément de $T_1 \times T_2$ est une union finie disjointe d'éléments de $T_1 \times T_2$). Puis, on en déduit (étape 2) que $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés (a) et (b) de la question 1 de l'exercice 2.9 (corrigé 16), ce qui donne que $\mathcal{B}$ est bien une algèbre.

Étape 1. Propriétés de $T_1 \times T_2$.

- Soient $A_1, B_1 \in T_1$ et $A_2, B_2 \in T_2$. On a clairement $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$. Comme T_1 et T_2 sont stables par intersection finie, on en déduit que $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) \in T_1 \times T_2$ et donc que $T_1 \times T_2$ est stable par intersection finie.
- Soient $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$. On remarque que $(A_1 \times A_2)^c = (E_1 \times A_2^c) \cup (A_1^c \times A_2)$. Comme $(E_1 \times A_2^c) \in T_1 \times T_2$, $(A_1^c \times A_2) \in T_1 \times T_2$ et que $(E_1 \times A_2^c) \cap (A_1^c \times A_2) = \emptyset$, on a bien montré que le complémentaire d'un élément de $T_1 \times T_2$ est la réunion de 2 éléments disjoints de $T_1 \times T_2$.

Étape 2. On montre maintenant que $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés (a) et (b) de la question 1 de l'exercice 2.9. La propriété (a) est immédiate car $E = E_1 \times E_2 \in T_1 \times T_2 \subset \mathcal{B}$. Pour montrer (b), on montre d'abord que $\mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire.

Soit $B \in \mathcal{B}$. Il existe $(B^{(q)})_{q=1, \dots, m} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $B^{(p)} \cap B^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $B = \bigcup_{q=1}^m B^{(q)}$. On a alors $B^c = \bigcap_{q=1}^m (B^{(q)})^c$. Le complémentaire d'un élément de $T_1 \times T_2$ est la réunion de 2 éléments disjoints de $T_1 \times T_2$. Pour tout q , il existe donc $C_{q,1}, C_{q,2} \in T_1 \times T_2$ t.q. $(B^{(q)})^c = C_{q,1} \cup C_{q,2}$ et $C_{q,1} \cap C_{q,2} = \emptyset$. On a donc $B^c = \bigcap_{q=1}^m (C_{q,1} \cup C_{q,2}) = \bigcup_{\varphi \in I} (\bigcap_{q=1}^m C_{q,\varphi(q)})$ où I désigne l'ensemble des applications de $\{1, \dots, m\}$ dans $\{1, 2\}$. Ceci prouve que $B^c \in \mathcal{B}$. En effet, on remarque d'abord que, pour tout $\varphi \in I$, on a $\bigcap_{q=1}^m C_{q,\varphi(q)} \in T_1 \times T_2$ car $T_1 \times T_2$ est stable par intersection finie. Puis, pour $\varphi, \psi \in I$, $\varphi \neq \psi$, il existe $k \in \{1, \dots, m\}$ t.q. $\varphi(k) \neq \psi(k)$. On a donc $(\bigcap_{q=1}^m C_{q,\varphi(q)}) \cap (\bigcap_{q=1}^m C_{q,\psi(q)}) = \emptyset$ car $\bigcap_{q=1}^m C_{q,\varphi(q)} \subset C_{k,\varphi(k)}$, $\bigcap_{q=1}^m C_{q,\psi(q)} \subset C_{k,\psi(k)}$ et $C_{k,\varphi(k)} \cap C_{k,\psi(k)} = \emptyset$. On a donc bien montré que B^c est une union finie disjointe d'éléments de $T_1 \times T_2$, c'est-à-dire que $B^c \in \mathcal{B}$.

On montre maintenant que $\mathcal{B}$ vérifie la propriété (b) de la question 1 de l'exercice 2.9. Soit $A, B \in \mathcal{B}$. Comme on vient de voir que $B^c \in \mathcal{B}$, il existe $(A^{(p)})_{p=1, \dots, n} \subset T_1 \times T_2$ et $(C^{(q)})_{q=1, \dots, m} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$, $C^{(p)} \cap C^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$, $A = \bigcup_{p=1}^n A^{(p)}$ et $B^c = \bigcup_{q=1}^m C^{(q)}$. On a alors $A \setminus B = A \cap B^c = (\bigcup_{p=1}^n A^{(p)}) \cap (\bigcup_{q=1}^m C^{(q)}) = \bigcup_{p=1}^n \bigcup_{q=1}^m (A^{(p)} \cap C^{(q)})$. On en déduit que $A \setminus B \in \mathcal{B}$. En effet, $A^{(p)} \cap C^{(q)} \in T_1 \times T_2$ pour tout p et tout q (car $T_1 \times T_2$ est stable par intersection finie) et $(A^{(p_1)} \cap C^{(q_1)}) \cap (A^{(p_2)} \cap C^{(q_2)}) = \emptyset$ si $(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$ (car $A^{(p_1)} \cap A^{(p_2)} = \emptyset$ si $p_1 \neq p_2$ et $C^{(q_1)} \cap C^{(q_2)} = \emptyset$ si $q_1 \neq q_2$).

On a donc montré que $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés (a) et (b) de la question 1 de l'exercice 2.9, ce qui donne que $\mathcal{B}$ est bien une algèbre et que $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Corrigé 140 (Exemple de mesure produit)

Soit m_1 et m_2 des mesures σ -finies, non nulles, sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et t.q. $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = 0$, où $D = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$. Montrer qu'il existe $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $m_1 = \alpha \delta_a$ et $m_2 = \beta \delta_a$, où δ_a est la mesure de Dirac en a .

corrigé

On remarque d'abord que $\mathbb{R}^2 \setminus D$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, donc appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. la quantité $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ est donc bien définie.

La construction de la mesure $m_1 \otimes m_2$ donne (voir la démonstration du théorème 7.1) :

$$m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = \int m_2(\mathbb{R} \setminus \{x\}) dm_1(x).$$

Cette égalité est aussi une conclusion du théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2) avec $f = 1_A$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus D$.

De l'hypothèse $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = 0$, on déduit donc que $m_2(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = 0$ m_1 -p.p.. Comme $m_1(\mathbb{R}) \neq 0$, il existe donc $a \in \mathbb{R}$ t.q. $m_2(\mathbb{R} \setminus \{a\}) = 0$. Ceci donne que $m_2 = \alpha \delta_a$ avec $\alpha = m_2(\{a\})$. Comme $m_2 \neq 0$, on a $\alpha > 0$.

Dans la construction de la mesure $m_1 \otimes m_2$ (démonstration du théorème 7.1), on aurait pu inverser les rôles de m_1 et m_2 . On aurait obtenu la même mesure $m_1 \otimes m_2$ (grâce à la partie "unicité" du théorème 7.1). On a donc aussi :

$$m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = \int m_1(\mathbb{R} \setminus \{x\}) dm_2(x).$$

(Cette égalité est aussi une conclusion du théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2) avec $f = 1_A$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus D$.)

Comme $m_2 = \alpha \delta_a$, on a donc $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = \alpha m_1(\mathbb{R} \setminus \{a\})$. De l'hypothèse $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = 0$, on déduit donc $m_1(\mathbb{R} \setminus \{a\}) = 0$, ce qui donne $m_1 = \beta \delta_a$ avec $\beta = m_1(\{a\})$. (On peut aussi remarquer que, comme $m_1 \neq 0$, on a $\beta > 0$.)

Corrigé 141 (Fonction non borélienne dont les traces sont boréliennes)

Pour $B \subset \mathbb{R}^2$, on note $t(B)$ l'ensemble des $x_1 \in \mathbb{R}$ t.q. $(x_1, 0) \in B$. On pose $T = \{B \subset \mathbb{R}^2; t(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(x) = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)^t$.

1. Montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ t.q. $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $B = A \times \{0\}$.
 - (a) Montrer que $B \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
 - (b) On pose $f = 1_B \circ g$. Montrer que la fonction f n'est pas une fonction borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ mais que les fonctions $f(x_1, \cdot)$ et $f(\cdot; x_2)$ sont boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

corrigé

En attente...

12.7.2 Fubini-Tonelli et Fubini

Corrigé 142 (Contre-exemple au théorème de Fubini)

Soit $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } x < y \leq 2x \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } 2x < y \leq 3x \\ 0 & \text{si } x > 0 \text{ et } y \notin]x, 3x[\\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \quad (12.130)$$

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -mesurable.

corrigé

On pose $A = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2; x > 0, x < y \leq 2x\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2; x > 0, x < y < 2x + \frac{1}{n}\}$. A_n est, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, il appartient donc à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On en déduit que $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

De même, en posant $B = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2; x > 0, 2x < y \leq 3x\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2; x > 0, 2x < y < 3x + \frac{1}{n}\}$, on montre que $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

On pose maintenant $g(x, y) = \frac{1}{(|x|+1)^2}$ pour $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$. La fonction g est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc mesurable ($\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ étant munis de la tribu borélienne).

On remarque maintenant que $f = g1_A - g1_B$. On en déduit que f est mesurable (car f est une somme de produits de fonctions mesurables).

2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, y) \in L^1$; on pose $\phi(y) = \int f(x, y) d\lambda(x)$. Montrer que $\phi \in L^1$.

corrigé

On note $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. La fonction $f(\cdot, y)$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (voir la proposition 7.2). Elle appartient aussi à $\mathcal{L}^1$ (et donc à L^1 en confondant $f(\cdot, y)$ avec sa classe dans L^1) car $\int |f(\cdot, y)| d\lambda = 0$ si $y \leq 0$ et $\int |f(\cdot, y)| d\lambda \leq y$ si $y > 0$ car $f(x, y) = 0$ si $x \notin [0, y]$ et $|f(x, y)| \leq 1$ pour tout x, y . On peut définir $\phi(y)$.

Pour $y \leq 0$, on a $\phi(y) = 0$ et pour $y > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \int f(\cdot, y) d\lambda = - \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} \frac{1}{(x+1)^2} dx + \int_{\frac{y}{2}}^y \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ &= -\frac{3}{y+3} + \frac{4}{y+2} - \frac{1}{y+1} \\ &= \frac{2y}{(y+3)(y+2)(y+1)}. \end{aligned}$$

La fonction ϕ est continue donc mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on peut donc calculer son intégrale sur $\mathbb{R}$:

$$\int \phi d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(-\frac{3}{y+3} + \frac{4}{y+2} - \frac{1}{y+1} \right) dy = -3 \ln 3 + 4 \ln(2).$$

Ceci donne bien, en particulier, $\phi \in L^1$ (en confondant ϕ avec sa classe dans L^1).

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, \cdot) \in L^1$; on pose $\psi(x) = \int f(x, y) d\lambda(y)$. Montrer que $\psi \in L^1$.

corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f(x, \cdot)$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (voir la proposition 7.2). Elle appartient aussi à $\mathcal{L}^1$ (et donc à L^1 en confondant $f(x, \cdot)$ avec sa classe dans L^1) car $\int |f(x, \cdot)| d\lambda = 0$ si $x \leq 0$ et $\int |f(x, \cdot)| d\lambda \leq 3x$ si $x > 0$ car $f(x, y) = 0$ si $y \notin [0, 3x]$ et $|f(x, y)| \leq 1$ pour tout x, y . On peut donc définir $\psi(x)$.

Pour $x \leq 0$, on a $\psi(x) = 0$ et pour $x > 0$, on a :

$$\psi(x) = \int f(x, \cdot) d\lambda = \int_x^{2x} \frac{1}{(x+1)^2} dy - \int_{2x}^{3x} \frac{1}{(x+1)^2} dy = 0$$

On a donc $\psi \in L^1$ et $\int \psi(x) dx = 0$.

4. Montrer que $\int \phi d\lambda \neq \int \psi d\lambda$ (ϕ et ψ sont définies dans les questions précédentes).

corrigé

On a déjà montré que $\int \phi d\lambda = -3 \ln 3 + 4 \ln(2) \neq 0 = \int \psi d\lambda$.

5. Pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique-t-il pas ici ?

corrigé

Le théorème de Fubini ne s'applique pas ici car la fonction f n'est pas intégrable pour la mesure produit, c'est-à-dire la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, notée λ_2 . On peut d'ailleurs le vérifier en remarquant (par le théorème de Fubini-Tonelli) que :

$$\int |f| d\lambda_2 = \int \left(\int |f(x, y)| d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_0^\infty \frac{2x}{(x+1)^2} dx = \infty.$$

Corrigé 143 (Intégrale d'une fonction positive)

Soit (E, T, m) un espace mesuré σ -fini, et $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application mesurable. On pose $F = 1_A$ avec $A = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times E; 0 < t < f(x)\}$.

1. Montrer que F est $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$ -mesurable

corrigé

Comme $f \in \mathcal{M}_+$, il existe $(f_n) \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \rightarrow \infty$. On a alors $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ avec $A_n = \{(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}; 0 < t < f_n(x)\}$. Pour montrer que F est mesurable (c'est-à-dire que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$), il suffit donc de montrer que $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit donc $n \in \mathbb{N}$. Il existe $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}_+^*$ et $B_1, \dots, B_p \in T$ t.q. $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $f_n = \sum_{i=1}^p a_i 1_{B_i}$. On a donc $A_n = \cup_{i=1}^p]0, a_i[\times B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$ car $]0, a_i[\times B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$ pour tout i .

2. Montrer que $\int f dm = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E; f(x) > t\}) dt$ et que $\int f dm = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E; f(x) \geq t\}) dt$. [Utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.]

corrigé

On peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2) à la fonction F , il donne :

$$\int \left(\int F(t, x) d\lambda(t) \right) dm(x) = \int \left(\int F(t, x) dm(x) \right) d\lambda(t). \quad (12.131)$$

Pour $x \in E$, $\int F(t, x) d\lambda(t) = \lambda([0, f(x)[) = f(x)$.

Pour $t \in \mathbb{R}$. Si $t \leq 0$, on a $F(t, \cdot) = 0$. Donc, $\int F(t, x) dm(x) = 0$. Si $t > 0$, on a $F(t, \cdot) = 1_{\{f > t\}}$. Donc, $\int F(t, x) dm(x) = m(\{f > t\})$.

On déduit donc de (12.131) :

$$\int f(x) dm(x) = \int_{\mathbb{R}_+} m(\{f > t\}) d\lambda(t) = \int_0^\infty m(\{x \in E; f(x) > t\}) dt.$$

Pour avoir l'égalité avec $m(\{f \geq t\})$ au lieu de $m(\{f > t\})$, on reprend le même raisonnement en remplaçant F par $G = 1_B$ avec $B = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times E; 0 < t \leq f(x)\}$. On remarque d'abord que B est $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$ -mesurable. En effet, on a $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$ avec $B_n = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times E; 0 < t < f_n(x)\}$ et $f_n = f + \frac{1}{n}$. Comme $f_n \in \mathcal{M}_+$, la première question donne $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$. On en déduit que $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$. On peut maintenant appliquer le théorème de Fubini-Tonelli à la fonction G , il donne :

$$\int (\int G(t, x) d\lambda(t)) dm(x) = \int (\int G(t, x) dm(x)) d\lambda(t). \quad (12.132)$$

Pour $x \in E$, $\int G(t, x) d\lambda(t) = \lambda([0, f(x)]) = f(x)$.

Pour $t \in \mathbb{R}$. Si $t \leq 0$, on a $G(t, \cdot) = 0$. Donc, $\int G(t, x) dm(x) = 0$. Si $t > 0$, on a $G(t, \cdot) = 1_{\{f \geq t\}}$. Donc, $\int G(t, x) dm(x) = m(\{f \geq t\})$.

On déduit donc de (12.132) :

$$\int f(x) dm(x) = \int_0^\infty m(\{x \in E; f(x) \geq t\}) dt.$$

Corrigé 144 (Une caractérisation de L^p)

On munit $\mathbb{R}$ [resp. $\mathbb{R}^2$] de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$].

Soit f une application mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on pose $A_y = \{x \in \mathbb{R}; |f(x)| > y\}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $A_y = \emptyset$.

1. Montrer que l'application $(x, y)^t \mapsto 1_{A_y}(x)$ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. [On pourra commencer par montrer que $\{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2; |f(x)| > y\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$.]

corrigé

On pose $B = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2; |f(x)| > y\}$, de sorte que $B = (F - G)^{-1}([0, \infty[)$ où F et G sont définies par :

$$F(x, y) = |f(x)|, G(x, y) = y, (x, y)^t \in \mathbb{R}^2.$$

La fonction $x \mapsto |f(x)|$ est mesurable (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ainsi que l'application $y \mapsto 1$ (application constante). La proposition 7.3 nous donne alors que F est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (puisque $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$). La fonction G est aussi mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (il suffit de remarquer qu'elle est continue, ou d'utiliser une nouvelle fois la proposition 7.3). La fonction $F - G$ est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, ce qui prouve que $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. La fonction 1_B est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

On remarque maintenant que $1_B(x, y)1_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+}(x, y) = 1_{A_y}(x)$ pour tout $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$. L'application $(x, y)^t \mapsto 1_{A_y}(x)$ est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ car elle est égale à un produit de fonctions mesurables.

Soit $p \in [1, \infty[$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $g_p(y) = |y|^{p-1}\lambda(A_y)$ (en convenant que $g_p(0) = 0$ si $\lambda(A_0) = \infty$).

2. (a) Montrer que l'application $(x, y)^t \mapsto |y|^{p-1}1_{A_y}(x)$ est mesurable positive de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

corrigé

L'application $(x, y)^t \mapsto |y|^{p-1}1_{A_y}(x)$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables. Cette application est, bien sûr, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Elle est donc mesurable positive de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

- (b) Montrer que g_p est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.]

corrigé

On pose $H(x, y) = |y|^{p-1}1_{A_y}(x)$ pour $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$. La question précédente donne que $H \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2) à la fonction H , il donne :

$$\int \left(\int H(x, y) d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = \int \left(\int H(x, y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x). \quad (12.133)$$

Pour $y \in \mathbb{R}$, on a $\int H(x, y) d\lambda(x) = |y|^{p-1}\lambda(A_y) = g_p(y)$ (en convenant que $g_p(0) = 0$ si $\lambda(A_0) = \infty$). Ceci donne, en particulier, que g_p est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (car l'une des conclusions du théorème 7.2 est que $y \mapsto \int H(x, y) d\lambda(x)$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$).

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\int H(x, y) d\lambda(y) = \int |y|^{p-1}1_{[0, |f(x)|]}(y) d\lambda(y) = \int_0^{|f(x)|} |y|^{p-1} dy = \frac{1}{p} |f(x)|^p$.

L'égalité (12.133) donne alors :

$$\int g_p d\lambda = \frac{1}{p} \int |f|^p d\lambda. \quad (12.134)$$

Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on remarque d'abord que g_p prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ car $\lambda(A_y) \leq \frac{1}{|y|^p} \int |f|^p d\lambda < \infty$ pour tout $y > 0$. La fonction g_p est donc mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et (12.134) donne alors que $g_p \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Réciproquement, si $g_p \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, (12.134) donne que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

On a donc bien montré :

$$g_p \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda).$$

12.7.3 Mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

Corrigé 145 (Propriétés élémentaires de λ_N)

Soit $N \geq 2$. On rappelle que λ_N est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

1. Soit $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i)$.

corrigé

On va démontrer cette question en supposant tout d'abord que $\lambda(A_i) < \infty$ pour tout i . Le cas général s'obtient alors en utilisant $A_i \cap [-p, p]$ au lieu de A_i et en faisant ensuite tendre p vers l'infini. On obtient bien la propriété voulue (en convenant que $0 \times \infty = 0$). Cette méthode est décrite dans la remarque 7.2.

On démontre donc, par récurrence sur N , la propriété suivante :

$$\begin{aligned} A_1, \dots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda(A_i) < \infty \text{ pour tout } i \Rightarrow \\ \prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \text{ et } \lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i). \end{aligned} \quad (12.135)$$

La propriété (12.135) est vraie pour $N = 2$. En effet, on sait que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (proposition 7.1) et que $\lambda_2 = \lambda \otimes \lambda$ (définition 7.3). On a donc bien (avec la définition d'une mesure produit, théorème 7.1) :

$$A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda(A_1) < \infty, \lambda(A_2) < \infty \Rightarrow A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \text{ et } \lambda_2(A_1 \times A_2) = \lambda(A_1)\lambda(A_2).$$

On suppose maintenant que la propriété (12.135) est vraie pour un certain $N \geq 2$, et on la démontre pour $N + 1$.

Soit donc $A_1, \dots, A_{N+1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(A_i) < \infty$ pour tout i . Par (12.135), on a $\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i)$. On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N+1}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (proposition 7.1) et que $\lambda_{N+1} = \lambda_N \otimes \lambda$ (définition 7.3). On en déduit que $\prod_{i=1}^{N+1} A_i = (\prod_{i=1}^N A_i) \times A_{N+1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N+1})$ et

$$\lambda_{N+1}(\prod_{i=1}^{N+1} A_i) = \lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) \lambda(A_{N+1}) = \prod_{i=1}^{N+1} \lambda(A_i).$$

ce qui donne bien (12.135) avec $N + 1$ au lieu de N et termine donc la démonstration par récurrence.

2. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ et $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha_i < \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Montrer que $\lambda_N(\prod_{i=1}^N]\alpha_i, \beta_i[) = \prod_{i=1}^N \lambda(]\alpha_i, \beta_i[)$.

corrigé

Cette question est une conséquence immédiate de la précédente en prenant $A_i =]\alpha_i, \beta_i[$.

3. Soit K est un compact de $\mathbb{R}^N$ (noter que $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$). Montrer que $\lambda_N(K) < +\infty$.

corrigé

Comme K est compact, il est borné. Il existe donc $a \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $K \subset \prod_{i=1}^N]-a, a[$. On en déduit que $\lambda_N(K) \leq \lambda_N(\prod_{i=1}^N]-a, a[) = \prod_{i=1}^N \lambda(]-a, a[) = (2a)^N < \infty$.

4. Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$. Montrer que $\lambda_N(O) > 0$.

corrigé

Soit $x = (x_1, \dots, x_N)^t \in O$. Comme O est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $\prod_{i=1}^N]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\subset O$. On a donc $\lambda_N(O) \geq \lambda_N(\prod_{i=1}^N]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[) = \prod_{i=1}^N \lambda(]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[) = (2\varepsilon)^N > 0$.

5. Soit $f, g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer que $f = g$ p.p. (c'est-à-dire λ_N -p.p.) implique $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

corrigé

Soit $O = \{f \neq g\} = \{x \in \mathbb{R}^N; f(x) \neq g(x)\}$. Comme f et g sont continues, O est ouvert. Comme $f = g$ p.p., on a nécessairement $\lambda_N(O) = 0$. Enfin, la question précédente donne alors que $O = \emptyset$ et donc que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

6. Montrer que $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

corrigé

Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Comme f est continue, on a f mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}$ étant munis de leur tribu borélienne, on dit aussi que f est borélienne). Comme f est à support compact, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $f = 0$ sur K^c avec $K = \prod_{i=1}^N [-a, a]$. Enfin, f est bornée, il existe donc M t.q. $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. On en déduit que $\int |f| d\lambda_N \leq M(2a)^N < \infty$ et donc que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

Corrigé 146 (Régularité de λ_N)

Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $m(K) < \infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$. (noter que ceci est vrai pour $m = \lambda_N$.)

1. Soient $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe O ouvert de $\mathbb{R}^N$ et F fermé de $\mathbb{R}^N$ tels que :

$$F \subset A \subset O \text{ et } m(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$

corrigé

On reprend ici la démonstration de la régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts (théorème 2.3).

On appelle T l'ensemble des $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé vérifiant $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. On va montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{C} = \{\prod_{i=1}^N]a_i, b_i[, -\infty < a_i < b_i < \infty \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N\}\}$. Comme $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (voir l'exercice 2.7, ou le corrigé 15, il est même démontré qu'on peut, dans la définition de $\mathcal{C}$, se limiter au cas où les a_i et b_i sont dans $\mathbb{Q}$), ceci donnera $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

On démontre tout d'abord que $\mathcal{C} \subset T$. Soit $-\infty < a_i < b_i < \infty$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ et $A = \prod_{i=1}^N]a_i, b_i[$. Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $(2/n_0) < b_i - a_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Pour $n \geq n_0$, on pose $F_n = \prod_{i=1}^N [a_i + (1/n), b_i - (1/n)]$ et $O = A$. On a bien F_n fermé, O ouvert et $F_n \subset A \subset O$. On remarque ensuite que $O \setminus F_n \subset C_n$ avec :

$$C_n = \cup_{q=1}^N C_{n,q}, \quad C_{n,q} = \prod_{i=1}^N I_{i,q}^{(n)},$$

$$I_{i,q}^{(n)} =]a_i, b_i[\text{ si } i \neq q, \quad I_{q,q}^{(n)} =]a_q, a_q + \frac{1}{n}[\cup]b_q - \frac{1}{n}, b_q[.$$

Soit $q \in \{1, \dots, N\}$. Comme $C_{n+1,q} \subset C_{n,q}$ (pour tout $n \geq n_0$), $\cap_{n \geq n_0} C_{n,q} = \emptyset$ et $m(C_{n,q}) \leq m(\prod_{i=1}^N [a_i, b_i]) < \infty$ (car m est finie sur les compacts), on peut utiliser la propriété de continuité décroissante d'une mesure. On obtient $m(C_{n,q}) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. On a alors aussi $m(C_n) \leq \sum_{q=1}^N m(C_{n,q}) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Il existe donc n t.q. $m(C_n) < \varepsilon$. On prenant $F = F_n$, on a bien alors O ouvert, F fermé et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. Ce qui montre que $A \in T$ et donc que $\mathcal{C} \subset T$.

On montre maintenant que T est une tribu. On remarque tout d'abord que $\emptyset \in T$ (il suffit de prendre $F = O = \emptyset$) et que T est stable par passage au complémentaire (car, si $F \subset A \subset O$, on a $O^c \subset A^c \subset F^c$ et $F^c \setminus O^c = O \setminus F$). Il reste à montrer que T est stable par union dénombrable.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ et $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. On veut montrer que $A \in T$. On va commencer par traiter le cas (simple) où $m(A) < \infty$ puis le cas (plus difficile) où $m(A) = \infty$.

Premier cas. On suppose que $m(A) < \infty$. La démonstration est ici identique à celle faite pour $N = 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe O_n ouvert et F_n fermé t.q. $F_n \subset A_n \subset O_n$ et $m(O_n \setminus F_n) \leq (\varepsilon/2^n)$. On pose $O = \cup_{n \in \mathbb{N}} O_n$ et $\tilde{F} = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. On a $\tilde{F} \subset A \subset O$, $m(O \setminus \tilde{F}) \leq 2\varepsilon$, car $(O \setminus \tilde{F}) \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} (O_n \setminus F_n)$, et O ouvert mais $\tilde{F}$ n'est pas nécessairement fermé...

Cependant, puisque $m(A) < \infty$, on a aussi $m(\tilde{F}) < \infty$. Par continuité croissante de m on a $m(\cup_{p=0}^n F_n) \rightarrow m(\tilde{F})$, quand $n \rightarrow \infty$, d'où (puisque $m(\tilde{F}) < \infty$) $m(\tilde{F}) - m(\cup_{p=0}^n F_n) \rightarrow 0$. On prend alors $F = \cup_{p=0}^n F_n$ avec n assez grand pour que $m(\tilde{F}) - m(F) \leq \varepsilon$. On a bien $F \subset A \subset O$, O ouvert, F fermé et $m(O \setminus F) \leq 3\varepsilon$. Ceci prouve que $A \in T$.

Deuxième cas. On suppose maintenant que $m(A) = \infty$ (et le raisonnement précédent n'est plus correct si $m(\tilde{F}) = \infty$). On raisonne en 3 étapes, en adaptant la démonstration faite pour $N = 1$:

- (a) Soit $p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$. On remarque d'abord que $A_n \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[\in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A_n \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc :

$$F_k = F \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1 - \frac{1}{k}] \subset A_n \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[\subset O_k = O \cap \prod_{i=1}^N [p_i - \frac{1}{k}, p_i + 1[.$$

On a F_k fermé, O_k ouvert et $(O_k \setminus F_k) \subset (O \setminus F) \cup D_k$, avec :

$$D_k = \cup_{q=1}^N D_{k,q}, \quad D_{k,q} = \prod_{i=1}^N J_{i,q}^{(k)},$$

$$J_{i,q}^{(k)} =]p_i - \frac{1}{k}, p_i + 1[\text{ si } i \neq q, \quad J_{q,q}^{(k)} =]p_q - \frac{1}{k}, p_q[\cup]p_q + 1 - \frac{1}{k}, p_q + 1[.$$

En utilisant la continuité décroissante de m et le fait que m est finie sur les compacts (ce qui donne $m(D_k) \leq m(\prod_{i=1}^N [p_i - 1, p_i + 1]) < \infty$), on démontre (comme pour les C_n précédemment) que $m(D_k) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$. Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ t.q. $m(D_k) \leq \varepsilon$ et donc $m(O_k \setminus F_k) \leq m(O \setminus F) + m(D_k) \leq 2\varepsilon$. Ce qui donne bien que $A_n \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[\in T$.

- (b) Soit $p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$. Comme $m(A \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1]) < \infty$, on peut maintenant utiliser le premier cas avec $A \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[= \cup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1])$. Il donne que $A \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[\in T$ pour tout $p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$.
- (c) On montre enfin que $A \in T$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$, il existe un ouvert O_p et un fermé F_p t.q. $F_p \subset A \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[\subset O_p$ et $m(O_p \setminus F_p) \leq \varepsilon/(2^{|p|})$, en posant $|p| = \sum_{i=1}^N |p_i|$. On prend $O = \cup_{p \in \mathbb{Z}^N} O_p$ et $F = \cup_{p \in \mathbb{Z}^N} F_p$. On obtient $F \subset A \subset O$, $m(O \setminus F) \leq 3^N \varepsilon$ et O est ouvert. Il reste à montrer que F est fermé.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ t.q. $x_n \rightarrow x$ (dans $\mathbb{R}^N$) quand $n \rightarrow \infty$. On veut montrer que $x \in F$. Il existe $p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$ t.q. $x \in \prod_{i=1}^N]p_i - 1, p_i + 1[$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n \in \prod_{i=1}^N]p_i - 1, p_i + 1[$ pour tout $n \geq n_0$. Comme $x_n \in \cup_{q \in \mathbb{Z}^N} F_q$ et que $F_q \subset \prod_{i=1}^N [q_i, q_i + 1[$ pour tout $q = (q_1, \dots, q_N)^t \in \mathbb{Z}^N$, on a donc $x_n \in \cup_{q \in E_p} F_q$, pour tout $n \geq n_0$, où $E_p = \{q = (q_1, \dots, q_N)^t \in \mathbb{Z}^N; q_i \in \{p_i, p_i - 1\} \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N\}\}$. Comme E_p est de cardinal fini et que F_q est fermé pour tout q , l'ensemble $\cup_{q \in E_p} F_q$ est donc aussi fermé, on en déduit que $x \in \cup_{q \in E_p} F_q \subset F$ et donc que F est fermé.

Ceci montre bien que $A \in T$ et termine la démonstration du fait que T est une tribu. Comme cela a déjà été dit, on en déduit que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

2. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Dédire de la question précédente que $m(A) = \inf\{m(O), O \text{ ouvert t.q. } A \subset O\}$.

corrigé

Par monotonie de m on a $m(A) \leq m(O)$ si $A \subset O$, donc $m(A) \leq \inf\{m(O), O \text{ ouvert t.q. } A \subset O\}$. Il reste donc à montrer que $m(A) \geq \inf\{m(O), O \text{ ouvert t.q. } A \subset O\}$.

Soit $\varepsilon > 0$, d'après la question précédente, il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. On a donc aussi $m(O \setminus A) \leq \varepsilon$ et donc $m(O) = m(A) + m(O \setminus A) \leq m(A) + \varepsilon$. Ceci montre bien que $\inf\{m(O), O \text{ ouvert t.q. } A \subset O\} \leq m(A)$.

Corrigé 147 (Densité de C_c et C_c^∞ dans L^1)

Soit $d \geq 1$ et μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que μ vérifie les deux propriétés suivantes :

- (p1) μ est finie sur les compacts de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire que $\mu(K) < +\infty$ si K est un compact de $\mathbb{R}^d$,
 (p2) μ est régulière, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

En fait, la propriété (p1) entraîne la propriété (p2) (voir la proposition 7.5) mais cette démonstration n'est pas demandée ici.

On note $\mathcal{L}_\mu^1$ l'espace $\mathcal{L}_\mathbb{R}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$. Pour $f \in \mathcal{L}_\mu^1$, on note $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $|x|$ la norme euclidienne de x .

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire φ continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact). Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}_\mu^1$.
2. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\eta > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $\varphi(x) = \frac{(\eta - d(x, K))^+}{\eta}$ avec $d(x, K) = \inf\{|x - y|, y \in K\}$. Montrer que $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et que $\varphi(x) = 1$ si $x \in K$.
3. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\mu(A) < +\infty$.
 - (a) Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe O ouvert et K compact t.q. $K \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus K) \leq \varepsilon$.
 - (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|\varphi - 1_A\|_1 \leq \varepsilon$.
4. Soit f une fonction borélienne positive de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \in \mathcal{L}_\mu^1$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra approcher f par une fonction étagée.]
5. (Densité.) Soit $f \in \mathcal{L}_\mu^1$ et $\varepsilon > 0$.
 - (a) Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$.
 - (b) Montrer qu'il existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra montrer que, si $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a $\|\varphi - \varphi_n\|_1 \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$, avec $\varphi_n = \varphi \star \rho_n$ et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille régularisante, voir la définition 8.4.]
6. (Continuité en moyenne ?)
 - (a) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.
 - (b) Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement f et μ) qu'on peut avoir $f \in \mathcal{L}_\mu^1$ et $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \not\rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.
7. On suppose maintenant que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et que μ est une mesure sur les boréliens de Ω , finie sur les sous ensembles compacts de Ω . Indiquer brièvement comment on peut montrer la densité de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ et $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L_\mathbb{R}^1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$.

corrigé

En Attente...

Corrigé 148 (Invariance par translation de λ_N)

Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ et $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \dots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$, on pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \dots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$, de sorte que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$.

1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, montrer que $\varphi(A) = \{\varphi(x), x \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

corrigé

On pose $T = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \text{ t.q. } \varphi(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\}$.

Comme φ est bijective, il est facile de montrer que T est une tribu. En effet, il suffit de remarquer que $\varphi(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$, $\varphi(A^c) = (\varphi(A))^c$ et $\varphi(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A_n)$.

Comme φ est continue, φ transforme les compacts en compacts. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^N$, on a donc $\mathcal{C} \subset T$ (on rappelle que les compacts sont des boréliens). Comme l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^N$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (noter que tout ouvert peut s'écrire comme une réunion dénombrable de compacts), on a donc $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Ce qui donne bien $\varphi(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

2. Montrer que $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \lambda_N(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. [On pourra faire une récurrence sur N : La proposition 2.9 donne le résultat pour la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée λ . On suppose que le résultat est vrai pour λ_{N-1} (et pour toute famille $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R}^*$, $\beta_1, \dots, \beta_{N-1} \in \mathbb{R}$). On le démontre alors pour λ_N en posant $m(A) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A))$ et en montrant que m est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ égale à λ_N sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On utilise pour conclure la partie “unicité” du théorème 7.1 sur la mesure produit.]

corrigé

On procède par récurrence sur N . La proposition 2.9 donne le résultat pour la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire pour $N = 1$ en posant $\lambda_1 = \lambda$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour $N - 1$ avec un certain $N \geq 2$, c'est-à-dire que $\lambda_{N-1}(\psi(B)) = \prod_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \lambda_{N-1}(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R}^*$, $\beta_1, \dots, \beta_{N-1} \in \mathbb{R}$ et ψ définie par $\psi(y) = (\alpha_1 y_1 + \beta_1, \dots, \alpha_{N-1} y_{N-1} + \beta_{N-1})^t$ pour tout $y = (y_1, \dots, y_{N-1})^t \in \mathbb{R}^{N-1}$, et on démontre le résultat pour N .

Soit donc $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$, $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{R}$ et φ définie par $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \dots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ pour tout $x = (x_1, \dots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$.

Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on pose $m(A) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A))$.

On montre tout d'abord que m est une mesure. On a bien $m(\emptyset) = 0$ car $\varphi(\emptyset) = \emptyset$. Puis, soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ avec $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On a $\varphi(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A_n)$ avec $\varphi(A_n) \cap \varphi(A_m) = \emptyset$ si $n \neq m$ (car φ est bijective). Donc, $\lambda_N(\varphi(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_N(\varphi(A_n))$ et donc $m(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n)$. Ce qui prouve la σ -additivité de m et donc le fait que m est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

On montre maintenant que $m(A_1 \times A_2) = \lambda_{N-1}(A_1) \lambda(A_2)$ pour tout $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$ et pour tout $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ et $\lambda(A_2) < \infty$.

Soit donc $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$ et $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ et $\lambda(A_2) < \infty$. On a $m(A_1 \times A_2) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A_1 \times A_2))$.

On pose $\psi(y) = (\alpha_1 y_1 + \beta_1, \dots, \alpha_{N-1} y_{N-1} + \beta_{N-1})^t$, pour tout $y = (y_1, \dots, y_{N-1})^t \in \mathbb{R}^{N-1}$, et $\tau(z) = \alpha_N z + \beta_N$, pour tout $z \in \mathbb{R}$. On a donc $\varphi(A_1 \times A_2) = \psi(A_1) \times \tau(A_2)$. L'hypothèse de récurrence et la proposition 2.9 donne que $\lambda_{N-1}(\psi(A_1)) = \prod_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ et que $\lambda(\tau(A_2)) = \alpha_N \lambda(A_2) < \infty$. Comme $\lambda_N = \lambda_{N-1} \otimes \lambda$ (car c'est la définition de λ_N) on en déduit :

$$\lambda_N(\varphi(A_1 \times A_2)) = \lambda_{N-1}(\psi(A_1)) \lambda(\tau(A_2)) = \prod_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \lambda_{N-1}(A_1) \alpha_N \lambda(A_2),$$

et donc :

$$m(A_1 \times A_2) = \left(\prod_{i=1}^N |\alpha_i| \right)^{-1} \lambda_N(\varphi(A_1 \times A_2)) = \lambda_{N-1}(A_1) \lambda(A_2).$$

On peut maintenant conclure. Comme m est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vérifiant $m(A_1 \times A_2) = \lambda_{N-1}(A_1) \lambda(A_2)$ pour tout $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$ et pour tout $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ et $\lambda(A_2) < \infty$, la partie “unicité” du théorème 7.1 donne que $m = \lambda_{N-1} \otimes \lambda$, c'est-à-dire $m = \lambda_N$. On a donc bien $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \lambda_N(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Corrigé 149 (Changement de variables simple)

Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ et $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \dots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$. On pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \dots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ (de sorte que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$).

1. Soit $f \in \mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{E}_+$ et que $\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N$. [Utiliser l'exercice 7.14.]

corrigé

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $f = 1_A$. On a alors $f \circ \varphi = 1_B$ avec $B = \varphi^{-1}(A)$. En appliquant l'exercice 7.14 (corrigé 148) à l'inverse de φ , noté ψ , on a donc $\lambda_N(B) = \lambda_N(\psi(A)) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(A)$, c'est-à-dire :

$$\int f d\lambda_N = \lambda_N(A) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \lambda_N(B) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f \circ \varphi d\lambda_N.$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{E}_+ \setminus \{0\}$. Il existe donc $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i f_i$, avec $f_i = 1_{A_i}$. On a alors, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int f d\lambda_N &= \sum_{i=1}^n a_i \int f_i d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \sum_{i=1}^n a_i \int f_i \circ \varphi d\lambda_N \\ &= (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int \sum_{i=1}^n a_i f_i \circ \varphi d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f \circ \varphi d\lambda_N. \end{aligned}$$

(Ce qui est, bien sûr, aussi vrai si $f = 0$.)

-
2. Soit $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$ et que $\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N$.

corrigé

Il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \rightarrow \infty$. On a donc aussi $(f_n \circ \varphi)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ et $f_n \circ \varphi \uparrow f \circ \varphi$ quand $n \rightarrow \infty$ (ce qui donne, en particulier que $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$). La question précédente donne :

$$\int f_n d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f_n \circ \varphi d\lambda_N.$$

La définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors, quand $n \rightarrow \infty$:

$$\int f d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f \circ \varphi d\lambda_N.$$

-
3. Soit $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1$ et que $\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N$.

corrigé

Comme f est mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ et φ est mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ ($\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}$ étant munis de leur tribu borélienne), on a bien $f \circ \varphi$ mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.

En appliquant la question précédente à la fonction $|f|$ on obtient que $\int |f| \circ \varphi d\lambda_N = \int |f \circ \varphi| d\lambda_N < \infty$ car $\int |f| d\lambda_N < \infty$. On a donc $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1$.

Enfin, en remarquant que $(f \circ \varphi)^+ = f^+ \circ \varphi$ et $(f \circ \varphi)^- = f^- \circ \varphi$ et en utilisant la question précédente avec f^+ et f^- , on obtient :

$$\begin{aligned}\int f^+ d\lambda_N &= \left(\prod_{i=1}^N |\alpha_i|\right) \int f^+ \circ \varphi d\lambda_N, \\ \int f^- d\lambda_N &= \left(\prod_{i=1}^N |\alpha_i|\right) \int f^- \circ \varphi d\lambda_N.\end{aligned}$$

En faisant la différence, on en déduit :

$$\int f d\lambda_N = \left(\prod_{i=1}^N |\alpha_i|\right) \int f \circ \varphi d\lambda_N.$$

Corrigé 150 (Primitives de fonctions L^p)

Soit $p \in [1, \infty[$. On note $L^p = L^p_{\mathbb{R}}([0, 1[, \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. Soit $f, g \in L^p$. On définit F et G de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (= \int_{]0, x[} f d\lambda), \quad G(x) = \int_0^x g(t) dt \quad (= \int_{]0, x[} g d\lambda), \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

1. Montrer que F et G sont des fonctions continues et qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|F(y) - F(x)| \leq C|y - x|^{1-\frac{1}{p}}$ et $|G(y) - G(x)| \leq C|y - x|^{1-\frac{1}{p}}$, pour tous $x, y \in [0, 1]$, $x < y$.

corrigé

On note $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}([0, 1[, \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. F (et G) sont bien définies partout sur $[0, 1]$ car $f1_{[0, x]} \in L^1$ (et $g1_{[0, x]} \in L^1$) pour tout $x \in [0, 1]$ (on confond, comme d'habitude, un élément de L^1 ou L^p avec l'un de ses représentants).

Soit $x, y \in [0, 1]$, $x < y$. En utilisant l'inégalité de Hölder avec f et $1_{[x, y]}$, on obtient, avec $q = p/(p-1)$:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int f 1_{[x, y]} d\lambda \right| \leq \|f\|_p \|1_{[x, y]}\|_q \leq \|f\|_p |y - x|^{1-\frac{1}{p}}. \quad (12.136)$$

On a de même :

$$|G(y) - G(x)| \leq \|g\|_p |y - x|^{1-\frac{1}{p}}. \quad (12.137)$$

Ce qui donne les inégalités demandées en prenant $C = \max(\|f\|_p, \|g\|_p)$.

Les inégalités (12.136) et (12.137) donnent aussi la continuité (uniforme) de F et G lorsque $p > 1$ (et donc $1 - (1/p) > 0$), mais pas pour $p = 1$.

Pour $p = 1$, on montre la continuité de F (et de G par un raisonnement semblable) en remarquant que, pour $x, y \in [0, 1]$, $x < y$:

$$|F(y) - F(x)| \leq \int |f| 1_{[x, y]} d\lambda \rightarrow 0, \quad \text{quand } \lambda([x, y]) = y - x \rightarrow 0,$$

ceci découle de l'exercice 4.14 et donne même la continuité uniforme de F comme cela a été démontré dans l'exercice 5.7.

2. On suppose $p > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Montrer que, pour tout $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a $(F(x), G(x)) \in A_{n,k} \times B_{n,k}$, où $A_{n,k}$ et $B_{n,k}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$ (indépendants de x) dont les longueurs tendent vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. [Utiliser la question 1.]

corrigé

On pose toujours $C = \max(\|f\|_p, \|g\|_p)$. Pour $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a, avec $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} > 0$:

$$|F(x) - F(\frac{k}{n})| \leq C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}, \quad |G(x) - G(\frac{k}{n})| \leq C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}.$$

On en déduit que $(F(x), G(x)) \in A_{n,k} \times B_{n,k}$ avec :

$$A_{n,k} = [F(\frac{k}{n}) - C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}, F(\frac{k}{n}) + C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}], \quad B_{n,k} = [G(\frac{k}{n}) - C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}, G(\frac{k}{n}) + C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}].$$

On a bien $\lambda(A_{n,k}) = \lambda(B_{n,k}) = 2C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

3. On suppose $p > 2$. Montrer que $E = \{(F(x), G(x)); x \in [0, 1]\}$ est une partie négligeable de $\mathbb{R}^2$ (muni de la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$). [En utilisant une majoration convenable des longueurs de $A_{n,k}$ et $B_{n,k}$, inclure E (pour tout $n \in \mathbb{N}$) dans une partie de $\mathbb{R}^2$ dont la mesure de Lebesgue tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.]

corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \cup_{k=0}^{n-1} A_{n,k} \times B_{n,k} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La question précédente donne $E \subset H_n$. On en déduit que $E \subset H$ avec $H = \cap_{n \in \mathbb{N}} H_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

On utilise maintenant l'hypothèse $p > 2$ pour montrer que $\lambda_2(H) = 0$ (et donc que E est négligeable). En effet, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \lambda_2(H) &\leq \lambda_2(H_n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_2(A_{n,k} \times B_{n,k}) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(A_{n,k}) \lambda(B_{n,k}) \\ &\leq n 4C^2 \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{q}} = 4C^2 n^{1-\frac{2}{q}}, \end{aligned}$$

avec $C = \max(\|f\|_p, \|g\|_p)$ et $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. Comme $p > 2$, on a $q < 2$ et donc $n^{1-\frac{2}{q}} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Ceci donne que $\lambda_2(H_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ et donc que $\lambda_2(H) = 0$.

12.7.4 Convolution

Corrigé 151 (Propriétés élémentaires de la convolution)

Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

1. Montrer que $f \star g = g \star f$ p.p.. [Utiliser l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue et sa conséquence pour les changements de variables simples (propositions 7.7 et 7.8).]

corrigé

On confond, comme d'habitude f (et g) avec l'un de ses représentants, et on choisit comme représentant de $f \star g$ (qui est définie comme un élément de $L^1(\mathbb{R}^N)$) la fonction définie par $f \star g(x) = \int f(y)g(x-y)d\lambda_N(y)$ si $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On sait que cette fonction est définie p.p. car $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$. On choisit de manière analogue comme représentant de $g \star f$ la fonction définie par $g \star f(x) = \int g(y)f(x-y)d\lambda_N(y)$ si $g(\cdot)f(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^N$ un point pour lequel $f \star g$ est définie. On a donc $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On pose $h(\cdot) = f(\cdot)g(x-\cdot)$. On utilise alors la proposition 7.8 (changement de variables simples) avec φ définie par $\varphi(y) = -y + x$ pour tout $y \in \mathbb{R}^N$. Elle donne $h \circ \varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et :

$$\int h(\varphi(y))d\lambda_N(y) = \int h(y)d\lambda_N(y).$$

Comme $h(\varphi(y)) = f(\varphi(y))g(x-\varphi(y)) = f(x-y)g(y)$, on en déduit que $g \star f$ est définie au point x et que $g \star f(x) = f \star g(x)$.

Ceci montre bien que $f \star g = g \star f$ p.p..

2. On suppose que f et g sont à support compact (f à support compact signifie qu'il existe K , compact de $\mathbb{R}^N$, t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c). Montrer que la fonction $f \star g$ est alors aussi à support compact. [On désigne par $B(0, \alpha)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon α . Comme f et g sont à support compact, il existe a et $b \in \mathbb{R}_+$ tels que $f = 0$ p.p. sur $B(0, a)^c$ et $g = 0$ p.p. sur $B(0, b)^c$. Montrer que $f \star g = 0$ p.p. sur $B(0, a+b)^c$.]

corrigé

Comme pour la question précédente, on confond f (et g) avec l'un de ses représentants, et on choisit comme représentant de $f \star g$ la fonction définie par $f \star g(x) = \int f(y)g(x-y)d\lambda_N(y)$ si $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ t.q. $f = 0$ p.p. sur $B(0, a)^c$ et $g = 0$ p.p. sur $B(0, b)^c$. ($\mathbb{R}^N$ est muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$.)

Soit $x \in B(0, a+b)^c$. On va montrer que $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ p.p. (et donc que $f \star g(x) = 0$, noter aussi que $f(\cdot)g(x-\cdot)$ est mesurable car f et g le sont).

Comme $f = 0$ p.p. sur $B(0, a)^c$, on a aussi $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ p.p. sur $B(0, a)^c$. Comme $g = 0$ p.p. sur $B(0, b)^c$, on a $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ p.p. sur $B(x, b)^c$ (car $y \in B(x, b)^c \iff (x-y) \in B(0, b)^c$). On a donc :

$$f(\cdot)g(x-\cdot) = 0 \text{ p.p. sur } B(0, a)^c \cup B(x, b)^c. \quad (12.138)$$

Or $B(0, a) \cap B(x, b) = \emptyset$ car $y \in B(0, a) \cap B(x, b)$ implique $\|y\| < a$ et $\|x-y\| < b$ et donc $\|x\| = \|x-y+y\| < a+b$, en contradiction avec $x \in B(0, a+b)^c$. On a donc $B(0, a)^c \cup B(x, b)^c = (B(0, a) \cap B(x, b))^c = \mathbb{R}^N$ et (12.138) donne alors $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ p.p. et donc $f \star g$ est définie au point x et $f \star g(x) = 0$.

On a bien montré que $f \star g = 0$ p.p. sur $B(0, a+b)^c$ et donc que $f \star g$ est à support compact.

Corrigé 152 (Convolution $L^p - C_c^\infty$)

Soit $1 \leq p \leq \infty$. Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (ou $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$) et $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. On pourra se limiter au cas $N = 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $f(\cdot)\rho(x - \cdot)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On pose alors

$$f \star \rho(x) = \int f(\cdot)\rho(x - \cdot)d\lambda_N.$$

corrigé

On rappelle que $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ si $f \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ et $f1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$. On a donc $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ (pour tout $1 \leq p \leq \infty$) car si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$, on a bien $f \in \mathcal{M}$ et, grâce à l'inégalité de Hölder, $f1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ (et $\|f1_K\|_1 \leq \|f\|_p \|1_K\|_q < \infty$, avec $q = p/(p-1)$).

On suppose donc dans la suite de ce corrigé que $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ car cette hypothèse est plus générale que $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$. Pour simplifier la rédaction, on se limite au cas $N = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f(\cdot)\rho(x - \cdot)$ est mesurable (c'est-à-dire ici borélienne car $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu de Borel) car f est mesurable et $\rho(x - \cdot)$ est mesurable (car continue). Comme ρ est à support compact, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\rho = 0$ sur $[-a, a]^c$. On a donc $\rho(x - \cdot) = 0$ sur K_x^c avec $K_x = [x-a, x+a]$, ce qui permet de montrer que $f(\cdot)\rho(x - \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ car $|f(\cdot)\rho(x - \cdot)| \leq |f1_{K_x}| |\rho|_u$, avec $\|\rho\|_u = \max\{|\rho(z)|, z \in \mathbb{R}\} < \infty$, et $f1_{K_x} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

La fonction $f \star \rho$ est donc définie sur tout $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $f \star \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

corrigé

Comme dans la question précédente, on va utiliser $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\rho = 0$ sur $[-a, a]^c$ et $\|\rho\|_u = \max\{|\rho(z)|, z \in \mathbb{R}\}$ (on va aussi utiliser les normes des dérivées de ρ , $\|\rho^{(k)}\|_u$). On raisonne maintenant en 3 étapes.

Étape 1. On commence par montrer que $f \star \rho$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. La continuité de $f \star \rho$ en x_0 découle du théorème de continuité sous le signe $\int$, théorème 4.9. En effet, on pose, pour $x, y \in \mathbb{R}$:

$$F(x, y) = f(y)\rho(x - y).$$

On a $F(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f \star \rho(x) = \int F(x, \cdot)d\lambda$. La fonction F vérifie alors les 2 hypothèses suivantes :

- (a) $x \mapsto F(x, y)$ est continue en x_0 , pour tout $y \in \mathbb{R}$,
- (b) $|F(x, y)| \leq G(y)$ pour tout $x \in]x_0 - 1, x_0 + 1[$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, en prenant $G = |f1_K| \|\rho\|_u$ avec $K = [x_0 - 1 - a, x_0 + 1 + a]$.

Comme K est compact, on a $G \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et le théorème 4.9 donne bien la continuité de $f \star \rho$ en x_0 .

Etape 2. On montre maintenant que $f \star \rho$ est dérivable en tout point et que $(f \star \rho)' = f \star \rho'$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour montrer la dérivabilité de $f \star \rho$ en x_0 , on utilise le théorème de dérivabilité sous le signe $\int$, théorème 4.10. On reprend la même fonction F que dans l'étape 1, elle vérifie les 2 hypothèses suivantes :

- (a) $x \mapsto F(x, y)$ est dérivable pour tout $x \in]x_0 - 1, x_0 + 1[$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$,
- (b) $|\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)| = |f(y)\rho'(x-y)| \leq H(y)$ pour tout $x \in]x_0 - 1, x_0 + 1[$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, en prenant $H = \|f\|_K \|\rho'\|_u$ avec $K = [x_0 - 1 - a, x_0 + 1 + a]$.

Comme K est compact, on a $H \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et le théorème 4.10 donne bien la dérivabilité de $f \star \rho$ en x_0 et le fait que $(f \star \rho)'(x_0) = f \star \rho'(x_0)$.

Etape 3. On montre enfin que $f \star \rho \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour cela, on va montrer, par récurrence sur k , que $f \star \rho \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(f \star \rho)^{(k)} = f \star \rho^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (ce qui donne bien $f \star \rho \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

L'étape 1 montre que $f \star \rho \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (et on a bien $(f \star \rho)^{(0)} = f \star \rho = f \star \rho^{(0)}$). On suppose maintenant que $f \star \rho \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(f \star \rho)^{(k)} = f \star \rho^{(k)}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. L'étape 2 appliquée à $\rho^{(k)}$ (qui appartient aussi à $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) au lieu de ρ donne alors que $f \star \rho^{(k)}$ est dérivable et que sa dérivée est $f \star \rho^{(k+1)}$. L'étape 1 appliquée à $\rho^{(k+1)}$ donne que $f \star \rho^{(k+1)} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a donc bien finalement montré que $f \star \rho \in C^{k+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(f \star \rho)^{(k+1)} = f \star \rho^{(k+1)}$. Ce qui termine la récurrence.

3. On suppose maintenant que f est à support compact, c'est à dire qu'il existe un compact de $\mathbb{R}$, noté K , t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c , montrer que $f \star \rho$ est aussi à support compact.

corrigé

Comme f et ρ sont à support compact, on démontre que $f \star \rho$ est aussi à support compact, comme cela a été fait dans l'exercice 7.19 (corrigé 151). Plus précisément, si $f = 0$ p.p. sur $B(0, a)^c$ et $\rho = 0$ sur $B(0, b)^c$, on a $f \star \rho = 0$ sur $B(0, a + b)^c$ (voir le corrigé 151).

Corrigé 153 (Inégalité de Young)

Soient $1 < p < +\infty$, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $g \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. Montrer que $f \star g$ est définie p.p., $f \star g \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$. [Ecrire $\int (\int |f(x-y)g(y)| dy)^p dx = \int (\int |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| dy)^p dx$, avec $q = \frac{p}{p-1}$. Appliquer l'inégalité de Hölder puis le théorème de Fubini-Tonelli].

corrigé

Pour simplifier les notations, on ne traite ici que le cas $N = 1$. On suppose aussi que f et g ne sont pas nulles p.p. (sinon, il est immédiat que $f \star g$ est définie partout et $f \star g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

On confond f et g avec l'un de leurs représentants.

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $H(x, y) = g(y)f(x-y)$. La première partie de la démonstration de la proposition sur la convolution (proposition 7.9) montre que H , et donc $|H|$, est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -mesurable. On peut alors utiliser les deux premières conclusions du théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2) pour affirmer que $|g(\cdot)f(x-\cdot)| \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $\varphi \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avec φ définie par $\varphi(x) = \int |g(\cdot)f(x-\cdot)| d\lambda$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par composition de fonctions mesurables, on a donc aussi $\varphi^p \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $|f(x - \cdot)|^{\frac{1}{q}}$ et $|f(x - \cdot)|^{\frac{1}{p}}|g(\cdot)|$ sont aussi mesurables. On peut alors utiliser l'inégalité de Hölder avec $q = p/(p-1)$. elle donne :

$$\begin{aligned} (\varphi(x))^p &= \left(\int |f(x - \cdot)|^{\frac{1}{q}} |f(x - \cdot)|^{\frac{1}{p}} |g(\cdot)| d\lambda \right)^p \leq \left(\int |f(x - \cdot)| d\lambda \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int |f(x - \cdot)|^p |g(\cdot)|^p d\lambda \right) \\ &\leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \left(\int |f(x - \cdot)|^p |g(\cdot)|^p d\lambda \right). \end{aligned} \quad (12.139)$$

Noter que (12.139) est vraie si $|f(x - \cdot)|^p |g(\cdot)|^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et si $|f(x - \cdot)|^p |g(\cdot)|^p \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Dans ce dernier cas on obtient seulement $\varphi(x)^p \leq \infty$. On a aussi utiliser la proposition 7.8 pour dire que $\int |f(x - \cdot)| d\lambda = \int |f| d\lambda = \|f\|_1$.

On peut maintenant utiliser le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2) avec les fonctions $|f|$ et $|g|^p$. Il donne :

$$\begin{aligned} \int \varphi(x)^p d\lambda(x) &\leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int \left(\int |f(x - \cdot)|^p |g(\cdot)|^p d\lambda \right) d\lambda(x) \\ &\leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int \left(\int |f(x - y)|^p |g(y)|^p d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \|f\|_1 \|g\|_p^p = \|f\|_1^p \|g\|_p^p. \end{aligned} \quad (12.140)$$

Ceci donne que $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et, en particulier que $\varphi(x) < \infty$ p.p., c'est-à-dire $\lambda(A) = 0$ avec $A = \{\varphi = \infty\}$ (noter que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ puisque $\varphi \in \mathcal{M}_+$). Pour tout $x \in A^c$, on a donc $g(\cdot)f(x - \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et on peut définir $g \star f(x)$ par $g \star f(x) = \int g(y)f(x - y)d\lambda(y)$.

La fonction $g \star f$ est donc définie p.p.. On remarque maintenant qu'elle est égale p.p. à une fonction mesurable. En effet, les fonctions H^+ et H^- sont $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -mesurables (d'après la première partie de la démonstration de la proposition 7.9, on rappelle que $H(x, y) = g(y)f(x - y)$). Les deux premières conclusions du théorème 7.2) donnent alors $(g(\cdot)f(x - \cdot))^{\pm} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avec φ_1 définie par $\varphi_1(x) = \int (g(\cdot)f(x - \cdot))^+ d\lambda$ et φ_2 définie par $\varphi_2(x) = \int (g(\cdot)f(x - \cdot))^- d\lambda$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose alors $h = \varphi_1 - \varphi_2$ sur A^c et $h = 0$ sur A . On a bien que h est mesurable (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et $h = g \star f$ p.p..

On remarque enfin que $h \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ car $|h| \leq \varphi$ p.p. et $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. On en déduit bien que $g \star f \in L^p(\mathbb{R})$ (avec la confusion habituelle entre $g \star f$ et la classe de h dans $L^p(\mathbb{R})$).

Le fait que $\|g \star f\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ est conséquence immédiate de (12.140) puisque $g \star f \leq \varphi$ p.p..

Enfin, le raisonnement fait dans la première question de l'exercice (7.19) montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\cdot)g(x - \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si $f(x - \cdot)g(\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et que ces deux fonctions ont alors même intégrale. Ceci permet de montrer que $f \star g$ est aussi définie p.p. et que $f \star g = g \star f$ p.p.

12.7.5 Changement de variables

Corrigé 154

- Vérifier que si $n \geq 1$ $\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^n \left(\int_0^\infty e^{-xt} dt \right) \sin x dx$.

corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue que $[0, n]$ en posant $\frac{\sin x}{x} = 1$ pour $x = 0$, elle est donc bien intégrable pour l'espace mesuré $([0, n], \mathcal{B}([0, n]), \lambda)$.

Pour tout $x > 0$, on a $e^{x\cdot} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$. Pour calculer $\int_0^\infty e^{-xt} dt$, on remarque que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\int_0^p e^{-xt} dt = \left[\frac{-e^{-xt}}{x} \right]_0^p = \frac{1}{x} - \frac{e^{-xp}}{x}$. Quand $p \rightarrow \infty$, on en déduit, avec le théorème de convergence monotone, que $\int_0^\infty e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$. On obtient bien :

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^n \left(\int_0^\infty e^{-xt} dt \right) \sin x dx.$$

2. Calculer $F_n(t) = \int_0^n e^{-xt} \sin x dx$ ($t \geq 0$).

corrigé

Pour $t = 0$, on a $\int_0^n e^{-xt} \sin x dx = \int_0^n \sin x dx = 1 - \cos n$. Donc, $F_n(0) = 1 - \cos n$.

Soit maintenant $t > 0$. Comme les fonctions $x \mapsto e^{-xt}$ et $x \mapsto \sin x$ sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, on peut calculer $\int_0^n e^{-xt} \sin x dx$ en intégrant deux fois par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^n e^{-xt} \sin x dx &= - \int_0^n t e^{-xt} \cos x dx - [e^{-xt} \cos x]_0^n \\ &= - \int_0^n t^2 e^{-xt} \sin x dx - [t e^{-xt} \sin x]_0^n - [e^{-xt} \cos x]_0^n. \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$(t^2 + 1) \int_0^n e^{-xt} \sin x dx = 1 - t e^{-nt} \sin n - e^{-nt} \cos n.$$

et donc :

$$F_n(t) = \int_0^n e^{-xt} \sin x dx = \frac{1 - t e^{-nt} \sin n - e^{-nt} \cos n}{t^2 + 1}.$$

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty F_n(t) dt$. (F_n est définie à la question précédente.)

corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc mesurable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \geq 0$, $t e^{-nt} \leq t e^{-t} \leq 1/e$. On en déduit :

$$|F_n(t)| \leq \left(2 + \frac{1}{e}\right) \frac{1}{t^2 + 1} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(en fait, on a même $0 \leq F_n(t) \leq \frac{1}{t^2 + 1}$.) Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2 + 1}$ est intégrable sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$, ceci donne que $F_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Enfin comme $F_n(t) \rightarrow \frac{1}{t^2 + 1}$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $t > 0$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il donne :

$$\int_0^\infty F_n(t) dt \rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{\pi}{2}, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

4. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit H de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $H(x, t) = e^{-xt} \sin x 1_{[0, n]}(x) 1_{[0, \infty]}(t)$.

La fonction H est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -mesurable et elle appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ car, par le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\int |H(x, t)| d\lambda_2(x, t) \leq \int_0^n |\sin x| \left(\int_0^\infty e^{-xt} dt \right) dx = \int_0^n \frac{|\sin x|}{x} dx < \infty,$$

car la fonction $x \mapsto \frac{|\sin x|}{x}$ est continue sur $[0, n]$ en posant $\frac{|\sin x|}{x} = 1$ pour $x = 0$, elle est donc bien intégrable pour l'espace mesuré $([0, n], \mathcal{B}([0, n]), \lambda)$.

On peut donc appliquer le théorème de Fubini à la fonction H , il donne, avec la première question :

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^n \left(\int_0^\infty e^{-xt} dt \right) \sin x dx = \int_0^\infty \left(\int_0^n e^{-xt} \sin x dx \right) dt = \int_0^\infty F_n(t) dt.$$

La question 3 donne alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty F_n(t) dt = \frac{\pi}{2}$.

Corrigé 155 (Coordonnées polaires)

1. Calculer $\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ (on rappelle que $dx dy$ désigne $d\lambda_2(x, y)$). [On pourra utiliser le passage en coordonnées polaires.]

corrigé

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} 1_{\mathbb{R}^+}(x) 1_{\mathbb{R}^+}(y)$. On a $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (noter que f est le produit de fonctions mesurables). On peut donc lui appliquer la formule (7.17) :

$$\int f(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\infty f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \right) d\theta.$$

On a donc :

$$\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda_2(x, y) = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr.$$

Puis, comme $\int_0^n e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2}(1 - e^{-n^2})$ et que, par le théorème de convergence monotone, $\int_0^n e^{-r^2} r dr \rightarrow \int_0^\infty e^{-r^2} r dr$ quand $n \rightarrow \infty$, on en déduit $\int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2}$ et donc :

$$\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda_2(x, y) = \pi.$$

2. Calculer $\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx$.

corrigé

On applique le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2) à la fonction f définie à la question précédente. Il donne :

$$\int f(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx,$$

et donc :

$$\pi = \int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda_2(x, y) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) e^{-x^2} dx = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2.$$

On en déduit que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Corrigé 156 (Cordonnées polaires dans $\mathbb{R}^N$)

On note S^{N-1} la sphère de centre 0 et rayon 1 dans $\mathbb{R}^N$ (i.e. $S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| = 1\}$, où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne usuelle). Pour $A \subset S^{N-1}$, on pose $\tilde{A} = \{tx, t \in [0, 1], x \in A\}$.

Montrer que si A est un borélien de S^{N-1} , alors $\tilde{A}$ est un borélien de $\mathbb{R}^N$.

On définit alors, quand A est un borélien de S^{N-1} , $\sigma(A) = N\lambda_N(\tilde{A})$. Montrer que σ définit une mesure sur les borélien de S^{N-1} .

Montrer que, pour tout $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable positive ou intégrable on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = \int_0^\infty \left(\int_{S^{N-1}} f(\rho\xi) d\sigma(\xi) \right) \rho^{N-1} d\rho.$$

Trouver alors les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $x \rightarrow |x|^\alpha$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^N \setminus B_1$ ou sur B_1 , avec $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq 1\}$.

corrigé

Cet exercice est trop difficile à faire complètement sans indications.

Pour $R \in \mathbb{R}_+$, on note $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq R\}$.

1. On montre tout d'abord que $\tilde{A}$ est un borélien de $\mathbb{R}^N$ si A est un borélien de S^{N-1} . Pour cela, on pose $T = \{A \in \mathcal{B}(S^{N-1}); \tilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\}$.

On montre que T est une tribu. En effet, $\tilde{A} = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ si $A = \emptyset$ et donc $\emptyset \in T$. Puis, on remarque que T est stable par complémentaire car, pour $A \in T$, $\widetilde{S^{N-1} \setminus A} = B_1 \setminus \tilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, ce qui montre que $S^{N-1} \setminus A \in T$. Enfin, il est facile de voir que T est stable par union dénombrable car, pour $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$, on a $\widetilde{\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et donc $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T$. On a bien montré que T est une tribu.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fermés de S^{N-1} . Si $A \in \mathcal{C}$, on voit que $\tilde{A}$ est un fermé de $\mathbb{R}^N$. En effet, si $(t_n, x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1] \times A$ est t.q. $t_n x_n \rightarrow y$ dans $\mathbb{R}^N$, on peut supposer, par compacité de $[0, 1]$ et de S^{N-1} , après extraction d'une sous suite encore notée $(t_n, x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que $t_n \rightarrow t \in [0, 1]$ et $x_n \rightarrow x \in S^{N-1}$ quand $n \rightarrow \infty$. On en déduit que $y = tx \in \tilde{A}$, ce qui prouve que $\tilde{A}$ est fermé. Comme les fermés sont des boréliens, on a donc $\mathcal{C} \subset T$.

Pour conclure, il suffit de remarquer que la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ (sur S^{N-1}) est $\mathcal{B}(S^{N-1})$. On en déduit bien que $\mathcal{B}(S^{N-1}) = T$.

2. Il est facile de montrer que σ est une mesure. Il suffit en effet de remarquer que $\tilde{\emptyset} = \emptyset$ (et donc $\sigma(\emptyset) = 0$) et que, pour $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$, on a, avec $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\tilde{A} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n$ et $\tilde{A}_n \cap \tilde{A}_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On déduit alors la σ -additivité de σ de la σ -additivité de λ_N .

3. On va montrer maintenant :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = \int_0^\infty \left(\int_{S^{N-1}} f(\rho\xi) d\sigma(\xi) \right) \rho^{N-1} d\rho, \quad (12.141)$$

pour tout $f = 1_E$ avec $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Cette démonstration est difficile (le reste de la démonstration sera plus facile). On raisonne en 3 étapes.

Etape 1. Pour $A \in \mathcal{B}(S^{N-1})$ et pour $0 \leq r < R < \infty$, on pose $A_{r,R} = \{\rho\xi, \rho \in [r, R], \xi \in A\}$. Dans cette étape, on prend $f = 1_E$ avec $E = A_{r,R}$ et on montre alors que les deux membres de (12.141) sont bien définis et sont égaux.

Pour montrer que $A_{r,R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, il suffit de remarquer que $A_{r,R} = A_R \setminus A_r$ avec $A_a = \cup_{t \in \mathbb{Q}_a} t\tilde{A}$, $\mathbb{Q}_a = \{t \in \mathbb{Q}_+, t < a\}$ si $a > 0$ (et $A_0 = \emptyset$). Comme $\tilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on a $t\tilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $t > 0$ (voir la proposition 7.7) et donc $A_a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $a \geq 0$. On en déduit que $A_{r,R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

On calcule maintenant $\lambda_N(A_{r,R})$ (c'est-à-dire le membre de gauche de (12.141)). D'après la proposition 7.8, on a $\lambda_N(t\tilde{A}) = t^N \lambda_N(\tilde{A})$ pour tout $t > 0$. la continuité croissante d'une mesure donne alors $\lambda_N(A_a) = a^N \lambda_N(\tilde{A})$ pour tout $a > 0$ et donc :

$$\lambda_N(A_{r,R}) = \lambda_N(A_R \setminus A_r) = \lambda_N(A_R) - \lambda_N(A_r) = (R^N - r^N) \lambda_N(\tilde{A}) = \frac{R^N - r^N}{N} \sigma(A).$$

Soit $\rho > 0$. Si $\rho \notin [r, R]$, on a $f(r\xi) = 0$ pour tout $\xi \in S^{N-1}$. On a donc $f(\rho \cdot) = 1_\emptyset \in \mathcal{M}_+(S^{N-1}, \mathcal{B}(S^{N-1}))$ et $\int f(\rho \cdot) d\sigma = 0$. Si $\rho \in [r, R]$, on a $f(r\xi) = 1$ pour tout $\xi \in A$ et $f(r\xi) = 0$ pour tout $\xi \in S^{N-1} \setminus A$. Donc, $f(\rho \cdot) = 1_A \in \mathcal{M}_+(S^{N-1}, \mathcal{B}(S^{N-1}))$ et $\int f(\rho \cdot) d\sigma = \sigma(A)$. On en déduit que la fonction $\rho \mapsto \int f(\rho \cdot) d\sigma$ est égale à $\sigma(A) 1_{[r,R]}$, elle appartient donc à $\mathcal{M}_+(R_+, \mathcal{B}(R_+), \lambda)$ et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\int_{S^{N-1}} f(\rho\xi) d\sigma(\xi) \right) \rho^{N-1} d\rho &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \sigma(A) 1_{[r,R]}(\rho) \rho^{N-1} d\rho \\ &= \sigma(A) \int_r^R \rho^{N-1} d\rho = \sigma(A) \frac{R^N - r^N}{N}. \end{aligned}$$

On a bien montré que les deux membres de (12.141) étaient bien définis et étaient égaux.

Etape 2. On pose $\mathcal{D} = \{A_{r,R}, 0 \leq r < R < \infty, A \in \mathcal{B}(S^{N-1})\}$. On montre ici que $\mathcal{D}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

On a déjà vu que $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Donc, $T(\mathcal{D}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Pour montrer l'inclusion inverse, on va montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^N$ peut s'écrire comme une union au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{D}$.

On commence par remarquer qu'il existe une partie dénombrable de S^{N-1} , dense dans S^{N-1} (ceci découle de la séparabilité de $\mathbb{R}^N$). Soit S une telle partie. On peut alors démontrer (on ne détaille pas ici cette démonstration, assez simple) que si $x \in O$, O ouvert de $\mathbb{R}^N$, il existe une boule ouverte de S^{N-1} dont le centre est dans S et donc le rayon est rationnel, on note A cette boule, et il existe $r, R \in \mathbb{Q}$ t.q. $x \in A_{r,R} \subset O$. On en déduit facilement que O est une union au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{D}$ (voir l'exercice 2.7 pour des résultats semblables). Ce résultat montre que les ouverts de $\mathbb{R}^N$ sont dans $T(\mathcal{D})$ et donc que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset T(\mathcal{D})$.

On a bien finalement $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = T(\mathcal{D})$.

Étape 3. On montre dans cette étape que (12.141) est vraie pour tout $f = 1_E$ avec $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

En admettant que le deuxième membre de (12.141) est bien défini pour tout $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on peut définir m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ par $m(E) = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} 1_E(\rho\xi) d\sigma(\xi) \right) \rho^{N-1} d\rho$. m est alors une mesure. On a montré que $m = \lambda_N$ sur $\mathcal{D}$ (Étape 1) et que $\mathcal{D}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (Étape 2). Le fait que deux mesures sur une tribu T soient égales sur une famille engendrant T est insuffisant pour dire qu'elles sont égales sur T (voir exercice 2.20), mais cela est suffisant si cette famille est une “semi-algèbre” (une famille $\mathcal{C}$ est une semi-algèbre si $\emptyset, \emptyset^c \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie, et le complémentaire de tout élément de $\mathcal{C}$ est une réunion finie disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$), et si les mesures sont finies. C'est ainsi que nous allons montrer que (12.141) est vraie pour tout $f = 1_E$ avec $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Soit $R > 0$. On note $\mathcal{D}_R = \{E \in \mathcal{D}; E \subset B_R\}$ et $\mathcal{B}_R = \mathcal{B}(B_R) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N); A \subset B_R\}$. L'étape 2 donne que la tribu engendrée (sur B_R) par $\mathcal{D}_R$, notée $T(\mathcal{D}_R)$, est égale à $\mathcal{B}_R$.

On remarque tout d'abord que si $C \in \mathcal{D}_R$, $(B_R \setminus C)$ est la réunion disjointe d'au plus 3 éléments de $\mathcal{D}_R$. On en déduit, comme dans l'exercice 7.2, que l'algèbre engendrée par $\mathcal{D}_R$ sur B_R (voir la définition 2.4 pour la définition d'une algèbre), notée $\mathcal{A}_R$, est l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $\mathcal{D}_R$. Soit $E \in \mathcal{A}_R$. Il est alors facile de montrer (par linéarité de l'intégrale et avec l'étape 1) que les deux membres de (12.141) sont bien définis et égaux si $f = 1_E$.

On note M_R l'ensemble des éléments $E \in \mathcal{B}(B_R)$ t.q. les deux membres de (12.141) soient bien définis et égaux si $f = 1_E$. Une application facile du théorème de convergence monotone donne que M_R est une classe monotone. (en fait, si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M_R$ est une suite décroissante, on applique le théorème de convergence monotone à la suite $1_{B_R} - 1_{E_n}$ alors que si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M_R$ est une suite croissante, on applique le théorème de convergence monotone à la suite 1_{E_n}). M_R est donc une classe monotone qui contient $\mathcal{A}_R$, M_R contient donc la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}_R$, or, le lemme sur les classes monotones (exercice 2.13) montre que cette classe monotone est égale à la tribu engendrée par $\mathcal{A}_R$, elle-même égale à la tribu engendrée par $\mathcal{D}_R$. Ceci montre que $M_R = \mathcal{B}(B_R)$ et donc que les deux membres de (12.141) sont bien définis et égaux si $f = 1_E$ avec $E \in \mathcal{B}(B_R)$.

En appliquant une nouvelle fois le théorème de convergence monotone, on montre alors facilement que les deux membres de (12.141) sont bien définis et égaux si $f = 1_E$ avec $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

4. La fin de la démonstration est maintenant facile (elle utilise un raisonnement souvent utilisé dans des exercices précédents). Par linéarité de l'intégrale, on montre que les deux membres de (12.141) sont bien définis et égaux si $f \in \mathcal{E}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, puis, par convergence monotone, si $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$. Enfin, on traite le cas $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ en décomposant $f = f^+ - f^-$.
5. Comme application simple de (12.141) pour $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, on trouve que $x \rightarrow |x|^\alpha$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N \setminus B_1$ si et seulement si $\alpha + N - 1 < -1$ et est intégrable sur B_1 si et seulement si $\alpha + N - 1 > -1$.

Corrigé 157 (Changement de variables $W^{1,1}$ croissant)

Soit $f \in \mathcal{L}_R^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $f > 0$ p.p.. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. (On rappelle que, pour $a < b$, $\int_a^b f(t) dt$ désigne $\int 1_{]a,b[} f d\lambda$.)

1. Montrer que $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que φ est strictement croissante.

On note I_m l'image de φ (I_m est donc un intervalle dont les bornes sont 0 et $\int f d\lambda$) et on note $\psi : I_m \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction inverse de φ (ψ est donc continue de I_m dans $\mathbb{R}$).

On rappelle que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}(I)$ est sa tribu borélienne, on a $\mathcal{B}(I) = \mathcal{P}(I) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour $A \subset \mathbb{R}$, on note $\varphi(A) = \{\varphi(x), x \in A\}$. Pour $A \subset I_m$, on note $\psi(A) = \{\psi(x), x \in A\}$.

2. Montrer que $\{\varphi(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \mathcal{B}(I_m)$ et que $\{\psi(A), A \in \mathcal{B}(I_m)\} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(\varphi(I)) = \int_I f d\lambda$.
4. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(\varphi(O)) = \int_O f d\lambda$. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q. :

$$O \text{ ouvert, } \lambda(O) \leq \delta \Rightarrow \lambda(\varphi(O)) \leq \varepsilon.$$

5. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $\lambda(\varphi(A)) = \int_A f d\lambda$. [On pourra, par exemple, utiliser la régularité de λ et la question précédente.]
6. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$.

(a) Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $g = 1_B$. Montrer que :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t) dt = \int_a^b g(\varphi(s)) f(s) ds. \quad (12.142)$$

[Prendre $A = \psi(B \cap I_m) \cap]a, b[$ et utiliser la question précédente.]

(b) Montrer que (12.142) est encore vraie pour $g \in \mathcal{E}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, puis pour $g \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(c) Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. On suppose que $g1_{] \varphi(a), \varphi(b)[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer $g \circ \varphi f 1_{]a, b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et que (12.142) est vraie.

NB: On peut montrer que φ est dérivable p.p. et que $\varphi' = f$ p.p.. La formule (12.142) est alors la formule habituelle de changement de variable. Noter aussi que la fonction φ , restreinte à l'intervalle $]a, b[$, appartient à un espace appelé $W^{1,1}(]a, b[)$ (ce qui explique le titre de l'exercice).

corrigé

En Attente

12.8 Exercices du chapitre 8

Corrigé 158 (Non densité de C_c dans L^∞)

On considère $f = 1_{\mathbb{R}_+}$ (qui appartient à $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, en confondant f avec sa classe).

1. Montrer que $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$ pour tout $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

corrigé

Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On va montrer que $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$ pour tout $0 < \varepsilon < 1/2$ (ce qui donne bien finalement $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$).

Soit donc $0 < \varepsilon < 1/2$.

On suppose tout d'abord que $\varphi(0) \geq \frac{1}{2}$. Il existe alors, par continuité de φ , $\delta > 0$ t.q. $\varphi(x) \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$ pour tout $x \in [-\delta, 0]$. On a donc $\varphi(x) - f(x) \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$ pour presque tout $x \in [-\delta, 0]$, ce qui prouve que $\lambda(\{|\varphi - f| \geq \frac{1}{2} - \varepsilon\}) \geq \lambda([-\delta, 0]) = \delta > 0$. On a donc $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$.

On suppose maintenant que $\varphi(0) \leq \frac{1}{2}$. De manière analogue, il existe $\delta > 0$ t.q. $\varphi(x) \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$ pour tout $x \in [0, \delta]$. On a alors $f(x) - \varphi(x) \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$ pour presque tout $x \in [0, \delta]$, ce qui prouve que $\lambda(\{|f - \varphi| \geq \frac{1}{2} - \varepsilon\}) \geq \lambda([0, \delta]) = \delta > 0$. On a donc aussi $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$.

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, on a bien montré que $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$.

2. Montrer que $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty = 1$ pour tout $h \in \mathbb{R}^*$.

corrigé

Pour $h > 0$, on a $|f(\cdot + h) - f(\cdot)| = 1$ p.p. sur $[-h, 0]$ et donc $\lambda(\{|f(\cdot + h) - f(\cdot)| \geq 1\}) \geq \lambda([-h, 0]) = h > 0$, ce qui prouve que $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty \geq 1$. Comme il est clair que $|f(\cdot + h) - f(\cdot)| \leq 1$ p.p., on a finalement $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty = 1$.

Pour $h < 0$, on a $|f(\cdot + h) - f(\cdot)|_\infty = 1$ p.p. sur $[0, -h]$ et donc $\lambda(\{|f(\cdot + h) - f(\cdot)| \geq 1\}) \geq \lambda([0, -h]) = -h > 0$, ce qui prouve que $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty \geq 1$. Comme il est clair aussi que $|f(\cdot + h) - f(\cdot)| \leq 1$ p.p., on a finalement $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty = 1$.

Corrigé 159 (Séparabilité de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$)

Soient $N \geq 1$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et p tel que $1 \leq p < +\infty$. Montrer que l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.

On pourra se limiter au cas $\Omega = \mathbb{R}$ et raisonner ainsi : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $q = 0, 1, \dots, 2n^2 - 1$, on note : $I_q^n = [-n + \frac{q}{n}, -n + \frac{q+1}{n}]$. On pose : $A_n = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f|_{I_q^n} = r, \text{ où } r \in \mathbb{Q}, \text{ et } f = 0 \text{ sur } [-n, n]^c\}$. On pose $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

1. Montrer que A est dénombrable.

corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A $f \in A_n$, on associe l'ensemble des valeurs prises par f sur les intervalles I_q^n , $q = 0, 1, \dots, 2n^2 - 1$. On construit ainsi une bijection de A_n dans $\mathbb{Q}^{2n^2}$, ce qui prouve que A_n est dénombrable car $\mathbb{Q}^{2n^2}$ est dénombrable.

On en déduit que A est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables.

2. Montrer que, pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$.

corrigé

Soit $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$.

Comme f est à support compact, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $f = 0$ sur $[-a, a]^c$.

Comme f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ t.q. $|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

On choisit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $n \geq a$ et $1/n \leq \delta$. On construit alors $g \in A_n$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, \text{ si } x \in [-n, n]^c, \\ g(x) &= r_q, \text{ si } x \in [-n + \frac{q}{n}, -n + \frac{q+1}{n}[, q \in \{0, 1, \dots, 2n^2 - 1\}, \end{aligned}$$

avec $r_q \in \mathbb{Q}$ t.q. $|f(-n + \frac{q}{n}) - r_q| \leq \varepsilon$ et $r_q = 0$ si $f(-n + \frac{q}{n}) = 0$.

On a $g \in A$ (car $g \in A_n$), $|g(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$ pour tout x et $|g(x) - f(x)| = 0$ si $x \in [-a - 1, a + 1]^c$.

On en déduit :

$$\int |g(x) - f(x)|^p dx \leq 2(a + 1)2^p \varepsilon^p.$$

On peut donc trouver $g \in A$ arbitrairement proche de f en norme L^p .

3. Conclure par la densité de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R},)$ (théorème 8.1).

corrigé

Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 8.1, il existe $g \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\|g - f\|_p \leq \varepsilon$. Par la question précédente, il existe $h \in A$ t.q. $\|g - h\|_p \leq \varepsilon$. On a donc $\|f - h\|_p \leq 2\varepsilon$. Ce qui prouve que A est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. Comme A est dénombrable, on en déduit que $L^p(\mathbb{R})$ est séparable.

Corrigé 160 (Non séparabilité de $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$)

On note B l'ensemble des f appartenant à $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f = 0$ p.p. sur $]n, n + 1[$ ou $f = 1$ p.p. sur $]n, n + 1[$.

1. Montrer que B est non dénombrable. [Construire une injection de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dans B .]

corrigé

Soit P une partie $\mathbb{N}$. On construit $\varphi(P) \in B$ en prenant $\varphi(P) = 1$ p.p. sur $]n, n + 1[$ si $n \in P$, $\varphi(P) = 0$ p.p. sur $]n, n + 1[$ si $n \notin P$ et $\varphi(P) = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$.

φ est bien injective car, si $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $P \neq Q$, il existe $n \in P$ t.q. $n \notin Q$ (ou il existe $n \in Q$ t.q. $n \notin P$). On a alors $\varphi(P) = 1$ p.p. sur $]n, n + 1[$ et $\varphi(Q) = 0$ p.p. sur $]n, n + 1[$ (ou $\varphi(P) = 0$ p.p. sur $]n, n + 1[$ et $\varphi(Q) = 1$ p.p. sur $]n, n + 1[$). On en déduit que $\|\varphi(P) - \varphi(Q)\|_\infty \geq 1$ car $\lambda([n, n + 1]) > 0$, et donc $\varphi(P) \neq \varphi(Q)$.

Comme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est non dénombrable (et non fini), l'ensemble B est aussi non dénombrable (et non fini).

2. Soit A une partie dense de $L_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer que pour tout $f \in B$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f - g\|_{\infty} \leq \frac{1}{4}$. En déduire qu'on peut construire une application injective de B dans A .

corrigé

Soit $f \in B$. Par densité de A dans $L_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f - g\|_{\infty} \leq \frac{1}{4}$. On peut donc construire (grâce à l'axiome du choix) une application ψ de B dans A t.q. $\|f - \psi(f)\|_{\infty} \leq \frac{1}{4}$ pour tout $f \in B$.

On montre maintenant que ψ est injective. En effet, soit $f_1, f_2 \in B$ t.q. $\psi(f_1) = \psi(f_2)$. On a alors, avec $g = \psi(f_1) = \psi(f_2)$, $\|f_1 - f_2\|_{\infty} \leq \|f_1 - g\|_{\infty} + \|f_2 - g\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}$. Ceci prouve que $f_1 = f_2$ car $\|f_1 - f_2\|_{\infty} \geq 1$ si $f_1 \neq f_2$ (il suffit de remarquer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $|f_1 - f_2| = 1$ p.p. sur $]n, n+1[$).

3. Montrer que $L_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ n'est pas séparable.

corrigé

Si $L_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est séparable, il existe A (au plus) dénombrable, dense dans $L_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. La question précédente permet de construire une injection de B de A . Ce qui est en contradiction avec le fait que B est non dénombrable (et non fini).

Corrigé 161 (Convolution $L^p - L^q$)

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $L^p = L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Soit $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$, $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$.

- (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $f(\cdot)g(x - \cdot)$ est intégrable.

corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $f(\cdot)g(x - \cdot)$ est mesurable car les applications f et $g(x - \cdot)$ sont mesurables. Puis, on déduit de l'inégalité de Hölder (inégalité (6.3)) que $f(\cdot)g(x - \cdot) \in \mathcal{L}^1$ et :

$$\|f(\cdot)g(x - \cdot)\|_1 \leq \|f\|_p \|g(x - \cdot)\|_q = \|f\|_p \|g\|_q.$$

On peut donc définir $(f \star g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- (b) Montrer que $|(f \star g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $|(f \star g)(x)| = |\int f(\cdot)g(x - \cdot)d\lambda| \leq \int |f(\cdot)g(x - \cdot)|d\lambda = \|f(\cdot)g(x - \cdot)\|_1$. En utilisant l'inégalité montrée dans la question précédente, on a donc :

$$|(f \star g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

- (c) Montrer que $f \star g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

corrigé

Soit $x, h \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} |f \star g(x+h) - f \star g(x)| &\leq \int |f(\cdot)g(x+h-\cdot) - f(\cdot)g(x-\cdot)|d\lambda \\ &\leq \|f\|_p \|g(x+h-\cdot) - g(x-\cdot)\|_q = \|f\|_p \|g(\cdot-h) - g\|_q. \end{aligned}$$

Le théorème de continuité en moyenne dans L^q (exercice 6.4, corrigé 102, le cas général de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$ est donné dans le théorème 8.2) donne que $\|g(\cdot-h) - g\|_q \rightarrow 0$, quand $h \rightarrow 0$. Ceci prouve la continuité (et même la continuité uniforme) de $f \star g$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$.

- (a) Soit $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Montrer qu'on peut définir $F \star G$ sur $\mathbb{R}$ en posant $F \star G = f \star g$, avec $f \in F$ et $g \in G$. [Il suffit donc de démontrer que $f \star g$ ne dépend pas du choix de f dans F et g dans G .]

corrigé

Soit $f_1, f_2 \in F$ et $g_1, g_2 \in G$. Comme $f_1 = f_2$ p.p. et $g_1 = g_2$ p.p., on a aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(\cdot)g_1(x-\cdot) = f_2(\cdot)g_2(x-\cdot)$ p.p. et donc $f_1 \star g_1(x) = f_2 \star g_2(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut donc définir $F \star G(x)$ en posant $F \star G(x) = f \star g(x)$, avec $f \in F$ et $g \in G$ (car $f \star g(x)$ ne dépend pas du choix de f et g dans F et G).

- (b) Montrer que l'application $(F, G) \mapsto F \star G$ est bilinéaire continue de $L^p \times L^q$ dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (on rappelle que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme).

corrigé

On note $\|\cdot\|_u$ la norme de la convergence uniforme (on rappelle que, sur $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, elle coïncide avec la norme $\|\cdot\|_\infty$).

Soit $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Si $f \in F$, $g \in G$, on a déjà vu que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|F \star G(x)| = |f \star g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q = \|F\|_p \|G\|_q.$$

On en déduit $\|F \star G\|_u = \sup\{|F \star G(x)|, x \in \mathbb{R}\} \leq \|F\|_p \|G\|_q$. Ce qui prouve bien la continuité de la forme bilinéaire $(F, G) \mapsto F \star G$ de $L^p \times L^q$ dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- (c) Soit $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Montrer que $F \star G \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire que la fonction $F \star G$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $(F \star G)(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$).

corrigé

On considère tout d'abord le cas $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On sait déjà que $f \star g$ est continue (par exemple, parce que $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$). D'autre part, comme f et g sont à support compact, il existe $a > 0$ et $b > 0$ t.q. $f = 0$ sur $B^c(0, a)$ et $g = 0$ sur $B^c(0, b)$. On

en déduit que $f \star g = 0$ sur $B^c(0, a + b)$ (ceci est démontré, par exemple, dans l'exercice 7.19, corrigé 151). On a donc $f \star g \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit maintenant $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Le théorème de densité dans les espaces L^p (exercice 6.4, corrigé 102, ou encore théorème 8.1 pour un cas plus général) donne l'existence de deux suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $f_n \rightarrow F$ dans L^p et $g_n \rightarrow G$ dans L^q , quand $n \rightarrow \infty$. La continuité de la forme bilinéaire $(F, G) \mapsto F \star G$ de $L^p \times L^q$ dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ montre alors que $f_n \star g_n \rightarrow F \star G$ dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire uniformément), quand $n \rightarrow \infty$. Or $f_n \star g_n \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est fermé dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a donc $F \star G \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. On prend maintenant $p = 1$ et $q = +\infty$.

- (a) Soit $f \in \mathcal{L}^1$ et $g \in \mathcal{L}^\infty$. Montrer que $(f \star g)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f \star g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

corrigé

On procède ici comme dans le cas $1 < p, q < \infty$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $f(\cdot)g(x - \cdot)$ est mesurable car produit d'applications mesurables. Puis, l'inégalité de Hölder pour le cas $p = 1, q = \infty$ (proposition (6.9)) donne $f(\cdot)g(x - \cdot) \in \mathcal{L}^1$ et :

$$\|f(\cdot)g(x - \cdot)\|_1 \leq \|f\|_1 \|g(x - \cdot)\|_\infty = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

On peut donc définir $(f \star g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a $|(f \star g)(x)| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$. Ceci donne $\sup\{|(f \star g)(x)|, x \in \mathbb{R}\} \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ et donc que f est bornée.

Pour montrer que $f \star g$ est continue sur $\mathbb{R}$, on utilise l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue pour écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f \star g(x) = \int f(x - \cdot)g(\cdot)d\lambda.$$

Soit $x, h \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$\begin{aligned} |f \star g(x + h) - f \star g(x)| &\leq \int |f(x + h - \cdot)g(\cdot) - f(x - \cdot)g(\cdot)|d\lambda \\ &\leq \|f(x + h - \cdot) - f(x - \cdot)\|_1 \|g\|_\infty = \|f(\cdot - h) - f\|_1 \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (théorème 5.6) donne que $\|f(\cdot - h) - f\|_1 \rightarrow 0$, quand $h \rightarrow 0$. Ceci prouve la continuité (et même la continuité uniforme) de $f \star g$ sur $\mathbb{R}$.

On a donc bien $f \star g$ continue et bornée, c'est-à-dire $f \star g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- (b) Soit $F \in L^1$ et $G \in L^\infty$. Montrer que $(F \star G)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ en posant $F \star G = f \star g$, avec $f \in F$ et $g \in G$.

corrigé

La démonstration est identique à celle du cas $1 < p, q < \infty$. Elle n'est pas redonnée ici.

(c) L'application $(F, G) \mapsto F \star G$ est-elle continue de $L^1 \times L^\infty$ dans C_b ?

corrigé

La réponse est "oui" car nous avons vu que $\|f \star g\|_u = \sup\{|(f \star g)(x)|, x \in \mathbb{R}\} \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

(d) A-t-on $F \star G \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour tout $F \in L^1$ et $G \in L^\infty$?

corrigé

La réponse est "non". On prend, par exemple, $G = 1$ p.p. et $F \in L^1$, $F \neq 0$. On a alors $F \star G(x) = \int F d\lambda$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, $F \star G(x) \not\rightarrow 0$, quand $x \rightarrow \pm\infty$, et $F \star G \notin C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Corrigé 162 (Caractérisation d'une fonction par son action sur C_c^∞)

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que λ_d est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ et que l'élément d'intégration par rapport à λ_d est noté dx (au lieu de $d\lambda_d(x)$). On rappelle aussi que $|\cdot|$ dénote la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$. On se donne une fonction $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. :

- $\rho(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^d$, $|x| \geq 1$,
- $\rho(x) \geq 0$ si $x \in \mathbb{R}^d$,
- $\int \rho(x) dx = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note ρ_n la fonction définie par $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$, de sorte que $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de noyaux régularisants (voir le chapitre 8 du cours).

1. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

(a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $f\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

corrigé

La fonction $f\varphi$ est mesurable car produit de fonctions mesurable. Elle est intégrable car on a $|f(x)\varphi(x)| \leq |f(x)|\|\varphi\|_u$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ (avec $\|\varphi\|_u = \max\{|\varphi(x)|, x \in \mathbb{R}\} < \infty$ car $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$) et donc :

$$\int |f(x)\varphi(x)| dx \leq \|f\|_1 \|\varphi\|_\infty < \infty.$$

Ce qui donne bien $f\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

On suppose maintenant que $\int f(x)\varphi(x) dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer $f \star \rho_n(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et que $f \star \rho_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On pose $\varphi(y) = \rho_n(x - y)$ pour $y \in \mathbb{R}^d$ (n est fixé). On a donc $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (car $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$) et $f\varphi = f(\cdot)\rho_n(x - \cdot)$.

La première question donne $f(\cdot)\rho_n(x - \cdot) = f\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ et $f \star \rho_n(x)$ est donc bien défini. De plus, l'hypothèse satisfaite par f donne :

$$f \star \rho_n(x) = \int f(y)\rho_n(x - y) dy = \int f(y)\varphi(y) dy = 0$$

(c) Montrer que $f = 0$ p.p..

corrigé

La proposition 8.1 donne $f \star \rho_n \rightarrow f$ dans $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ quand $n \rightarrow \infty$. Comme $f_n = 0$ p.p., on en déduit que $f = 0$ p.p.

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$ (c'est-à-dire que g est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $g1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ pour tout compact K de Ω).

(a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Montrer que $g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. (La fonction φ est prolongée par 0 hors de Ω .)

corrigé

Soit K un compact de Ω t.q. $\varphi = 0$ sur K^c . On a alors $g\varphi = g1_K\varphi$.

Comme $g1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, la question 1(a) donne $g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

On suppose maintenant que $\int g(x)\varphi(x)dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Ω_n l'ensemble des $x \in \Omega$ t.q. $|x - y| > \frac{1}{n}$ pour tout $y \in \Omega^c$. Montrer $g \star \rho_n(x)$ est bien définie pour tout $x \in \Omega_n$ et que $g \star \rho_n(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega_n$.

corrigé

Soit $x \in \Omega_n$. On pose $\varphi(y) = \rho_n(x - y)$ pour $y \in \mathbb{R}^d$ (n et x sont fixés). On a donc $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. comme $\rho_n(z) = 0$ si $|z| \geq 1/n$, on a $\varphi = 0$ sur K^c où K est la boule fermée de centre x et de rayon $1/n$, c'est-à-dire $K = \overline{B}(x, 1/n)$. Comme $x \in \Omega_n$, on a $K \subset \Omega$. La fonction φ (ou, plus précisément, la restriction de φ à Ω) appartient donc à $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

On a $g\varphi = g(\cdot)\rho_n(x - \cdot)$. On conclut comme dans la question 1(b) :

La question 2(a) donne $g(\cdot)\rho_n(x - \cdot) = g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ et $g \star \rho_n(x)$ est donc bien défini. De plus, l'hypothèse satisfaite par g donne :

$$g \star \rho_n(x) = \int g(y)\rho_n(x - y)dy = \int g(y)\varphi(y)dy = 0$$

(c) Soit K un compact de Ω , montrer que $g1_K = 0$ p.p.. En déduire que $g = 0$ p.p. sur Ω .

corrigé

On note α la distance de K à Ω^c , c'est-à-dire $\alpha = \inf\{|y - z|, y \in K, z \in \Omega^c\}$. Cette distance est strictement positive car K est compact, Ω^c est fermé et $K \cap \Omega^c = \emptyset$ (le fait que cette distance est strictement positive est démontré, par exemple, dans la démonstration du théorème 5.5). Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $1/n_0 < \alpha$, de sorte que $K \subset \Omega_n$ pour tout $n \geq n_0$ (avec Ω_n défini dans la question 2(b)).

La question 2(b) donne alors que, pour tout $n \geq n_0$, $g \star \rho_n$ est bien défini sur K et $g \star \rho_n = 0$ sur K .

Pour passer à limite sur n (et montrer que $g = 0$ p.p. sur K), on pose $\tilde{K} = \{z \in \mathbb{R}^d; d(z, K) \leq 1/n_0\}$ (où $d(z, K)$ est la distance de z à K , c'est-à-dire $d(z, K) = \inf\{|z - y|, y \in K\}$). $\tilde{K}$ est un compact de $\mathbb{R}^d$ et comme $1/n_0 < \alpha$, on a $\tilde{K} \subset \Omega$. On en déduit :

$$g1_{\tilde{K}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d).$$

La proposition 8.1 donne alors $g1_{\tilde{K}} \star \rho_n \rightarrow g1_{\tilde{K}}$ dans $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, quand $n \rightarrow \infty$. On a donc aussi, en prenant la restriction à K de ces fonctions :

$$(g1_{\tilde{K}} \star \rho_n)|_K \rightarrow g|_K \text{ dans } L^1(K, \mathcal{B}(K), \lambda_d), \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (12.143)$$

Soit $n \geq n_0$. On remarque que $g1_{\tilde{K}} \star \rho_n = g \star \rho_n$ sur K . En effet, pour $x \in K$ et $y \notin \tilde{K}$, on a $|x - y| > 1/n_0 \geq 1/n$ et donc $\rho_n(x - y) = 0$. On en déduit :

$$g1_{\tilde{K}} \star \rho_n(x) = \int g1_{\tilde{K}}(x) \rho_n(x - y) dy = \int g(x) \rho_n(x - y) dy = g \star \rho_n(x), \text{ pour tout } x \in K.$$

On a bien montré que $g1_{\tilde{K}} \star \rho_n = g \star \rho_n$ sur K . Comme $g \star \rho_n = 0$ sur K (question 2(b)), on déduit de (12.143) que $g = 0$ p.p. sur K .

Pour montrer que $g = 0$ p.p. sur Ω , on remarque que $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n$, avec $K_n = \overline{\Omega}_n \cap B_n$ (où $\overline{\Omega}_n$ est l'adhérence de Ω_n et B_n est la boule fermée de centre 0 et de rayon n). Comme K_n est un compact de Ω , la démonstration précédente donne $g = 0$ p.p. sur K_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $g = 0$ p.p. sur Ω .

Corrigé 163 (Théorème de compacité dans L^1)

On pose $L^1([0, 1]) = L^1_{\mathbb{R}}([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ et $L^1(\mathbb{R}) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou sa trace sur $\mathcal{B}([0, 1])$). Pour $f \in L^1([0, 1])$, on identifie f avec l'un de ses représentants et on note $\tilde{f}$ la fonction définie par $\tilde{f} = f$ sur $]0, 1[$ et $\tilde{f} = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus]0, 1[$.

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $L^1([0, 1])$.

On rappelle que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1([0, 1])$ si et seulement si $\mathcal{A}$ est précompacte (c'est-à-dire que pour $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{A}$ t.q. $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^p B(f_i, \varepsilon)$, où $B(f, \varepsilon)$ désigne la boule ouverte dans $L^1([0, 1])$ de centre f et de rayon ε).

Partie I (condition suffisante). On suppose, dans cette partie, que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1([0, 1])$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une partie bornée de $L^1([0, 1])$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$h \in \mathbb{R}, |h| \leq \alpha, f \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}\|_1 \leq \varepsilon. \quad (12.144)$$

Partie II (condition nécessaire). On suppose, dans cette partie, que $\mathcal{A}$ est une partie bornée de $L^1([0, 1])$ et que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ vérifiant (12.144).

Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\rho \geq 0$, $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq 1$ et $\int \rho(x) dx = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit ρ_n par $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ si $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. :

$$n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0, f \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\tilde{f} \star \rho_n - \tilde{f}\|_1 \leq \varepsilon. \quad (12.145)$$

[On pourra remarquer que $\tilde{f} \star \rho_n(x) - \tilde{f}(x) = \int (\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x)) \rho(y) dy$.]

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $f \in \mathcal{A}$, on note f_n la restriction à $[0, 1]$ de la fonction $\tilde{f} \star \rho_n$.

- (a) Montrer qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ ne dépendant que de n, ρ et de la borne de $\mathcal{A}$ dans $L^1(]0, 1[)$ t.q. :

$$x \in [0, 1], f \in \mathcal{A} \Rightarrow |f_n(x)| \leq C_1,$$

$$x, y \in [0, 1], f \in \mathcal{A} \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq C_2|x - y|.$$

En déduire que l'ensemble $\{f_n, f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $C([0, 1], \mathbb{R})$ [Utiliser le théorème d'Ascoli.]

- (b) Montrer que l'ensemble $\{f_n, f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $L^1(]0, 1[)$.

3. Montrer que la partie $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0, 1[)$.

corrigé

En attente...

12.9 Exercices du chapitre 9

12.9.1 Définition, propriétés élémentaires

Corrigé 164 (Matrice des moments d'ordre deux et matrice de covariance)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité. Soit X un vecteur aléatoire de dimension d ($d \geq 1$), dont toutes les coordonnées (notées X_i , $i = 1, \dots, d$) sont supposées être de carré intégrable. La matrice des moments d'ordre 2 du v.a. X est la matrice $E(XX^t)$, dont le terme (i, j) est le réel $E(X_i X_j)$, et on rappelle que la matrice de covariance de X , notée $\text{Cov}(X)$, est la matrice $E((X - E(X))(X - E(X))^t) = E(XX^t) - E(X)E(X)^t$, dont le terme (i, j) est la covariance des v.a.r. X_i et X_j . (La notation X^t désigne le transposé du vecteur X .)

1. Soit $u \in \mathbb{R}^d$, montrer que $u^t E(XX^t) u = E((u \cdot X)^2)$ et que $u^t \text{Cov}(X) u = \text{Var}(u \cdot X)$ (On rappelle que $u \cdot X = \sum_{i=1}^d u_i X_i = u^t X$).

—————**corrigé**—————

L'application $Z \mapsto E(Z)$ est linéaire, on en déduit que $u^t E(XX^t) u = E(u^t X X^t u) = E((u \cdot X)^2)$. Cette égalité appliquée au v.a. $X - E(X)$ donne $u^t \text{Cov}(X) u = \text{Var}(u \cdot X)$ car $u \cdot X - E(u \cdot X) = u \cdot (X - E(X))$.

2. Montrer que les matrices $E(XX^t)$ et $\text{Cov}(X)$ sont symétriques et semi-définies positives.

—————**corrigé**—————

Il est facile de voir que $E(XX^t)$ et $\text{Cov}(X)$ sont des matrices symétriques (car pour toutes v.a.r. Y, Z on a $E(YZ) = E(ZY)$). La question précédente donne $u^t E(XX^t) u \geq 0$ et $u^t \text{Cov}(X) u \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, ce qui signifie que les matrices $E(XX^t)$ et $\text{Cov}(X)$ sont semi-définies positives.

3. Montrer que si A est une matrice $k \times d$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^k$, $Y = AX + b$, alors $E(Y) = AE(X) + b$ et $\text{Cov}(Y) = A\text{Cov}(X)A^t$.

—————**corrigé**—————

Comme X est un v.a. de carré intégrable, la fonction Y est aussi un v.a. de carré intégrable. En utilisant la linéarité de l'application $Z \mapsto E(Z)$, on calcule son espérance et sa variance :

$$E(Y) = E(AX + b) = AE(X) + E(b) = AE(X) + b,$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y) &= E([A(X - E(X))][A(X - E(X))]^t) = E(A[X - E(X)][X - E(X)]^t A^t) \\ &= AE([X - E(X)][X - E(X)]^t) A^t = A\text{Cov}(X)A^t. \end{aligned}$$

4. Montrer que si $\text{Cov}(X)$ n'est pas inversible, alors le v.a. X prend p.s. ses valeurs dans un sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$ de dimension (inférieure ou) égale à $d-1$, et que la loi de X n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$, notée $_d$ (i.e. cette loi n'est pas à densité dans $\mathbb{R}^d$).

—————**corrigé**—————

Si $\text{Cov}(X)$ n'est pas inversible, il existe $u \in \mathbb{R}^d$, $u \neq 0$, t.q. $\text{Cov}(X)u = 0$. On a donc $\text{Var}(u \cdot X) = u^t \text{Cov}(X)u = 0$, ce qui donne $u \cdot X = E(u \cdot X)$ p.s.. On pose $\beta = E(u \cdot X)$ et on a donc :

$$X \in H \text{ p.s. avec } H = \{v \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } u \cdot v = \beta\}.$$

Comme $u \neq 0$, l'ensemble H est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$ de dimension égale à $d - 1$.

L'ensemble H étant de dimension $d - 1$, on a $\lambda_d(H) = 0$. Or on a $P_X(H) = P(X \in H) = 1 \neq 0$. On en déduit que P_X n'est pas absolument continue par rapport à λ_d et donc que P_X n'est pas une loi de densité par rapport à λ_d (voir le théorème 6.10).

5. Montrer que si trois points x, y et z de $\mathbb{R}^2$ ne sont pas alignés, tout v. a. X de dimension 2 tel que $P(X = x) > 0$, $P(X = y) > 0$ et $P(X = z) > 0$ a une matrice de covariance non dégénérée.

corrigé

On raisonne par l'absurde. Soit x, y et z trois points de $\mathbb{R}^2$ non alignés et X un v.a. de dimension 2 tel que $P(X = x) > 0$, $P(X = y) > 0$ et $P(X = z) > 0$. On suppose que la matrice de covariance de X est dégénérée. La question précédente donne alors qu'il existe une droite de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$ de dimension égale à 1), notée D , t.q. $X \in D$ p.s.. Comme $P(X = x) > 0$, on a donc $\{X = x\} \cap D \neq \emptyset$. En prenant $\omega \in \{X = x\} \cap D$, on déduit $x = X(\omega) \in D$. On montre de même que $y, z \in D$. Ce qui est impossible car les trois points x, y et z ne sont pas alignés.

12.9.2 Indépendance

Corrigé 165 (Covariance d'une somme de v.a.i.)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité et X, Y deux vecteurs aléatoires indépendants de dimension d ($d \geq 1$). Montrer que $\text{Cov}(X + Y) = \text{Cov}(X) + \text{Cov}(Y)$.

corrigé

Comme X et Y sont des v.a. indépendants, toute composante de X est indépendante de toute composante de Y (voir, par exemple, la remarque 9.5). On en déduit :

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]^t) = E([Y - E(Y)][X - E(X)]^t) = 0$$

et donc :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X + Y) &= E([X - E(X) + Y - E(Y)][X - E(X) + Y - E(Y)]^t) \\ &= E([X - E(X)][X - E(X)]^t) + E([X - E(X)][Y - E(Y)]^t) \\ &\quad + E([Y - E(Y)][X - E(X)]^t) + E([Y - E(Y)][Y - E(Y)]^t) \\ &= E([X - E(X)][X - E(X)]^t) + E([Y - E(Y)][Y - E(Y)]^t) = \text{Cov}(X) + \text{Cov}(Y). \end{aligned}$$

Corrigé 166 (Loi d'un couple de v.a. indépendantes)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X, Y deux v.a.r..

1. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si la loi du couple (X, Y) est $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$.

corrigé

On suppose tout d'abord que X et Y sont indépendantes. Soit $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a, par définition de $P_{(X,Y)}$, $P_{(X,Y)}(A \times B) = P(X \in A, Y \in B)$. Comme X et Y sont indépendantes, on a $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$, ce qui donne :

$$P_{(X,Y)}(A \times B) = P_X(A)P_Y(B).$$

Or, $P_X \otimes P_Y$ vérifie aussi $P_X \otimes P_Y(A \times B) = P_X(A)P_Y(B)$. La partie “unicité” du théorème 7.1 donne alors $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$.

Réciproquement, on suppose maintenant que $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$, on a donc, pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P(X \in A, Y \in B) = P_{(X,Y)}(A \times B) = P_X \otimes P_Y(A \times B) = P_X(A)P_Y(B)$. ce qui prouve que les tribus engendrées par X et Y sont indépendantes, c'est-à-dire que X et Y sont indépendantes.

2. On suppose que X et Y ont des densités par rapport à λ : $P_X = f\lambda$ et $P_Y = g\lambda$, avec $f, g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (et positives p.p.). Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si la loi du couple (X, Y) a pour densité la fonction $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ par rapport à λ_2 .

—————
corrigé

Comme $P_X = f\lambda$ et $P_Y = g\lambda$, on a, pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P_X \otimes P_Y(A \times B) = P_X(A)P_Y(B) = \int_A f d\lambda \int_B g d\lambda.$$

Le théorème 7.2 donne alors :

$$P_X \otimes P_Y(A \times B) = \int_{A \times B} f(x)g(y) d\lambda_2(x, y).$$

Ce qui donne $P_X \otimes P_Y = F\lambda_2$, avec $F(x, y) = f(x)g(y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$. la mesure $P_X \otimes P_Y$ est donc la mesure de densité F par rapport à λ_2 . La question 2 est alors une conséquence immédiate de la première question.

Corrigé 167 (V.a. suivant une loi normale multidimensionnelle)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et $X = (X_1, \dots, X_d)$ ($d > 1$) un v.a. de dimension d . On suppose que les X_i sont des v.a.r. indépendantes et que $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, avec $m_i \in \mathbb{R}$ et $\sigma_i > 0$ pour tout i . Montrer que X suit une loi normale multidimensionnelle et donner m et D t.q. $X \sim \mathcal{N}(m, D)$.

—————
corrigé

Comme les X_i ($i = 1, \dots, d$) sont des v.a.r. indépendantes, la loi de X est le produit des lois P_{X_i} , $i = 1, \dots, d$, c'est-à-dire $P_X = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_d}$. Cette propriété est donnée dans le théorème 9.2 (elle découle du fait que $P(X_1 \in A_1, \dots, X_d \in A_d) = P(X_1 \in A_1) \dots P(X_d \in A_d)$ si $A_1, \dots, A_d$ sont d boréliens de $\mathbb{R}$). Ceci donne que pour toute fonction φ borélienne bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\int_{\Omega} \varphi(X) dP = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \varphi(x_1, \dots, x_d) dP_{X_1}(x_1) \dots dP_{X_d}(x_d).$$

Comme, pour $i = 1, \dots, d$, $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, on a $P_{X_i} = f_i\lambda$ avec $f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(x-m_i)^2}{2\sigma_i^2}}$ (pour $x \in \mathbb{R}$). On en déduit :

$$\int_{\Omega} \varphi(X) dP = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{1}{\prod_{i=1}^d \sigma_i} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \varphi(x_1, \dots, x_d) e^{-\sum_{i=1}^d \frac{(x_i-m_i)^2}{2\sigma_i^2}} dx_1 \dots dx_d.$$

Ce qui donne :

$$\int_{\Omega} \varphi(X) dP = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{1}{\sqrt{\det D}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-\frac{1}{2}(x-m)^t D^{-1}(x-m)} dx,$$

où dx désigne l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ (c'est-à-dire $dx = d\lambda_d(x)$), D désigne la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $\sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2$ et $m = (m_1, \dots, m_d)^t$. Ceci montre bien que X suit une loi normale multidimensionnelle avec $X \sim \mathcal{N}(m, D)$ (voir la définition 9.3).

Corrigé 168 (Somme de v.a. indépendantes et convolution)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X, Y deux v.a.r. indépendantes.

1. On suppose que la loi de X a une densité, notée f , par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que la loi de $X + Y$ a aussi une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) et l'exprimer en fonction de f et de la loi de Y .

corrigé

Comme les X et Y sont des v.a.r. indépendantes, la loi du couple (X, Y) est $P_X \otimes P_Y$ (théorème 9.2). On a donc, pour toute fonction φ borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\int_{\Omega} \varphi(X + Y) dP = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x + y) dP_{(X, Y)}(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x + y) dP_X(x) dP_Y(y).$$

Comme $P_X = f\lambda$, on a alors :

$$\int_{\Omega} \varphi(X + Y) dP = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x + y) f(x) dx \right) dP_Y(y).$$

A y fixé, on utilise le changement de variable $x + y = z$, on obtient :

$$\int_{\Omega} \varphi(X + Y) dP = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(z) f(z - y) dz \right) dP_Y(y),$$

et donc, en utilisant le théorème de Fubini (théorème 7.3) ou le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2) si on se limite à des fonctions φ positives (ce que l'on peut faire) :

$$\int_{\Omega} \varphi(X + Y) dP = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z - y) dP_Y(y) \right) \varphi(z) dz = \int_{\mathbb{R}} g(z) \varphi(z) dz,$$

avec $g(z) = \int_{\mathbb{R}} f(z - y) dP_Y(y)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Ceci montre que $(X + Y)$ est une v.a.r. dont la loi a pour densité la fonction g (par rapport à la mesure de Lebesgue).

2. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m, s^2)$ ($m, \mu, s, \sigma \in \mathbb{R}$). Montrer que $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu + m, \sigma^2 + s^2)$ (le signe " $\sim$ " signifie "a pour loi").

corrigé

On peut supposer, bien sûr, $s \geq 0$ et $\sigma \geq 0$ (car σ et s n'interviennent que par leur carré). Nous allons commencer par deux cas particuliers faciles.

Cas 1 Si $s = \sigma = 0$, on a $X = \mu$ p.s. et $Y = m$ p.s. et donc $X + Y = m + \mu$ p.s., ce qui donne bien $X + Y \sim \mathcal{N}(m + \mu, 0)$.

Cas 2 Si $s = 0$ et $\sigma > 0$, on a $Y = m$ p.s. et donc $X + Y = X + m$ p.s.. La densité de $X + Y$ (par rapport à Lebesgue) est alors la densité de X translatée de m , ce qui donne bien $X + Y \sim \mathcal{N}(m + \mu, \sigma^2)$. De même, si $s > 0$ et $\sigma = 0$, on a $X + Y \sim \mathcal{N}(m + \mu, s^2)$.

Cas 3 On suppose maintenant que $s, \sigma > 0$. L'énoncé de cet exercice suggère (implicitement) de faire cette question en utilisant la question précédente. Nous allons procéder ainsi dans ce corrigé (mais d'autres méthodes sont possibles, voir le N.B. ci après). La question précédente donne que $(X+Y)$ est une v.a.r. dont la loi a pour densité la fonction g (par rapport à la mesure de Lebesgue) vérifiant, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2s^2}} dy.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\bar{x} = x - m - \mu$ et on utilise le changement de variable $z = \frac{y-m}{s}$. On obtient :

$$g(x) = \frac{1}{2\pi s\sigma} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(\bar{x}-sz)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\bar{x}^2 - 2sz\bar{x} + (s^2 + \sigma^2)z^2)} dz.$$

En remarquant que $(\bar{x}^2 - 2sz\bar{x} + (s^2 + \sigma^2)z^2) = (\sqrt{s^2 + \sigma^2}z - \frac{1}{\sqrt{s^2 + \sigma^2}}s\bar{x})^2 + (\frac{\sigma^2}{s^2 + \sigma^2}\bar{x}^2)$, on a aussi, avec le changement de variable $\frac{\sqrt{s^2 + \sigma^2}}{\sigma}z - \frac{1}{\sigma\sqrt{s^2 + \sigma^2}}s\bar{x} = \bar{z}$:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{1}{2(s^2 + \sigma^2)}\bar{x}^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\sqrt{s^2 + \sigma^2}\bar{z} - \frac{1}{\sqrt{s^2 + \sigma^2}}s\bar{x})^2} d\bar{z} = \frac{1}{2\pi\sqrt{s^2 + \sigma^2}} e^{-\frac{1}{2(s^2 + \sigma^2)}\bar{x}^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\bar{z}^2} d\bar{z}.$$

Comme $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\bar{z}^2} d\bar{z} = \sqrt{2\pi}$ et $\bar{x} = x - m - \mu$, on a donc $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{s^2 + \sigma^2}} e^{-\frac{1}{2(s^2 + \sigma^2)}(x-m-\mu)^2}$. Ce qui donne bien $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu + m, \sigma^2 + s^2)$.

N.B. Cette question peut aussi être résolue en utilisant la transformée de Fourier que nous verrons au chapitre 10. Elle est résolue ainsi (avec, plus généralement, $aX + bY$, $a, b \in \mathbb{R}$, au lieu de $X + Y$) dans le corrigé 173, question 1(a)), sur "Vecteurs gaussiens, indépendance, covariance".

Corrigé 169 (Calcul de π)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de variables aléatoires de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On suppose que toutes ces v.a. sont indépendantes (dans leur ensemble). On pose pour tout $n \geq 1$:

$$X_n = 1 \text{ si } U_n^2 + V_n^2 \leq 1 \text{ et } X_n = 0 \text{ sinon,}$$

et

$$Z_n = 4 \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_n .

corrigé

On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ t.q. } x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $\psi = 1_D$, de sorte que ψ est une fonction borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (car $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$) et que $X_n = 1_D(U_n, V_n) = \psi(U_n, V_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme U_n et V_n sont des v.a.r. et que ψ est borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, la fonction X_n est donc une v.a.r.. Comme X_n ne prend que les valeurs 1 et 0, la loi de X_n est $P_{X_n} = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$ où $p = P(U_n^2 + V_n^2 \leq 1)$. Pour calculer p , on utilise le fait que U_n et V_n sont indépendantes, on obtient (avec le théorème 9.2 sur la loi d'un couple de v.a.) :

$$p = P(U_n^2 + V_n^2 \leq 1) = \int_{\Omega} 1_D(U_n, V_n) dP = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_D(x, y) dP_{U_n}(x) dP_{V_n}(y).$$

Comme $U_n \sim \mathcal{U}(0, 1)$ et $V_n \sim \mathcal{U}(0, 1)$, on en déduit (en utilisant les coordonnées polaires) :

$$p = \int_0^1 \int_0^1 1_D(x, y) dx dy = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r dr = \frac{\pi}{4}.$$

Donc $p_{X_n} = \frac{\pi}{4} \delta_1 + (1 - \frac{\pi}{4}) \delta_0$.

2. Montrer que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers π .

corrigé

On utilise les notations introduites dans la première question. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = 4X_n$, c'est-à-dire $Y_n = 4\psi(U_n, V_n)$. Comme les v.a.r. $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes (dans leur ensemble), la proposition 9.5 donne la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. indépendantes. De plus, comme $Y_n = 4X_n$, on a $P_{Y_n} = \frac{\pi}{4} \delta_4 + (1 - \frac{\pi}{4}) \delta_0$. La suite Y_n est donc une suite de v.a.r.i.i.d. de carrés intégrables (on a $E(Y_n) = \pi$ et $E(Y_n^2) = 4\pi$). On peut appliquer le théorème 6.27 (loi faible des grands nombres), il donne que Z_n tend en probabilité vers $E(Y_1)$, c'est-à-dire vers π .

3. Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$. A l'aide de l'inégalité de Tchebychev, donner, en fonction de α et ε , une valeur de $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow P[|Z_n - \pi| \geq \varepsilon] \leq \alpha.$$

corrigé

On reprend ici la démonstration du théorème 6.27. En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev (lemme 4.10), on a :

$$p(|Z_n - \pi| \geq \varepsilon) = p((Z_n - \pi)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E((Z_n - \pi)^2).$$

Puis, en posant $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, on a $Z_n = \frac{S_n}{n}$ et donc $E((Z_n - \pi)^2) = \frac{1}{n^2} E((S_n - n\pi)^2) = \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2}$. La proposition 6.26 donne $\text{Var}(S_n) = n\text{Var}(Y_1) = n\pi(4 - \pi)$. On en déduit finalement

$$p(|Z_n - \pi| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{n\pi(4 - \pi)}{n^2} = \frac{\pi(4 - \pi)}{n\varepsilon^2}.$$

Il suffit donc de prendre n_0 t.q. $\frac{\pi(4 - \pi)}{n_0 \varepsilon^2} \leq \alpha$ pour avoir $P(|Z_n - \pi| \geq \varepsilon) \leq \alpha$.

12.9.3 Vecteurs gaussiens, théorème central limite

Corrigé 170 (Loi du couple (X, X) si X suit une loi normale)

1. Soit A un borélien de $\mathbb{R}^2$. On pose $T(A) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } (x, x)^t \in A\}$. Montrer que $T(A)$ est un borélien de $\mathbb{R}$. On pose $m(A) = \lambda(T(A))$ (où λ est mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

corrigé

L'application $x \mapsto (x, x)^t$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, elle donc borélienne. Comme $T(A)$ est l'image réciproque de A par cette application, on a bien $T(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On a ainsi défini une application m de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

2. Montrer que l'application m (définie ci dessus) est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et que pour toute application φ borélienne positive de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) dm(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x) dx.$$

corrigé

Pour montrer que m est une mesure, on remarque que $m(\emptyset) = 0$ (car $T(\emptyset) = \emptyset$) et m est σ -additive (ce qui découle simplement du fait que $A \cap B = \emptyset \Rightarrow T(A) \cap T(B) = \emptyset$).

On montre ensuite que $\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) dm(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x) dx$ pour $\varphi = 1_A$, avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (c'est une conséquence immédiate de la définition de m), puis pour φ étagée positive (par linéarité), puis pour φ borélienne positive (car une telle fonction est limite croissante de fonctions étagées positives).

3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité. et X une v.a.r. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- (a) On pose $Z = (X, X)^t$. Montrer que le v.a. Z est un vecteur gaussien et donner, pour $a \in \mathbb{R}^2$, la loi de $a \cdot Z$ (en fonction de a).

corrigé

Soit $a = (a_1, a_2)^t \in \mathbb{R}^2$. On pose $\alpha = a_1 + a_2$, de sorte que $a \cdot Z = \alpha X$.

Si $\alpha = 0$, on a $P_{a \cdot Z} = P_0 = \mathcal{N}(0, 0)$ (qui est bien une loi gaussienne).

Si $\alpha \neq 0$. Soit φ une application borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\int_{\Omega} \varphi(a \cdot Z) dP = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\alpha x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\alpha|} e^{-\frac{y^2}{2\alpha^2}} dy.$$

Ce qui prouve que $a \cdot Z \sim \mathcal{N}(0, |\alpha|)$. Le v.a. Z est donc bien un vecteur gaussien.

- (b) Montrer la loi du v.a. $(X, X)^t$ a une densité par rapport à la mesure m définie dans les questions précédentes et donner cette densité. En déduire que la loi du v.a. $(X, X)^t$ n'a pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

corrigé

Soit φ borélienne bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\int_{\Omega} \varphi(X, X) dP = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

On en déduit que la loi du v.a. $(X, X)^t$ est fm avec f borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et t.q. $f(x, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Comme m est étrangère à λ_2 , loi du v.a. $(X, X)^t$ n'a pas de densité par rapport à λ_2 (qui est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$).

N.B. la loi de $(X, X)^t$ est une loi normale bidimensionnelle car le vecteur $(X, X)^t$ est gaussien (voir la proposition 9.9) mais ce n'est pas une loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.