12.10 Exercices du chapitre 10

12.10.1 Transformée de Fourier dans L^1

Corrigé 171 (Résultat partiel d'inversion de Fourier dans L^1)
Soit $H(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$. On pose, pour $\lambda > 0$:

$$h_\lambda(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{itx} dt, x \in \mathbb{R}. \tag{12.146}$$

1. Montrer que $h_\lambda(x) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$, et $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x) dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$.

corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme H est paire, on a $(2\pi)^{\frac{1}{2}} h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|\lambda t|} \cos(tx) dt$ et donc

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}} h_\lambda(x) = 2 \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-\lambda t} \cos(tx) dt.$$

En intégrant deux fois par parties, on remarque que

$$\int_0^n e^{-|\lambda t|} \cos(tx) dt = \frac{1}{\lambda} - (\frac{x}{\lambda})^2 \int_0^n e^{-|\lambda t|} \cos(tx) dt + a_n,$$

avec $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ceci donne

$$\int_0^n e^{-|\lambda t|} \cos(tx) dt = \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}(1 + \lambda a_n),$$

et donc $h_\lambda(x) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{\lambda^2+x^2}$.

Pour calculer $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x) dx$, on utilise le changement de variable $x = \lambda y$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x) dx = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dy = (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

---

2. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f \star h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{ixt} dt. \tag{12.147}$$

corrigé

Noter que λ désigne ici à la fois le paramètre λ introduit au début de l'énoncé et la mesure de Lebesgue. Cette maladresse de notation semble toutefois sans gravité.

Comme $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h_\lambda \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $f \star h_\lambda(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$f \star h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) h_\lambda(x-t) dt = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}} H(\lambda y) e^{i(x-t)y} dy \right) dt.$$

Comme $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $H(\lambda \cdot) \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on peut utiliser le thérorème de Fubini (théorème 7.3) pour inverser l'ordre d'intégration et obtenir :

$$f \star h_\lambda(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} H(\lambda y) e^{ixy} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ity} dt \right) dy = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda y) e^{ixy} \hat{f}(y) dy.$$

---

3. Soit g une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue en 0. Montrer que $g \star h_\lambda(0) \to \sqrt{2\pi}g(0)$ quand $\lambda \to 0$. [Utiliser 1. et le théorème de convergence dominée.]

———————————————————**corrigé**———————————————————

On utilise maintenant le fait que $h_\lambda \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $g \in L^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour remarquer que $g \star h_\lambda(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour $x = 0$, on a :

$$g \star h_\lambda(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x) h_\lambda(x) dx = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} g(x) dx.$$

Avec le changement de variable $y = \frac{x}{\lambda}$, on obtient :

$$g \star h_\lambda(0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} g(\lambda y) \frac{1}{1+y^2} dy.$$

Comme $|g(\lambda y)\frac{1}{1+y^2}| \leq \|g\|_u \frac{1}{1+y^2}$ (avec $\|g\|_u = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$) et que la fonction $y \mapsto \frac{1}{1+y^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour en déduire (grâce à la continuité de g en 0) :

$$\lim_{\lambda \to 0} g \star h_\lambda(0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} g(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2} dy = (2\pi)^{\frac{1}{2}} g(0).$$

———————————————————————————————————————

4. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, montrer que :

$$\|f \star h_\lambda - \sqrt{2\pi} f\|_1 \to 0 \text{ lorsque } \lambda \to 0. \tag{12.148}$$

[Utiliser la continuité en moyenne et la question précédente avec $g(y) = \int |f(x-y) - f(x)| dx$.]

———————————————————**corrigé**———————————————————

Comme $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(y) dy = \sqrt{2\pi}$, on a :

$$\|f \star h_\lambda - \sqrt{2\pi} f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x)) h_\lambda(y) dy| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)| h_\lambda(y) dy\right) dx.$$

En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2), on en déduit :

$$\|f \star h_\lambda - \sqrt{2\pi} f\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)| dx\right) h_\lambda(y) dy = g \star h_\lambda(0),$$

avec $g(y) = \int |f(x-y) - f(x)| dx$.

Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (théorème 5.6, écrit pour de fonctions à valeurs réelles mais la généralisation est immédiate pour des fonctions à valeurs complexes) donne que g est continue en 0 et donc aussi continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (en remarquant que $|g(y) - g(z)| \leq g(y-z)|$) et donc aussi mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Ellle est également bornée (car $|g(y)| \leq 2\|f\|_1$, pour tout $y \in \mathbb{R}$). On peut donc utiliser la question précédente, elle donne que $\lim_{\lambda \to 0} g \star h_\lambda(0) = 0$ et donc que $\lim_{\lambda \to 0} \|f \star h_\lambda - \sqrt{2\pi} f\|_1 = 0$.

———————————————————————————————————————

5. Déduire de ce qui précède le théorème d'inversion de Fourier, théorème 10.1.

corrigé

On note $L^1 = L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $f \in L^1$ (on a donc $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$). On suppose que $\hat{f} \in L^1$. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^\star$ une suite t.q. $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Comme $f \in L^1$, la question précédente nous donne que $f \star h_{\lambda_n} \to \sqrt{2\pi} f$ dans L^1 et la question 2 nous donne pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f \star h_{\lambda_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda_n t) \hat{f}(t) e^{ixt} dt.$$

On utilise maintenant le théorème de convergence dominée qui s'applique parce que $\hat{f} \in L^1$ et $|H(\lambda_n t)\hat{f}(t)e^{ixt}| \le |\hat{f}(x)|$ (pour tout x et tout n). Comme $\lim_{n\to\infty} H(\lambda_n x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} f \star h_{\lambda_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} dt = \sqrt{2\pi}\hat{\hat{f}}(-x).$$

Enfin, comme $f \star h_{\lambda_n} \to \sqrt{2\pi} f$ dans L^1, on peut supposer, après extraction d'une sous suite, que $f \star h_{\lambda_n} \to \sqrt{2\pi} f$ p.p.. On a donc, finalement (par unicité de la limite dans $\mathbb{R}$), $\sqrt{2\pi} f = \sqrt{2\pi}\hat{\hat{f}}(-\cdot)$ p.p., c'est-à-dire $f = \hat{\hat{f}}(-\cdot)$ p.p..

12.10.2 Transformée de Fourier d'une mesure signée

Corrigé 172 (Une mesure est caractérisée par sa transformée de Fourier)
Soit $d \ge 1$.

1. Soit m et μ deux mesures signées sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\hat{m} = \hat{\mu}$.

   (a) Soit $\varphi \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Montrer que $\int \hat{\varphi} dm = \int \hat{\varphi} d\mu$.

   corrigé

   On remarque que $\int \hat{\varphi} dm = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int \left(\int e^{-ix\cdot t}\varphi(x)dx\right) dm(t)$. (Les intégrales sont toutes sur $\mathbb{R}^d$). La mesure signée m peut se décomposer en différence de deux mesures positives étrangères $m = m^+ - m^-$ (décomposition de Hahn, proposition 2.6). Comme $\int\int |e^{-ix\cdot t}\varphi(x)| dx dm^\pm(t) = \|\varphi\|_1 m^\pm(\mathbb{R}^d) < +\infty$, on peut utiliser le théorème de Funini-Tonelli (théorème 7.2) avec les mesures λ_d et m^+ et les mesures λ_d et m^-. On obtient ainsi :

   $$\int \hat{\varphi} dm = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int \left(\int e^{-ix\cdot t} dm(t)\right) \varphi(x) dx = \int \hat{m}(x)\varphi(x)dx.$$

   Le même raisonnement donne $\int \hat{\varphi} d\mu = \int \hat{\mu}(x)\varphi(x)dx$. Comme $\hat{m}(x) = \hat{\mu}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on en déduit bien $\int \hat{\varphi} dm = \int \hat{\varphi} d\mu$.

   (b) Montrer que $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ (et donc pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$).

   corrigé

   Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \subset L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, la question précédente donne $\int \hat{\varphi} dm = \int \hat{\varphi} d\mu$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Or, l'application $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ est une bijection dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ (proposition 10.6). On a donc $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.

(c) Montrer que $m = \mu$ (On rappelle qu'une fonction de $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions de $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$).

———————————————**corrigé**———————————————

Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\varphi_n \to \varphi$, uniformément sur $\mathbb{R}^d$, quand $n \to \infty$. La question précédente donne $\int \varphi_n dm = \int \varphi_n d\mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On utilise alors le théorème de convergence dominée (ce qui est possible car les mesures $m^\pm$ et $\mu^\pm$ sont des mesures finies), il donne $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$.

La proposition 5.4 donne alors $m = \mu$.

—————————————————————————————————————

2. Soit m une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\hat{m} \in L^1_\mathbb{C}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Montrer que m est la mesure de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue avec $f = \hat{\hat{m}}(-\cdot)$.

12.10.3 Fonction caractéristique d'un v.a.

Corrigé 173 (Vecteurs gaussiens, indépendance, covariance)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $d \geq 1$ et $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un v.a. de dimension d.

1. On suppose ici que $d = 2$.

(a) On suppose que X_1 et X_2 suivent des lois gaussiennes et sont indépendantes, montrer que X est un vecteur gaussien et que $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

———————————————**corrigé**———————————————

Comme X_1 et X_2 suivent des lois gaussiennes, il existe $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_+$ t.q. $X_k \sim \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$ pour $i = 1, 2$. On a donc $\varphi_{X_k}(u) = e^{ium_k} e^{-\frac{\sigma_k^2 u^2}{2}}$ pour $k = 1, 2$ et pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Soit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. On calcule alors la fonction caractéristique de la v.a.r. $a_1X_1 + a_2X_2$. Soit $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi_{a_1X_1+a_2X_2}(u) = \int_\Omega e^{i(a_1X_1+a_2X_2)u} dP = \int_\Omega e^{ia_1X_1u} e^{ia_2X_2u} dP$$

En utilisant l'indépendance de X_1 et X_2, on en déduit :

$$\varphi_{a_1X_1+a_2X_2}(u) = \int_\Omega e^{ia_1X_1u} dP \int_\Omega e^{ia_2X_2u} dP = \varphi_{X_1}(a_1u)\varphi_{X_2}(a_2u).$$

Ce qui donne $\varphi_{a_1X_1+a_2X_2}(u) = e^{iu(a_1m_1+a_2m_2)} e^{-\frac{u^2(\sigma_1^2a_1^2+\sigma_2^2a_2^2)}{2}}$. Comme la loi d'une v.a.r. est entièrement déterminée par sa fonction caractéristique (proposition 10.10), on en déduit que $a_1X_1 + a_2X_2 \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = a_1m_1 + a_2m_2$ et $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2a_1^2 + \sigma_2^2a_2^2}$. Ceci prouve bien que X est un vecteur gaussien.

L'indépendance de X_1 et X_2 permet aussi de calculer la fonction caractéristique de X. Soit $u = (u_1, u_2)^t \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi_X(u) = \int_\Omega e^{i(X_1u_1+X_2u_2)} dP = e^{i(u_1m_1+u_2m_2)} e^{-\frac{u_1^2\sigma_1^2+u_2^2\sigma_2^2}{2}}.$$

Ceci prouve que la matrice de covariance de X est diagonale (proposition 10.13) et donc que $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

—————————————————————————————————————

(b) On suppose que X est un vecteur gaussien et que $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.

corrigé

D'après la proposition 10.11, pour montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes, il suffit de montrer que $\varphi_X(u) = \prod_{j=1}^2 \varphi_{X_j}(u_j)$ pour tout $u = (u_1, u_2)^t \in \mathbb{R}^2$. Ceci est une conséquence facile du fait que $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$. En effet, la matrice de covariance de X est alors diagonale et on a bien (grâ ce à la proposition 10.13), en reprenant les notations de la question précédente (c'est-à-dire $X_k \sim \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$ pour $i = 1, 2$),

$$\varphi_X(u) = e^{i(u_1 m_1 + u_2 m_2)} e^{-\frac{u_1^2\sigma_1^2 + u_2^2\sigma_2^2}{2}} = \varphi_{X_1}(u_1)\varphi_{X_2}(u_2),$$

c'est-à-dire $\varphi_X(u) = \prod_{j=1}^2 \varphi_{X_j}(u_j)$ pour tout $u = (u_1, u_2)^t \in \mathbb{R}^2$.

2. On suppose toujours $d = 2$. Donner un exemple pour lequel X_1 et X_2 sont gaussiennes mais X n'est pas un vecteur gaussien. [On pourra, par exemple, choisir $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X_1, X_2 de manière à avoir $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$ sans que X_1, X_2 soient indépendantes, voir l'exercice 4.44.]

corrigé

On considère les deux v.a.r. S et X de l'exercice 4.44 et on prend $X_1 = SX$ et $X_2 = X$. Les v.a.r. X_1 et X_2 sont gaussiennes (on a $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$), elles sont dépendantes et on a $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$ (voir l'exercice 4.44). On en déduit que le v.a. $X = (X_1, X_2)$ n'est pas gaussien (sinon les v.a.r. seraient indépendantes, d'après la question précédente).

3. On suppose que X est un vecteur gaussien et que les composantes de X sont indépendantes deux à deux. Montrer que $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes.

corrigé

La démonstration est ici similaire à celle de la question 1(b). D'après la proposition 10.11, pour montrer que les v.a.r. $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes, il suffit de montrer que $\varphi_X(u) = \prod_{j=1}^d \varphi_{X_j}(u_j)$ pour tout $u = (u_1, \ldots, u_d)^t \in \mathbb{R}^d$. Ceci est une conséquence facile du fait que les v.a.r. $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes deux à deux. En effet, cette hypothèse d'indépendance deux à deux donne que la matrice de covariance de X est diagonale et on a alors (grâce à la proposition 10.13), avec $X_k \sim \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$ pour $i = 1, \ldots, d$,

$$\varphi_X(u) = e^{i\sum_{k=1}^d u_k m_k} e^{-\frac{\sum_{k=1}^d u_k^2\sigma_k^2}{2}} = \varphi_{X_1}(u_1) \ldots \varphi_{X_d}(u_d),$$

c'est-à-dire $\varphi_X(u) = \prod_{j=1}^d \varphi_{X_j}(u_j)$ pour tout $u = (u_1, \ldots, u_d)^t \in \mathbb{R}^d$.

Corrigé 174 (Suite de v.a.r.i.i.d. de Poisson)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une v.a. de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$). On rappelle que, $P[X = k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $E[X] = \lambda$, $Var[X] = \lambda$.

1. Calculer la fonction caractéristique φ_X de X.

corrigé

Soit $u \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_X(u) = \int_\Omega e^{iXu} dP = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{iku} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(\lambda e^{iu})^k}{k!} = e^{\lambda(e^{iu}-1)}$

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de v.a. indépendantes et de Poisson de paramètre λ.

   (a) Soit $n > 1$. Déduire de la première question la loi de la v.a. $Y_n = \sum_{p=1}^n X_p$.

   corrigé

   Soit $u \in \mathbb{R}$. On a $\varphi_{Y_n}(u) = \int_\Omega e^{iY_n u} dP = \int_\Omega \prod_{p=1}^n e^{iX_p u} dP$. Comme les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, on en déduit que $\varphi_{Y_n}(u) = \prod_{p=1}^n \int_\Omega e^{iX_p u} dP = e^{n\lambda(e^{iu}-1)}$.

   Comme la loi d'une v.a.r. est entièrement déterminée par sa fonction caractéristique (proposition 10.10), on en déduit que Y_n est une v.a. de Poisson de paramètre $n\lambda$.

   (b) Utiliser le théorème central limite pour démontrer que

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2} \text{ quand } n \to \infty.$$

   corrigé

   On suppose maintenant que $\lambda = 1$. la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite de v.a.r.i.i.d. de carrés intégrables et on a $E(X_1) = 1$ et $\mathrm{Var}(X_1) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - 1) = \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_n - n).$$

   Le théorème central limite (théorème 6.12) donne que la suite $(P_{Z_n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge étroitement vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Comme une loi normale est diffuse (c'est-à-dire qu'elle ne charge pas les points), on en déduit que $P(Z_n \le 0)$ tend vers $1/2$ quand $n \to \infty$ (voir l'exercice 6.53 et noter que $P(Z_n \le 0) = P_{Z_n}(]-\infty, 0])$). Or, $P(Z_n \le 0) = P(Y_n \le n)$ et, comme Y_n est une v.a. de Poisson de paramètre n, on a :

$$P(Y_n \le n) = \sum_{k=0}^{n} P(Y_n = k) = \sum_{k=0}^{n} e^{-n} \frac{n^k}{k!}.$$

   On a donc $e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \to 1/2$, quand $n \to \infty$.

Corrigé 175 (Sur les lois forte et faible des grands nombres)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. dont la loi est la loi de Cauchy c'est-à-dire que $P_X = f\lambda$, avec $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ pour $x \in \mathbb{R}$ (on rappelle que λ désigne la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$).

1. Montrer que X n'est pas une v.a.r. intégrable.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer que $P(\{|X| > n\}) \ge \frac{1}{n\pi}$, où $\{|X| > n\} = \{\omega \in \Omega, |X(\omega)| > n\}$. [On pourra remarquer que $\frac{2}{1+x^2} \ge \frac{1}{x^2}$ pour tout $x \ge 1$.]

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = e^{-|x|}$. Montrer que

$$\frac{2}{1+u^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} g(x)dx = \sqrt{2\pi}\hat{g}(u) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}.$$

En déduire que la fonction caractéristique de X, notée φ_X vérifie $\varphi_X(u) = e^{-|u|}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. [On pourra utiliser de théorème d'inversion de Fourier qui donne $\hat{\hat{g}} = g(-\cdot)$ p.p. si $g, \hat{g} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.]

On se donne maintenant une suite $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ de v.a.r.i.i.d. et on suppose que la loi de X_1 (et donc de tous les X_n) est la loi de Cauchy. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose :

$$Z_n = \frac{1}{n}(\sum_{p=1}^{n} X_p).$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

   (a) Montrer que
   $$\varphi_{Z_n}(u) = \varphi^n_{X_1}(\frac{u}{n}) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}.$$

   (b) Donner la loi de Z_n.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $A_n = \{|X_n| > n\}$ et $B_n = \cup_{p \geq n} A_p$. on pose aussi $B = \cap_{n \in \mathbb{N}^\star} B_n$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En utilisant la question 2, montrer que
   $$P(B^c_n) = \prod_{p \geq n} P(A^c_p) \leq \prod_{p \geq n}(1 - \frac{1}{p\pi}).$$
   En déduire que $P(B^c_n) = 0$ et donc que $P(B_n) = 1$.

   (b) Montrer que $P(B) = 1$. [Cette question est une conséquence de la question (a) mais elle peut aussi être faite directement en appliquant le lemme de Borel-Cantelli et la question 2.]

   (c) Soit $\omega \in B$. Montrer que $\frac{X_n(\omega)}{n} \not\to 0$ quand $n \to \infty$.

   (d) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer que $\frac{X_n(\omega)}{n} \to 0$ (quand $n \to \infty$) si la suite $(Z_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^\star}$ converge vers une limite finie. [Ecrire X_n en fonction de Z_n et Z_{n-1}.]

   (e) Déduire des trois questions précédentes que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ ne converge pas p.s. vers une limite finie quand $n \to \infty$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer que
   $$Z_{2n} - Z_n = \frac{U_n + V_n}{2},$$
   où U_n et V_n sont deux v.a.r. indépendantes, de loi de Cauchy.

   En déduire que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ ne converge pas en probabilité.

7. Pour quelles raisons ne peut-on appliquer, à la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$, les lois forte et faible des grands nombres ?

corrigé

En attente

12.11 Exercices du chapitre 11

12.11.1 Espérance conditionnelle

Corrigé 176 (Espérance conditionnelle selon une tribu)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et Y une variable aléatoire réelle intégrable. Dans les trois cas suivants, montrer que $E[Y|\mathcal{B}]$ est réduit à un élément et déterminer $E[Y|\mathcal{B}]$ (en fonction de Y et $\mathcal{B}$).

1. La tribu $\mathcal{B}$ la tribu grossière, c'est-à-dire $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$.

——————————————**corrigé**——————————————

Soit Z une application de Ω dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$-mesurable. Soit $a \in \mathrm{Im}(Z)$ (on suppose, bien sûr, $\Omega \neq \emptyset$). On a alors $\{Z = a\} = \{\omega \in \Omega; Z(\omega) = a\} \neq \emptyset$. Comme Z est $\mathcal{B}$-mesurable, on a donc $\{Z = a\} = \Omega$. Une application $\mathcal{B}$-mesurable est donc une fonction constante (réciproquement, une fonction constante est bien $\mathcal{B}$-mesurable). Si $Z \in E(Y|\mathcal{B})$, il existe donc $a \in \mathbb{R}$ t.q. $Z(\omega) = a$ pour tout $\omega \in \Omega$. Le réel a doit alors vérifier $E(aU) = E(UY)$ pour tout application U, $\mathcal{B}$-mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$. On a donc $ab = E(ab) = E(bY) = bE(Y)$ pour tout $b \in \mathbb{R}$. La seule solution est donc $a = E(Y)$. L'ensemble $E[Y|\mathcal{B}]$ est donc réduit à un seul élément, la fonction constante et égale à $E(Y)$.

————————————————————————————————

2. Soit $B \in \mathcal{A}$ t.q. $0 < P[B] < 1$. On prend pour $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par B.

——————————————**corrigé**——————————————

Soit Z une application de Ω dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$-mesurable. Les paties B et B^c sont non vides (car de probabilité strictement positive). Soit $\omega_1 \in B$ et $a = Z(\omega_1)$. On a alors $\{Z = a\} = \{\omega \in \Omega; Z(\omega) = a\} \neq \emptyset$. Comme Z est $\mathcal{B}$-mesurable, on a donc $\{Z = a\} = B$ ou Ω et donc $\{Z = a\} \supset B$. De même, soit $\omega_2 \in B^c$ et $b = Z(\omega_2)$, on a $\{Z = b\} \supset B^c$. Une application $\mathcal{B}$-mesurable est donc une fonction constante sur B et B^c. Réciproquement, une fonction constante sur B et B^c est bien $\mathcal{B}$-mesurable.

Si $Z \in E(Y|\mathcal{B})$, il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $Z = a1_B + b1_{B^c}$. Les réels a, b doivent alors vérifier $E(ZU) = E(UY)$ pour tout application U $\mathcal{B}$-mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$a\alpha P(B) + b\beta P(B^c) = \alpha \int_B Y dP + \beta \int_{B^c} Y dP \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Comme $P(B) > 0$ et $P(B^c) = 1 - P(B) > 0$, la seule solution est donc :

$$a = \frac{\int_B Y dP}{P(B)} \text{ et } b = \frac{\int_{B^c} Y dP}{P(B^c)}.$$

L'ensemble $E[Y|\mathcal{B}]$ est donc réduit à un seul élément, la fonction Z définie par $Z = \frac{\int_B Y dP}{P(B)} 1_B + \frac{\int_{B^c} Y dP}{P(B^c)} 1_{B^c}$.

————————————————————————————————

3. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{A}$ t.q. $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$, $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star} B_n$ et $0 < P(B_n) < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On prend pour $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ (c'est-à-dire $\mathcal{B} = \{\cup_{n\in J} B_n,\ J \subset \mathbb{N}^\star\}$).

——————————————**corrigé**——————————————

On reprend le même raisonnement que dans les deux questions précédentes. On remarque d'abord qu'une application Z de Ω dans $\mathbb{R}$ est $\mathcal{B}$-mesurable si et seulement si il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathbb{R}$

t.q. $Z = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \alpha_n 1_{B_n}$. (Cette Série est bien convergente en tout point de Ω car les B_n sont disjoints deux à deux.

Si $Z \in E(Y|\mathcal{B})$, il existe donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathbb{R}$ t.q. $Z = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} a_n 1_{B_n}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ doit alors être telle que Z soit intégrable et que $E(ZU) = E(UY)$ pour tout application U $\mathcal{B}$-mesurable bornée de Ω dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire t.q. $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} |a_n| P(B_n) < +\infty$ et :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \alpha_n a_n P(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \alpha_n \int_{B_n} Y dP \text{ pour toute suite bornée } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathbb{R}.$$

Comme $P(B_n) > 0$, la seule solution est donc :

$$a_n = \frac{\int_{B_n} Y dP}{P(B_n)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^\star.$$

Comme on sait que l'ensemble $E[Y|\mathcal{B}]$ est non vide, il est inutile de vérifier que la fonction Z trouvée est intégrable (puisque cette fonction est la seule fonction pouvant appartenir à $E[Y|\mathcal{B}]$). L'ensemble $E[Y|\mathcal{B}]$ est donc réduit à un seul élément. Cet élément est la fonction Z définie par $Z = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\int_{B_n} Y dP}{P(B_n)} 1_{B_n}$.

Corrigé 177 (Espérance conditionnelle selon une v.a.r.)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle et Y une variable aléatoire réelle intégrable.

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $X = a$ p.s.. Donner un élément de $E[Y|X]$.

corrigé

On utilise la proposition 11.5. Soit $Z \in E[Y|X]$, il existe alors ψ, fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $Z = \psi(X)$, $\psi(X)$ est intégrable et

$$E(\psi(X)\varphi(X)) = E(Y\varphi(X)) \text{ pour toute application } \varphi \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ borélienne bornée.}$$

On a donc $Z = \psi(a)$ p.s. et en prenant pour φ une fonction t.q. $\varphi(a) = 1$ dans l'égalité précédente, on obtient $\psi(a) = E(Y)$. On a donc finalement $Z = E(Y)$ p.s.. La fonction constante et égale à $E(Y)$ est un élément de $E[Y|X]$. Plus précisément, la fonction $\psi(X)$ est un élément de $E[Y|X]$, dès que ψ est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et t.q. $\psi(a) = E(Y)$.

---

2. On suppose que X prend p.s. deux valeurs x_1 ou x_2 avec $x_1 \neq x_2$. Donner un élément de $E[Y|X]$.

corrigé

On pose $A_1 = \{X = x_1\}$ et $A_2 = \{X = x_2\}$. On suppose que $P(A_1) > 0$ et $P(A_2) > 0$ (sinon, on est ramené à la question précédente). Noter que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et $P(A_1) + P(A_2) = 1$. On utilise encore la proposition 11.5. Soit $Z \in E[Y|X]$, il existe alors ψ, fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $Z = \psi(X)$, $\psi(X)$ est intégrable et

$$E(\psi(X)\varphi(X)) = E(Y\varphi(X)) \text{ pour toute application } \varphi \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ borélienne bornée.} \quad (12.149)$$

On a donc $Z = \psi(x_1)1_{A_1} + \psi(x_2)1_{A_2}$ p.s.. Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, en prenant pour φ une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi(x_1) = a_1$ et $\varphi(x_2) = a_2$ dans l'égalité (12.149), on obtient :

$$\psi(x_1)\alpha_1 P(A_1) + \psi(x_2)\alpha_2 P(A_2) = \alpha_1 \int_{A_1} Y dP + \alpha_2 \int_{A_2} Y dP \text{ pour tout } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme $P(A_i) > 0$ pour $i = 1, 2$, on en déduit que $\psi(x_i) = \frac{\int_{A_i} Y dP}{P(A_i)}$, pour $i = 1, 2$, et donc que

$$Z = \frac{\int_{A_1} Y dP}{P(A_1)} 1_{A_1} + \frac{\int_{A_i} Y dP}{P(A_i)} 1_{A_2} \text{ p.s..}$$

Ici encore, la fonction $\psi(X)$ est un élément de $E[Y|X]$ dès que ψ est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et t.q. $\psi(x_i) = \frac{\int_{A_i} Y dP}{P(A_i)}$ pour $i = 1, 2$ (un exemple possible est donc $\psi(x_i) = \frac{\int_{A_i} Y dP}{P(A_i)}$ pour $i = 1, 2$ et $\psi(x) = 0$ pour $x \notin \{x_1, x_2\}$).

---

3. On suppose que X est une v.a. prenant p.s. ses valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ avec $P(X = x_n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Donner un élément de $E[Y|X]$.

corrigé

On peut supposer que les x_n sont différents deux à deux. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $A_n = \{X = x_n\}$. Les ensembles A_n sont disjoints deux à deux, $P(A_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 1$.

On utilise encore la proposition 11.5. Soit $Z \in E[Y|X]$, il existe alors ψ, fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $Z = \psi(X)$, $\psi(X)$ est intégrable et

$$E(\psi(X)\varphi(X)) = E(Y\varphi(X)) \text{ pour toute application } \varphi \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ borélienne bornée.} \quad (12.150)$$

On a donc $Z = \sum_{n \in \mathbb{N}^\star} \psi(x_n) 1_{A_n}$ p.s.. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^\star} \subset \mathbb{R}$ une suite bornée de $\mathbb{R}$. Dans l'égalité (12.150), on prend pour φ une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi(x_n) = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ (un tel φ existe, on peut prendre, par exemple, $\varphi(x) = 0$ si x est différent de tous les x_n), on obtient :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^\star} \psi(x_n) \alpha_n P(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}^\star} \alpha_n \int_{A_n} Y dP \text{ pour toute suite bornée } (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^\star} \subset \mathbb{R}.$$

Comme $P(A_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on en déduit que $\psi(x_n) = \frac{\int_{A_n} Y dP}{P(A_n)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et donc que

$$Z = \sum_{n \in \mathbb{N}^\star} \frac{\int_{A_n} Y dP}{P(A_n)} 1_{A_n} \text{ p.s..}$$

Noter que, comme on sait que $E(Y|X)$ est non vide (donc qu'il existe $Z \in E(Y|X)$), la fonction $\sum_{n \in \mathbb{N}^\star} \frac{\int_{A_n} Y dP}{P(A_n)} 1_{A_n}$ est nécessairement intégrable (en fait, on a $\|Z\|_1 \leq \|Y\|_1$).

Enfin, ici encore, la fonction $\psi(X)$ est un élément de $E[Y|X]$ dès que ψ est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et t.q. $\psi(x_n) = \frac{\int_{A_n} Y dP}{P(A_n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Un exemple possible est donc $\psi(x_n) = \frac{\int_{A_n} Y dP}{P(A_n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\psi(x) = 0$ pour $x \notin \{x_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$. Cet exemple donne la fonction $\sum_{n \in \mathbb{N}^\star} \frac{\int_{A_n} Y dP}{P(A_n)} 1_{A_n}$.

Corrigé 178 (Calcul de $E(\exp(XY)|X)$ si Y est gaussienne)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X, Y deux v.a. réelles indépendantes. On suppose que Y suit une loi gaussienne centrée réduite et que $E[\exp(X^2/2)] < \infty$. Montrer que $\exp(XY)$ est intégrable et déterminer $E[\exp(XY)|X]$.

———————————————corrigé———————————————

La v.a.r. $\exp(XY)$ est positive. On calcule $\int_\Omega e^{XY} dP$ en utilisant l'indépendance de X et Y (et le théorème 9.2, qui donne que $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$) et le fait que $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$\int_\Omega e^{XY} dP = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{xy} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy dP_X(x).$$

En remarquant que $xy - \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}x^2$ on obtient :

$$\int_\Omega e^{XY} dP = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x-y)^2}{2}})dy \right) e^{\frac{x^2}{2}} dP_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz \right) e^{\frac{x^2}{2}} dP_X(x),$$

et donc $\int_\Omega e^{XY} dP = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{x^2}{2}} dP_X(x) = E(e^{\frac{X^2}{2}}) < +\infty$. Ce qui donne que e^{XY} est une v.a.r. intégrable.

Selon la proposition 11.5 on cherche un élément de $E[\exp(XY)|X]$ sous la forme $\psi(X)$ où ψ est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $Z = \psi(X)$, $\psi(X)$ est intégrable et

$$E(\psi(X)\varphi(X)) = E(e^{XY}\varphi(X)) \text{ pour toute application } \varphi \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ borélienne bornée.}$$

Soit φ une application borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on calcule $E(e^{XY}\varphi(X))$ en utilisant, comme précédemment, l'indépendance de X et Y et le fait que $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$E(e^{XY}\varphi(X)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{xy} \varphi(x) e^{-\frac{y^2}{2}} dy dP_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x-y)^2}{2}} dy \right) e^{\frac{x^2}{2}} \varphi(x) dP_X(x).$$

On a donc $E(e^{XY}\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{x^2}{2}} \varphi(x) dP_X(x) = E(e^{-\frac{X^2}{2}} \varphi(X))$. Ceci nous montre que $e^{-\frac{X^2}{2}}$ est un élément de $E[\exp(XY)|X]$ et donc (comme on confond $E[\exp(XY)|X]$ avec l'un de des éléments) $E[\exp(XY)|X] = e^{-\frac{X^2}{2}}$ p.s..

—————————————————————————————————

Corrigé 179 (Espérance du produit et produit des espérances)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X, Y deux v.a. intégrables t.q. XY est intégrable et $E[X|Y] = E(X)$ p.s.. Montrer que $E(XY) = E(X)E(Y)$.

———————————————corrigé———————————————

Grâce à la proposition 11.5 on a

$$E(E[X|Y]\varphi(Y)) = E(X\varphi(Y)) \text{ pour toute application } \varphi \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ borélienne bornée.}$$

Comme $E[X|Y] = E(X)$ p.s., on en déduit

$$E(X)E(\varphi(Y)) = E(X\varphi(Y)) \text{ pour toute application } \varphi \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ borélienne bornée.} \tag{12.151}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $T_n(s) = \max\{-n, \min\{s,n\}\}$. La fonction T_n est borélienne (car continue) bornée (par n) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On peut donc utiliser (12.151) avec $\varphi = T_n$. On obtient $E(X)E(T_n(Y)) = E(XT_n(Y))$.

Comme Y est intégrable, on a, par convergence dominée, $\lim_{n\to\infty} E(T_n(Y)) = E(Y)$ (noter que $|T_n(Y)| \leq |Y|$).

Comme XY est intégrable (et c'est uniquement ici que cette hypothèse est utilisée), on a, par convergence dominée, $\lim_{n\to\infty} E(XT_n(Y)) = E(XY)$ (noter que $|XT_n(Y)| \leq |XY|$).

En passant à limite quand $n \to \infty$ sur l'égalité $E(X)E(T_n(Y)) = E(XT_n(Y))$, on a donc $E(X)E(Y) = E(XY)$.

Corrigé 180 (Lorsque $E(Y|X) = X$ p.s.. . .)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. de carré intégrable.

On suppose que $E(Y|X) = X$ p.s..

1. (a) Soit φ une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la v.a.r. $\varphi(X)$ est de carré intégrable. Montrer que $\int_\Omega Y\varphi(X)dP = \int_\Omega X\varphi(X)dP$.
   (b) Montrer que $E(Y) = E(X)$ et $E(XY) = E(X^2)$.
2. (a) Montrer que $E(X^2) \leq E(Y^2)$.
   (b) Montrer que $Y = X$ p.s. si et seulement si $E(Y^2) = E(X^2)$.

corrigé

En attente

12.11.2 Martingales

Corrigé 181 (Quelques propriétés des martingales)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire d'une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{A}$) et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de de v.a.r. (c'est-à-dire un processus réel). On suppose que X_n est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Montrer que la suite $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   corrigé

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale, on a $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) \geq X_n$ p.s. et donc $E(E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n)) \geq E(X_n)$. Or (comme les fonctions constantes sont $\mathcal{B}_n$-mesurables bornées), $E(E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n)) = E(X_{n+1})$. On a donc $E(X_{n+1}) \geq E(X_n)$.

   ---

2. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Montrer que $E(X_{n+m}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s. pour tout $m \geq 0$.

   corrigé

   Pour $m = 0$, le fait que $E(X_n|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s., pour tout $n \in \mathbb{N}$, découle du fait que X_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable. Pour $m \geq 1$, On montre la propritée demandée par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^\star$. Pour $m = 1$ le fait que $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s., pour tout $n \in \mathbb{N}$, est donné dans la définition de martingale. Soit $m \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que $E(X_{n+m}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s., pour tout $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que $E(X_{n+m+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, on a $E(X_{n+m+1}|\mathcal{B}_{n+m}) = X_{n+m}$ p.s. et donc :

   $$E(X_{n+m+1}U) = E(X_{n+m}U) \text{ pour tout } U\ \mathcal{B}_{n+m}\text{-mesurable bornée.}$$

Comme $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+m}$, on a donc aussi

$$E(X_{n+m+1}U) = E(X_{n+m}U) \text{ pour tout } U\ \mathcal{B}_n\text{-mesurable bornée.}$$

L'hypothèse de récurrence donne $E(X_{n+m}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s.. On a donc :

$$E(X_{n+m}U) = E(X_nU) \text{ pour tout } U\ \mathcal{B}_n\text{-mesurable bornée.}$$

On a en déduit :

$$E(X_{n+m+1}U) = E(X_nU) \text{ pour tout } U\ \mathcal{B}_n\text{-mesurable bornée.}$$

Ce qui montre que $E(X_{n+m+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s. et termine la récurrence.

---

3. Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) et que $\varphi(X_n)$ est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on rappelle que $\varphi(X_n)$ est une notation pour désigner $\varphi \circ X_n$). Montrer que $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

corrigé

On remarque tout d'abord que $\varphi(X_n)$ est bien $\mathcal{B}_n$-mesurable (car X_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable et φ est borélienne), pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer que $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale, il suffit alors d'utiliser le proposition 11.4 sur l'inégalité de jensen. Soit $n \in \mathbb{N}$. La proposition 11.4 donne

$$E(\varphi(X_{n+1})|\mathcal{B}_n) \geq \varphi(E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n)) \text{ p.s..}$$

Comme $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s., on en déduit $E(\varphi(X_{n+1})|\mathcal{B}_n) \geq \varphi(X_n)$ p.s., ce qui montre bien que $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale.

That's all folks