Transformée de Fourier et Équation de la chaleur.

Université Aix-Marseille

Préparation à l'agrégation (Option B)

2019/2020

THOMAS OURMIÈRES-BONAFOS

Extrait du programme de l'agrégation externe 2020 Avant de commencer, on prendra connaissance du programme de l'agrégation externe, qui détaille les notions à maîtriser concernant les problèmes d'optimisation (voir Figure 1).

(b) Transformation de FOURIER sur les espaces $L^1(\mathbf{R}^d)$ et $L^2(\mathbf{R}^d)$. Théorème de PLANCHEREL.

(a) Espace de SCHWARTZ $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ des fonctions à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées. Fonctions gaussiennes et leurs dérivées. Stabilité par dérivation. Stabilité par multiplication par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à croissance lente. Transformation de FOURIER sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Convolution de deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.

(b) Espace $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ des distributions tempérées : formes linéaires T sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ telles qu'il existe $C > 0$ et $k \in \mathbf{N}$ vérifiant $|\langle T|\phi \rangle| \leq C \sup\{|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)|, x \in \mathbf{R}^d, |\alpha| \leq k, |\beta| \leq k\}$ pour tous $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Exemples de distributions tempérées : fonctions L^2 et représentation de RIESZ, fonctions L^p , cas des fonctions périodiques, peigne de DIRAC. Dérivation des distributions tempérées ; multiplication par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à croissance lente. Convolution d'une distribution tempérée avec une fonction de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.

(c) Transformation de FOURIER dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$. Formule d'inversion. Transformation de FOURIER et dérivation, transformée de FOURIER d'un produit de convolution.

Calcul de dérivées et de transformée de FOURIER de distributions. Formule de POISSON (dimension un).

Utilisation de la convolution et de la transformée de FOURIER-LAPLACE pour la résolution d'équations différentielles linéaires en dimension un. Notion de solution élémentaire d'opérateurs différentiels à coefficients constants (cas du laplacien).

Notion de solution faible d'équations aux dérivées partielles linéaires : application, par exemple, à la résolution des équations de LAPLACE, de la chaleur, des ondes.

(e) Notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles classiques en dimension un.

Équation de transport (advection) linéaire : méthode des caractéristiques.

Équations des ondes et de la chaleur : résolution par série de FOURIER, transformée de FOURIER et séparation des variables. Aspects qualitatifs élémentaires.

Équations elliptiques, utilisation du théorème de LAX-MILGRAM.

Exemples de discrétisation d'équations aux dérivées partielles en dimension un par la méthode des différences finies : notions de consistance, stabilité, convergence, ordre.

FIGURE 1 – Extrait du programme de l'agrégation 2020 concernant la transformée de Fourier et l'équation de la chaleur. Disponible à l'url suivante : http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agreg_externe/59/7/p2020_agreg_ext_maths_1107597.pdf

Table des matières

1	Transformée de Fourier sur les espaces de Schwartz	4
1.1	L'espace de Schwartz	4
1.2	La transformée de Fourier sur l'espace de Schwarz	5
2	Transformée de Fourier L^1	7
2.1	Pré-requis : approximations de l'unité et convolution	7
2.2	Définition	9
3	Transformée de Fourier L^2	10
3.1	Pré-requis	10
3.2	Définition	11
4	Équation de la chaleur	13
4.1	Introduction au modèle	13
4.2	Un peu de modélisation : dérivation de l'équation de la chaleur 1-D	13
4.3	Résolution de l'équation de la chaleur 1-D	14
5	Aspects numériques de l'équation de la chaleur	16
5.1	Discrétisation en espace	16
5.2	Discrétisation en temps	19
5.3	Discrétisation de l'équation de la chaleur	20

1 Transformée de Fourier sur les espaces de Schwartz

Le but de cette section est d'introduire l'espace de Schwartz et la transformée de Fourier sur un tel espace.

1.1 L'espace de Schwartz

L'espace de Schwartz sur $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'espace de fonctions régulières, dites à décroissance rapide. On en donne ci-dessous sa définition.

Définition 1 (Espace de Schwartz) *L'espace de Schwartz sur $\mathbb{R}$ est défini comme*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}) : \text{pour tout } p, q \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p u^{(q)}(x)| < +\infty\}.$$

Exercice 1 (🕒 5min.) *Les fonctions suivantes sont-elles dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$?*

1. $u_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t^2}$
2. $u_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$
3. $u_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto \sin(e^t)$

Exercice 2 (🕒 3min.) *Montrer que $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Exercice 3 (🕒 2min.) *Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.*

L'espace de Schwartz peut être muni d'une topologie associée à une famille de semi-normes. On rappelle la définition d'une semi-norme.

Définition 2 (Semi-norme) *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit une application $\mathcal{N} : E \rightarrow \mathbb{R}_+$. $\mathcal{N}$ est une semi-norme lorsqu'elle satisfait :*

1. Pour tout $(\lambda, u) \in \mathbb{K} \times E$, $\mathcal{N}(\lambda u) = |\lambda| \mathcal{N}(u)$.
2. Pour tout $(u, v) \in E$, $\mathcal{N}(u + v) \leq \mathcal{N}(u) + \mathcal{N}(v)$.

Exercice 4 (🕒 1min.) *Que manque-t-il à une semi-norme pour être une norme ?*

Exercice 5 (🕒 3min.) *Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $p, q \in \mathbb{N}$, on pose $\|u\|_{p,q} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p u^{(q)}(x)|$. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on définit*

$$\mathcal{N}_k(u) := \sum_{p,q \leq k} \|u\|_{p,q}.$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_k$ est une semi-norme sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Pour $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on introduit

$$d(u, v) := \sum_{k \geq 0} 2^{-k} \frac{\mathcal{N}_k(u - v)}{1 + \mathcal{N}_k(u - v)}.$$

Exercice 6 (🕒 35min.) *Le but de cet exercice est de démontrer que $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), d)$ est un espace vectoriel métrique complet.*

1. On démontre dans un premier temps que d est une distance.
 - (a) Pourquoi pour tout $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ a-t-on : $0 \leq d(u, v) < +\infty$?
 - (b) Montrer que d est symétrique.
 - (c) Montrer que d satisfait l'inégalité triangulaire (on montrera dans un premier temps que la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$).
 - (d) Montrer que d est séparante.

(e) Conclure.

2. Par définition, on sait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ converge vers $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si $d(u, u_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Montrer que c'est équivalent à

$$\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{N}_k(u - u_n) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

3. Montrer que $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), d)$ est complet.

Grâce à la topologie introduite sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on peut parler d'applications continues de l'espace de Schwartz dans lui-même. C'est l'objectif de l'exercice suivant.

Exercice 7 (🕒 6 min.) Montrer que les applications suivantes sont continues.

1. $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mapsto u^{(\alpha)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (pour $\alpha \in \mathbb{N}$).
2. $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mapsto x^\beta u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (pour $\beta \in \mathbb{N}$).
3. $(u, v) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mapsto uv \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Finalement une propriété cruciale des espaces de Schwartz est donnée ici.

Exercice 8 (🕒 6 min.) On se propose de faire le lien entre l'espace de Schwartz et les espaces $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.

1. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$.
2. En utilisant la densité de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$, en déduire que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour la norme

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R})}^p := \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^p dx.$$

On récapitule ici ce qu'il faut retenir de cette paragraphe.

Récapitulatif 1 Voilà ce que nous avons démontré dans ce paragraphe.

1. L'espace des Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un espace de fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ dont toutes les dérivées décroissent plus vite que n'importe quel polynôme.
2. C'est un espace vectoriel métrique complet muni de la distance associée à la famille de semi-normes $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$. En particulier, pour prouver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ converge lorsque $n \rightarrow +\infty$ vers $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour la topologie associée à la famille de semi-normes il faut et il suffit de prouver que :

$$\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{N}_k(u_n - u) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

3. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation et par multiplication par une autre fonction dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
4. L'inclusion $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ est satisfaite pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ et de plus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$.

1.2 La transformée de Fourier sur l'espace de Schwarz

Pour une fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier, notée $\hat{u}$, par

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-2i\pi x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Le prochain exercice permet de démontrer les propriétés de base de la transformée de Fourier sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 9 (🕒 45 min) On se propose de démontrer plusieurs propriétés de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

1. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{u}(\xi)$ est bien définie.
2. Le but de cette question est de montrer que si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $\widehat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
(a) Montrer que si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \widehat{u}(\xi) = 0.$$

- (b) Montrer que si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ alors $\widehat{u} \in C^\infty(\mathbb{R})$ et que pour tout $q \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$\widehat{u}^{(q)}(\xi) = (-2i\pi)^q \int_{\mathbb{R}} x^q u(x) e^{-2i\pi x \xi} dx.$$

- (c) Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$\xi^p \widehat{u}(\xi) = \frac{1}{(2i\pi)^p} \widehat{u^{(p)}}(\xi).$$

- (d) Conclure.

3. Montrer que $\mathcal{F} : u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mapsto \widehat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une application linéaire continue.

On peut montrer que la transformée de Fourier d'une Gaussienne est également une Gaussienne. C'est le but de l'exercice suivant.

Exercice 10 (🕒 30 min.) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On définit la fonction $u : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\lambda x^2}$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On pourra pour cela démontrer dans un premier temps que pour tout $q \in \mathbb{N}$ on a $u^{(q)}(x) = P_q(x)u(x)$ où $P_q \in \mathbb{R}_q[X]$.
2. Le but de cette question est de montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$\widehat{u}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\frac{\pi^2}{\lambda} \xi^2}.$$

- (a) Justifier que $\widehat{u}$ existe et est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que sa dérivée vérifie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\widehat{u}'(\xi) = -\frac{2\pi^2}{\lambda} \xi \widehat{u}(\xi).$$

- (b) Montrer que

$$\widehat{u}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

On pourra commencer par remarquer que $\widehat{u}(0)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(x^2+y^2)} dx dy$ et calculer cette intégrale à l'aide des coordonnées polaires.

- (c) Conclure.

On conclut ce paragraphe avec un exercice qui permet de montrer que la transformée de Fourier est inversible sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 11 (🕒 25 min.) Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on définit

$$\check{u}(x) := \int_{\mathbb{R}} u(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi.$$

et on considère l'application

$$\mathcal{G} : u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \check{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Le but de cet exercice est de montrer que $\mathcal{G}$ est l'inverse de la transformée de Fourier $\mathcal{F}$.

1. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\check{u}(x)$ est bien défini.

2. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on définit $v(\xi) := u(-\xi)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\check{u}(x) = \widehat{v}(x)$. En déduire que $\mathcal{G}$ est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même.
3. Le but de cette question est de montrer que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = Id_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$. On peut démontrer de la même manière que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = Id_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$.

(a) Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pourquoi ne pouvons nous pas utiliser le théorème de Fubini pour permuter les intégrales dans l'expression de $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}(u)$ ci-dessous ?

$$(\mathcal{F} \circ \mathcal{G}(u))(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi x \xi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi x \eta} u(\eta) d\eta dx.$$

(b) Pour $\varepsilon > 0$, on définit l'intégrale

$$I_\varepsilon(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x \xi} e^{-\varepsilon x^2} \check{u}(x) dx.$$

Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(\xi) = \mathcal{F}(\check{u})(\xi).$$

(c) On rappelle que la transformée de Fourier d'une Gaussienne vérifie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon x^2} e^{-2i\pi x \xi} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} e^{-\frac{\pi^2}{\varepsilon} \xi^2}.$$

En utilisant le théorème de Fubini, montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$I_\varepsilon(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi^2}{\varepsilon} (\xi - \eta)^2} u(\eta) d\eta.$$

(d) À l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$I_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\zeta^2} u\left(\xi - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi} \zeta\right) d\zeta.$$

(e) Conclure à l'aide du théorème de convergence dominée.

On récapitule ce qu'il faut connaître dans ce paragraphe.

Récapitulatif 2 Voilà ce que l'on a démontré dans ce paragraphe.

1. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $p \in \mathbb{N}$. On a

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \widehat{u}(\xi) = 0, \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R} \quad \widehat{u^{(p)}}(\xi) = (2i\pi\xi)^p \widehat{u}(\xi).$$

2. La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire, continue et bijective de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même. Son inverse $\mathcal{F}^{-1}$ est elle-même continue et son action sur $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{F}^{-1}(u)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x \xi} u(\xi) d\xi.$$

2 Transformée de Fourier L^1

2.1 Pré-requis : approximations de l'unité et convolution

Avant d'introduire et de travailler avec la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$, on rappelle à toutes fins utiles les propriétés de la convolution.

Définition 3 Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ on définit le produit de convolution de f par g comme

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

Exercice 12 (🕒 15 min.) On se propose de démontrer les propriétés principales du produit de convolution. Fixons $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la Définition 3 a bien un sens. Pour cela, on montre que l'on a

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

En déduire que l'application suivante est continue :

$$\varphi : (f, g) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R}) \mapsto f * g \in L^1(\mathbb{R}).$$

On pourra montrer puis utiliser le fait que φ est bilinéaire.

2. Montrer que la convolution est symétrique, c'est-à-dire que $f * g = g * f$.
3. Si de plus $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ montrer que $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et que l'on a

$$(f * g)^{(q)}(x) = (f * g^{(q)})(x).$$

En fait, on peut également démontrer le résultat plus général présenté dans l'exercice suivant (voir [1, Thm 13.2.] pour une version simplifiée).

Exercice 13 Plus généralement, on peut démontrer l'inégalité de Young qui dit que pour $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$ alors

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})}$$

Définition 4 Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si

1. La suite des $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (uniformément en n) dans $L^1(\mathbb{R})$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x) dx = 1.$$

3. Pour tout $\delta > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|x| > \delta} |\rho_n(x)| dx = 0.$$

Exercice 14 (🕒 5 min.) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et presque tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) := nf(nx)$$

est une approximation de l'unité.

On pourra trouver le théorème suivant dans [1, Thm. 13.5. p.270]. Il justifie le nom "approximation de l'unité".

Théorème 1 Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * \rho_n - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

Récapitulatif 3 Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on peut définir la convolution de f par g comme

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

1. L'application $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R}) \mapsto f * g \in L^1(\mathbb{R})$ est continue.
2. Le produit de convolution est symétrique, bilinéaire et associatif.
3. Si $f \in L^p$ et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

2.2 Définition

La transformée de Fourier de $u \in L^1(\mathbb{R})$ est définie comme

$$\widehat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} u(x) dx.$$

Exercice 15 (🕒 30 min) On se propose de démontrer les propriétés élémentaires de la transformée de Fourier.

1. Pourquoi est-ce que si $u \in L^1(\mathbb{R})$ alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ peut-on définir $\widehat{u}(\xi)$?
2. Montrer que si $u \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{u} \in C^0(\mathbb{R})$ et que

$$\|\widehat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Pourquoi est-ce que $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R})$ vers $L^\infty(\mathbb{R})$?

3. Montrer que pour $u, v \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\widehat{u * v} = \widehat{u} \widehat{v}.$$

En déduire que le produit de convolution laisse stable $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

4. En utilisant la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$, montrer que pour $u \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} |\widehat{u}(\xi)| = +\infty.$$

Pour $v \in L^1(\mathbb{R})$, on introduit la transformée de Fourier inverse

$$\check{v}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x\xi} v(\xi) d\xi.$$

Elle est bien définie pour les mêmes raisons que la transformée de Fourier est bien définie sur $L^1(\mathbb{R})$.

Voilà un résultat, celui de la formule d'inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$. On en trouvera une démonstration dans [3, p. 330 - 331] ou bien [1, p. 279] (par exemple).

Théorème 2 Soit $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors on a

$$\check{\check{u}} = u.$$

On se propose de démontrer deux conséquences du théorème d'inversion de Fourier.

Exercice 16 (🕒 10 min.)

1. Montrer que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \mapsto L^\infty(\mathbb{R})$ est injective.
2. Montrer que si $u \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R})$ alors u admet un représentant continu.

Il se trouve que des propriétés de décroissance d'une fonction $u \in L^1(\mathbb{R})$ se traduit par un gain de régularité pour sa transformée de Fourier $\widehat{u}$. Réciproquement, si une fonction u est régulière, sa transformée de Fourier $\widehat{u}$ possède des propriétés de décroissance. C'est l'objectif de l'exercice suivant.

Exercice 17 (🕒 10 min.) Montrer les propriétés suivantes.

1. Soit $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $xu \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{u} \in C^1(\mathbb{R})$ et

$$\frac{i}{2\pi} \widehat{u}'(\xi) = \widehat{xu}.$$

2. Soit $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ telle que $u' \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$2i\pi\xi\widehat{u} = \widehat{u}'.$$

Pourquoi a-t-on $\xi\widehat{u} \in L^\infty(\mathbb{R})$?

Récapitulatif 4 Voilà quelques propriétés de la transformée de Fourier pour les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ que nous venons d'aborder.

1. L'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ est une application linéaire continue et injective.

2. Soient $u, v \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\widehat{u * v} = \widehat{u}\widehat{v}.$$

3. Soit $u \in L^1(\mathbb{R})$, alors on a

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \widehat{u}(\xi) = 0 \quad (\text{Riemann-Lebesgue}).$$

4. Si $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R})$ alors on a l'égalité suivante dans $L^1(\mathbb{R})$:

$$\check{\widehat{u}} = u \quad (\text{Formule d'inversion}).$$

5. La régularité d'une fonction $u \in L^1(\mathbb{R})$ entraîne une certaine vitesse de décroissance pour sa transformée de Fourier $\widehat{u}$. Réciproquement, si u a une certaine vitesse de décroissance, alors $\widehat{u}$ a une certaine régularité.

3 Transformée de Fourier L^2

3.1 Pré-requis

On rappelle le théorème de prolongement suivant.

Théorème 3 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et soit $A \subset E$, un sous-espace vectoriel dense dans E pour la norme $\|\cdot\|_E$. On suppose de plus que $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach. Soit $\varphi : (A, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ une application linéaire continue de norme $\|\varphi\|_{\mathcal{L}(A,F)}$, alors il existe une unique application $\tilde{\varphi} : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ linéaire et continue telle que $\tilde{\varphi}|_A = \varphi$ et $\|\tilde{\varphi}\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|\varphi\|_{\mathcal{L}(A,F)}$.

On se propose de démontrer ce théorème dans l'exercice suivant.

Exercice 18 (🕒 20 min.)

1. Montrer que si un tel prolongement existe, alors il est unique.

2. Soit $x \in E$.

(a) Pourquoi peut-t-on choisir une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n - x\|_E \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$?

(b) Montrer que la suite $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\ell(x) \in F$.

(c) Soit une autre suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\|y_n - x\|_E \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Montrer que $\|\varphi(y_n) - \ell(x)\|_F \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3. Pour $x \in E$, on pose dorénavant $\tilde{\varphi}(x) = \ell(x)$.

(a) Montrer que si $x \in A$ alors $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$.

(b) Montrer que $\tilde{\varphi}$ est une application linéaire continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ vers $(F, \|\cdot\|_F)$ de norme

$$\|\tilde{\varphi}\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|\varphi\|_{\mathcal{L}(A,F)} := \sup_{x \in A \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

3.2 Définition

La transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ ne peut pas être définie à l'aide de la formule

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} u(x) dx.$$

En effet, il n'y a aucune raison pour que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ l'application

$$x \mapsto e^{-2i\pi x\xi} u(x)$$

soit intégrable sur $\mathbb{R}$, tout simplement car $L^2(\mathbb{R}) \not\subseteq L^1(\mathbb{R})$. L'objectif de l'exercice suivant est de définir la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ et d'en donner les propriétés de base.

Exercice 19 (🕒 25 min.)

1. Donner un exemple de fonction dans $L^2(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^1(\mathbb{R})$.
2. (a) Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pourquoi a-t-on $u \in L^2(\mathbb{R})$ et $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R})$?
(b) Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, montrer la formule de Plancherel :

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx.$$

3. On considère l'application

$$\mathcal{F} : \left(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})} \right) \rightarrow \left(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})} \right)$$

$$u \mapsto \widehat{u}$$

- (a) Montrer que $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue. Quelle est sa norme ?
 - (b) Montrer que $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en une application linéaire continue, notée $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})})$ vers lui-même.
 - (c) Pourquoi est-ce que $\widetilde{\mathcal{F}}$ est une isométrie ?
4. On considère l'application

$$\mathcal{F}^{-1} : \left(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})} \right) \rightarrow \left(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})} \right)$$

$$u \mapsto \check{u}.$$

Montrer que $\mathcal{F}^{-1}$ est une isométrie et s'étend de manière unique à une isométrie $\widetilde{\mathcal{F}}^{-1}$ de $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})})$ vers lui-même. Pourquoi a-t-on

$$\widetilde{\mathcal{F}}^{-1} \circ \widetilde{\mathcal{F}} = Id_{L^2(\mathbb{R})} \quad ?$$

Exercice 20 (🕒 20 min.) On se propose de démontrer une version mathématique du principe d'incertitude de la mécanique quantique. Pour cela, on considère $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$.

1. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} |u'(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} 4\pi^2 \xi^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, montrer que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right) \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |u(x)|^2 dx \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

3. Quelles fonctions satisfont l'égalité dans l'inégalité ci-dessus ?

Récapitulatif 5 Voilà ce que nous avons étudiés pour la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$.

1. La transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ se construit comme une extension de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. En particulier, si u n'est pas "plus intégrable" que $L^2(\mathbb{R})$, il n'y a aucune raison pour que l'on puisse exprimer sa transformée de Fourier à l'aide d'une formule du genre

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} u(x) dx \quad (\text{Cette expression n'a pas de sens pour } u \in L^2(\mathbb{R}))$$

2. La transformée de Fourier d'une fonction $u \in L^2(\mathbb{R})$ est donc définie par densité, comme limite dans $L^2(\mathbb{R})$ des $(\mathcal{F}(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ où $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\mathbb{R})$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Il est important de se convaincre que cette limite ne dépend pas du choix de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$.
3. Soit $\widetilde{\mathcal{F}}$ la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$. C'est une isométrie de $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})})$ dans lui-même.
4. De façon similaire, on peut étendre la transformée de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}) \rightarrow (L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})})$ en $\widetilde{\mathcal{F}}^{-1}$. On a la formule d'inversion de Fourier

$$\widetilde{\mathcal{F}}^{-1} \circ \widetilde{\mathcal{F}} = Id_{L^2(\mathbb{R})}.$$

4 Équation de la chaleur

4.1 Introduction au modèle

L'équation de la chaleur a été introduite par Joseph Fourier pour décrire l'évolution de la température dans un matériau donné soumis à un terme source créateur de chaleur.

D'un point de vue modélisation, le matériau est représenté par un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et le type de matériau est déterminé par le coefficient de diffusivité thermique du matériau $D > 0$. On note alors $u : \mathbb{R}_+ \times \Omega$ la fonction telle que pour $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, $u(t, x)$ soit la température au temps t et au point x . Alors, si $f(t, x)$ est un terme source de chaleur, u vérifie l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - D\Delta_x u(t, x) = f(t, x), \quad \text{pour } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega.$$

C'est cette équation que l'on nomme équation de la chaleur.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au cas unidimensionnel où $\Omega \subset \mathbb{R}$.

Avant d'aller plus loin il est bon de noter que l'équation de la chaleur est l'exemple typique d'EDP unidimensionnelle dite parabolique. En effet, si on écrit une EDP sous la forme générale

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial t} + Fu = g,$$

où les coefficients peuvent dépendre de t et x mais pas de u et g est une fonction donnée par le problème, on a la classification suivante.

L'EDP est dite

1. elliptique si $B^2 - 4AC < 0$,
2. hyperbolique si $B^2 - 4AC > 0$,
3. parabolique si $B^2 - 4AC = 0$.

Exercice 21 (€ 2 min.) *Écrire l'équation de la chaleur en dimension 1. Pourquoi est-ce une EDP parabolique ?*

4.2 Un peu de modélisation : dérivation de l'équation de la chaleur 1-D

On cherche à dériver l'équation de la chaleur à partir d'un bilan d'énergie. Soient $\delta x, \delta t > 0$ et un système thermodynamique fermé S de volume $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$.

1. L'énergie thermique du système dans $\Omega \subset \Omega_0$ au temps $t \geq 0$, notée $E(\Omega, t)$, vérifie

$$E(\Omega, t) = \alpha \int_{\Omega} T(t, x) dx, \tag{1}$$

où $T(t, x)$ est la température à l'instant t et au point $x \in \Omega_0$ et $\alpha > 0$ une constante physique.

2. Les échanges d'énergie thermique à la frontière $\partial\Omega$ de Ω entre deux temps t et $t + \delta t$ sont donnés par

$$E_{ech}(\Omega, t + \delta t) - E_{ech}(\Omega, t) = -\delta t \oint_{\partial\Omega} \vec{j}(t, x) \cdot \vec{n}(x) ds(x),$$

où $\vec{j}$ est le vecteur densité de flux de chaleur, $\vec{n}(x)$ la normale sortante à Ω en $x \in \partial\Omega$ et $ds(x)$ la mesure surfacique sur Ω .

3. Le premier principe de la thermodynamique dit que

$$E(\Omega, t + \delta t) - E(\Omega, t) = E_{ech}(\Omega, t + \delta t) - E_{ech}(\Omega, t) + P_{prod}(\Omega, t)\delta t,$$

où $P_{prod}(\Omega, t)$ est la puissance produite dans Ω au temps t . Elle est égale à

$$P_{prod}(\Omega, t) = \int_{\Omega} P_{vol}(t, x) dx$$

où P_{vol} est la puissance volumique.

Ainsi, en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, on obtient

$$\alpha \int_{\Omega} \frac{T(t + \delta t, x) - T(t, x)}{\delta t} dx = \frac{E(\Omega, t + \delta t) - E(\Omega, t)}{\delta t} = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{j}) dx + P_{prod}(\Omega, t).$$

Formellement, lorsque le pas de temps δt tend vers 0 on obtient

$$\int_{\Omega} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial t}(t, x) + \operatorname{div}(\vec{j})(t, x) - P_{vol}(t, x) \right) dx = 0.$$

Comme ceci est vrai pour tout $\Omega \subset \Omega_0$, on en déduit l'équation de la chaleur

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial t}(t, x) + \operatorname{div}(\vec{j})(t, x) = P_{vol}(t, x).$$

4. La loi de Fourier nous dit que

$$\vec{j} = -\lambda \nabla T$$

pour un certain $\lambda > 0$. On en déduit alors que l'équation de la chaleur se ré-écrit sous la forme.

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial t}(t, x) + \operatorname{div}(\lambda \nabla T)(t, x) = P_{vol}(t, x).$$

Attention car ici λ peut-être une fonction de la variable d'espace x (si le matériau étudié n'est pas homogène par exemple).

Exercice 22 (🕒 15 min.)

1. La loi de Fourier a été établie expérimentalement en observant que la chaleur tend à se diffuser du chaud vers le froid. Pourquoi est-ce que l'expression de $\vec{j}$ modélise ce phénomène ?
2. On se propose d'établir l'équation de la chaleur en dimension 1. On prend ici $\Omega_0 = \mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$ on se donne un intervalle élémentaire $I_x := [x, x + \delta x]$.
 - (a) On note $e(I_x, t)$ l'énergie thermique du système dans I_x . Quel est l'analogue de la relation (1) ?
 - (b) Comment peut-on exprimer l'énergie d'échange thermique entre deux temps t et $t + \delta t$?
 - (c) Écrire l'analogue du premier principe de la thermodynamique pour ce problème.
 - (d) Utiliser la loi de Fourier pour obtenir l'équation de la chaleur.
 - (e) Comment peut-elle être simplifiée si λ est constant ?

4.3 Résolution de l'équation de la chaleur 1-D

On commence par étudier l'équation homogène (c'est-à-dire que le terme source $f = 0$).

Exercice 23 (🕒 1h00.) On s'intéresse à l'équation de la chaleur suivante.

$$(\star) : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & \text{pour tout } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = g(\cdot), & \text{dans } L^1(\mathbb{R}). \end{cases}$$

On suppose que $D > 0$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. En raisonnant par Analyse et Synthèse, on va prouver l'existence d'une unique solution u dans un sens que l'on précisera.

1. Supposons qu'il existe une solution u aussi régulière et intégrable que souhaitée.

(a) Montrer que la transformée de Fourier $\widehat{u}(t, \cdot) = \mathcal{F}(u(t, \cdot))(\cdot)$ vérifie pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$(\star\star) : \begin{cases} \frac{d\widehat{u}}{dt}(t, \xi) + 4\pi^2 D \xi^2 \widehat{u}(t, \xi) = 0, & \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \\ \widehat{u}(0, \xi) = \widehat{g}(\xi). \end{cases}$$

(b) Résoudre l'équation différentielle $(\star\star)$ et en déduire que pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} g(y) dy.$$

2. On se propose de montrer maintenant que u ainsi définie est bien solution de $(\star)$.

(a) Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $u(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$ et calculer $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$ pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que pour tout $t > 0$, $u(t, \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$ et calculer $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

(c) En déduire que u est bien solution de $(\star)$. Sous quelles hypothèses est-elle unique ?

3. On va maintenant prouver des résultats sur la régularité de la solution u de $(\star)$ à valeurs dans des espaces de fonctions.

(a) Montrer que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ et $t > 0$ on a $u(t, \cdot) \in L^p(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que l'application $(t \mapsto u(t, \cdot)) \in C^0(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}))$.

(c) Soit $0 < a < b$ et $1 \leq p \leq +\infty$. Montrer que $u \in L^\infty([a, b], L^p(\mathbb{R}))$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty([a, b], L^p(\mathbb{R}))$.

(d) Soit $0 < a < b$ et $1 \leq p \leq +\infty$. Montrer que $u \in L^p(\mathbb{R}_x, L^\infty([a, b]))$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(\mathbb{R}_x, L^\infty([a, b]))$.

(e) Soit $1 < p \leq +\infty$. Pourquoi ne peut-on pas espérer que $(t \mapsto u(t, \cdot)) \in C^0(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}))$? Et si $g \in L^p(\mathbb{R})$?

4. On propose de démontrer (de nouveau) l'unicité d'une solution de $(\star)$, à l'aide d'une méthode dite d'énergie.

(a) Soient u_1, u_2 deux solutions de $(\star)$ telles que pour tout $0 < a < b$ et $j = 1, 2$ on ait

$$\text{pour tout } 1 \leq p \leq +\infty \text{ on a } u_j, \frac{\partial u_j}{\partial t} \in L^p(\mathbb{R}_x, L^\infty([a, b])), \quad \text{pour tout } t > 0 \text{ on a } u_j(t, \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Montrer que $w = u_2 - u_1$ est solution de

$$(\star\star\star) : \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) - D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) = 0, & \text{pour tout } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \\ w(0, x) = 0, & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) Pour $t \geq 0$, on pose $e(t) := \int_{\mathbb{R}} |w(t, x)|^2 dx$. En multipliant $(\star\star\star)$ par w , montrer que e est dérivable et que

$$e'(t) \leq 0.$$

(c) En déduire que $u_1 = u_2$.

5. On se propose d'étudier l'évolution de l'énergie thermique $\mathcal{E}(t) := \int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx$ et de la température $u(t, \cdot)$ au cours du temps.

(a) Montrer que si la distribution de température initiale g vérifie $g \geq 0$ alors $u(t, \cdot) \geq 0$ pour tout $t > 0$. Et si $g \leq 0$?

(b) Supposons pour cette question que la condition initiale $g \geq 0$ et que g est à support compact. Montrer alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$, on a $u(t, x) \neq 0$. Pourquoi peut-on parler de vitesse de propagation de l'information infinie ?

(c) On suppose qu'il existe $g_+, g_- \in L^1(\mathbb{R})$ telles que $g_- \leq g \leq g_+$. Montrer que pour tout $t > 0$ on a

$$g_- \leq u(t, \cdot) \leq g_+.$$

(d) Montrer que l'énergie thermique est conservée au cours du temps.

Exercice 24 (🕒 30min.) Reprendre l'exercice précédent avec un second membre $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 25 (🕒 20min.) Pour $v > 0$, on considère l'équation aux dérivées partielles suivante

$$(\star) : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pour tout } (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{avec } u_0 \in L^2(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Donner une solution u de $(\star)$ dans un sens que l'on précisera.

Exercice 26 () Résoudre l'équation de la chaleur sur $\Omega = \mathbb{R} \times (0, 1)$.

Récapitulatif 6 L'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$ est une équation régularisante : la solution est plus régulière que la solution initiale pour tout temps $t > 0$. C'est une conséquence du fait que sa solution est donnée à l'aide d'une convolution par une Gaussienne. On appelle cette Gaussienne le noyau de la chaleur.

5 Aspects numériques de l'équation de la chaleur

On s'intéresse à la résolution numérique de l'équation de la chaleur 1-D sur un intervalle fini.

5.1 Discrétisation en espace

Cela correspond à la discrétisation de l'opérateur elliptique suivant :

$$\mathcal{L} : u \in C^2([0, 1]) \mapsto \frac{d^2 u}{dx^2} \in C^0([0, 1]), \quad \text{avec des conditions au bord sur } u \text{ ou ses dérivées premières en } 0 \text{ et } 1.$$

Les conditions au bord du domaine que l'on va étudier peuvent être de différentes natures

1. Dirichlet : $u(0) = u_0, u(1) = u_1$ avec $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$,
2. Neumann : $u'(0) = u'_0, u'(1) = u'_1$ avec $u'_0, u'_1 \in \mathbb{R}$,
3. Robin de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}, u'(0) = \lambda u(0), u'(1) = -\lambda u(1)$,
4. Mixtes : une de ces conditions au bord pour $x = 0$ et une autre pour $x = 1$.

Exercice 27 (🕒 2 min.) Pourquoi est-ce que l'opérateur $\mathcal{L} : (C^2([0, 1]), \|\cdot\|_{C^2([0, 1])}) \rightarrow (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_{C^0([0, 1])})$ est une application linéaire continue ?

Ici, pour $p \in \mathbb{N}$ et $u \in C^p([0, 1])$ on a défini $\|u\|_{C^p([0, 1])} = \sum_{j=0}^p \|u^{(j)}(x)\|_{L^\infty([0, 1])}$?

Pour pouvoir effectuer des calculs numériques nous allons construire une approximation de l'opérateur $\mathcal{L}$ en le remplaçant par une matrice.

Exercice 28 (🕒 1 min.) Justifier l'affirmation suivante :

Une matrice est un opérateur en dimension finie.

On se donne alors un maillage uniforme de $[0, 1]$. Soit $N \in \mathbb{N}$, pour $j \in \{0, \dots, N+1\}$ on définit $x_j = j(\Delta x)$, où $\Delta x = \frac{1}{N+1}$.

Exercice 29 (🕒 2min.)

1. Placer les points $(x_j)_{j \in \{0, N+1\}}$ sur un segment.
2. Pour $j \in \{1, \dots, N\}$, on dit que x_j est un noeud interne. Combien y'a-t-il de noeuds internes ? Pouvez vous expliquer pourquoi on les nomme ainsi ?

3. On dit que x_0 et x_{N+1} sont le bord du domaine. Pourquoi ?

À l'aide du maillage uniforme que l'on vient de construire, on peut obtenir une approximation de l'opérateur $\mathcal{L}$ à l'aide de schémas par différences finies. Il s'agit d'approcher les dérivées secondes $(\frac{d^2u}{dx^2}(x_j))_{j \in \{1, \dots, N\}}$ à l'aide de formules de Taylor. L'exercice suivant traite du schéma dit *centré*.

Exercice 30 (🕒 45min.)

Le premier exemple auquel on va s'intéresser est celui de la discrétisation de l'opérateur

$$\mathcal{L} : u \in C^2([0, 1]) \mapsto \frac{d^2u}{dx^2},$$

et on suppose que u est connue avec $u(0) = u_g$, $u(1) = u_d$. Notre but est d'approcher $\mathcal{L}u(x_j)$ pour $j \in \{1, \dots, N\}$.

1. Soit $x \in (0, 1)$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x \pm h \in (0, 1)$. Montrer que si $u \in C^4([0, 1])$ alors

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \quad h \rightarrow 0.$$

2. En déduire que pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$ on a

$$(\mathcal{L}u)(x_j) = \frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1}))}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

3. On définit le vecteur $(u_j)_{j \in \{0, N+1\}}$ par

$$\begin{cases} u_0 & = & u_g \\ u_{N+1} & = & u_d \\ u_{j+1} & = & (\Delta x)^2(\mathcal{L}u)(x_j) + 2u_j - u_{j-1}. \end{cases}$$

En faisant cette approximation, on espère que u_j soit une bonne approximation de $u(x_j)$. On va en étudier certaines propriétés.

(a) Soit $U_a = (u_j)_{j \in \{1, \dots, N\}} \in \mathbb{R}^N$ et $V = ((\mathcal{L}u)(x_j))_{j \in \{1, \dots, N\}} \in \mathbb{R}^N$. Montrer qu'il existe $S(N) \in S_N(\mathbb{R})$ telle que

$$V = \frac{1}{(\Delta x)^2} S(N) U_a + \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} u_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_d \end{pmatrix}.$$

On explicitera la matrice $S(N)$.

(b) Soit $U = (u(x_j))_{j \in \{1, \dots, N\}}$ et $\|\cdot\|_\infty$ la norme sur $\mathbb{R}^N$ définie pour $v \in \mathbb{R}^N$ par $\|v\|_\infty = \sup_{j \in \{1, \dots, N\}} |v_j|$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|S(N)(U - U_a)\|_\infty \leq C(\Delta x)^4.$$

4. On se propose de démontrer que $\|U - U_a\|_\infty \rightarrow 0$ lorsque $\Delta x \rightarrow 0$.

(a) Montrer que $S(N)$ est une matrice définie négative.

(b) Montrer que les valeurs propres de la matrice $T \in S_N(\mathbb{R})$ donnée par

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

dont données pour $k \in \{1, \dots, N\}$ par $\lambda_k = 2 \cos(\frac{k\pi}{N+1})$ associées aux vecteurs propres $e_k = (\sin(\frac{jk\pi}{N+1}))_{j \in \{1, \dots, N\}}$.

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a les inégalités suivantes

$$\sqrt{N}\|S(N)x\|_\infty \geq \|S(N)x\|_2 \geq 2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{N+1}\right)\right)\|x\|_2 \geq 2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{N+1}\right)\right)\|x\|_2.$$

(d) En déduire qu'il existe $N_0 > 0$ et $K > 0$ tel que pour tout $N \geq N_0$ on ait $\|U - U_a\|_\infty \leq K(\Delta x)^{\frac{3}{2}}$ et conclure.

5.2 Discrétisation en temps

Avant d'étudier précisément l'équation de la chaleur on va considérer le cas des équations différentielles. Soit un ouvert $\Omega = \omega_0 \times \omega_1 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $f \in C(\Omega)$, on considère l'équation différentielle suivante :

$$(\star) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_i) = y_i. \end{cases}$$

Définition 5 Une solution de l'équation différentielle $(\star)$ est la donnée d'un couple (φ, J) où $\varphi \in C^1(J)$ et $J \subset \omega_0$ telle que $t_i \in J$, $\varphi(t_i) = y_i$ et pour tout $t \in J$ on ait $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$. De plus, une solution (φ, J) est dite maximale si pour toute autre solution $(\tilde{\varphi}, \tilde{J})$ de $(\star)$ on a $\tilde{J} \subset J$ et $\varphi|_{\tilde{J}} = \tilde{\varphi}$.

On se propose de discuter deux schémas numériques permettant d'approcher une solution de $(\star)$.

Exercice 31 (🕒 30 min.) Le premier schéma qui nous intéresse est celui dit d'Euler explicite. Soit (φ, J) une solution de $(\star)$. Soient $t_i, t_f \in J$ tels que $t_i < t_f$ et $\Delta t > 0$ et $K \in \mathbb{N}^*$, pour $n \in \{1, \dots, K\}$ on définit $t_n = t_i + n(\Delta t)$. On suppose de plus que $t_K = t_f$.

1. Quelle relation relie K et Δt ?
2. Supposons $\varphi \in C^2(J)$, soit $t \in J$ tel que $t + \Delta t \in J$. Montrer qu'il existe $\tau \in (t, t + \Delta t)$ tel que

$$\varphi(t + \Delta t) = \varphi(t) + (\Delta t)\varphi'(t) + (\Delta t)^2 \frac{\varphi''(\tau)}{2}$$

3. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \{1, \dots, K - 1\}$

$$\left| f(t_n, \varphi(t_n)) - \frac{\varphi(t_{n+1}) - \varphi(t_n)}{\Delta t} \right| \leq C(\Delta t).$$

4. On considère le vecteur $(\varphi_n)_{n \in \{1, \dots, K\}} \in \mathbb{R}^N$ défini pour tout $n \in \{1, \dots, K - 1\}$ par

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + (\Delta t)f(t_n, \varphi_n), \quad \varphi_0 = y_0.$$

Supposons de plus que f est k -Lipschitzienne sur $[t_i, t_f]$ par rapport à la deuxième variable.

- (a) Soit $n \in \{1, \dots, K\}$, on définit l'erreur faite par le schéma au temps t_n par $e_n := |\varphi_n - \varphi(t_n)|$. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que

$$e_{n+1} \leq (1 + k(\Delta t))e_n + C(\Delta t)^2.$$

- (b) En déduire que pour tout $n \in \{1, \dots, K - 1\}$ on a

$$e_{n+1} \leq e^{k(\Delta t)}e_n + C(\Delta t)^2.$$

- (c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \{1, \dots, K\}$ on a

$$e_n \leq e^{nk(\Delta t)}e_0 + C(\Delta t)^2 \sum_{j=0}^{n-1} e^{jk(\Delta t)}.$$

- (d) En déduire que

$$e_n \leq e^{k(t_f - t_i)}(e_0 + C(t_f - t_i)(\Delta t)).$$

- (e) En déduire que la méthode d'Euler explicite converge. Quelle est sa vitesse de convergence ?

Exercice 32 (🕒 15 min.) Soit (φ, J) une solution de $(\star)$. On considère $t_i, t_f \in J$ tels que $t_i < t_f$ et $\Delta t > 0$. Soit $K \in \mathbb{N}^*$, on définit $t_n = t_i + n\Delta t$ de telle manière à ce que $t_K = t_f$.

1. Montrer que pour tout $t \in [t_i, t_f - \Delta t]$ on a

$$\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(s, \varphi(s))ds.$$

2. Pour $n \in \{0, \dots, K - 1\}$, que devient cette identité en $t = t_n$?
3. En utilisant l'approximation des rectangles à gauche, proposer un schéma numérique qui devrait approcher $\varphi(t_n)$. Quel est ce schéma ?
4. En utilisant l'approximation des rectangles à droite, proposer un schéma numérique qui devrait approcher $\varphi(t_n)$. Pourquoi ce schéma est dit implicite ?

5.3 Discrétisation de l'équation de la chaleur

Lorsque l'on va vouloir discrétiser l'équation de la chaleur, on va discrétiser à la fois en temps, avec un certain pas $\Delta t > 0$ et en espace avec *a priori* un autre pas $\Delta x > 0$. On rappelle que l'on essaie de résoudre

$$(\star) : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x) & \text{pour } (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times (0, 1) \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{pour } x \in (0, 1) \\ u(t, 0) = \alpha(t), u(t, 1) = \beta(t) & \text{pour tout } t > 0. \end{cases}$$

Dans la suite, on supposera toujours

1. $\alpha, \beta \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$,
2. pour tout $x \in [0, 1]$, $u(\cdot, x) \in C^2(\mathbb{R}_+^*)$,
3. pour tout $t > 0$, $u(t, \cdot) \in C^4([0, 1])$.

Après l'étude théorique de l'équation de la chaleur que nous avons faites, on remarque que si u est solution de $(\star)$ alors les conditions 2 et 3 sont toujours satisfaites.

Exercice 33 (🕒 5min.) *Montrer que la fonction v définie pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 1]$ par $v(x, t) = u(x, t) - (1-x)\alpha(t) + x\beta(t)$ satisfait l'équation de la chaleur*

$$(\star\star) : \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) = g(t, x) & \text{pour } (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times (0, 1) \\ v(0, x) = v_0(x) & \text{pour } x \in (0, 1) \\ v(t, 0) = 0, v(t, 1) = 0 & \text{pour tout } t > 0. \end{cases}$$

avec des fonctions g et v_0 que l'on précisera.

On propose une première façon de construire un schéma numérique pour résoudre l'équation de la chaleur $(\star\star)$.

Exercice 34 (🕒 20 min.) *On se propose de construire le schéma centré en espace et Euler explicite en temps. Soit u l'unique solution de $(\star\star)$.*

1. *On discrétise d'abord en espace. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $\Delta x = \frac{1}{N+1}$ et pour $j \in \{0, \dots, N+1\}$ $x_j = j\Delta x$. En utilisant un schéma centré en espace, créer un vecteur $U(t) = (u_j(t))_{j \in \{1, \dots, N\}} \in \mathbb{R}^N$ tel que pour tout $t > 0$ on espère que $u_j(t)$ soit une bonne approximation de $u(t, x_j)$ et que ce vecteur $U(t)$ satisfait l'équation différentielle de la forme suivante :*

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t) = \frac{1}{(\Delta x)^2} S(N)U(t) + G(t). \quad (2)$$

On précisera qui on choisira pour $U(0)$ et $G(t)$.

2. *On souhaite maintenant discrétiser (2) en temps. Pour cela, on fixe $K \in \mathbb{N}^*$, on se donne $t_f > 0$ et pour tout $n \in \{1, \dots, K\}$ on définit $t_n = n(\Delta t)$ de telle sorte que $t_K = t_f$.*

- (a) *Exprimer K en fonction de Δt .*
- (b) *Expliquer pourquoi le schéma d'Euler explicite en temps revient à construire une suite $(U^n)_{n \in \{1, \dots, K\}}$ où pour tout $n \in \{1, \dots, K\}$ on a $U^n \in \mathbb{R}^N$. Montrer qu'alors, on a*

$$U^{n+1} = \left(I + \frac{(\Delta t)}{(\Delta x)^2} S(N)\right)U^n + G^n, \quad U^0 = (u_0(x_1), \dots, u_0(x_N))^t.$$

On précisera qui est G^n .

- (c) *Qu'obtiendrait-on pour le schéma d'Euler implicite ?*

L'exercice suivant montre que dans le cas d'un schéma numérique centré en espace et Euler explicite en temps, il existe une condition dite de Courant-Friedrichs-Lewy (ou condition CFL) qui, si elle est violée, ne permet pas d'assurer la convergence du schéma numérique. Il se trouve qu'en pratique, pour résoudre l'équation de la chaleur, il faut toujours privilégier le schéma d'Euler implicite.

Exercice 35 (20 min.) On considère l'équation $(\star\star)$ avec second membre nul $g = 0$. On considère une discrétisation en temps et une discrétisation en espace comme précédemment. On rappelle que le schéma d'Euler explicite s'écrit

$$U^{n+1} = \left(I + \frac{(\Delta t)}{(\Delta x)^2} S(N)\right) U^n, \quad U^0 = (u_0(x_1), \dots, u_0(x_N))^t.$$

1. On rappelle que les valeurs propres de $S(N)$ sont données pour $k \in \{1, \dots, N\}$ par

$$\lambda_k(N) = -4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(N+1)} \right).$$

Montrer alors que le rayon spectral $\rho(N)$ de $I + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} S(N)$ vérifie

$$\rho(N) = \max \left(\left| 1 - 4 \frac{(\Delta t)}{(\Delta x)^2} \sin^2 \left(\frac{N\pi}{2(N+1)} \right) \right|, \left| 1 - 4 \frac{(\Delta t)}{(\Delta x)^2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2(N+1)} \right) \right| \right)$$

2. On considère que $u_0(x) = \sin(N\pi x)$. Montrer que

$$\left(I + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} S(N)\right) U_0 = \left(1 - 4 \frac{(\Delta t)}{(\Delta x)^2} \sin^2 \left(\frac{N\pi}{2(N+1)} \right)\right) U_0.$$

3. On suppose que $2 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < 1$. Montrer que $\|U_0\|_{\ell^\infty(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 1$ lorsque $N \rightarrow +\infty$ et en déduire que $\|U^K\|_{\ell^\infty(\mathbb{R}^N)} \rightarrow +\infty$.

4. On dit que le schéma est stable en norme $\|\cdot\|_{\ell^\infty(\mathbb{R}^N)}$ si pour toute donnée initiale u_0 , et tout $n \in \{1, \dots, K\}$ il existe c tel que pour tout Δx et Δt assez petits

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \frac{\|(I + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} S(N))^n x\|_{\ell^\infty(\mathbb{R}^N)}}{\|x\|_{\ell^\infty(\mathbb{R}^N)}} \leq c.$$

Attention, ici c ne dépend ni de N ni de K !

(a) On considère une nouvelle donnée initiale $v_0 = u_0 + e_0$ et on définit $\varepsilon_0 = (e_0(j\Delta x))_{j \in \{1, \dots, N\}}$ et $V_0 = U_0 + \varepsilon_0$. Montrer que si le schéma est stable alors

$$\|V^n - U^n\|_{\ell^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq c \|\varepsilon_0\|_{\ell^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

(b) Pourquoi dit-on qu'un schéma stable n'amplifie pas les erreurs au cours de chaque itération ?

5. Est-ce que sous la condition $2 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} > 1$ on peut dire que le schéma est stable ?

Exercice 36 Donner un algorithme permettant de résoudre $(\star\star)$ avec la méthode d'Euler implicite et un schéma centré pour les différences finies.

Récapitulatif 7 On retiendra que lorsque l'on doit construire une méthode numérique pour l'équation de la chaleur on privilégiera toujours un schéma d'Euler implicite en temps et un schéma centré en espace pour les différences finies.

Références

- [1] M. Briane, G. Pagès : *Théorie de l'intégration*, Vuibert.
- [2] X. Gourdon : *Les maths en tête : Analyse*, Ellipses.
- [3] H. Queffelec, C. Zuily : *Analyse pour l'agrégation*, Dunod.