

Rappels sur les séries de Fourier.

Université Aix-Marseille

Préparation à l'agrégation (Option B)

2020/2021

THOMAS OURMIÈRES-BONAFOS

Extrait du programme de l'agrégation externe 2020 Avant de commencer, on prendra connaissance du programme de l'agrégation externe, qui détaille les notions à maîtriser concernant l'analyse de Fourier (voir Figure 1).

(a) **Séries de FOURIER des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de RIEMANN-LEBESGUE. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de DIRICHLET, de FEJÉR et de PARSEVAL.**

Équations des ondes et de la chaleur : résolution par série de FOURIER, transformée de FOURIER et séparation des variables. Aspects qualitatifs élémentaires.

FIGURE 1 – Extrait du programme de l'agrégation 2020 concernant la partie sur l'analyse de Fourier. Disponible à l'url suivante : http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agreg_externes/59/7/p2020_agreg_ext_maths_1107597.pdf

Table des matières

1	Coefficients de Fourier	2
1.1	Définitions et propriétés élémentaires	2
1.2	Décroissance des coefficients de Fourier	3
1.3	Convolution de fonctions périodiques	4
2	Un point de vue d'analyse fonctionnelle	4
2.1	Rappels	4
2.2	Correspondance entre une fonction et sa série de Fourier	5
3	Convergence ponctuelle des séries de Fourier	5
3.1	Théorème de Dirichlet	6
3.2	Théorème de Fejér	7
4	Le point de vue Hilbertien	9
5	Équation de la chaleur	11

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction Lebesgue mesurable. Pour $T > 0$, f est dite T -périodique si pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = f(x + T)$. Pour $p \geq 1$, on introduit les espaces de fonctions périodiques de période T de puissance p intégrable comme :

$$L_T^p := \{f \text{ qui sont } T\text{-périodiques} : \int_0^T |f(t)|^p dt < +\infty\}.$$

De même, on introduit l'espace des fonctions de classe C^k et T -périodiques comme

$$C_T^k := \{f \in C^k(\mathbb{R}) : f(\cdot + T) = f(\cdot)\}.$$

Exercice 1 (🕒 2 min.) Montrer que si f est T -périodique alors $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = f(Tx)$ est 1-périodique.

Remarque 1 Grâce à l'Exercice 1, on se rend compte que si une fonction est T -périodique, on peut toujours se ramener au cas où cette fonction est 1-périodique. C'est ce que l'on fera dans la suite de ce chapitre.

Remarque 2 Toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue mesurable peut se prolonger en une fonction $f_\star : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue mesurable et 1-périodique par $f_\star(x) = f(\{x\})$ où $\{x\}$ est la partie fractionnaire de x .

1 Coefficients de Fourier

1.1 Définitions et propriétés élémentaires

On commence par introduire les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L_1^1$.

Définition 1 (Coefficients de Fourier) Soit $f \in L_1^1$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit le coefficient de Fourier de f à l'ordre n comme

$$\widehat{f}(n) := \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi nt} dt.$$

Exercice 2 Après avoir justifié que les fonctions suivantes admettent des coefficients de Fourier, calculer leurs coefficients de Fourier à l'ordre $n \in \mathbb{Z}$.

1. f_1 est la fonction 1-périodique définie pour tout $t \in [0, 1[$ par $f_1(t) = t$.
2. f_2 est la fonction 1-périodique définie pour tout $t \in [0, 1[$ par $f_2(t) = \cos(2\pi t)$.
3. f_3 est la fonction 1-périodique définie pour tout $t \in [0, 1[$ par $f_3(t) = 1_{[0, \frac{1}{2})}(t)$, où pour $I \subset \mathbb{R}$ 1_I est la fonction indicatrice de I .

On remarque que comme $f \in L_1^1$, cette définition a du sens. On introduit maintenant la série de Fourier de f tronquée.

Définition 2 (Série de Fourier tronquée) Soit $N \in \mathbb{N}$, la série de Fourier de f tronquée à l'ordre N au point $x \in [0, 1]$ est

$$S_N(f)(x) := \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{2i\pi nx}.$$

Tout l'objectif de ce chapitre est de comprendre dans quelle mesure $S_N(f) \rightarrow f$ lorsque $N \rightarrow +\infty$. Comme nous allons le voir, le type de convergence dépendra grandement de propriétés d'intégrabilité ou de régularité de la fonction f .

Exercice 3 (🕒 5 min.) Pour $f \in L_1^1$, démontrez les affirmations suivantes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{(\overline{f})}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}$.
2. Si f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n)$,

3. Si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $\widehat{f}(n) = -\widehat{f}(-n)$,

Les propriétés démontrées à l'Exercice 3 permettent de ré-interpréter la somme partielle $S_N(f)$ lorsque la fonction f est à valeurs réelles. C'est l'objectif de l'exercice suivant.

Exercice 4 (🕒 12 min) Soit $f \in L_1^1$ à valeurs réelles.

1. Démontrer que pour tout $x \in [0, 1]$ on a

$$S_N(f)(x) = \widehat{f}(0) + \sum_{n=1}^N \left\{ a_n(f) \cos(2\pi nx) + b_n(f) \sin(2\pi nx) \right\},$$

avec

$$a_n(f) := 2 \int_0^1 f(t) \cos(2\pi nt) dt, \quad b_n(f) := 2 \int_0^1 f(t) \sin(2\pi nt) dt.$$

2. En déduire la forme de la somme partielle de la série de Fourier de f lorsque f est une fonction paire.

3. Qu'en est-il de la forme de la somme partielle de la série de Fourier de f lorsque f est une fonction impaire ?

1.2 Décroissance des coefficients de Fourier

On énonce dans un premier temps le fameux lemme de Riemann-Lebesgue.

Proposition 1 (Riemann-Lebesgue) Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $f \in L^1([a, b])$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ telle que $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow \pm\infty$. Alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda_n t} dt = 0$$

Le but de l'exercice suivant est de démontrer la Proposition 1.

Exercice 5 (🕒 15 min) Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ telle que $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow \pm\infty$.

1. À l'aide d'une intégration par partie, démontrer le Lemme de Riemann-Lebesgue pour $f \in C^1([a, b])$.

2. On rappelle que $C^1([a, b])$ est dense dans L_1^1 .

(a) Donner la définition de la densité de $C^1([a, b])$ dans L_1^1 .

(b) En utilisant un argument de densité, démontrer le Lemme de Riemann-Lebesgue pour $f \in L^1([a, b])$.

3. En déduire que si $f \in L_1^1$ alors $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \pm\infty$.

L'intégrabilité de f se traduit par une décroissance des coefficients de Fourier. Cette décroissance est une condition nécessaire (mais pas suffisante !) pour obtenir une quelconque convergence de $S_N(f)$ vers f lorsque $N \rightarrow +\infty$.

Il se trouve que lorsque f est suffisamment régulière, on peut montrer que les coefficients de Fourier de f ont des propriétés de décroissance.

Exercice 6 (🕒 15 min) Soit $k \geq 0$ et $f \in C_1^k$, démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^k}.$$

L'idée clé est que la régularité d'une fonction $f \in L_1^1$ se traduit par une décroissance plus rapide de la suite de ses coefficients de Fourier $(\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$.

Une question naturelle est de se demander si la réciproque est vraie, c'est-à-dire qu'étant donné une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ qui décroît à une certaine vitesse, est-ce la suite des coefficients de Fourier d'une fonction régulière ?

La proposition suivante répond partiellement à cette question.

Proposition 2 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle qu'il existe $k \geq 2$ et $u_n = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ lorsque $n \rightarrow \pm\infty$. Alors, il existe $f \in C_1^{k-2}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on ait $\widehat{f}(n) = u_n$.

L'objectif de l'exercice suivant est de démontrer la Proposition 2.

Exercice 7 (🕒 18 min) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle qu'il existe $k \geq 2$ et $u_n = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ lorsque $n \rightarrow \pm\infty$.

1. Démontrer que pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $f(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n e^{2i\pi nt}$ est bien définie.
2. Démontrer que f est de classe C_1^{k-2} .
3. Démontrer que $\widehat{f}(n) = u_n$ et conclure.

1.3 Convolution de fonctions périodiques

On commence par définir le produit de convolution pour deux fonctions périodiques.

Définition 3 Soient $f, g \in L_1^1$, on définit le produit de convolution de f et g par

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(x-t)g(t)dt.$$

Proposition 3 Le produit de convolution de deux fonctions périodiques satisfait :

1. On a $f * g = g * f$.
2. Si $f, g \in L_1^1$, $f * g \in L_1^1$ et $\|f * g\|_{L_1^1} \leq \|f\|_{L_1^1} \|g\|_{L_1^1}$.
3. Si $e_n(t) := e^{2i\pi nt}$, on a $f * e_n = \widehat{f}(n)e_n$.
4. $\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$.

Dans l'exercice suivant, on démontre la Proposition 3.

Exercice 8 (🕒 15 min) Démontrer chaque point de la Proposition 3.

2 Un point de vue d'analyse fonctionnelle

2.1 Rappels

On rappelle la définition d'un espace de Banach.

Définition 4 Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Exemple 1 Les espaces suivants sont des espaces de Banach.

1. C_1^k muni de la norme

$$\|f\|_{k,\infty} := \sum_{p=0}^k \|f^{(p)}\|_{L^\infty([0,1])}.$$

2. Pour $k \geq 1$, l'espace L_1^k muni de la norme

$$\|f\|_{L_1^k} := \left(\int_0^1 |f(t)|^k dt \right)^{\frac{1}{k}}.$$

3. $c_0 := \{(u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \lim_{n \rightarrow \pm\infty} u_n = 0\}$ muni de la norme

$$\|(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{Z}} (|u_n|).$$

Exercice 9 (🕒 30 min) Sauriez-vous démontrer que les espaces présentés dans l'Exemple 1 sont des espaces de Banach ?

On a les inclusions suivantes pour les espaces L_1^p .

Proposition 4 Soient $1 \leq q \leq p \leq +\infty$, on a $L_1^p \subset L_1^q$ et $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_{L_1^p}$.

Exercice 10 (🕒 8 min) À l'aide de l'inégalité de Hölder, démontrer la Proposition 4.

2.2 Correspondance entre une fonction et sa série de Fourier

L'idée des séries de Fourier est que l'on peut essayer d'identifier f avec la suite de ses coefficients de Fourier à l'aide de l'application

$$\mathcal{F} : f \in L_1^1 \rightarrow (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}.$$

Proposition 5 $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue de $(L_1^1, \|\cdot\|_{L_1^1})$ vers $(c_0, \|\cdot\|_{\infty})$. Sa norme est 1.

On rappelle que si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés et que si $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application linéaire continue alors la norme de φ dans $\mathcal{L}(E, F)$ est définie comme

$$\|\varphi\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Exercice 11 (15 min) Nous allons démontrer la Proposition 5.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue de $(L_1^1, \|\cdot\|_{L_1^1})$ vers $(c_0, \|\cdot\|_{\infty})$ et en déduire que

$$\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(L_1^1, c_0)} \leq 1.$$

2. On souhaite démontrer que la norme $\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(L_1^1, c_0)} = 1$. Pour cela, on considère la fonction f constante à 1.

- (a) Démontrer que $f \in L_1^1$ et calculer $\|f\|_{L_1^1}$.
- (b) Calculer les coefficients de Fourier de f .
- (c) En déduire que $\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(L_1^1, c_0)} = 1$.

En fait, $\mathcal{F}$ est un morphisme d'algèbre entre $(L_1^1, +, *)$ et $(c_0, +, \times)$ mais attention, ces algèbres n'ont pas d'élément neutre pour $*$ et $\times$, respectivement.

Remarque 3

- 1. Il est important de se convaincre que l'image de L_1^1 par $\mathcal{F}$ est incluse dans c_0 mais que cette inclusion est stricte. En particulier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie comme $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ par $u_n = \frac{1}{\ln(|n|)}$ est bien dans c_0 mais ne correspond aux coefficients de Fourier d'aucune fonction L_1^1 (voir [1, exo 17 p.116]).
- 2. De même, on a vu que l'image de C_1^k par $\mathcal{F}$ est contenue dans l'ensemble

$$\{(u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : |u_n| = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right) \text{ lorsque } n \rightarrow \pm\infty\}.$$

Toutefois, si $k \geq 2$ une suite qui a cette décroissance est la série de Fourier d'une fonction moins régulière, de classe C_1^{k-2} . Il n'y a donc a priori aucune raison pour que l'image de C_1^k par $\mathcal{F}$ soit

$$\{(u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : |u_n| = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right) \text{ lorsque } n \rightarrow \pm\infty\}.$$

3 Convergence ponctuelle des séries de Fourier

Nous démontrons maintenant des résultats de convergence ponctuelle de la série de Fourier $S_N(f)$ vers la fonction f .

3.1 Théorème de Dirichlet

Le théorème de Dirichlet s'énonce comme suit.

Théorème 1 (Théorème de Dirichlet) Soit $f \in L^1_1$ et $x \in \mathbb{R}$. On suppose que :

1. f admette une limite à droite et à gauche en x notées $f(x^+)$ et $f(x^-)$ respectivement,
2. les fonctions

$$t \mapsto \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{f(x-t) - f(x^-)}{t}$$

sont intégrables au voisinage de 0 ;

alors, lorsque $N \rightarrow +\infty$, on a :

$$S_N(f)(x) \rightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Dans l'exercice suivant, nous allons démontrer le théorème de Dirichlet.

Exercice 12 (🕒 25 min) On commence par introduire le noyau de Dirichlet comme

$$D_N(t) := \sum_{n=-N}^N e^{2i\pi nt}.$$

1. Montrer que pour tout $t \in (0, 1)$ on a

$$D_N(t) = \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}.$$

2. Montrer que $D_N(t) = D_N(-t)$, que D_N est intégrable sur $[0, \frac{1}{2}]$ et que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} D_N(t) dt = \frac{1}{2}$$

3. Démontrer que $S_N(f) = D_N * f$ et en déduire que pour tout $x \in (0, 1)$ on a

$$S_N(f) - \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = \int_0^{\frac{1}{2}} h(t) \sin(\pi(2N+1)t) dt,$$

où on a posé

$$h(t) := \frac{f(x+t) - f(x^+)}{\sin(\pi t)} + \frac{f(x-t) - f(x^-)}{\sin(\pi t)}.$$

4. Conclure en utilisant le Lemme de Riemann-Lebesgue.

Remarque 4 La deuxième hypothèse du théorème peut sembler un peu obscure. Toutefois, on peut souvent en appliquer une version simplifiée.

1. Si f est de classe C^1_1 par morceaux, les hypothèses du théorème sont vérifiées.
2. Si $f \in C^0_1$, il n'y a aucune raison d'obtenir la convergence simple.

Exercice 13 (🕒 25 min - Phénomène de Gibbs) Soit f la fonction 1-périodique et impaire définie par

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{si } x \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}. \end{cases}$$

1. Représenter f sur une période.
2. Expliciter la série de Fourier de f . Prouver qu'elle converge simplement vers f .

3. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note S_N la série de Fourier de f tronquée à l'ordre N . Montrer que S_{2N+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$S'_{2N+1}(x) = \begin{cases} 4 \frac{\sin(4\pi(N+1)x)}{\sin(2\pi x)} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right), \\ 8(N+1)(-1)^p & \text{si } x = \frac{p}{2}, \quad p \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

4. En déduire que S_{2N+1} a $(2N+1)$ extremas locaux sur $[0, \frac{1}{2}]$. Montrer que le premier d'entre eux est atteint en $x_N = \frac{1}{4(N+1)}$. Dans la suite, on notera $a_N := S_{2N+1}(x_N)$.

5. Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}[$ on a

$$S_{2N+1}(x) = 4 \int_0^x \frac{\sin(4\pi(N+1)t)}{\sin(2\pi t)} dt.$$

En déduire que

$$a_N = \frac{2}{N+1} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2\pi t)}{\sin(\frac{\pi t}{N+1})} dt.$$

6. Montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} a_N = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} dt \simeq 1.1789 \dots$$

Pourquoi est-ce que cela contredit-il la proposition suivante :

$$\|S_N - f\|_{L^\infty([0,1])} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } N \rightarrow +\infty \quad ?$$

3.2 Théorème de Fejér

Pour $f \in L^1_1$, on définit la moyenne de Cesàro de ses séries de Fourier tronquées par

$$\sigma_N(f) := \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(f).$$

Théorème 2 (Théorème de Fejér) Soit $f \in L^1_1$ et $x \in \mathbb{R}$. Si f admet une limite à gauche en x notée $f(x^-)$ et une limite à droite en x notée $f(x^+)$ alors on a

$$\sigma_N(f)(x) \longrightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \quad \text{lorsque } N \rightarrow +\infty.$$

De plus, si $f \in C^0_1$, $\sigma_N(f)$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$. De même, si $f \in L^p_1$, $\sigma_N(f)$ converge vers f dans L^p_1 .

Remarque 5 On remarque que si f satisfait les hypothèses du théorème de Dirichlet, le théorème de Fejér est une conséquence de la convergence de la moyenne de Cesàro.

Démonstration:

On introduit le noyau de Fejér

$$F_N(t) := \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(t).$$

On a également $\int_0^{\frac{1}{2}} F_N(t) dt = \frac{1}{2}$ et

$$\begin{aligned} F_N(t) &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \frac{\sin(\pi(2n+1)t)}{\sin(\pi t)} = \frac{1}{(N+1)\sin(\pi t)} \Im \left(e^{i\pi t} \sum_{n=0}^N e^{2i\pi n t} \right) \\ &= \frac{\sin^2(\pi(N+1)t)}{(N+1)\sin^2(\pi t)}. \end{aligned}$$

En procédant de la même façon que pour la démonstration du théorème de Dirichlet, on montre que $\sigma_N(f) = f * F_N$ et on a

$$\begin{aligned} \left| \sigma_N(f)(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right| &= \left| \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f(x+t) - f(x^+) + f(x-t) - f(x^-) \right) F_N(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} \left| f(x+t) - f(x^+) + f(x-t) - f(x^-) \right| F_N(t) dt. \end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$, d'après les hypothèses il existe $0 < \delta < \frac{1}{2}$ tel que pour tout $|t| \leq \delta$

$$|f(x+t) - f(x^+) + f(x-t) - f(x^-)| \leq \varepsilon.$$

En particulier, on obtient :

$$\int_0^\delta \left| f(x+t) - f(x^+) + f(x-t) - f(x^-) \right| F_N(t) dt \leq \varepsilon \int_0^\delta F_N(t) dt \leq \varepsilon \int_0^{\frac{1}{2}} F_N(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, on remarque que pour tout $t \in [\delta, \frac{1}{2}]$, on a

$$F_N(t) \leq \frac{1}{(N+1) \sin^2(\pi\delta)}.$$

Ainsi, on remarque que

$$\begin{aligned} &\int_\delta^{\frac{1}{2}} \left| f(x+t) - f(x^+) + f(x-t) - f(x^-) \right| F_N(t) dt \\ &\leq \frac{1}{(N+1) \sin^2(\pi\delta)} \left(\frac{|f(x^+)| + |f(x^-)|}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x+t)| dt + \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x-t)| dt \right) \\ &= \frac{1}{(N+1) \sin^2(\pi\delta)} \left(\frac{|f(x^+)| + |f(x^-)|}{2} + \int_x^{x+\frac{1}{2}} |f(t)| dt + \int_{x-\frac{1}{2}}^x |f(t)| dt \right) \\ &= \frac{1}{(N+1) \sin^2(\pi\delta)} \left(\frac{|f(x^+)| + |f(x^-)|}{2} + \int_0^1 |f(t)| dt \right) \\ &= \frac{1}{(N+1) \sin^2(\pi\delta)} \left(\frac{|f(x^+)| + |f(x^-)|}{2} + \|f\|_{L_1^1} \right) \end{aligned}$$

Il existe $N_0 > 0$ tel que pour tout $N \geq N_0$ on ait

$$\frac{1}{(N+1) \sin^2(\pi\delta)} \left(\frac{|f(x^+)| + |f(x^-)|}{2} + \|f\|_{L_1^1} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $N \geq N_0$, on a

$$\left| \sigma_N(f)(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right| \leq \varepsilon.$$

Ce qui démontre la première partie du théorème.

Supposons de plus que $f \in C_1^0$. Comme f est continue sur $[0, 1]$, elle y'est uniformément continue par le théorème de Heine. En particulier, on sait que l'on peut prendre δ indépendant de x dans les identités au dessus et donc on obtient la convergence uniforme.

Supposons maintenant que $f \in L_1^p$. Pour $\varepsilon > 0$ on sait qu'il existe $f_\varepsilon \in C_1^0$ telle que $\|f_\varepsilon - f\|_{L_1^p} \leq \varepsilon$ (par densité de C_1^0 dans L_1^p). On remarque que

$$\|\sigma_N(f) - f\|_{L_1^p} = \|f * F_N - f\|_{L_1^p} \leq \|f - f_\varepsilon\|_{L_1^p} + \|f_\varepsilon - f_\varepsilon * F_N\|_{L_1^p} + \|(f - f_\varepsilon) * F_N\|_{L_1^p}.$$

On sait que

$$\|f_\varepsilon - f_\varepsilon * F_N\|_{L_1^p} = \left(\int_0^1 |f_\varepsilon(t) - \sigma_N(f_\varepsilon)(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f_\varepsilon - \sigma_N(f_\varepsilon)\|_{L^\infty([0,1])}.$$

Donc d'après le théorème de Fejér pour les fonctions continues, on sait qu'il existe $N_0 \geq 0$ tel que pour $N \geq N_0$ on ait $\|f_\varepsilon - f_\varepsilon * F_N\|_{L_1^p} \leq \varepsilon$.

De même, on a

$$\|(f - f_\varepsilon) * F_N\|_{L_1^p} \leq \|f - f_\varepsilon\|_{L_1^p} \|F_N\|_{L_1^1} = \|f - f_\varepsilon\|_{L_1^p}$$

et on conclut en utilisant la densité. ■

Le théorème de Fejér a de multiples corollaires, très utiles en analyse.

Corollaire 1 *Les propositions suivantes sont vraies.*

1. L'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes trigonométriques est dense dans C_1^0 muni de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty([0,1])}$.
2. Soit $p \geq 1$, $\mathcal{P}$ est dense dans L_1^p .
3. Soit $f \in C_1^0$ telle que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)| < +\infty$ alors $S_N(f)$ converge uniformément vers f . Ces hypothèses sont satisfaites si $f \in C_1^0$ et est de classe C_1^1 par morceaux.
4. $\mathcal{F}$ est injective.

Les points 1. et 2. du Corollaire 1 sont immédiats car pour $f \in L_1^1$ on a $S_N(f) \in \mathcal{P}$. On se propose de discuter des points 3. et 4. dans l'exercice suivant.

Exercice 14 (🕒 15 min) *On se propose de démontrer les points 3. et 4. du Corollaire 1.*

1. On commence par démontrer le point 3. On considère $f \in C_1^0$ telle que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)| < +\infty$.
 - (a) Montrer que $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L_1^\infty([0,1])$ et donc converge vers $g \in C_1^0$.
 - (b) En déduire que $(\sigma_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge également vers g dans $L_1^\infty([0,1])$.
 - (c) En utilisant le théorème de Fejér, démontrer que $g = f$ puis conclure.
2. Démontrons maintenant le point 4. Soit $f \in L_1^1$ telle que $\mathcal{F}(f) = 0$.
 - (a) Démontrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $\sigma_N(f) = 0$.
 - (b) Conclure en utilisant le théorème de Fejér.

4 Le point de vue Hilbertien

On va maintenant s'intéresser au cas particulier où $f \in L_2^2$. On remarquera au passage que $L_2^2 \subset L_1^1$. Commençons par un résultat très important.

Proposition 6 L_2^2 est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

De plus, $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base Hilbertienne de L_1^2 .

Remarque 6 On rappelle que si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et si $(f_j)_{j \in J}$ est une famille de vecteurs de $\mathcal{H}$ alors $(f_j)_{j \in J}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ lorsque :

1. $\forall (j, k) \in J^2$ on a $\langle f_j, f_k \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{j,k}$,
2. $\text{Vect}(f_j)_{j \in J}$ est dense dans $\mathcal{H}$.

Exercice 15 (🕒 10 min) *Démontrer que $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base Hilbertienne de L_1^2 .*

On remarque aisément que pour $f \in L_1^2$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\widehat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle.$$

En particulier, on a la proposition suivante.

Proposition 7 Soit $f \in L_2^2$, on a

$$\|f\|_{L_1^2}^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|^2, \quad f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e_n.$$

En particulier, l'application $\mathcal{F} : L_1^2 \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie.

L'égalité entre les normes est généralement nommée identité de Parseval. On remarque que dans L_1^2 , une fonction est toujours égale à sa série de Fourier mais attention : l'égalité a lieu dans L_1^2 !

Exercice 16 (🕒 10 min) Nous allons démontrer la Proposition 7. Pour $N \geq 1$, on note $V_N = \text{vect}(\{e_n\}_{|n| \leq N})$. Soit $f \in L_1^2$.

1. Justifier que $S_N(f)$ est le projeté orthogonal de f sur V_N et en déduire que

$$\|S_N(f) - f\|_{L_1^2} \leq \|\sigma_N(f) - f\|_{L_1^2}.$$

2. En déduire que $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans L_1^2 .
3. À l'aide du théorème de Pythagore, démontrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\|f\|_{L_1^2}^2 = \|S_N(f)\|_{L_1^2}^2 + \|f - S_N(f)\|_{L_1^2}^2.$$

4. Conclure.

Exercice 17 (🕒 30 min - Inégalité de Wirtinger & Inégalité isopérimétrique) On se propose de démontrer une inégalité fonctionnelle bien connue et de l'appliquer à la résolution du problème isopérimétrique.

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 par morceaux telle que

$$\begin{cases} \int_0^1 f(t) dt = 0 \\ f(0) = f(1) \end{cases}$$

On veut montrer l'inégalité de Wirtinger :

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 |f'(t)|^2 dt.$$

- (a) Pourquoi f et f' peuvent se prolonger par 1-périodicité sur $\mathbb{R}$ en des fonctions L_1^2 ?
 - (b) Exprimer les normes $\|f\|_{L_1^2}$ et $\|f'\|_{L_1^2}$ en fonction des coefficients de Fourier $(\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ de f .
 - (c) Conclure.
2. On souhaite utiliser l'inégalité de Wirtinger pour démontrer l'inégalité isopérimétrique. Pour cela, on considère $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple, de classe C^1 et de longueur 1 enfermant un domaine Ω . On veut montrer que

$$1 \geq 4\pi|\Omega|.$$

Soit

$$\gamma : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \Gamma \\ t & \mapsto (x(t), y(t)) \end{cases}$$

une paramétrisation unitaire de Γ telle que, $\nu(t)$, la normale sortante à Ω en $\gamma(t)$ vérifie $\nu(t) = (-y'(t), x'(t))$.

(a) Soit $X : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{2}(x, y)$. Montrer que

$$|\Omega| = \int_{\Omega} (\operatorname{div}(X))(x, y) dx dy.$$

En utilisant la formule de Green, en déduire que

$$|\Omega| = \frac{1}{2} \int_0^1 y(t)x'(t) - x(t)y'(t) dt.$$

(b) Montrer que

$$\int_0^1 y(t)x'(t) dt = - \int_0^1 y'(t)x(t) dt$$

et en déduire que

$$|\Omega| = \int_0^1 y(t)x'(t) dt.$$

(c) Après avoir justifié pourquoi on pouvait toujours se ramener au cas où $\int_0^1 y(t) dt = 0$. Montrer en appliquant l'inégalité de Wirtinger que

$$1 - 4\pi|\Omega| \geq \int_0^1 (x'(t) - 2\pi y(t))^2 dt.$$

(d) Conclure.

Ici, nous n'avons pas discuté les cas d'égalité. On voit assez aisément que les disques satisfont l'inégalité isopérimétrique. Pour montrer que ce sont les seuls, il faudrait traiter le cas d'égalité dans l'inégalité de Wirtinger (ce que nous ne ferons pas ici).

5 Équation de la chaleur

Exercice 18 (🕒 30 min.) On s'intéresse à l'Équation aux Dérivées Partielles suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \partial_{xx}^2 u(t, x) = 0 & \text{pour } t > 0 \text{ et } x \in]0, \frac{1}{2}[\\ \partial_x u(t, 0) = \partial_x u(t, \pi) = 0 & \text{pour } t > 0 \\ u(0, x) = g(x) & \text{pour } x \in]0, \frac{1}{2}[\end{cases} \quad (1)$$

où g est une fonction C^1 sur $[0, \frac{1}{2}]$ vérifiant $g'(0) = g'(\frac{1}{2}) = 0$.

1. Soit f une fonction définie sur $[0, \frac{1}{2}]$. On suppose f dérivable en 0 et en $\frac{1}{2}$ avec $f'(0) = f'(\frac{1}{2}) = 0$. On définit le prolongement suivant : $\tilde{f}$ est définie sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(-x) & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, 0] \end{cases} \quad (2)$$

puis sur $\mathbb{R}$ tout entier par 1-périodicité. Montrer que si f est dans $L^2(0, \frac{1}{2})$, $\tilde{f}$ est dans L_1^2 , et que si f est continue et C^1 par morceaux sur $[0, \frac{1}{2}]$, il en est de même pour $\tilde{f}$.

Montrer qu'il existe une suite $(b_p)_{p \geq 0}$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$ telle que pour tout x de $[0, \frac{1}{2}]$

$$g(x) = \sum_{p \geq 0} b_p \cos(2\pi p x). \quad (3)$$

En quel sens a lieu cette égalité ?

2. **Analyse.** Supposons qu'il existe une solution u vérifiant toutes les conditions du problème et supposons que u soit suffisamment régulière pour justifier les calculs qui viennent.

Montrer que pour tout $t > 0$ et tout x de $[0, \frac{1}{2}]$ on a

$$u(t, x) = \sum_{p \geq 0} a_p(t) \cos(2\pi p x) \quad (4)$$

où $(a_p)_{p \geq 0}$ est une suite de fonction à déterminer.

3. Montrer que pour tout $p \geq 0$ a_p vérifie l'équation différentielle ordinaire suivante

$$a_p'(t) + 4\pi^2 p^2 a_p(t) = 0 \quad (5)$$

Que doit valoir $a_p(0)$?

4. **Synthèse.** On définit maintenant une fonction u dépendant de t et de x par la formule

$$u(t, x) = \sum_{p \geq 0} b_p e^{-p^2 t} \cos(2\pi p x). \quad (6)$$

Montrer que cette formule définit une fonction $C^\infty([0, +\infty[\times [0, \frac{1}{2}])$. Montrer que cette fonction est solution de l'Équation aux dérivées partielles (1). Noter que l'on vient de prouver l'existence d'une solution mais ne savons rien de l'unicité.

On peut en fait prouver que la solution du problème est unique mais nous ne le discuterons pas ici.

Références

- [1] H. Queffélec, C. Zuily : *Analyse pour l'agrégation*, Dunod.