

Fonctions de plusieurs variables & Équations différentielles, L3 Maths

Thomas Ourmières-Bonafos

Table des matières

1	Topologie des espaces vectoriels normés	5
1.1	La notion d'espace vectoriel normé	5
1.1.1	Qu'est-ce qu'un espace vectoriel normé.	5
1.1.2	Le cas particulier des normes euclidiennes.	7
1.1.3	$\mathbb{R}^d$ comme espace vectoriel normé	10
1.1.4	Normes sur l'espace des fonctions continues	12
1.1.5	Normes sur les espaces de matrices	15
1.1.6	Normes sur l'espace des applications linéaires	17
1.1.7	Ce qu'il faut retenir sur le paragraphe 1.1	18
1.1.8	Erreurs classiques	18
1.2	Convergence des suites dans un espace vectoriel normé	19
1.2.1	Convergence des suites vectorielles	20
1.2.2	Normes équivalentes	22
1.2.3	Equivalence des normes et norme d'applications linéaires	24
1.2.4	Convergence de suites à valeurs dans $\mathbb{R}^d$	24
1.2.5	Convergence des suites dans un espace vectoriel de dimension finie	26
1.2.6	Ce qu'il faut retenir sur le paragraphe 1.2	27
1.3	Vocabulaire de la topologie	28
1.3.1	Boules	28
1.3.2	Parties ouvertes	30
1.3.3	Parties fermées	33
1.3.4	Voisinage, adhérence et intérieur	35
1.3.5	Ce qu'il faut retenir sur le paragraphe 1.3	38
1.4	Fonction d'une variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel normé	38
1.4.1	Continuité et dérivabilité	39
1.4.2	Courbes paramétrées du plan ou de l'espace	41
1.4.3	Ce qu'il faut retenir sur le paragraphe 1.4	47
2	Fonctions de plusieurs variables	57
2.1	La notion de continuité	57
2.1.1	Limite et continuité : définitions et premières propriétés	57
2.1.2	Opérations sur les fonctions continues	60
2.1.3	Un exemple de fonctions continues : les fonctions polynomiales	61
2.1.4	Les applications linéaires	63
2.1.5	Continuité et topologie	64
2.1.6	Prolongement par continuité	66
2.1.7	Les applications partielles	67
2.1.8	Méthodologie	68
2.2	Différentielle, dérivées directionnelles, dérivées partielles	70
2.2.1	Les dérivées directionnelles et les dérivées partielles	74
2.2.2	Les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$	78
2.2.3	Opération sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$	82
2.2.4	La matrice Jacobienne	88
2.3	Différentielles d'ordre deux	89
2.3.1	Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ pour $k = 1, 2$	92
2.4	Le cas particulier des fonctions à valeurs réelles : l'optimisation	92
2.4.1	Existence d'extrema : compacité	92

2.4.2	Gradient d'une fonction	95
2.4.3	Les Extrema et leur caractérisation	97
3	Équations différentielles	107
3.1	Premières définitions et premiers exemples	107
3.2	Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2	109
3.2.1	Les équations différentielles linéaires d'ordre 1	109
3.2.2	Quelques applications dans d'autres disciplines	112
3.2.3	Les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants	114
3.2.4	Quelques exemples	121
3.2.5	Quelques applications dans d'autres disciplines	125
3.3	Les équations différentielles ordinaires	128
3.3.1	Le théorème de Cauchy-Lipschitz et ses conséquences	128
3.3.2	Le théorème d'explosion en temps fini	132
3.3.3	Les solutions stationnaires	135
3.3.4	Les outils à maîtriser pour étudier un problème de Cauchy	138
3.3.5	Le cas des équations à variables séparées	139
3.3.6	Quelques applications dans d'autres disciplines	142
A	Solutions du Chapitre 1	147

Chapitre 1

Topologie des espaces vectoriels normés

Notre objectif dans ce chapitre est d'introduire des notions qui permettent d'étendre la notion de distance dans $\mathbb{R}$ à des espaces vectoriels plus généraux (que $\mathbb{R}$). Souvenez-vous que si $a, b \in \mathbb{R}$, la distance entre a et b est donnée par $|a - b|$. Cette notion de distance est la brique de base pour toutes les notions pratiques que vous avez rencontrées par la suite en analyse :

- (i) Notion de convergence d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}$,
- (ii) Notion de limite d'une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ (en un point ou à l'infini),
- (iii) Continuité d'une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ en un point.
- (iv) Dérivabilité d'une fonction d'une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ en un point.

Dans ce cours, nous nous intéressons à un cas particulier de distance, celle donnée par une norme. L'objectif de ce premier chapitre est donc d'étendre à une classe d'espaces vectoriels assez généraux cette notion de distance *via* un objet que l'on nomme **norme**.

Exercice 1 (🕒 5 min). Avant de commencer, êtes-vous capable de donner les quatre définitions de (i)-(iv) ?

1.1 La notion d'espace vectoriel normé

1.1.1 Qu'est-ce qu'un espace vectoriel normé.

Exercice 2 (🕒 3 min). Avant de définir la notion de norme, êtes-vous capable de donner au moins trois exemples d'espaces vectoriels normés ?

Définition 1 (Norme, espace vectoriel normé). Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On dit que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé dès lors que

- (i) N est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,
- (ii) on a l'implication $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$
- (iii) pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$,
- (iv) pour tout $x, y \in E$ on a $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Remarque 1. Le point (i) traduit le fait que l'application norme est toujours à valeurs positives. Le point (ii) est ce que l'on appelle la séparation. Cela vient du fait que si $x, y \in E$ sont tels que $N(x - y) > 0$ alors nécessairement $x \neq y$: ils sont *séparés*. Le point (iii) est une propriété dite d'homogénéité (la fonction N est dite homogène). Vous avez probablement déjà rencontré le point (iv) dans le passé : il s'agit de l'inégalité triangulaire.

Remarque 2. Pour $x, y \in E$, on comprend $N(x - y)$ comme la distance entre x et y . On peut en avoir la représentation de la figure 1.1. Attention, il ne s'agit que d'une représentation mentale de cet objet. En pratique, la distance peut être beaucoup plus compliquée que cela.

Exemple 1. Vous avez déjà rencontré au moins une norme par le passé : la valeur absolue $|\cdot|$! En effet, si on pose $N : x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$, on peut vérifier que $(\mathbb{R}, N)$ est un espace vectoriel normé.

- (i) Positivité : soit $x \in \mathbb{R}$, par définition de la valeur absolue, on a

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

En particulier $N(x) = |x| \geq 0$.

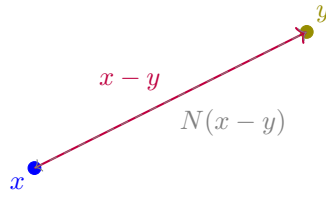


FIGURE 1.1 – En bleu les coordonnées d'un vecteur x et en vert celles d'un vecteur y . Le vecteur $x - y$ est représenté en rouge. La norme $N(x - y)$ peut se comprendre comme la longueur du vecteur $x - y$.

(ii) Supposons que $N(x) = 0$, par (1.1) nécessairement $x = 0$.

(iii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$N(\lambda x) = |\lambda x| = \begin{cases} \lambda x & \text{si } \lambda x \geq 0 \\ -\lambda x & \text{si } \lambda x < 0. \end{cases}$$

- Si $\lambda x \geq 0$ alors λ et x sont de même signe.
 - ★ Si $\lambda \geq 0$ et $x \geq 0$ alors $\lambda = |\lambda|$ et $x = |x|$ donc $N(\lambda x) = \lambda x = |\lambda||x|$.
 - ★ Si $\lambda < 0$ et $x < 0$ alors $\lambda = -|\lambda|$ et $x = -|x|$ donc $N(\lambda x) = \lambda x = (-|\lambda|)(-|x|) = |\lambda||x|$.
- Si $\lambda x < 0$ alors λ et x sont de signes opposés.
 - ★ Si $\lambda < 0$ et $x > 0$ alors $\lambda = -|\lambda|$ et $x = |x|$ donc $N(\lambda x) = -\lambda x = -(-|\lambda|)|x| = |\lambda||x|$.
 - ★ Si $\lambda > 0$ et $x < 0$ alors $\lambda = |\lambda|$ et $x = -|x|$ donc $N(\lambda x) = -\lambda x = -|\lambda|(-|x|) = |\lambda||x|$.

En conclusion, pour tout $\lambda, x \in \mathbb{R}$ on a $N(\lambda x) = |\lambda||x|$ et donc N est homogène.

(iv) Il s'agit de prouver l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$. Elle découle de la définition de la valeur absolue en (1.1). Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

- Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on a $x = |x|$ et $y = |y|$. De plus $x + y \geq 0$ donc

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|.$$

En particulier $|x + y| \leq |x| + |y|$.

- Si $x < 0$ et $y < 0$, on a $x = -|x|$ et $y = -|y|$. De plus $x + y < 0$ donc

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y = |x| + |y|.$$

En particulier $|x + y| \leq |x| + |y|$.

- Si $x < 0$ et $y \geq 0$. On a $x = -|x|$ et $y = |y|$.

- ★ Si $x + y \geq 0$ alors

$$|x + y| = x + y = -|x| + |y| \leq |y| \leq |x| + |y|.$$

En particulier $|x + y| \leq |x| + |y|$.

- ★ Si $x + y < 0$ alors

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y = |x| - |y| \leq |x| \leq |x| + |y|.$$

En particulier $|x + y| \leq |x| + |y|$.

- Si $x \geq 0$ et $y < 0$ on reprend le point précédent en échangeant les rôles de x et y .

Conclusion : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un espace vectoriel normé.

Exercice 3 (🕒 10 min). Démontrer que $\mathbb{C}$ munit du module $N : z \in \mathbb{C} \mapsto |z|$ est un espace vectoriel normé.

Nous allons maintenant introduire des normes sur des espaces vectoriels que vous avez déjà rencontrés par le passé.

1.1.2 Le cas particulier des normes euclidiennes.

Il existe un cas très particulier de normes : les normes euclidiennes. C'est un objet crucial en géométrie et vous le rencontrerez dans l'UE *Espaces Euclidiens et géométrie*. Nous faisons ici un lien qui vous permettra de connecter cette UE avec la notre.

Tout commence avec la notion de produit scalaire qui est une généralisation de celui que vous avez rencontré au lycée ou en licence dans le cas $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Définition 2 (Produit scalaire). Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On dit que $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E si

- (i) Pour tout $x, y \in E$, on a $\phi(x, y) = \phi(y, x)$.
- (ii) L'application ϕ est bilinéaire, c'est-à-dire que pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\phi(x + \lambda z, y) = \phi(x, y) + \lambda \phi(z, y), \quad \phi(x, y + \lambda z) = \phi(x, y) + \lambda \phi(x, z).$$
- (iii) Pour tout $x \in E$ on a $\phi(x, x) \geq 0$.
- (iv) Si $\phi(x, x) = 0$ alors $x = 0_E$.

Remarque 3. Le point (i) traduit le caractère symétrique de l'application ϕ . Le point (ii) dit que cette application doit être bilinéaire. Attention, si elle est symétrique il suffit de démontrer la linéarité par rapport à la variable de gauche, la variable de gauche étant fixée. Lorsque ϕ vérifie (iii), on dit qu'elle est positive et lorsqu'elle vérifie (iv) on dit qu'elle est définie. Ainsi, on peut dire qu'un produit scalaire est **une forme bilinéaire symétrique définie positive** (le mot forme signifie que l'application arrive dans le corps des scalaires, ici $\mathbb{R}$).

Exemple 2. Considérons dans $\mathbb{R}^2$ l'application

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{cases}, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2).$$

Remarquez qu'il s'agit de ce que vous avez nommé *produit scalaire* au lycée. Vérifions que ϕ est bien un produit scalaire.

- (i) Soient $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\phi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_2 x_2 = \phi(y, x)$$

donc ϕ est symétrique.

- (ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$. Notez que $x + \lambda z = (x_1 + \lambda z_1, x_2 + \lambda z_2)$. On a

$$\begin{aligned} \phi(x + \lambda z, y) &= (x_1 + \lambda z_1)y_1 + (x_2 + \lambda z_2)y_2 \\ &= x_1 y_1 + \lambda z_1 y_1 + x_2 y_2 + \lambda z_2 y_2 \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \lambda(z_1 y_1 + z_2 y_2) \\ &= \phi(x, y) + \lambda \phi(z, y). \end{aligned}$$

Comme ϕ est symétrique, on en déduit que ϕ est bilinéaire.

- (iii) Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\phi(x, x) = x_1^2 + x_2^2$$

donc $\phi(x, x) \geq 0$ en tant que somme de termes positifs.

- (iv) Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\phi(x, x) = 0$. On a donc

$$x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chacun des termes est nul donc $x_1 = x_2 = 0$ et donc $x = 0_{\mathbb{R}^2}$. ϕ est donc définie.

Conclusion : ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Un des intérêts majeurs de la notion de produit scalaire est qu'ils permettent de construire des normes sur l'espace vectoriel qui leur est associé. Ces normes sont dites Euclidiennes car elles encodent des propriétés géométriques que l'on retrouve dans les espaces euclidiens standards ($\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$). Par exemple, le théorème de Pythagore y est vrai.

Proposition 1. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé et $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire. L'application

$$N : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{\phi(x, x)} \end{cases}$$

est une norme sur E .

Remarque 4. Notez que le point (iii) dans la Définition 2 est crucial afin de définir la norme dans la Proposition 1 : on peut prendre la racine carrée, car il s'agit de celle d'un nombre positif.

La démonstration de la Proposition 1 nécessite le lemme suivant, que vous avez déjà du rencontrer par le passé dans des cas particuliers.

Lemme 1 (Inégalité de Cauchy-Schwartz). Soit E un espace vectoriel et ϕ un produit scalaire sur E . Alors, pour tout $x, y \in E$, on a

$$|\phi(x, y)| \leq \sqrt{\phi(x, x)} \sqrt{\phi(y, y)}.$$

Preuve du Lemme 1. Soient $x, y \in E$. On considère la fonction

$$P : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \phi(x + ty, x + ty). \end{cases}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, en utilisant la bilinéarité et symétrie du produit scalaire ϕ on obtient

$$\begin{aligned} P(t) &= \phi(x + ty, x + ty) = \phi(x + ty, x) + \phi(x + ty, ty) \\ &= \phi(x, x) + \phi(ty, x) + \phi(x, ty) + \phi(ty, ty) \\ &= \phi(x, x) + t(\phi(y, x) + \phi(x, y)) + t^2 \phi(y, y) \\ &= \phi(x, x) + 2t\phi(x, y) + t^2 \phi(y, y). \end{aligned}$$

P est donc un polynôme de degré (au plus) 2. Il convient donc de traiter les cas $\phi(y, y) = 0$ et $\phi(y, y) \neq 0$.

- Si $\phi(y, y) = 0$ alors d'après le caractère défini du produit scalaire, on en déduit que $y = 0$. En particulier, $\phi(x, y) = 0$. En effet, $y = 0_{\mathbb{R}^2}$ et on remarque que dans ce cas on peut écrire $y = 0 \cdot x$ (où $0 \in \mathbb{R}$). Par conséquent

$$\phi(x, y) = \phi(x, 0 \cdot x) = 0 \times \phi(x, x) = 0.$$

En particulier, on a

$$0 = |\phi(x, y)| \leq \sqrt{\phi(x, x)} \sqrt{\phi(y, y)} = 0$$

et donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.

- Si $\phi(y, y) \neq 0$ alors P est un polynôme de degré 2 donc le discriminant est

$$\Delta = 4\phi(x, y)^2 - 4\phi(x, x)\phi(y, y).$$

De plus, on remarque que $P \geq 0$ car pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $P(t) = \phi(x + ty, x + ty) \geq 0$ d'après le caractère défini du produit scalaire. Par conséquent, $\Delta \leq 0$ sinon le polynôme P changerait de signe. On en déduit que

$$\phi(x, y)^2 \leq \phi(x, x)\phi(y, y)$$

et, en passant à la racine qui est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc préserve le sens des inégalités, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sqrt{\phi(x, y)^2} = |\phi(x, y)| \leq \sqrt{\phi(x, x)\phi(y, y)} = \sqrt{\phi(x, x)} \sqrt{\phi(y, y)}.$$

Conclusion : pour tout $x, y \in E$, on a $|\phi(x, y)| \leq \sqrt{\phi(x, x)} \sqrt{\phi(y, y)}$

□

Nous avons maintenant tous les outils à notre disposition pour démontrer la Proposition 1.

Preuve de la Proposition 1. Il s'agit de vérifier les axiomes de norme tels qu'énoncés dans la Définition 1.

- (i) Par construction, N est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. En effet, pour $x \in E$, $\phi(x, x) \geq 0$ d'après le caractère positif du produit scalaire et la racine d'un nombre positif est positif donc $N(x) = \sqrt{\phi(x, x)} \geq 0$.
- (ii) Soit $x \in E$ tel que $N(x) = \sqrt{\phi(x, x)} = 0$. Alors $\phi(x, x) = 0$ et d'après le caractère défini du produit scalaire on en déduit que $x = 0_E$.
- (iii) Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par bilinéarité du produit scalaire on a

$$N(\lambda x) = \sqrt{\phi(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 \phi(x, x)} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\phi(x, x)} = |\lambda| N(x).$$

- (iv) Il reste maintenant à démontrer l'inégalité triangulaire. Soient $x, y \in E$, par bilinéarité du produit scalaire on a

$$N(x + y)^2 = \phi(x + y, x + y) = \phi(x, x) + \phi(y, y) + 2\phi(x, y) = N(x)^2 + N(y)^2 + 2\phi(x, y).$$

Maintenant, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir Lemme 1), on a

$$\phi(x, y) \leq |\phi(x, y)| \leq \sqrt{\phi(x, x)} \sqrt{\phi(y, y)} = N(x)N(y)$$

et donc

$$N(x + y)^2 \leq N(x)^2 + N(y)^2 + 2N(x)N(y) = (N(x) + N(y))^2$$

où on a reconnu l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ pour $a, b \in \mathbb{R}$. Comme N est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et que la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit en passant à la racine que

$$N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

et donc l'inégalité triangulaire est vérifiée.

Conclusion : N est une norme sur E .

□

Remarque 5. Remarquez comment dans la démonstration de la Proposition 1 les points (i), (ii) et (iii) sont une conséquence directe de la définition du produit scalaire. Toutefois, l'inégalité triangulaire du point (iv) est plus délicate et nécessite de faire appel à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir Lemme 1). Lorsque vous tâcherez de démontrer qu'une application est bien une norme, si vous avez des difficultés à démontrer l'inégalité triangulaire, il se peut que ce soit car elle découle d'un produit scalaire et qu'il faudrait alors utiliser (ou re-démontrer) une inégalité de Cauchy-Schwarz. En pratique, lorsque l'on s'en rend compte, on pose le *bon* produit scalaire ϕ pour que $N(x) = \sqrt{\phi(x, x)}$ et on utilise la Proposition 1. Il convient alors de justifier que ϕ est bien un produit scalaire comme définit en Définition 2.

Une conséquence importante de la Proposition 1 est qu'il vous est facile, à partir d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E , de construire des normes sur E .

Exemple 3. Reprenons le produit scalaire introduit en Exemple 2. D'après la Proposition 1, on sait que l'application

$$N : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2) & \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{cases}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque 6. En pratique, il peut être utile de savoir, étant donné une norme N de voir quoi poser comme produit scalaire afin de vérifier si c'est une norme Euclidienne. L'idée est la suivante : si N est une norme Euclidienne associée à un produit scalaire ϕ alors pour tout $x, y \in E$, on a

$$N(x + y)^2 = \phi(x + y, x + y) = \phi(x, x) + 2\phi(x, y) + \phi(y, y) = N(x)^2 + N(y)^2 + 2\phi(x, y).$$

On a alors nécessairement

$$\phi(x, y) = \frac{N(x + y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2}{2}.$$

Si on pense qu'une norme est Euclidienne, on définit alors

$$\phi : \begin{cases} E \times E & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \frac{N(x + y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2}{2} \end{cases}$$

et on montre que ϕ vérifie les axiomes d'un produit scalaire introduits en Définition 2.

1.1.3 $\mathbb{R}^d$ comme espace vectoriel normé

Dans ce paragraphe, on se consacre au cas particulier, mais ô combien important, de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$).

Pour $p \in [1, +\infty[$, on considère les applications :

$$N_p : \begin{cases} \mathbb{R}^d \\ x = (x_1, \dots, x_d) \end{cases} \rightarrow \mathbb{R} \mapsto \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad N_\infty : \begin{cases} \mathbb{R}^d \\ x = (x_1, \dots, x_d) \end{cases} \rightarrow \mathbb{R} \mapsto \max_{j \in \{1, \dots, d\}} |x_j| \quad (1.2)$$

Proposition 2. Soit $p \in [1, +\infty]$ alors $(\mathbb{R}^d, N_p)$ est un espace vectoriel normé.

Remarque 7. Pour $p \in [1, +\infty]$, les normes N_p sont souvent notée $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_{\ell^p(\mathbb{R}^d)}$ ou encore lorsqu'il n'y a pas de confusion $\|\cdot\|_{\ell^p}$. Nous utiliserons régulièrement l'une ou l'autre de ces notations, en cours ou en TD.

Remarque 8. L'inégalité triangulaire pour la norme N_p est parfois nommée inégalité de *Minkowski*.

Nous ne démontrons pas la Proposition 2 en toute généralité. En effet, nous allons nous concentrer sur les cas particuliers $p = 1, 2, +\infty$. La démonstration plus générale pour $p \in]1, +\infty[$ nécessite de démontrer l'inégalité de Hölder¹ qui peut être vu comme une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir Lemme 1). Sans cette dernière, il est impossible de démontrer que l'inégalité triangulaire est vérifiée par N_p .

Concentrons nous donc sur les normes N_1 , N_2 et N_∞ . Vous devez en connaître leur définition :

$$N_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^d \\ x = (x_1, \dots, x_d) \end{cases} \rightarrow \mathbb{R} \mapsto \left(\sum_{j=1}^d |x_j| \right), \quad N_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^d \\ x = (x_1, \dots, x_d) \end{cases} \rightarrow \mathbb{R} \mapsto \sqrt{\left(\sum_{j=1}^d |x_j|^2 \right)},$$

$$N_\infty : \begin{cases} \mathbb{R}^d \\ x = (x_1, \dots, x_d) \end{cases} \rightarrow \mathbb{R} \mapsto \max_{j \in \{1, \dots, d\}} |x_j|.$$

Preuve de la Proposition 2 ($p = 1, 2, +\infty$). Cette preuve constitue l'exercice 1 de la feuille de TD 1. Vous devez savoir la refaire.

- Cas $p = 1$.

(i) Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on a

$$N_1(x) = \sum_{k=1}^d |x_k|.$$

$N(x) \geq 0$ en tant que somme de termes positifs.

(ii) Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que $N(x) = 0$. Alors, on a

$$0 = N_1(x) = \sum_{k=1}^d |x_k|.$$

Il s'agit d'une somme de termes positifs qui est nulle donc chacun des terme est nul, c'est-à-dire que pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$ on a $x_k = 0$. On en déduit que $x = (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^d}$.

(iii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on a $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d)$ et

$$N_1(\lambda x) = \left(\sum_{k=1}^d |\lambda x_k| \right) = \left(\sum_{k=1}^d |\lambda| |x_k| \right) = |\lambda| \left(\sum_{k=1}^d |x_k| \right) = |\lambda| N_1(x)$$

donc N est homogène.

1. Pour $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d)$ l'inégalité de Hölder s'écrit

$$\sum_{k=1}^d |x_k| |y_k| \leq (|x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (|y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$$

où $q > 1$ est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- (iv) Soient $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ pour la valeur absolue donne

$$|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|.$$

En sommant cette inégalité sur $k \in \{1, \dots, d\}$, il vient

$$\begin{aligned} N_1(x + y) &= \left(\sum_{k=1}^d |x_k + y_k| \right) \leq \left(\sum_{k=1}^d |x_k| + |y_k| \right) = \left(\sum_{k=1}^d |x_k| \right) + \left(\sum_{k=1}^d |y_k| \right) \\ &= N_1(x) + N_1(y). \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité triangulaire est vérifiée.

Conclusion : N_1 est une norme sur $\mathbb{R}^d$.

- Cas $p = 2$. Il s'agit de généraliser l'Exemple 3 au cas $\mathbb{R}^d$ (au lieu de $\mathbb{R}^2$). Sauriez-vous le refaire ?
- Cas $p = \infty$.

- (i) Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Comme la valeur absolue est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a

$$0 \leq |x_1| \leq \left(\max_{k \in \{1, \dots, d\}} |x_k| \right) = N_\infty(x).$$

- (ii) Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que $N_\infty(x) = 0$, alors pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, on a

$$0 \leq |x_k| \leq \left(\max_{k \in \{1, \dots, d\}} |x_k| \right) = N_\infty(x) = 0.$$

En particulier, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$ on a $x_k = 0$ et donc $x = (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^d}$.

- (iii) Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \{1, \dots, d\}$, on a $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d)$. Par conséquent, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$ on a

$$|\lambda x_k| = |\lambda| |x_k| \leq |\lambda| \left(\max_{k \in \{1, \dots, d\}} |x_k| \right) = |\lambda| N_\infty(x).$$

Par passage au max, on obtient

$$N_\infty(\lambda x) \leq |\lambda| N_\infty(x). \quad (1.3)$$

De plus, si $\lambda \neq 0$, on a

$$|x_k| = \frac{|\lambda|}{|\lambda|} |x_k| = \frac{1}{|\lambda|} (|\lambda x_k|) \leq \frac{1}{|\lambda|} \left(\max_{k \in \{1, \dots, d\}} |\lambda x_k| \right) = \frac{1}{|\lambda|} N_\infty(\lambda x)$$

Par passage au max, on en déduit que

$$N_\infty(x) \leq \frac{1}{|\lambda|} N_\infty(\lambda x)$$

et donc que

$$|\lambda| N_\infty(x) \leq N_\infty(\lambda x). \quad (1.4)$$

Lorsque $\lambda = 0$ alors $|\lambda| N_\infty(x) = 0 = N_\infty(\lambda x)$. En combinant (1.3) et (1.4), nous avons démontré que $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ et donc que N est homogène.

- (iv) Soit $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, d'après l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$, on a

$$|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \left(\max_{k \in \{1, \dots, d\}} |x_k| \right) + \left(\max_{k \in \{1, \dots, d\}} |y_k| \right) = N_\infty(x) + N_\infty(y).$$

Comme ceci est vrai pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, par passage au max on obtient

$$N_\infty(x + y) = \left(\max_{k \in \{1, \dots, d\}} |x_k + y_k| \right) \leq N_\infty(x) + N_\infty(y).$$

Conclusion : $(\mathbb{R}^d, N_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

□

1.1.4 Normes sur l'espace des fonctions continues

Soit $a < b$ deux nombres réels. On considère l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ noté $\mathcal{C}([a, b])$. C'est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de **dimension infinie**. Pourtant, il est possible de trouver des normes sur cet espace vectoriel ! Pour $p \in [1, +\infty[$, on considère les applications

$$N_p : \begin{cases} \mathcal{C}([a, b]) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \end{cases}, \quad N_\infty : \begin{cases} \mathcal{C}([a, b]) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| \end{cases}$$

Proposition 3. Pour $p \in [1, +\infty]$, N_p est une norme sur $\mathcal{C}([a, b])$

Remarque 9. Notez que les applications N_p sont bien définies sur $\mathcal{C}([a, b])$. En effet, pour $p \in [1, +\infty[$, $t \mapsto |f(t)|^p$ est bien continue sur $[a, b]$, on peut donc considérer son intégrale. De même, f étant continue sur le segment $[a, b]$ fermé, elle y est bornée et atteint ses bornes. En particulier la quantité $N_\infty(f) = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$ est bien défini.

Remarque 10. Par analogie avec l'espace $\mathbb{R}^d$ (voir Remarque 7), ces normes N_p sont parfois notées $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p([a, b])}$ ou encore $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$.

Là encore, nous nous concentrons sur le cas $p = 1, 2, +\infty$.

Preuve de la Proposition 3 ($p = 1, 2, +\infty$). Une partie de la démonstration sera refaite en exercice 4 du TD 1.

- Cas $p = 1$.

(i) Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$, pour tout $t \in [a, b]$, on a

$$0 \leq |f(t)|$$

et par croissance de l'intégrale on obtient

$$0 \leq \int_a^b |f(t)| dt = N_1(f).$$

(ii) Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$ tel que $N_1(f) = 0$. Alors, on a

$$\int_a^b |f(t)| dt = 0.$$

Or comme l'application valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, par composition, l'application $(t \mapsto |f(t)|)$ est continue sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. En particulier, comme son intégrale sur $[a, b]$ est nulle, il s'agit de la fonction nulle donc $f = 0_{\mathcal{C}([a, b])}$.

(iii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}([a, b])$. On a

$$N_1(\lambda f) = \int_a^b |\lambda f(t)| dt = \left(\int_a^b |\lambda| |f(t)| dt \right) = |\lambda| \left(\int_a^b |f(t)| dt \right) = |\lambda| N_1(f),$$

où on a utilisé la linéarité de l'intégrale. Par conséquent, N_1 est homogène.

(iv) Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$. D'après l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue, pour tout $t \in [a, b]$, on a

$$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$$

et par croissance de l'intégrale, on obtient

$$N_1(f + g) = \left(\int_a^b |f(t) + g(t)| dt \right) \leq \left(\int_a^b |f(t)| dt \right) + \left(\int_a^b |g(t)| dt \right) = N_1(f) + N_1(g).$$

Par conséquent, N_1 vérifie l'inégalité triangulaire.

Conclusion : $(\mathcal{C}([a, b]), N_1)$ est un espace vectoriel normé.

- Cas $p = 2$. On se trouve dans le cas particulier où N_2 est une norme Euclidienne, pour cela en suivant l'idée de la Remarque 6, on définit le produit scalaire

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto \frac{1}{2} (N_2(f + g) - N_2(f) - N_2(g)) \end{cases}$$

Pour simplifier l'étude, analysons l'expression de ϕ . Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$, on a

$$\begin{aligned} 2\phi(f, g) &= \left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^2 dt \right) - \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) - \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right) \\ &= \left(\int_a^b |f(t)|^2 + |g(t)|^2 + 2f(t)g(t) dt \right) - \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) - \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right) \\ &= \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) + \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right) + 2 \left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right) \\ &\quad - \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) - \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right) \\ &= 2 \left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne la relation²

$$\phi(f, g) = \left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right).$$

Montrons maintenant que $\phi : \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

- (i) Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$, on a

$$\phi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt = \int_a^b g(t)f(t) dt = \phi(g, f)$$

donc ϕ est symétrique.

- (ii) Soient $f, g, h \in \mathcal{C}([a, b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \phi(f + \lambda h, g) &= \int_a^b (f(t) + \lambda h(t))g(t) dt = \int_a^b (f(t)g(t) + \lambda h(t)g(t)) dt \\ &= \left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right) + \lambda \left(\int_a^b h(t)g(t) dt \right) \\ &= \phi(f, g) + \lambda \phi(h, g) \end{aligned}$$

où on a utilisé la linéarité de l'intégrale. Comme ϕ est symétrique et linéaire par rapport à sa première variable, elle est bilinéaire.

- (iii) Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$. On remarque que pour tout $t \in [a, b]$, par positivité de la valeur absolue dans $\mathbb{R}$, on a

$$0 \leq |f(t)|^2.$$

En particulier, par croissance de l'intégrale, on obtient

$$0 \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) = \phi(f, f).$$

On a donc démontré que ϕ est positive.

2. Vous verrez qu'avec l'expérience, vous n'aurez plus besoin d'utiliser la Remarque 6 et vous trouverez immédiatement le produit scalaire associé si la norme est Euclidienne. Toutefois, si vous n'y arrivez pas, cette méthode fonctionnera toujours lorsque la norme est Euclidienne.

- (iv) Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$ telle que $\phi(f, f) = 0$. Comme l'application $t \mapsto t^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale, on en déduit que $(t \mapsto f(t)^2)$ est continue sur $[a, b]$ par composition et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On a donc

$$0 = \phi(f, f) = \int_a^b |f(t)|^2 dt = \int_a^b f(t)^2 dt.$$

Cela implique que f est la fonction nulle sur $[a, b]$, ce qui prouve le caractère défini de ϕ .

On remarque que pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b])$ on a $N_2(f) = \sqrt{\phi(f, f)}$. D'après la Proposition 1, N_2 est une norme (Euclidienne) sur $\mathcal{C}([a, b])$.

Conclusion : $(\mathcal{C}([a, b]), N_2)$ est un espace vectoriel normé.

• Cas $p = \infty$.

- (i) Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$, pour tout $t \in [a, b]$, on a

$$0 \leq |f(t)|$$

et par passage au sup en $t \in [a, b]$, on obtient

$$0 \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| = N_\infty(f)$$

donc N_∞ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

- (ii) Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$ telle que $N_\infty(f) = 0$ alors, pour tout $t \in [a, b]$, on a

$$0 \leq |f(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| = N_\infty(f) = 0$$

donc f est la fonction nulle et $f = 0_{\mathcal{C}([a, b])}$.

- (iii) Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|\lambda f(t)| = |\lambda| |f(t)| \leq |\lambda| \left(\sup_{t \in [a, b]} |f(t)| \right) = |\lambda| N_\infty(f).$$

Par passage au sup pour $t \in [a, b]$ on obtient

$$N_\infty(\lambda f) \leq |\lambda| N_\infty(f). \quad (1.5)$$

Par ailleurs, si $\lambda = 0$, on a toujours $0 = |\lambda| N_\infty(f) = N_\infty(\lambda f)$. Si $\lambda \neq 0$, pour tout $t \in [a, b]$, on a

$$|f(t)| = \frac{|\lambda|}{|\lambda|} |f(t)| = \frac{1}{|\lambda|} |\lambda f(t)| \leq \frac{1}{|\lambda|} \left(\sup_{t \in [a, b]} |\lambda f(t)| \right) = \frac{1}{|\lambda|} N_\infty(\lambda f).$$

Par passage au sup en $t \in [a, b]$, on obtient $N_\infty(f) \leq \frac{1}{|\lambda|} N_\infty(\lambda f)$ ce qui se ré-écrit comme

$$|\lambda| N_\infty(f) \leq N_\infty(\lambda f). \quad (1.6)$$

En combinant (1.5) et (1.6) on aboutit à l'homogénéité de N_∞ :

$$N_\infty(\lambda f) = |\lambda| N_\infty(f).$$

- (iv) Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$. Pour tout $t \in [a, b]$, l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ livre

$$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \left(\sup_{t \in [a, b]} |f(t)| \right) + \left(\sup_{t \in [a, b]} |g(t)| \right) = N_\infty(f) + N_\infty(g).$$

Par passage au sup en $t \in [a, b]$, on en déduit que

$$N_\infty(f + g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$$

et donc N vérifie l'inégalité triangulaire.

Conclusion : $(\mathcal{C}([a, b]), N_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

□

1.1.5 Normes sur les espaces de matrices

Soit $p, d \in \mathbb{N}^*$. On considère l'ensemble des matrices à coefficients réels à p -lignes et d -colonnes noté $\mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$. Tout élément $A \in \mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$ s'écrit $A = (a_{j,k})_{\substack{j \in \{1, \dots, p\} \\ k \in \{1, \dots, d\}}}$:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,d} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,d} \end{pmatrix}}_{d\text{-colonnes}} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{p,1} \end{pmatrix}} \right\} p\text{-lignes}$$

On considère les applications

$$\mathcal{N}_q : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R}) & \mapsto \mathbb{R} \\ A = (a_{j,k})_{\substack{j \in \{1, \dots, p\} \\ k \in \{1, \dots, d\}}} & \mapsto \left(\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^d |a_{j,k}|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Proposition 4. Les applications $\mathcal{N}_q$ sont des normes sur $\mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$.

Preuve de la Proposition 4. Nous ne démontrons pas la Proposition 4 ici. L'idée est d'identifier l'espace $\mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$ avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^D$ où $D = dp \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît alors que $\mathcal{N}_q$ comme défini en (1.7) correspond aux normes N_q telles que définies sur $\mathbb{R}^D$ au §1.1.3. On renvoie la lectrice et le lecteur en Remarque 17 plus loin dans le document. $\square$

Des normes beaucoup plus intéressantes à mettre sur un espace de matrice sont les normes dites *subordonnées*. Pour $A \in \mathcal{M}_{p,d}$, elles sont définies comme suit

$$\|A\|_{q,r} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ x \neq 0_{\mathbb{R}^d}}} \frac{\|Ax\|_{\ell^q(\mathbb{R}^p)}}{\|x\|_{\ell^r(\mathbb{R}^d)}} \quad (1.8)$$

où $q, r \in [1, +\infty]$ et où $\|\cdot\|_{\ell^q(\mathbb{R}^d)}$ et $\|\cdot\|_{\ell^r(\mathbb{R}^p)}$ sont les normes définies sur $\mathbb{R}^d$ au §1.1.3 (voir Remarque 7).

Proposition 5. Soit N_a une norme sur $\mathbb{R}^p$ et N_b une norme sur $\mathbb{R}^d$. Alors l'application

$$\mathcal{N} : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ A & \mapsto \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ x \neq 0_{\mathbb{R}^d}}} \frac{N_a(Ax)}{N_b(x)} \end{cases}$$

est une norme sur $\mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$. En particulier les normes $\|\cdot\|_{q,r}$ définies en (1.8) sont des normes sur $\mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$.

Remarque 11. Il convient de s'assurer que tous les objets introduits sont bien définis. En particulier, on remarque que si $x \in \mathbb{R}^d$ (que l'on a identifié avec $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, les matrices à d -lignes et 1-colonne), alors le produit Ax fait sens : en effet on fait le produit de A , un élément de $\mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$, avec x , un élément de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$. En particulier, $Ax \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$: c'est donc une matrice à p -lignes et 1-colonne, il s'agit d'un vecteur de $\mathbb{R}^p$. On remarque que $N_b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ donc que $N_b(x)$ est bien défini. De même, $N_a : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$ donc $N_a(Ax)$ est bien défini.

Preuve de la proposition 5. Nous allons démontrer que $\mathcal{N}$ telle que définie en Proposition 5 vérifie les axiomes de norme de la Définition 1. Avant cela, il faudrait démontrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$, on a

$$\mathcal{N}(A) < +\infty. \quad (1.9)$$

On l'admettra ici (voir Exercice 9 plus avant pour une démonstration).

(i) Soit $A \in \mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $x \neq 0_{\mathbb{R}^d}$. On remarque que

$$0 \leq \frac{N_a(Ax)}{N_b(x)}.$$

Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0_{\mathbb{R}^d}$, par passage au sup en x on obtient

$$0 \leq \mathcal{N}(A)$$

et donc $\mathcal{N}$ est positive.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{N}(A) = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $x \neq 0$, on a

$$0 = N_a(Ax)$$

et comme N_a est une norme sur $\mathbb{R}^p$ on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a $Ax = 0_{\mathbb{R}^p}$. En utilisant la définition du produit matrice-vecteur, on en déduit que pour $j \in \{1, \dots, p\}$ le coefficient $(Ax)_j$ vérifie

$$0 = (Ax)_j = \sum_{k=1}^d a_{j,k} x_k.$$

En choisissant pour x les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^d$, c'est à dire $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^\top, e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 0, 1)$ on en déduit que

$$0 = (Ae_q)_j = a_{j,q}$$

et donc tous les coefficients de A sont nuls : $A = 0_{\mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})}$. $\mathcal{N}$ est donc définie.

(iii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $x \neq 0_{\mathbb{R}^d}$ on a

$$\frac{\mathcal{N}_a(\lambda Ax)}{N_b(x)} = |\lambda| \frac{\mathcal{N}_a(Ax)}{N_b(x)} \leq |\lambda| \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ x \neq 0_{\mathbb{R}^d}}} \frac{\mathcal{N}_a(Ax)}{N_b(x)} = |\lambda| \mathcal{N}(A),$$

où on a utilisé l'homogénéité de la norme N_a . Par passage au sup en x on obtient

$$\mathcal{N}(\lambda A) \leq |\lambda| \mathcal{N}(A). \quad (1.10)$$

On remarque que si $\lambda = 0$ alors $\mathcal{N}(\lambda A) = |\lambda| \mathcal{N}(A) = 0$. Si $\lambda \neq 0$, alors on a

$$\frac{\mathcal{N}_a(Ax)}{N_b(x)} = \frac{|\lambda|}{|\lambda|} \frac{\mathcal{N}_a(Ax)}{N_b(x)} = \frac{1}{|\lambda|} \frac{\mathcal{N}_a(\lambda Ax)}{N_b(x)} \leq \frac{1}{|\lambda|} \mathcal{N}(\lambda A).$$

Par passage au sup en x , on obtient

$$\mathcal{N}(A) \leq \frac{1}{|\lambda|} \mathcal{N}(\lambda A)$$

en en multipliant par $|\lambda| > 0$ cette inégalité on aboutit à

$$|\lambda| \mathcal{N}(A) \leq \mathcal{N}(\lambda A). \quad (1.11)$$

En combinant (1.10) et (1.11) on aboutit à l'homogénéité de $\mathcal{N}$, à savoir $\mathcal{N}(\lambda A) = |\lambda| \mathcal{N}(A)$.

(iv) Soient $A, B \in \mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $x \neq 0_{\mathbb{R}^d}$ on a

$$\begin{aligned} \frac{N_a((A+B)x)}{N_b(x)} &= \frac{N_a(Ax+Bx)}{N_b(x)} \leq \frac{N_a(Ax)}{N_b(x)} + \frac{N_a(Bx)}{N_b(x)} \leq \left(\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ x \neq 0_{\mathbb{R}^d}}} \frac{N_a(Ax)}{N_b(x)} \right) + \left(\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ x \neq 0_{\mathbb{R}^d}}} \frac{N_a(Bx)}{N_b(x)} \right) \\ &= \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B). \end{aligned}$$

Par passage au sup en x dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\mathcal{N}(A+B) \leq \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B)$$

et donc $\mathcal{N}$ vérifie l'inégalité triangulaire.

Conclusion : $(\mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R}), \mathcal{N})$ est un espace vectoriel normé.

□

Remarque 12. Il se trouve que $\| \cdot \|_{q,r}$ est parfois définie comme suit pour $A \in \mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$:

$$\|A\|_{q,r} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ \|x\|_{\ell^r(\mathbb{R}^d)}=1}} \|Ax\|_{\ell^q(\mathbb{R}^p)}$$

ou bien

$$\|A\|_{q,r} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ \|x\|_{\ell^r(\mathbb{R}^d)} \leq 1}} \|Ax\|_{\ell^q(\mathbb{R}^p)}.$$

Il se trouve que ces deux définitions sont équivalentes à celle présentées en (1.8). Sauriez-vous le démontrer ?

Exercice 4 (10 min). On considère la matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}).$$

- (i) Calculer $\|A\|_{2,2}$,
- (ii) Calculer $\|A\|_{\infty,1}$.

Exercice 5 (10 min). On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}).$$

- 1. Calculer $\|A\|_{\infty,2}$,
- 2. Calculer $\|A\|_{1,\infty}$.

1.1.6 Normes sur l'espace des applications linéaires

Soit (E, N_1) et (F, N_2) deux espaces vectoriels normés et $\varphi : (E, N_1) \rightarrow (F, N_2)$ une application linéaire. On définit la norme triple de φ comme

$$\|\varphi\| := \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{N_2(\varphi(x))}{N_1(x)}. \quad (1.12)$$

On définit alors l'ensemble

$$\mathcal{L}_c(E, F) := \{\varphi \in \mathcal{L}(E, F) : \|\varphi\| < +\infty\}. \quad (1.13)$$

On peut montrer que $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace vectoriel (voir Remarque 37 plus loin).

Proposition 6. L'application $N : \mathcal{L}_c(E, F) \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ par $N(\varphi) = \|\varphi\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.

Preuve de la proposition 6. La démonstration sera faite dans l'exercice 6 du TD 1. □

Exercice 6 (25 min). On définit les matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

et on considère l'application

$$\Gamma : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ x = (x_1, x_2) & \mapsto x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2. \end{cases}$$

- (i) Montrer que Γ est une application linéaire.
- (ii) Calculer la norme de $\Gamma : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_{2,2})$.

Ici, $\|\cdot\|_{2,2}$ est définie pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ par

$$\|A\|_{2,2} := \sup_{\substack{z \in \mathbb{C}^2 \\ z \neq 0}} \frac{\|Az\|_2}{\|z\|_2}$$

avec pour $z = (z_1, z_2)^\top \in \mathbb{C}^2$

$$\|z\|_2 = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}.$$

Exercice 7 (35 min). On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degré au plus $d \in \mathbb{N}^*$ et à coefficients réels noté $\mathbb{R}_d[X]$. On considère l'application

$$N : \begin{cases} \mathbb{R}_d[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ P & \mapsto \max_{k \in \{0, \dots, d\}} |P^{(k)}(0)| \end{cases}$$

Ici, pour $k \in \{0, \dots, d\}$, $P^{(k)}(0)$ est la dérivée k -ième du polynôme P évaluée en 0.

- (i) Montrer que $(\mathbb{R}_d[X], N)$ est un espace vectoriel normé.

(ii) On considère maintenant l'application de dérivation D défini pour $P \in \mathbb{R}_d[X]$ par

$$D(P) = P'.$$

- (a) Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$.
- (b) Calculer la norme de D définie par

$$\|D\| = \sup_{\substack{P \in \mathbb{R}_d[X] \\ P \neq 0_{\mathbb{R}_d[X]}}} \frac{N(D(P))}{N(P)}.$$

Exercice 8 (20 min). On considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}([0, 1]) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \int_0^1 t^2 f(t) dt \end{cases}$$

- (i) Montrer que φ est une application linéaire.
- (ii) Calculer la norme de l'application linéaire $\varphi : (\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$.
- (iii) Calculer la norme de l'application linéaire $\varphi : (\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$.

1.1.7 Ce qu'il faut retenir sur le paragraphe 1.1

Il s'agit de ce que vous devez savoir faire *a minima* et qui concerne le paragraphe 1.1. Bien évidemment, plus vous en savez, mieux c'est !

Ce que vous devez connaître de tête :

- La définition d'une norme (Définition 1).
- La définition d'un produit scalaire (Définition 2) et la Proposition 1.
- L'expression des normes N_1 , N_2 et N_∞ dans $\mathbb{R}^d$ (§1.1.3).
- La définition des normes subordonnées pour les matrices (voir (1.8) ou la Proposition 5).
- La définition des normes d'applications linéaires (voir (1.12)).

Les démonstrations théoriques que vous devez savoir faire :

- La démonstration de la Proposition 2.
- La démonstration de la Proposition 3.

Les outils pratiques qu'il faut maîtriser :

- Il faut savoir démontrer qu'une application donnée est une norme ou non.
 - ★ Si vous pensez que ce n'est pas une norme il faut trouver un axiome de norme qui n'est pas vérifié en exhibant un contre-exemple.
 - ★ Si vous pensez que c'est une norme, il faut vérifier chaque axiome.
- △△△ Il s'agit là d'un exercice de rédaction, si vous devez vérifier un axiome, même si cela vous semble évident, il faut exhiber l'argument clé dans la rédaction (voir les erreurs classiques du §1.1.8).
- Il faut être capable de calculer la norme triple d'une application linéaire ou d'une matrice.
- Vous aurez remarqué que la manipulation des sup et des max est omniprésente lorsque l'on souhaite démontrer que certaines applications sont des normes ou bien pour calculer des normes triples. Il faut être au clair avec ces objets et savoir comment les manipuler rigoureusement.

1.1.8 Erreurs classiques

Les exemples ci-dessous proviennent de vraie copies. Cette section a pour but d'être enrichie au fil du semestre.

Erreur classique 1. Nous essayons de démontrer que $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $N(x) = 2|x_1| + |x_2|$ est une norme. Pour démontrer l'homogénéité on lit :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$N(\lambda x) = 2|\lambda x_1| + |\lambda x_2| = |\lambda|N(x).$$

La partie en rouge est **trop rapide** : l'étudiante ou l'étudiant écrit simplement la définition de N puis écrit le résultat attendu. Ce n'est pas convaincant pour le correcteur. Une alternative est de détailler l'égalité en rouge comme ci-dessous.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$N(\lambda x) = 2|\lambda x_1| + |\lambda x_2| = 2|\lambda||x_1| + |\lambda||x_2| = |\lambda|(2|x_1| + |x_2|) = |\lambda|N(x).$$

Erreur classique 2. L'utilisation du max ou du sup est souvent très mal rédigée. Par exemple on souhaite démontrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $N(x) = \max(3|x_1|, |x_2|)$ vérifie l'inégalité triangulaire. Dans une copie, on peut lire :

Soient $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} N(x+y) = \max(3|x_1+y_1|, |x_2+y_2|) &\leq \max(3|x_1|+3|y_1|, |x_2|+|y_2|) \\ &\leq \max(3|x_1|, |x_2|) + \max(3|y_1|, |y_2|) = N(x) + N(y). \end{aligned}$$

Une telle copie laisse au correcteur l'impression que l'étudiante ou l'étudiant essaye d'obtenir le résultat demandé, sans savoir faire proprement un passage au max. C'est d'ailleurs le cas pour la première puis la seconde inégalité. Une alternative pourrait être

Soient $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On a d'une part

$$3|x_1+y_1| \leq 3|x_1|+3|y_1| \leq \max(3|x_1|, |x_2|) + \max(3|y_1|, |y_2|) = N(x) + N(y) \quad (1.14)$$

et d'autre part

$$|x_2+y_2| \leq |x_2|+|y_2| \leq \max(3|x_1|, |x_2|) + \max(3|y_1|, |y_2|) = N(x) + N(y). \quad (1.15)$$

Ainsi, comme $N(x+y) = \max(3|x_1+y_1|, |x_2+y_2|)$, (1.14) et (1.15) nous permettent de passer au max ce qui donne immédiatement

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y)$$

et donc N vérifie l'inégalité triangulaire.

1.2 Convergence des suites dans un espace vectoriel normé

L'objectif de cette section est d'étendre la notion de convergence pour les suites à valeurs réelles à des suites à valeurs dans un espace vectoriel (des suites de $\mathbb{R}^d$, des suites de matrices, des suites d'applications linéaires, des suites de fonctions...).

Avant toute chose, rappelons la définition suivante.

Définition 3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire une suite à valeurs réelles. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

1.2.1 Convergence des suites vectorielles

Définition 4. Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire une suite d'éléments de E . On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, N(u_n - \ell) < \varepsilon.$$

Remarque 13. La Définition 4 est équivalente à dire que la suite à valeurs réelles $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = N(u_n - \ell)$ converge vers 0. En effet, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, d'après la Définition 4, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 car alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, v_n < \varepsilon. \quad (1.16)$$

Or $v_n \geq 0$ car N est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et donc $v_n = |v_n|$ et (1.16) se ré-écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |v_n| < \varepsilon.$$

Ce qui d'après la Définition 3 signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. Réciproquement, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |v_n| < \varepsilon$$

ce qui se ré-écrit, comme N est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, N(u_n - \ell) < \varepsilon$$

ce qui est précisément la Définition 4

Exemple 4. On considère la suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ définie pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{\frac{n^3}{2n^3 + 7n^2 + 2}} \right).$$

On va montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers

$$\ell = \left(\frac{1}{2} \right)$$

lorsque $\mathbb{R}^2$ est munit de la norme $\|\cdot\|_2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \|u_n - \ell\|_2 &= \left\| \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{\frac{n^3}{2n^3 + 7n^2 + 2}} \right) - \left(\frac{1}{2} \right) \right\|_2 = \left\| \left(\frac{\frac{1}{n^3 - \frac{1}{2}(2n^3 + 7n^2 + 2)}}{\frac{n^3}{2n^3 + 7n^2 + 2}} \right) \right\|_2 \\ &= \left\| \left(-\frac{\frac{1}{2}n^2 + 1}{2n^3 + 7n^2 + 2} \right) \right\|_2 \\ &= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \left(\frac{\frac{7}{2}n^2 + 1}{2n^3 + 7n^2 + 2} \right)^2} \end{aligned}$$

On remarque que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\frac{7}{2}n^2 + 1}{2n^3 + 7n^2 + 2} = \left(\frac{7}{2}n^2 \left(1 + \frac{2}{7n^2} \right) \right) \frac{1}{2n^3} \left(\frac{1}{1 + \frac{7}{2n} + \frac{1}{n^3}} \right) = \frac{7}{4n} \frac{1 + \frac{2}{7n^2}}{1 + \frac{7}{2n} + \frac{1}{n^3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Comme la fonction racine est continue en 0, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - \ell\|_2 = 0$$

et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

Exemple 5. On considère $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}([0, 1])^{\mathbb{N}}$ la suite de fonctions continues sur $[0, 1]$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$

$$f_n(t) = t^n.$$

- On commence par munir $\mathcal{C}([0, 1])$ de la norme $\|\cdot\|_1$. On va montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|f_n - 0\|_1 = \|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathcal{C}([0, 1])$ munit de la norme $\|\cdot\|_1$.

- On munit maintenant $\mathcal{C}([0, 1])$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Dans ce cas $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite ! En effet, supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ait une limite $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On remarque que par définition de la norme $\|\cdot\|_\infty$, f est limite uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par conséquent, f est aussi limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, or pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1[, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nécessairement, on en déduit que pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1[, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mais cette fonction f n'est pas continue en $t = 1$ ce qui est absurde car $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. En conclusion, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite dans $\mathcal{C}([0, 1])$ munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Remarque 14. L'Exemple 5 illustre une propriété implicite de la Définition 4 : la notion de convergence dépend de la norme choisie. Parfois, pour clarifier la norme que l'on utilise, au lieu de noter $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, on choisit d'écrire

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N} \ell$$

pour insister sur la norme considérée.

Exemple 6. On considère la suite de matrices de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, définie pour $n \in \mathbb{N}$, par

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 1 \\ -1 & \frac{n^2}{2n^2+1} \end{pmatrix}.$$

On va montrer que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

lorsque $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est munit de la norme $\|\cdot\|_{\infty, \infty}$. Soit $x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, on a

$$(A_n - A)x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2(2n^2+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} x_1 \\ -\frac{1}{2(2n^2+1)} x_2 \end{pmatrix}.$$

Or, on a

$$|\frac{1}{2^n} x_1| \leq \frac{1}{2^n} \|x\|_\infty, \quad |-\frac{1}{2(2n^2+1)} x_2| \leq \frac{1}{2(2n^2+1)} \|x\|_\infty$$

et donc

$$\|(A_n - A)x\|_\infty \leq \max\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2(2n^2+1)}\right) \|x\|_\infty.$$

En passant au sup en x , on en déduit que

$$\|A_n - A\|_{\infty, \infty} \leq \max\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2(2n^2+1)}\right).$$

On remarque que par croissance comparées, on a

$$\frac{2(2n^2+1)}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc que pour n suffisamment grand

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2(2n^2+1)}.$$

En particulier, pour n suffisamment grand on a

$$\max\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2(2n^2+1)}\right) = \frac{1}{2(2n^2+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers A dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_{\infty, \infty}$.

Comme pour une suite d'éléments de $\mathbb{R}$, on a la proposition suivante qui discute de l'unicité de la limite.

Proposition 7. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite dans (E, N) alors cette limite est unique.

Preuve de la Proposition 7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui admet deux limites $\ell_1, \ell_2 \in E$. Alors, par définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, N(u_n - \ell_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, N(u_n - \ell_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $n_0 = \max(n_1, n_2)$, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$N(\ell_1 - \ell_2) = N(\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2) \leq N(\ell_1 - u_n) + N(u_n - \ell_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $N(\ell_1 - \ell_2) < \varepsilon$ et donc que $N(\ell_1 - \ell_2) = 0$. Comme N est une norme donc définie, on a nécessairement $\ell_1 - \ell_2 = 0_E$ et donc $\ell_1 = \ell_2$, ce qui démontre l'unicité de la limite. $\square$

1.2.2 Normes équivalentes

On a vu au §1.2.1 en Définition 4 que la notion de convergence dans un espace vectoriel (E, N) dépend de la norme N (voir également l'Exemple 5). Il se trouve que s'il y a deux normes N_1 et N_2 sur un espace vectoriel E , il y a une notion qui permet de dire que les suites convergentes pour N_1 sont les mêmes que les suites convergentes pour N_2 : c'est la notion de normes équivalentes.

Définition 5. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient $N_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $N_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux normes sur E . On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe $m, M \in \mathbb{R}_+^*$ tels que tout $x \in E$ on a

$$mN_1(x) \leq N_2(x) \leq MN_1(x).$$

Remarque 15. La notion de normes équivalentes est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E . En effet, si N_1 et N_2 sont deux normes sur E et que l'on dit que $N_1 \sim N_2$ si N_1 et N_2 sont équivalentes alors on a les propriétés suivantes.

- $\sim$ est réflexive : soit $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ une norme sur E . En choisissant $m = M = 1$ on a bien que pour tout $x \in E$, on a

$$N(x) \leq N(x) \leq N(x)$$

et donc $N \sim N$.

- $\sim$ est réflexive : soient $N_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $N_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux normes sur E telles que $N_1 \sim N_2$. Alors, il existe $m, M \in \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $x \in E$ on a

$$mN_1(x) \leq N_2(x) \leq MN_1(x).$$

On remarque donc que pour tout $x \in E$ on a

$$N_1(x) \leq \frac{1}{m}N_2(x), \quad \frac{1}{M}N_2(x) \leq N_1(x)$$

et donc qu'en particulier, pour tout $x \in E$, on a

$$\frac{1}{M}N_2(x) \leq N_1(x) \leq \frac{1}{m}N_2(x).$$

En particulier $N_2 \sim N_1$ et $\sim$ est réflexive.

- $\sim$ est transitive : soient $N_j : E \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$, trois normes sur E telles que $N_1 \sim N_2$ et $N_2 \sim N_3$. Comme $N_1 \sim N_2$, il existe $m_a, M_a \in \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $x \in E$ on a

$$m_a N_1(x) \leq N_2(x) \leq M_a N_1(x).$$

De même, comme $N_2 \sim N_3$, il existe $m_b, M_b \in \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $x \in E$ on a

$$m_b N_2(x) \leq N_3(x) \leq M_b N_2(x).$$

On en déduit que pour tout $x \in E$ on a

$$m_a m_b N_1(x) \leq m_b N_2(x) \leq N_3(x), \quad N_3(x) \leq M_b N_2(x) \leq M_b M_a N_1(x).$$

En particulier, pour tout $x \in E$ on a

$$m_a m_b N_1(x) \leq N_3(x) \leq M_b M_a N_1(x)$$

et donc $N_1 \sim N_3$. En particulier $\sim$ est transitive.

Exemple 7. On considère dans $\mathbb{R}^2$ les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$. On va montrer qu'elles sont équivalentes. Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \leq \|x\|_\infty + \|x\|_\infty = 2\|x\|_\infty.$$

Par ailleurs, on a

$$|x_1| \leq |x_1| + |x_2| = \|x\|_1, \quad |x_2| \leq |x_1| + |x_2| = \|x\|_1$$

donc

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|) \leq \|x\|_1.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{1}{2}\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1$$

et donc $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux normes équivalentes sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 8. On va montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{C}([0, 1])$. Il est facile de voir que si $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ alors on a

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \leq \left(\sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| \right) \left(\int_0^1 dt \right) = \|f\|_\infty.$$

Toutefois, l'autre inégalité n'est pas vérifiée. En effet, supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ on ait

$$\|f\|_\infty \leq M \|f\|_1. \quad (1.17)$$

Alors, en reprenant la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'Exemple 5 on obtient

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}, \quad \|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |t^n| = 1.$$

En particulier, (1.17) donne pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$1 = \|f_n\|_\infty \leq M \|f_n\|_1 = \frac{M}{n+1}.$$

En choisissant $n > M - 1$ on aboutit à $1 < 1$ ce qui est absurde et donc les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Proposition 8. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient $N_1 : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $N_2 : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux normes équivalentes sur E . Toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^\mathbb{N}$ qui converge vers $\ell \in E$ pour la norme N_1 converge également pour la norme N_2 .

Preuve de la Proposition 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^\mathbb{N}$ qui converge vers $\ell \in E$ pour la norme N_1 . Comme N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $x \in E$ on a

$$N_2(x) \leq M N_1(x).$$

En particulier, pour $x = u_n - \ell$, on obtient

$$0 \leq N_2(u_n - \ell) \leq N_1(u_n - \ell).$$

Comme $u_n \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{N_1} \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_1(u_n - \ell) = 0$ et par encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N_2(u_n - \ell) = 0$$

et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers ℓ en norme N_2 . □

Un théorème très important est qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Théorème 1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Dans ce cours, nous admettrons le Théorème 1.

Remarque 16. $\triangle\triangle\triangle$: l'hypothèse de la dimension finie est nécessaire comme vu dans l'Exemple 8.

Exercice 9. Démontrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_{d,p}(\mathbb{R})$, (1.9) est vérifiée.

1.2.3 Equivalence des normes et norme d'applications linéaires

Soient $N_1, N_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux normes équivalentes sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. En particulier, on sait qu'il existe $C_{1,2}, C_{2,1} \in \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $x \in E$ on a

$$N_1(x) \leq C_{1,2} N_2(x) \quad N_2(x) \leq C_{2,1} N_1(x). \quad (1.18)$$

En particulier, pour tout $x \in E$ tel que $x \neq 0_E$, on obtient

$$\frac{N_1(x)}{N_2(x)} \leq C_{1,2}, \quad \frac{N_2(x)}{N_1(x)} \leq C_{2,1}.$$

En passant au sup sur $x \in E, x \neq 0_E$, on obtient

$$\left(\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{N_1(x)}{N_2(x)} \right) \leq C_{1,2}, \quad \left(\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{N_2(x)}{N_1(x)} \right) \leq C_{2,1}.$$

En particulier, $\left(\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{N_1(x)}{N_2(x)} \right)$ est la meilleure constante $C_{1,2}$ possible et $\left(\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{N_2(x)}{N_1(x)} \right)$ la meilleure constante $C_{2,1}$ possible.

Afin de faire le lien avec les normes d'applications linéaires vues en §1.1.6, on peut considérer les applications identités

$$\varphi_{1,2} : \begin{cases} (E, N_1) & \rightarrow & (E, N_2) \\ x & \mapsto & x \end{cases}, \quad \varphi_{2,1} : \begin{cases} (E, N_2) & \rightarrow & (E, N_1) \\ x & \mapsto & x \end{cases}.$$

On remarque que

$$\|\varphi_{1,2}\| = \left(\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{N_2(x)}{N_1(x)} \right), \quad \|\varphi_{2,1}\| = \left(\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{N_1(x)}{N_2(x)} \right).$$

En particulier, les meilleures constantes $C_{1,2}$ et $C_{2,1}$ possibles dans (1.18) sont données par $\|\varphi_{1,2}\|$ et $\|\varphi_{2,1}\|$.

Exercice 10 (25 min). On considère l'application

$$N : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_d) & \mapsto & \sum_{j=1}^d j|x_j| \end{cases}.$$

(i) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^d$.

(ii) Justifier qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$m\|x\|_\infty \leq N(x) \leq M\|x\|_\infty. \quad (1.19)$$

(iii) Trouver les meilleures constantes³ $m, M \in \mathbb{R}_+^*$ que l'on peut choisir dans (1.19).

1.2.4 Convergence de suites à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

Nous allons nous concentrer sur le cas particulier des suites vectorielles dans $\mathbb{R}^d$. Le but de la prochaine proposition est de démontrer que la convergence d'une suite $\mathbb{R}^d$ (pour n'importe quelle norme puisqu'elles sont équivalentes), est équivalente à la convergence de chacune des coordonnées de la suite vers la coordonnées correspondante de la limite.

3. Par meilleure constante, cela veut dire qu'on cherche le plus grand m possible et le plus petit M possible.

Proposition 9. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit les composantes de x_n comme

$$x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,d}).$$

Soit $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_d) \in \mathbb{R}^d$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes

- (i) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ ,
- (ii) Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n,j} = \ell_j$.

Preuve de la Proposition 9.

(i) $\implies$ (ii) : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}^d$. On peut supposer que la convergence a lieu en norme $\|\cdot\|_{\infty}$ puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie (voir Théorème 1). Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$\|x_n - \ell\|_{\infty} = \max_{j \in \{1, \dots, d\}} |x_{n,j} - \ell_j| < \varepsilon.$$

En particulier, comme pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ on a

$$|x_{n,j} - \ell_j| \leq \|x_n - \ell\|_{\infty} < \varepsilon$$

On a bien démontré que pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x_{n,j} - \ell_j| < \varepsilon$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n,j} = \ell_j$.

(ii) $\implies$ (i) : Soit $\varepsilon > 0$ et $j \in \{1, \dots, d\}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n,j} = \ell_j$, $\exists n_0(j) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0(j)$ on a

$$|x_{n,j} - \ell_j| < \varepsilon.$$

En posant $n_0 = (\max_{j \in \{1, \dots, d\}} n_0(j))$, on obtient que pour tout $n \geq n_0$ et tout $j \in \{1, \dots, d\}$ on a

$$|x_{n,j} - \ell_j| < \varepsilon.$$

Par passage au max sur $j \in \{1, \dots, d\}$, on aboutit au fait que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$\|x_n - \ell\|_{\infty} < \varepsilon.$$

On a donc démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|x_n - \ell\|_{\infty} < \varepsilon,$$

ce qui est précisément la définition de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans $\mathbb{R}^d$ pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}$. □

Exemple 9. Nous avons démontré dans l'Exemple 4 que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{\frac{n^3}{2n^3 + 7n^2 + 2}} \right).$$

converge vers

$$\ell = \left(\frac{1}{2} \right).$$

Maintenant, on remarque que

$$u_{n,1} = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 = \ell_1, \quad u_{n,2} = \frac{n^3}{2n^3 + 7n^2 + 2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \ell_2,$$

où la deuxième limite s'obtient à la comparant à celle du quotient des monômes de plus haut degré. On aurait pu donc déduire directement, à l'aide de la Proposition 9, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

1.2.5 Convergence des suites dans un espace vectoriel de dimension finie

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer que le Proposition 9 est également vraie dans n'importe quel espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 10. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie d (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de E . Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut décomposer x_n et dans la base $(e_1, \dots, e_d)$:

$$x_n = \left(\sum_{j=1}^d x_{n,j} e_j \right), \quad \ell = \sum_{j=1}^d \ell_j e_j.$$

Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .
- (ii) Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ $(x_{n,j})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_j .

Afin de démontrer la Proposition 10 nous avons besoin du Lemme suivant.

Lemme 2. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie d ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}^d$ un isomorphisme et $N : \mathbb{K}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une norme sur $\mathbb{K}^d$. L'application $\mathcal{N}$ définie comme

$$\mathcal{N} : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto N(\varphi(x)) \end{cases}$$

est une norme sur E .

Preuve du Lemme 2. Il suffit de démontrer que $\mathcal{N}$ est une norme sur E .

- (i) On remarque que $\mathcal{N} = N \circ \varphi$ et est donc à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
- (ii) Soit $x \in E$ tel que $\mathcal{N}(x) = 0$. Cela signifie que $N(\varphi(x)) = 0$ et comme N est une norme $\varphi(x) = 0_{\mathbb{K}^d}$. Or φ étant un isomorphisme, il est en particulier injectif et donc $x = 0_E$.
- (iii) Soit $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\mathcal{N}(\lambda x) = N(\varphi(\lambda x)) = N(\lambda \varphi(x)) = |\lambda| N(\varphi(x)) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$$

car φ est un isomorphisme donc linéaire et N est une norme sur $\mathbb{K}^d$. En particulier, $\mathcal{N}$ est homogène.

- (iv) Soient $x, y \in E$ alors on a

$$\mathcal{N}(x + y) = N(\varphi(x + y)) = N(\varphi(x) + \varphi(y)) \leq N(\varphi(x)) + N(\varphi(y)) = \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$$

où on a utilisé le fait que φ soit linéaire et que N est une norme donc vérifie l'inégalité triangulaire. On en déduit que $\mathcal{N}$ vérifie l'inégalité triangulaire.

$\mathcal{N}$ est donc une norme sur E . □

Remarque 17. Reprenons les normes $\mathcal{N}_q$ définies en (1.7) sur l'espace $\mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$. On sait que $\mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension $D = p \times d$ et qu'une base est donnée par les matrices $(E_{j,k})_{\substack{j \in \{1, \dots, p\} \\ k \in \{1, \dots, d\}}}$

$$(E_{j,k})_{r,s} = \begin{cases} 1 & \text{si } r = j \text{ et } s = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi, toute matrice $A = (a_{j,k})_{\substack{j \in \{1, \dots, p\} \\ k \in \{1, \dots, d\}}}$ s'écrit

$$A = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^d a_{j,k} E_{j,k}.$$

On considère $(e_1, \dots, e_D)$ la base canonique de $\mathbb{R}^D$. Si on considère l'isomorphisme

$$\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \varphi(E_{j,k}) = e_{jk}$$

on remarque $\mathcal{N}_q(A) = N_q(\varphi(A))$ où N_q est la norme sur $\mathbb{R}^D$ définie en (1.2).

Preuve de la Proposition 10. On peut supposer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ puisque tout $\mathbb{C}$ -espace vectoriel peut-être vu comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (de dimension doublée). Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}^d$ un isomorphisme. On considère l'application définie sur E par

$$\mathcal{N}_\infty : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \|\varphi(x)\|_\infty \end{cases}$$

D'après le Lemme 2, on sait que $\mathcal{N}_\infty$ est une norme sur E . Comme E est de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes d'après le Théorème 1 et donc la convergence d'une suite d'éléments de E peut être compris comme la convergence au sens de la norme $\mathcal{N}_\infty$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^\mathbb{N}$ qui converge vers $\ell \in E$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{N}_\infty(x_n - \ell) = \|\varphi(x_n - \ell)\|_\infty = \|X_n - \Lambda\|_\infty$$

où on a introduit les vecteurs $X_n, \Lambda \in \mathbb{K}^d$ définis par

$$X_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,d}), \quad \Lambda = (\ell_1, \dots, \ell_d).$$

Comme $\mathcal{N}_\infty(x_n - \ell) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Lambda$ in $\mathbb{K}^d$ et donc d'après la Proposition 9, on sait que pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ on a

$$x_{n,j} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_j.$$

ce qui démontre le point (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Supposons que pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ on a

$$x_{n,j} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_j. \tag{1.20}$$

Alors, on a

$$\mathcal{N}_\infty(x_n - \ell) = \|\varphi(x_n - \ell)\|_\infty = \|X_n - \Lambda\|_\infty$$

et comme on a (1.20), on en déduit d'après la Proposition 9 que

$$\|X_n - \Lambda\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc $\mathcal{N}_\infty(x_n - \ell) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans E . □

Exemple 10. Reprenons l'Exemple 6 dans lequel on a démontré que la suite de matrices $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})^\mathbb{N}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 1 \\ -1 & \frac{n^2}{2n^2+1} \end{pmatrix}$$

converge vers

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Nous aurions pu démontrer ce résultat en étudiant la convergence de chaque coefficient de la suite de matrices $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En effet, on a

$$\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \frac{n^2}{2n^2+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

où dans la deuxième limite on a utilisé que la limite était la même que celle du quotient des monômes de plus hauts degrés. Cela permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A$.

1.2.6 Ce qu'il faut retenir sur le paragraphe 1.2

Il s'agit de ce que vous devez savoir faire a minima et qui concerne le paragraphe 1.2. Bien évidemment, plus vous en savez, mieux c'est !

Ce que vous devez connaître de tête :

- La définition de la convergence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé (voir Définition 4).
- La définition de deux normes équivalentes (voir Définition 5) et le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, le Théorème 1.

Les démonstrations théoriques que vous devez savoir faire :

- La démonstration de la Proposition 7.
- La démonstration de la Proposition 8.
- La démonstration de la Proposition 9.

Les outils qu'il faut maîtriser :

- Démontrer qu'un élément $\ell \in E$ est la limite d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour une norme N donnée sur E . Il faut pouvoir le faire des deux façons suivantes :
 - ★ à l'aide de la Définition 4,
 - ★ ou alors en étudiant chacune des coordonnées comme le permet la Proposition 10.
- Trouver la limite $\ell \in E$ d'une suite d'éléments de E en se ramenant au cas réel ou complexe en étudiant chacune des coordonnées de cette suite.

1.3 Vocabulaire de la topologie

Le but de ce paragraphe est d'introduire des concepts qui vont nous permettre de généraliser à un espace vectoriel normé les notions d'intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont ouverts, fermés...

1.3.1 Boules

Les boules sont les briques de bases de la topologie. Elles généralisent les notions d'intervalles dans $\mathbb{R}$.

Définition 6. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour $a \in E$ et $r > 0$, on définit la boule ouverte de centre a et de rayon r comme :

$$B(a, r) := \{x \in E : N(x - a) < r\}.$$

On définit la boule fermée de centre a et de rayon r comme :

$$B_f(a, r) := \{x \in E : N(x - a) \leq r\}.$$

Lorsque $a = 0_E$ et $r = 1$, on parle de boule unité (ouverte ou fermée).

Remarque 18. Lorsqu'un espace vectoriel E est munit de plusieurs normes, il est courant de préciser pour quelle norme on considère la boule de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$. Ainsi, si N est une norme sur E , on note parfois

$$B_N(a, r) := B(a, r), \quad B_{f,N}(a, r) := B_f(a, r).$$

Exemple 11. On se place dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. On fixe $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ et alors on a

$$\begin{aligned} B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} &= \{x \in \mathbb{R} : -r < x - a < r\} = \{x \in \mathbb{R} : -r + a < x < r + a\} \\ &=]a - r, a + r[. \end{aligned}$$

Ainsi, un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ n'est qu'un cas particulier de boule ouverte. De même, on a

$$\begin{aligned} B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq r\} &= \{x \in \mathbb{R} : -r \leq x - a \leq r\} = \{x \in \mathbb{R} : -r + a \leq x \leq r + a\} \\ &= [a - r, a + r]. \end{aligned}$$

Ainsi, un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ n'est qu'un cas particulier de boule fermée.

Un des objectifs de ce chapitre est, étant donné une norme sur $\mathbb{R}^d$ (généralement $d = 2$ ou 3), d'être capable de dessiner la boule unité. L'intérêt est, qu'étant donné la boule unité, on peut récupérer toute autre boule par translation et homothétie. C'est le but de la proposition suivante.

Proposition 11. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $a \in E$ et $r > 0$. On a égalité entre les ensembles suivants

$$B(a, r) = a + rB(0_E, 1), \quad B_f(a, r) = a + rB_f(0_E, 1).$$

Preuve de la Proposition 11. On ne va démontrer que le résultat pour les boules ouvertes. La démonstration pour les boules fermées est similaire.

$B(a, r) \subset a + rB(0_E, 1)$: Soit $x \in B(a, r)$, on a

$$x = a + \frac{r}{r}(x - a) = a + r \underbrace{\left(\frac{1}{r}(x - a) \right)}_{:=y}$$

Montrons que $y \in B(0_E, 1)$. On a

$$N(y) = N\left(\frac{1}{r}(x - a)\right) = \frac{1}{r}N(x - a) < \frac{1}{r}r = 1$$

puisque $N(x - a) < r$ comme $x \in B(a, r)$. On en déduit que $y \in B(0_E, 1)$ et donc que

$$x = a + ry \in a + rB(0_E, 1),$$

ce qui démontre la première inclusion.

$a + rB(0_E, 1) \subset B(a, r)$: Soit $x \in a + rB(0_E, 1)$. Cela veut dire qu'il existe $y \in B(0_E, 1)$ tel que

$$x = a + ry.$$

Montrons que $x \in B(a, r)$. On a

$$N(x - a) = N(a + ry - a) = N(ry) = rN(y) < r$$

où on a utilisé que $y \in B(0_E, 1)$ et donc que $N(y) < 1$. On en déduit que $x \in B(a, r)$ et donc que $a + rB(0_E, 1) \subset B(a, r)$.

Conclusion : On a $a + rB(0_E, 1) = B(a, r)$.

□

L'objectif maintenant est de visualiser, dans $\mathbb{R}^2$, les boules unités pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$. C'est un exercice classique qui vous sera demandé pour différents types de normes dans $\mathbb{R}^2$. Vous trouverez en Figure 1.2 ces boules unités. L'objectif est de justifier leur tracé.

Exemple 12. On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$. On cherche à tracer la boule unité ouverte $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$. Soit $x = (x_1, x_2) \in B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$, on a

$$|x_1| + |x_2| < 1. \quad (1.21)$$

Nous allons procéder par disjonction de cas selon les signes de x_1 et x_2 (même si on pourrait faire plus simple⁴).

Si $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$: (1.21) devient

$$x_1 + x_2 < 1, \quad x_2 < 1 - x_1.$$

En particulier, dans le quart de plan $\{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ la boule unité est délimitée par la droite d'équation $x_2 = 1 - x_1$, c'est à dire la droite reliant les points $(0, 1)$ et $(1, 0)$. Les éléments de la boule unité se trouvent sous cette droite (strictement car on étudie la boule ouverte).

Si $x_1 \geq 0$ et $x_2 \leq 0$: (1.21) devient

$$x_1 - x_2 < 1, \quad x_1 - 1 < x_2.$$

En particulier, dans le quart de plan $\{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \leq 0\}$ la boule unité est délimitée par la droite d'équation $x_2 = x_1 - 1$, c'est à dire la droite reliant les points $(0, -1)$ et $(1, 0)$. Les éléments de la boule unité se trouvent au dessus de cette droite (strictement car on étudie la boule ouverte).

Si $x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$: (1.21) devient

$$-x_1 - x_2 < 1, \quad -1 - x_1 < x_2.$$

4. En effet, si $x = (x_1, x_2) \in B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ alors $(x_1, -x_2)$, $(-x_1, x_2)$ et $(-x_1, -x_2)$ sont également des éléments de $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$. En partant de $x = (x_1, x_2)$, le premier élément s'obtient à l'aide d'une symétrie par rapport à l'axe des abscisses, le second à l'aide d'une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et le dernier à l'aide d'une symétrie centrale par rapport à l'origine. On pourrait donc ne regarder que le cas $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ et compléter le dessin par symétrie.

En particulier, dans le quart de plan $\{(x_1, x_2) : x_1 \leq 0, x_2 \leq 0\}$ la boule unité est délimitée par la droite d'équation $x_2 = -x_1 - 1$, c'est à dire la droite reliant les points $(-1, 0)$ et $(0, -1)$. Les éléments de la boule unité se trouvent au dessus de cette droite (strictement car on étudie la boule ouverte).

Si $x_1 \leq 0$ et $x_2 \geq 0$: (1.21) devient

$$-x_1 + x_2 < 1, \quad x_2 < 1 + x_1.$$

En particulier, dans le quart de plan $\{(x_1, x_2) : x_1 \leq 0, x_2 \geq 0\}$ la boule unité est délimitée par la droite d'équation $x_2 = 1 + x_1$, c'est à dire la droite reliant les points $(-1, 0)$ et $(0, 1)$. Les éléments de la boule unité se trouvent au dessous de cette droite (strictement car on étudie la boule ouverte).

Exemple 13. On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. On cherche à tracer la boule unité ouverte $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$. Soit $x = (x_1, x_2) \in B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$, on a

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1. \quad (1.22)$$

Comme la fonction $(t \mapsto t^2)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, cela donne :

$$x_1^2 + x_2^2 < 1.$$

On sait que $x_1^2 + x_2^2 = 1$ est l'équation du cercle de centre $0_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon 1. Ainsi, $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ est le disque de centre $0_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon 1 (sans le bord).

Exemple 14. On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. On cherche à tracer la boule unité ouverte $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$. Soit $x = (x_1, x_2) \in B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$, on a

$$\begin{aligned} B(0_{\mathbb{R}^2}, 1) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x_1|, |x_2|) < 1\} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1 \text{ et } |x_2| < 1\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1\} \cap \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_2| < 1\} \\ &=]-1, 1[\times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times]-1, 1[) \\ &=]-1, 1[\times]-1, 1[. \end{aligned}$$

On en déduit que $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ est le carré de côté 2 avec pour sommets les points $(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1)$.

Exercice 11 (🕒 20 min). Soit l'application $N_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $N_1(x) = 2|x_1| + |x_2|$.

- (i) Montrer que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
- (ii) Tracer la boule unité ouverte associée à N_1 . On justifiera le dessin.

L'exercice suivant est un peu difficile, il mobilise des connaissances mathématiques telles que la notion de matrice associée à un produit scalaire et de diagonalisation des matrices symétriques réelles. N'hésitez pas à y réfléchir et à étudier la correction.

Exercice 12 (🕒 40 min). Soit l'application $N_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$N_2(x) = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2}.$$

- (i) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
- (ii) Tracer la boule unité ouverte associée à N . On justifiera le dessin.

Exercice 13 (🕒 20 min). Soit l'application $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $N(x) = \max(N_1(x), N_2(x))$ où N_1 et N_2 sont définies aux Exercices 11 et 12.

- (i) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
- (ii) Tracer la boule unité ouverte associée à N . On justifiera le dessin.

1.3.2 Parties ouvertes

Définition 7. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\mathcal{O} \subset E$ une partie de E . On dit que $\mathcal{O}$ est ouverte dans E pour la norme N lorsque

$$\forall x \in \mathcal{O}, \exists r > 0, B(x, r) \subset \mathcal{O}.$$

Remarque 19. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on dit simplement que $\mathcal{O}$ est ouvert dans E .

Proposition 12. Soit (E, N_1) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\mathcal{O} \subset E$ une partie ouverte E pour la norme N_1 . Si N_2 est une autre norme sur E , alors les parties ouvertes pour N_1 sont les mêmes que les parties ouvertes pour N_2 .

Un corollaire important de la Proposition 12 est que grâce à l'équivalence des normes en dimension finie (voir le Théorème 1) la notion de partie ouverte ne dépend pas de la norme en dimension finie.

Corollaire 1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. La notion de partie ouverte ne dépend pas de la norme choisie sur E .

Preuve de la Proposition 12. Soit (E, N_1) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et $\mathcal{O} \subset E$ une partie ouverte E pour la norme N_1 . Soit $x \in E$, comme $\mathcal{O} \subset E$ une partie ouverte E pour la norme N_1 on sait qu'il existe $r > 0$ tel que

$$B_{N_1}(x, r) \subset \mathcal{O}.$$

Comme les normes N_1 et N_2 sont équivalentes, il existe $M > 0$ tel que pour tout $y \in E$ on ait

$$N_1(y) \leq MN_2(y).$$

Soit $\rho = \frac{r}{M} > 0$, on a $B_{N_2}(x, \rho) \subset B_{N_1}(x, r)$. En effet, si $z \in B_{N_2}(x, \rho)$ alors

$$N_1(z - x) \leq MN_2(z - x) < M\rho = r$$

et donc $z \in B_{N_1}(x, r)$. On en déduit que pour ce choix de $\rho > 0$, on a

$$B_{N_2}(x, \rho) \subset B_{N_1}(x, r) \subset \mathcal{O}$$

et donc que $\mathcal{O}$ est aussi une partie ouverte pour N_2 . □

Proposition 13. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient $a \in E$ et $R > 0$ alors la boule ouverte $B(a, R)$ est une partie ouverte de E pour la norme N .

Le terme *boule ouverte* est cohérent avec la définition de partie ouverte.

Preuve de la Proposition 13. Soit $x \in B(a, R)$, on cherche $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset B(a, R)$. Grâce à la Figure 1.3, on est amenés à poser $r = \frac{R - N(x - a)}{2}$. Tout d'abord, comme $x \in B(a, R)$, $N(x - a) < R$ donc $r > 0$. De plus, on a bien $B(x, r) \subset B(a, R)$. En effet, si $y \in B(x, r)$, d'après l'inégalité triangulaire on a

$$\begin{aligned} N(y - a) &= N(y - x + x - a) \leq N(y - x) + N(x - a) < r + N(x - a) \\ &= \frac{R - N(x - a)}{2} + N(x - a) \\ &= \frac{R + N(x - a)}{2} \\ &< R \end{aligned}$$

et donc $y \in B(a, R)$. On en déduit que pour tout $x \in B(a, R)$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset B(a, R)$ et donc que $B(a, R)$ est une partie ouverte de E pour la norme N . □

Exemple 15. L'ensemble vide $\emptyset$ est une partie ouverte d'un espace vectoriel normé (E, N) . De même, E est une partie ouverte d'un espace vectoriel normé (E, N) . En effet, si $x \in E$ alors $B(x, 1) \subset E$ et donc E est une partie ouverte de (E, N) .

Exemple 16. On se place dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Les intervalles de la forme $]a, b[$ (avec $a < b$) sont des parties ouvertes de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. En effet, on a

$$\begin{aligned}]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} = \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{b-a}{2} < x - \frac{b+a}{2} < \frac{b-a}{2}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{b+a}{2}\right| < \frac{b-a}{2}\right\} \\ &= B_{|\cdot|}\left(\frac{b+a}{2}, \frac{b-a}{2}\right). \end{aligned}$$

L'intervalle $]a, b[$ est donc la boule ouverte de centre $\frac{b+a}{2}$ et de rayon $\frac{b-a}{2} > 0$. D'après la Proposition 13, c'est un ouvert de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Exemple 17. Pour $a \in \mathbb{R}$, les intervalles de la forme $] - \infty, a[$ sont des ouverts de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. En effet soit $x \in] - \infty, a[$, on pose $r = \frac{a-x}{2}$ et on remarque que $r > 0$ car $x \in] - \infty, a[$. Soit $y \in B(x, r) =]x - r, x + r[$, montrons que $y \in] - \infty, a[$. On a

$$y < x + r = x + \frac{a-x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{a}{2} < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$$

et donc $y \in] - \infty, a[$ et $]x - r, x + r[\subset] - \infty, a[$. On en déduit que l'intervalle $] - \infty, a[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Exemple 18. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère la boule unité fermée pour la norme 2 notée ici $B_{\|\cdot\|_2, f}(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$. Alors $B_{\|\cdot\|_2, f}(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour démontrer cela, il suffit de montrer

$$\exists x \in B_{\|\cdot\|_2, f}(0, 1), \forall r > 0, (B_{\|\cdot\|_2}(x, r) \cap B_{\|\cdot\|_2, f}(0_{\mathbb{R}^2}, 1)) \neq \emptyset.$$

Dit autrement, il suffit de trouver un élément de $B_{\|\cdot\|_2, f}(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ tel que pour toute boule centrée en cet élément (c'est-à-dire de n'importe quel rayon), une partie de cette boule sorte de $B_{\|\cdot\|_2, f}(0, 1)$. Guidés par la Figure 1.4, on pose $x = (1, 0)$, on fixe $r > 0$ et on considère le point $y = (1 + \frac{r}{2}, 0)$. Tout d'abord, on remarque que $y \in B(x, r)$. En effet, on a

$$\|x - y\|_2 = \sqrt{(1 - 1 - \frac{r}{2})^2 + 0^2} = \frac{r}{2} < r.$$

Par ailleurs, $y \notin B_{\|\cdot\|_2, f}(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ car

$$\|y\|_2^2 = 1 + \frac{r}{2} > 1.$$

Comme la fonction racine est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\|y\|_2 > 1$ et donc que $y \notin B_{\|\cdot\|_2, f}(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$. On en déduit que $B_{\|\cdot\|_2, f}(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ n'est pas une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 19. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère l'ensemble $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x_1 - 1| < 1\}$. On cherche à démontrer que A est un ouvert. Tout d'abord, on remarque que

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x_1 - 1| \text{ et } |x_1 - 1| < 1\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x_1 - 1| \} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - 1| < 1\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \neq 1\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 - 1 < 1\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \neq 1\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 2\} \\ &= (]0, 1[\cup]1, 2[) \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On peut maintenant représenter aisément l'ensemble A (voir Figure 1.5). Nous allons maintenant démontrer que A est ouvert à l'aide de la Définition 7. Soit $x = (x_1, x_2) \in A$, alors $x_1 \neq 1$ et $x_1 \in]0, 2[$. Si $x_1 \in]0, 1[$, comme $]0, 1[$ est ouvert dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, il existe $r > 0$ tel que $]x_1 - r, x_1 + r[\subset]0, 1[\subset]0, 1[\cup]1, 2[$. Si $x_1 \in]1, 2[$, comme $]1, 2[$ est ouvert dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, il existe $r > 0$ tel que $]x_1 - r, x_1 + r[\subset]1, 2[\subset]0, 1[\cup]1, 2[$. On considère alors la boule ouverte pour la norme infinie $B_{\|\cdot\|_\infty}(x, r)$ (cette norme est géométriquement plus adaptée aux produits d'intervalles). On a vu que

$$B_{\|\cdot\|_\infty}(x, r) =]x_1 - r, x_1 + r[\times]x_2 - r, x_2 + r[\subset (]0, 1[\cup]1, 2[) \times \mathbb{R} = A.$$

On en déduit que A est ouvert dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 20. On considère l'ensemble $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 - x_1 \geq 0\}$. Nous allons montrer que cet ensemble n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}^2$. On remarque que B est le demi-plan au dessus de la droite d'équation $x_2 = x_1$ (voir Figure 1.6).

Pour cela, on considère le vecteur $x = (0, 0) \in B$ et on fixe $r > 0$. Soit $y = (0, -\frac{r}{2})$, on remarque que $y \in B_{\|\cdot\|_\infty}(x, r)$ car

$$\|y - x\|_\infty = \max(|0 - 0|, |0 - \frac{r}{2}|) = \max(0, \frac{r}{2}) = \frac{r}{2} < r$$

et comme $-\frac{r}{2} < 0$, $y \notin B$. On en déduit que B n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}^2$.

Après plusieurs exemples, revenons à quelques résultats généraux.

Proposition 14. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On a :

- (i) Toute réunion d'une famille quelconque (possiblement infinie, et même non-dénombrable) d'ouverts est un ouvert.
- (ii) Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Preuve de la Proposition 14.

Preuve du point (i) : Soit I un ensemble d'indices et $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts. On considère $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ et $x \in \mathcal{O}$. Par définition de l'union ensembliste, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in \mathcal{O}_{i_0}$. Comme $\mathcal{O}_{i_0}$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \mathcal{O}_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i = \mathcal{O}$. On vient donc de démontrer que $\mathcal{O}$ est un ouvert de (E, N) .

Preuve du point (ii) : Soit $j \in \mathbb{N}^*$ et $(\mathcal{O}_i)_{i \in \{1, \dots, j\}}$ une famille finie d'ouverts. On considère $\mathcal{O} = \bigcap_{i=1}^j \mathcal{O}_i$ et $x \in \mathcal{O}$. En particulier, pour tout $i \in \{1, \dots, j\}$, par définition de l'intersection ensembliste, $x \in \mathcal{O}_i$ qui est un ouvert donc il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset \mathcal{O}_i$. Soit le plus petit de ces rayons $r = \min_{i \in \{1, \dots, j\}} (r_i) > 0$. Pour tout $i \in \{1, \dots, j\}$, on a $B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset \mathcal{O}_i$, ce qui veut dire que $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^j \mathcal{O}_i = \mathcal{O}$ et donc $\mathcal{O}$ est ouvert. $\square$

Exercice 14 (10 min). Montrer que la famille $(\mathcal{O}_k)_{k \geq 1}$ définie par

$$\mathcal{O}_k =]0, 1 + \frac{1}{k}[$$

est une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ et que $\mathcal{O} := \bigcap \mathcal{O}_k$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

Proposition 15. Soient $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_d$ des ouverts de $\mathbb{R}$. Alors $\mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_d$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Preuve de la Proposition 15. Nous renvoyons à l'exercice 6 du TD 3 pour une démonstration. $\square$

1.3.3 Parties fermées

Définition 8. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une partie $\mathcal{F} \subset E$ est dite fermée si son complémentaire $\mathcal{F}^c = E \setminus \mathcal{F}$ est une partie ouverte de E .

Ainsi, une stratégie pour démontrer qu'une partie $\mathcal{F}$ est fermée est simplement de déterminer son complémentaire $\mathcal{F}^c$ et de démontrer que la Définition 7 d'une partie ouverte s'applique à ce-dernier.

Exemple 21. Soit $a \in \mathbb{R}$ et l'intervalle $I = [a, +\infty[$. On va montrer qu'il s'agit d'un fermé dans $\mathbb{R}$. On a $I^c = \mathbb{R} \setminus I =]-\infty, a[$. Or d'après l'Exemple 17, I^c est un ouvert de $\mathbb{R}$ et donc par définition, I est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exemple 22. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Les boules fermées de (E, N) sont des fermés. Soit $x \in E$ et $r > 0$. On pose $\mathcal{O} = B_f(x, r)^c$, il s'agit de montrer que $\mathcal{O}$ est un ouvert. Soit $y \in \mathcal{O}$, on pose⁵ $\rho = \frac{N(y-x)-r}{2}$ et on remarque que $B(y, \rho) \subset \mathcal{O}$. En effet, pour $z \in B(y, \rho)$, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$N(y-z) = N(y-x+x-z) \geq N(y-x) - N(x-z) > N(y-x) - \frac{N(y-x)-r}{2} = \frac{r+N(y-x)}{2} > r.$$

où on a utilisé que $z \in B(y, \rho)$ et $y \in \mathcal{O} = B_f(x, r)^c$. On en déduit que $z \in B_f(x, r)^c$ et donc que $B(y, \rho) \subset \mathcal{O}$: $\mathcal{O}$ est un ouvert de (E, N) et donc $B_f(x, r)$ est un fermé de (E, N) .

Exemple 23. Si (E, N) est un espace vectoriel normé alors $\emptyset$ et E sont des fermés. C'est une conséquence de l'Exemple 15.

L'analogue de la Proposition 14 pour des fermés s'écrit comme suit.

Proposition 16. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On a :

- (i) Toute intersection d'une famille quelconque (possiblement infinie, et même non-dénombrable) de fermés est un fermé.
- (ii) Toute union finie de fermés est un fermé.

Preuve de la Proposition 16.

Preuve du point (i) : Soit I un ensemble d'indices et $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ une famille de fermés. On considère $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

On a alors

$$\mathcal{F}^c = \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{F}_i)^c.$$

5. Pour comprendre comment choisir ρ , il convient de faire un dessin. Voir la Figure 1.7.

Comme pour tout $i \in I$, $\mathcal{F}_i$ est fermé cela veut dire que $(\mathcal{F}_i)^c$ est un ouvert. Ainsi, $\mathcal{F}^c$ est une réunion quelconque d'ouverts et d'après la Proposition 14, c'est un ouvert. On en conclut que $\mathcal{F}$ est un fermé ce qui démontre le point (i).

Preuve du point (ii) : Soit $j \in \mathbb{N}^*$ et $(\mathcal{F}_i)_{i \in \{1, \dots, j\}}$ une famille finie d'ouverts. On considère $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^j \mathcal{F}_i$. On a

$$\mathcal{F}^c = \left(\bigcup_{i=1}^j \mathcal{F}_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^j (\mathcal{F}_i)^c.$$

Comme pour tout $i \in \{1, \dots, j\}$, $\mathcal{F}_i$ est fermé cela veut dire que $(\mathcal{F}_i)^c$ est un ouvert. Ainsi, $\mathcal{F}^c$ est une intersection finie d'ouverts et d'après la Proposition 14, c'est un ouvert. On en conclut que $\mathcal{F}$ est un fermé ce qui démontre le point (ii). $\square$

Par analogie avec la Proposition 15, on a la proposition suivante. Sa démonstration est laissée en exercice.

Proposition 17. Soient $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d$ des fermés de $\mathbb{R}$. Alors $\mathcal{F}_1 \times \dots \times \mathcal{F}_d$ est un fermé de $\mathbb{R}^d$.

Il se trouve que les parties fermées d'un espace vectoriel normé admettent peuvent-être caractérisées à l'aide de suites : c'est ce que l'on appelle une caractérisation séquentielle et c'est l'objectif de la proposition suivante.

Proposition 18. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) $A \subset E$ est une partie fermée de (E, N) .
- (ii) Toute suite d'éléments de A qui converge dans E a sa limite dans A .

Preuve de la Proposition 18. Nous allons le démontrer par double implication.

(i) $\implies$ (ii) : Soit A une partie fermée de (E, N) . Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers $\ell \in E$. Il nous faut montrer que $\ell \in A$. Supposons par l'absurde que $\ell \notin A$ ce qui veut dire que $\ell \in A^c$. Comme A est fermé alors A^c est ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B(\ell, r) \subset A^c$. Par ailleurs, comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , en choisissant $\varepsilon = r$ dans la définition de la limite, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $N(x_n - \ell) < r$. En particulier, pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in B(\ell, r) \subset A^c$. Or $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A : ses éléments ne peuvent pas appartenir au complémentaire de A à partir d'un certain rang donc c'est absurde et $\ell \in A$.

(ii) $\implies$ (i) : Supposons que toute suite d'éléments de A qui converge dans (E, N) a sa limite dans A . Supposons par l'absurde que A n'est pas fermé, c'est-à-dire que A^c n'est pas ouvert. D'après la définition d'un ouvert, cela veut dire qu'il existe $x \in A^c$ tel que pour tout $r > 0$ on a $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. On choisit de poser pour chaque $n \in \mathbb{N}$ le rayon $r = \frac{1}{n+1}$ et on construit alors une suite d'éléments $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in B(x, \frac{1}{n+1})$. Ainsi construite, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x car

$$N(x_n - x) < \frac{1}{n+1}$$

et donc par encadrement, on a nécessairement $\lim_{n \rightarrow +\infty} N(x_n - x) = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite d'éléments de A qui converge dans (E, N) et par hypothèse, sa limite $x \in A$. Or par construction, $x \in A^c$: c'est absurde donc nécessairement A est fermé. $\square$

La Proposition 18 offre donc une nouvelle stratégie possible pour démontrer qu'un ensemble est fermé, sans utiliser son complémentaire.

Exemple 24. Reprenons l'exemple d'une boule fermée dans (E, N) . Soit $x \in E$ et $r > 0$, on veut démontrer que $B_f(x, r)$ est un fermé de E . Pour cela, on choisit une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $B_f(x, r)$ qui converge dans (E, N) vers $\ell \in E$. Il suffit de montrer qu'en fait, $\ell \in B_f(x, r)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$N(\ell - x) = N(\ell - y_n + y_n - x) \leq N(\ell - y_n) + N(y_n - x) \leq N(\ell - y_n) + r$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire et le fait que $y_n \in B_f(x, r)$. En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient $N(\ell - x) \leq r$ car ℓ est la limite de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On en déduit que $\ell \in B_f(x, r)$ et donc que $B_f(x, r)$ est fermé dans (E, N) .

Remarque 20. Attention, il existe des parties de (E, N) qui ne sont ni ouvertes, ni fermées. Par exemple, dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ les intervalles de la forme $[a, b[$, $]a, b]$ ne sont ni ouverts, ni fermés (avec $a < b$).

Exercice 15 (20 min). Démontrer l'affirmation de la remarque 20.

1.3.4 Voisinage, adhérence et intérieur

Définition 9. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $x \in E$, on dit que $\mathcal{V} \subset E$ est un voisinage de x s'il existe un ouvert $\mathcal{O} \subset E$ tel que $x \in \mathcal{O}$ et $\mathcal{O} \subset \mathcal{V}$. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans E .

Exemple 25. On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a < x < b$. Alors les intervalles $]a, b[, [a, b], [a, b[$ et $]a, b[$ sont des voisinages de x car ils contiennent tous l'ouvert de $\mathbb{R}$ défini par $\mathcal{O} =]a, b[$ et $x \in \mathcal{O}$.

Exemple 26. On considère un espace vectoriel normé (E, N) . Soit $x \in E$ alors les boules ouvertes de centre x et de n'importe quel rayon sont des voisinages de x .

Exercice 16 (5 min). On considère un espace vectoriel normé (E, N) . Pour $x \in E$, montrer que les boules fermées de centre x et de n'importe quel rayon sont des voisinages de x .

Définition 10. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $A \subset E$, on définit l'intérieur de A , noté $\overset{\circ}{A}$ comme

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in A : \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset A\}.$$

Exemple 27. Soit $a < b$. On considère l'intervalle $I = [a, b[$. On a

$$\overset{\circ}{I} =]a, b[.$$

Démontrons le par double inclusion.

$\overset{\circ}{I} \subset]a, b[$: Soit $x \in \overset{\circ}{I}$. Par définition, $x \in [a, b[$ et il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset [a, b[$. Or ici, $B(x, r) =]x - r, x + r[\subset [a, b[$ donc $a \leq x - r < x < x + r < b$ et donc $x \in]a, b[$.

$]a, b[\subset \overset{\circ}{I}$: Soit $x \in]a, b[$, comme $]a, b[\subset [a, b[= I$ alors $x \in I$. De plus, si on pose $r = \frac{\min(x-a, b-x)}{2} > 0$ on a $B(x, r) \subset [a, b[$. En effet, pour $y \in B(x, r) =]x - r, x + r[$, on a

$$a \leq \frac{x+a}{2} \leq x - \frac{x-a}{2} \leq x - r < y < x + r \leq x + \frac{b-x}{2} = \frac{b}{2} + \frac{x}{2} \leq \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b.$$

En particulier, $y \in]a, b[\subset I$ et donc $]a, b[\subset \overset{\circ}{I}$.

Exemple 28. Soit (E, N) un espace vectoriel normé, $x \in E$ et $r > 0$. Alors on a

$$\overset{\circ}{B}_f(x, r) = B(x, r).$$

Là encore, la démonstration se fait par double inclusion.

$\overset{\circ}{B}_f(x, r) \subset B(x, r)$: Soit $y \in \overset{\circ}{B}_f(x, r)$. Alors $y \in B_f(x, r)$ et il existe $\rho > 0$ tel que $B(y, \rho) \subset B_f(x, r)$. Si $y \notin B(x, r)$ alors $N(x-y) = r$, en regardant la Figure 1.8, on est amenés à considérer le vecteur $z = y + \frac{\rho}{2r}(x-y)$. Sur la figure, on remarque que $z \in B(y, \rho)$ mais $z \notin B_f(x, r)$ ce qui est impossible puisque $B(y, \rho) \subset B_f(x, r)$. On le vérifie analytiquement

$$N(y-z) = \frac{\rho}{2r} N(y-x) = \frac{\rho}{2} < r$$

donc $z \in B(y, \rho) \subset B_f(x, r)$. Mais on a

$$N(z-x) = N((1 + \frac{\rho}{2r})(x-y)) = r + \frac{\rho}{2} > r$$

donc $z \notin B_f(x, r)$ ce qui est absurde. Par conséquent, $N(x-y) < r$ et $x \in B(x, r)$.

$B(x, r) \subset \overset{\circ}{B}_f(x, r)$: Soit $y \in B(x, r)$, on a bien $y \in B_f(x, r)$ et en s'aidant de la Figure 1.9, on est amenés à poser $\rho = r - N(x-y) > 0$ car on voit alors que $B(y, \rho) \subset B_f(x, r)$. Il convient maintenant de le démontrer. Soit $z \in B(y, \rho)$, alors

$$N(z-x) = N(z-y+y-x) \leq N(z-y) + N(y-x) < \rho + N(x-y) = r$$

et donc $z \in B(x, r) \subset B_f(x, r)$. On en déduit que $B(y, \rho) \subset B_f(x, r)$ et donc que $B(x, r) \subset \overset{\circ}{B}_f(x, r)$.

Proposition 19. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $A \subset E$, on a

- (i) $\overset{\circ}{A} \subset A$ et $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert.
- (ii) $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A (au sens de l'inclusion).
- (iii) $\overset{\circ}{A}$ est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.

Preuve de la Proposition 19. Démontrons chaque point.

- (i) Soit $x \in \overset{\circ}{A}$, par définition, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. Or $x \in B(x, r)$ donc $x \in A$ et donc $\overset{\circ}{A} \subset A$. De plus, $\overset{\circ}{A}$ est ouvert. En effet, si $x \in \overset{\circ}{A}$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. Il faut montrer, qu'en fait, $B(x, r) \subset \overset{\circ}{A}$. Soit $y \in B(x, r)$, on pose $\delta = r - N(x - y)$ et on a $B(y, \delta) \subset A$ car pour $z \in B(y, \delta)$, on a

$$N(x - z) = N(x - y + y - z) \leq N(x - y) + N(y - z) < N(x - y) + \delta = r$$

donc $z \in B(x, r) \subset A$ et donc $B(y, \delta) \subset A$ et ainsi $y \in \overset{\circ}{A}$ et donc $B(x, r) \subset \overset{\circ}{A}$.

- (ii) Soit $\mathcal{O} \subset A$ un ouvert. Il convient de montrer que $\mathcal{O} \subset \overset{\circ}{A}$. Soit $x \in \mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ est un ouvert donc par définition, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \mathcal{O}$. Mais $\mathcal{O} \subset A$ donc $B(x, r) \subset A$ et donc $x \in \overset{\circ}{A}$.
(iii) Si A est ouvert, il est le plus grand ouvert contenant lui-même : $A = \overset{\circ}{A}$.

□

Remarque 21. $\overset{\circ}{A}$ peut aussi être caractérisé comme la réunion de tous les ouverts contenus dans A . En effet, si $(\mathcal{O}_j)_{j \in J}$ est l'ensemble des ouverts contenus dans A , on pose $\mathcal{O} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{O}_j$. $\mathcal{O}$ est un ouvert en tant que réunion d'ouverts. De plus, pour tout $j \in J$, on a $\mathcal{O}_j \subset A$ et donc $\mathcal{O} \subset A$ et par suite, comme $\mathcal{O}$ est un ouvert, $\mathcal{O} \subset \overset{\circ}{A}$. Maintenant, $\overset{\circ}{A}$ étant un ouvert inclus dans A , c'est l'un des $\mathcal{O}_j$ donc $\overset{\circ}{A} \subset \mathcal{O}$.

Exercice 17 (75 min). Soit l'ensemble de $\mathbb{R}^2$ définie par $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < x_2 \text{ et } \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \leq 1\}$.

- (i) Représenter l'ensemble A .
(ii) A est-il ouvert ? Est-il fermé ?
(iii) Déterminer $\overset{\circ}{A}$.

Définition 11. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $A \subset E$, on définit l'adhérence de A , noté $\bar{A}$ comme

$$\bar{A} = \{x \in E : \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Remarque 22. On dit parfois *fermeture* de A pour $\bar{A}$ à la place d'*adhérence* de A .

Exemple 29. Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, on a $\overline{]a, b[} = [a, b]$. Démontrons le par double inclusion.

$\overline{]a, b[} \subset [a, b]$: Soit $x \in \overline{]a, b[}$ alors pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ ou, autrement dit, $]x - r, x + r[\cap]a, b[\neq \emptyset$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = \frac{1}{n+1}$, on construit ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $]x - r_n, x + r_n[\cap]a, b[$ qui converge vers x car $|x_n - x| < r_n$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in]a, b[$ donc

$$a < x_n < b$$

et en passant à la limite, on obtient $a \leq x \leq b$ et ainsi $x \in [a, b]$.

$[a, b] \subset \overline{]a, b[}$: Soit $x \in [a, b]$. Si $x \in]a, b[$ alors pour tout $r > 0$, $x \in B(x, r) \cap]a, b[$ et donc $B(x, r) \cap]a, b[\neq \emptyset$. Si $x = a$ alors pour tout $r > 0$ on a $a + \min(\frac{r}{2}, \frac{b-a}{2}) \in B(x, r) \cap]a, b[$. De même, si $x = b$, on considère pour tout $r > 0$ $b - \min(\frac{r}{2}, \frac{b-a}{2}) \in B(x, r) \cap]a, b[$.

En fait, on peut aussi caractériser l'adhérence d'une partie comme l'ensemble des limites possibles des suites de cette partie. C'est le but de la prochaine proposition.

Proposition 20. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $A \subset E$, on a

$$x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x.$$

Autrement dit, $x \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de A donc x est la limite.

Preuve de la Proposition 20. La démonstration se fait par double implication.

$\implies$: Soit $x \in \bar{A}$, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\delta_n = \frac{1}{n+1} > 0$. Par définition de $\bar{A}$, il existe $x_n \in B(x, \delta_n)$ tel que $x_n \in A$. En particulier, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A et on a

$$N(x_n - x) < \delta_n = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et x est bien limite d'une suite d'éléments de A .

$\impliedby$: Supposons que $x \in E$ soit tel qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Par définition de la limite, pour tout $\delta > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$N(x_n - x) < \delta.$$

En particulier, $N(x_{n_0} - x) < \delta$ et $x_{n_0} \in B(x, \delta) \cap A$. On en déduit que $x \in \bar{A}$.

□

Exemple 30. Pour tout $x \in E$ et $r > 0$, on a $\overline{B(x, r)} = B_f(x, r)$. Démontrons le par double inclusion.

$\overline{B(x, r)} \subset B_f(x, r)$: Soit $y \in \overline{B(x, r)}$. D'après la caractérisation séquentielle de l'adhérence (Proposition 20), il existe $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B(x, r)^{\mathbb{N}}$ telle que $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$. On a donc

$$N(y - x) = N(y - y_n + y_n - x) \leq N(y_n - y) + N(y_n - x) < N(y_n - y) + r.$$

Comme $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} N(y_n - y) = 0$ et par passage à la limite on obtient

$$N(y - x) \leq r.$$

$B_f(x, r) \subset \overline{B(x, r)}$: Soit $y \in B_f(x, r)$. Si $y \in B(x, r)$ il n'y a rien à démontrer. Supposons que $N(x - y) = r$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = y - \frac{1}{(n+1)}(y - x)$. On a

$$N(y_n - x) = N((1 - \frac{1}{n+1})(y - x)) = (1 - \frac{1}{n+1})r < r$$

donc $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B(x, r)^{\mathbb{N}}$. De plus, on a

$$N(y_n - y) = \frac{1}{n+1}r \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit que $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ et donc que y est limite d'une suite d'éléments de $B(x, r)$: $y \in \overline{B(x, r)}$.

Proposition 21. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $A \subset E$, on a :

- (i) On a $A \subset \bar{A}$ et de plus $\bar{A}$ est fermé,
- (ii) $\bar{A}$ est le plus petit fermé qui contient A ,
- (iii) A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.

Preuve de la Proposition 21. Démontrons chaque point.

- (i) Soit $x \in A$, la suite constante définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n = x$ est une suite d'éléments de A qui converge vers x et donc $x \in \bar{A}$. Utilisons la caractérisation séquentielle des fermés (Proposition 18) pour montrer que $\bar{A}$ est fermé. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\bar{A}$ qui converge vers $x \in E$. Il faut montrer que $x \in \bar{A}$. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ était une suite d'éléments de A la démonstration serait terminée. Nous allons donc fabriquer une suite $(y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x . Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d'après la définition de l'adhérence, il existe $y_n \in B(x_n, \frac{1}{n+1}) \cap A$. La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A et on a

$$N(y_n - x) = N(y_n - x_n + x_n - x) \leq N(y_n - x_n) + N(x_n - x) \leq \frac{1}{n+1} + N(x_n - x).$$

En passant à la limite dans cette inégalité, en utilisant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = x$$

et donc x est limite d'une suite d'éléments de A : $x \in \bar{A}$ et donc $\bar{A}$ est fermé.

- (ii) Soit $\mathcal{F} \subset E$ un fermé qui contient A . On démontre que $\bar{A} \subset \mathcal{F}$. Soit $x \in \bar{A}$, alors il existe une suite d'éléments de A , notée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$. Mais $A \subset \mathcal{F}$ donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ qui converge. D'après la caractérisation séquentielle des fermés (Proposition 18), comme $\mathcal{F}$ est fermé, on a nécessairement $x \in \mathcal{F}$ et donc $\bar{A} \subset \mathcal{F}$.
- (iii) $\Rightarrow$: Supposons que A soit fermé alors comme $A \subset \bar{A}$, il suffit de démontrer l'inclusion réciproque. Si $x \in \bar{A}$, il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$. Or, A est fermé donc d'après la caractérisation séquentielle des fermés (Proposition 18), $x \in A$ et donc $A = \bar{A}$.
 $\Leftarrow$: Supposons que $A = \bar{A}$. Montrons que A est fermé à l'aide de la caractérisation séquentielle des fermés (Proposition 18). Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers $x \in E$. Par définition, $x \in \bar{A}$. Or $A = \bar{A}$ donc $x \in A$: A est fermé.

□

Exercice 18 (10 min). Soit $a \in \mathbb{R}^d$. Déterminer l'adhérence de $A = \mathbb{R}^d \setminus \{a\}$.

Proposition 22. Si $A \subset B$ alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Preuve de la Proposition 22. Soit $A \subset B$. Montrons d'abord que $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$. Soit $x \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. Or $A \subset B$ donc $B(x, r) \subset B : x \in \overset{\circ}{B}$ et donc $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

Montrons maintenant que $\bar{A} \subset \bar{B}$. Soit $x \in \bar{A}$, d'après la caractérisation séquentielle de l'adhérence (Proposition 20), il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$. Or comme $A \subset B$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite d'éléments de B et donc $x \in \bar{B}$. On vient de démontrer que $\bar{A} \subset \bar{B}$. $\square$

Définition 12. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $A \subset E$. La frontière de A , notée ∂A est définie par

$$\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

Exemple 31. On considère dans l'espace vectoriel $(E, |\cdot|)$ l'intervalle $I =]a, b[$. D'après les exemples 16 et 29, on sait que $\overset{\circ}{I} =]a, b[$ (car I est ouvert) et $\bar{I} = [a, b]$. On en déduit que

$$\partial I = \bar{I} \setminus \overset{\circ}{I} = \{a\} \cup \{b\}.$$

Exemple 32. Soit $x \in E$ et $r > 0$. On va montrer que

$$\partial B(x, r) = \{y \in E : N(y - x) = r\}.$$

D'après la Proposition 13 on sait que $B(x, r)$ est un ouvert et d'après l'Exemple 30 que $\overline{B(x, r)} = B_f(x, r)$. Ainsi,

$$\partial B(x, r) = B_f(x, r) \setminus B(x, r) = \{y \in E : N(y - x) = r\}.$$

Proposition 23. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $A \subset E$. ∂A est fermé dans E .

Preuve de la Proposition 23. On a

$$\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \bar{A} \cap (\overset{\circ}{A})^c.$$

Comme $\overset{\circ}{A}$ est ouvert, $(\overset{\circ}{A})^c$ est fermé. Comme $\bar{A}$ est fermé, on en déduit que ∂A est une intersection finie de fermés : c'est un fermé. $\square$

1.3.5 Ce qu'il faut retenir sur le paragraphe 1.3

Il s'agit de ce que vous devez savoir faire *a minima* et qui concerne le paragraphe 1.3. Bien évidemment, plus vous en savez, mieux c'est !

Ce que vous devez connaître de tête :

- La définition d'une boule ouverte ou fermée (Définition 6).
- La définition d'une partie ouverte (Définition 7).
- La définition d'une partie fermée (Définition 8).
- Les définitions d'intérieur et d'adhérence (Définitions 18 et 11).
- La caractérisation séquentielle de l'adhérence (Proposition 20).

Les démonstrations théoriques que vous devez savoir faire :

- La démonstration de la Proposition 13.
- La démonstration de la Proposition 18.

Les outils pratiques qu'il faut maîtriser :

- Savoir dessiner une boule unité dans $\mathbb{R}^2$ pour une norme donnée (Exercices 11, 12 et 13).
- Savoir utiliser les Proposition 14 et 16 dans une étude pratique de partie d'un espace vectoriel.

1.4 Fonction d'une variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel normé

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On s'intéresse dans ce paragraphe à des fonctions à valeurs dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé (E, N) (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1.4.1 Continuité et dérivabilité

Définition 13. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow E$ et $\ell \in E$. On dit que f admet ℓ pour limite en $a \in \bar{I}$ et on note $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \ell$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in]a - \eta, a + \eta[\cap I, N(f(t) - \ell) < \varepsilon. \quad (1.23)$$

Remarque 23. Vous remarquerez que la seule différence par rapport à la limite d'une fonction à valeurs réelles est que l'on utilise la norme au lieu de la valeur absolue pour contrôler l'écart entre $f(t)$ et ℓ dans l'espace d'arrivée.

Remarque 24. Comme $a \in \bar{I}$, $]a - \eta, a + \eta[\cap I \neq \emptyset$: la définition n'est pas vide de sens.

Remarque 25. Une façon de réécrire la quantification (1.24) à l'aide de voisinages dans la notion de limite est :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{V} \in \mathcal{V}(a), \forall t \in \mathcal{V} \cap I, N(f(t) - \ell) < \varepsilon. \quad (1.24)$$

Proposition 24. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow E$, $a \in \bar{I}$. Si f admet une limite en a alors cette limite est unique.

Preuve de la Proposition 24. Supposons que ℓ_1 et ℓ_2 soient deux limites de f en a . Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $t \in]a - \eta_1, a + \eta_1[\cap I$ on ait

$$N(f(t) - \ell_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

et il existe $\eta_2 > 0$ tel que pour tout $t \in]a - \eta_2, a + \eta_2[\cap I$ on ait

$$N(f(t) - \ell_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier, si on pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$, pour tout $t \in]a - \eta, a + \eta[\cap I$ on a

$$N(f(t) - \ell_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad N(f(t) - \ell_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $t \in]a - \eta, a + \eta[\cap I$, on a

$$N(\ell_1 - \ell_2) = N(\ell_1 - f(t) + f(t) - \ell_2) \leq N(\ell_1 - f(t)) + N(f(t) - \ell_2) < \varepsilon.$$

Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $N(\ell_1 - \ell_2) = 0$ et donc que $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

Proposition 25. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow E$, $a \in I$. Si f admet une limite en a alors cette limite est unique.

Preuve de la Proposition 25. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $t \in]a - \eta, a + \eta[\cap I$ on ait

$$N(f(t) - \ell) < \varepsilon. \quad (1.25)$$

On remarque que comme $a \in I$ alors $a \in]a - \eta, a + \eta[\cap I$. On peut donc choisir $t = a$ dans (1.25) ce qui donne $N(f(a) - \ell) < \varepsilon$. Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $N(f(a) - \ell) = 0$ et donc que $\ell = f(a)$. $\square$

Définition 14. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow E$. On dit que f est continue en $a \in I$ si f admet une limite en a . On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

Remarque 26. D'après la Proposition 25, la Définition 14 est équivalente à dire que f est continue en a si $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$.

On définit le taux d'accroissement de f en $a \in I$ comme

$$\tau_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} & \rightarrow E \\ t & \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \end{cases}$$

Définition 15. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow E$. On dit que f est dérivable en $a \in I$ s'il existe $\ell \in E$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow a} \tau_a(t) = \ell \quad (1.26)$$

ℓ est la dérivée de f en a notée $f'(a)$. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I .

Remarque 27. Notez que $a \in \overline{(I \setminus \{a\})}$ et donc la limite en a de τ_a , le taux d'accroissement de f en a , est bien définie.

Plus généralement, on peut étendre la notion de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 16. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow E$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k(I, E)$ sur I si f est k -fois dérivable sur I et de dérivée k -ième continue. On dit que $f \in \mathcal{C}^\infty(I, E)$ si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$.

Un cas particulier qui va nous intéresser est celui où l'espace vectoriel considéré est $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, on considère définie sur un intervalle de $I \subset \mathbb{R}$ l'application

$$f : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_d(t)) \end{cases}.$$

Il se trouve que dans ce cas particulier, les notions de dérivabilités, continuités voire de classe $\mathcal{C}^k$ pour la fonction f , revient à dire que pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ les applications $f_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 26. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et l'application

$$f : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_d(t)) \end{cases}$$

- (i) f est continue en a si pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ les applications $f_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues en a .
- (ii) f est dérivable en a si pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ les applications $f_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables en a . De plus, $f'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_d(a))$.
- (iii) $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$ si pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ les applications $f_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$. De plus, pour tout $p \in \{1, \dots, k\}$ on a $f^{(p)}(a) = (f_1^{(p)}(a), \dots, f_d^{(p)}(a))$.

Preuve de la Proposition 26. Démontrons chacun des points, en munissant $\mathbb{R}^d$ de la norme infinie.

- (i) $\implies$: Supposons que f est continue en $a \in I$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]a - \eta, a + \eta[\cap I$ on a $\|f(t) - f(a)\|_\infty < \varepsilon$, c'est-à-dire pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ on a $|f_j(t) - f_j(a)| < \varepsilon$. On a donc bien démontré que f_j admet une limite en a qui est $f_j(a)$.

$\impliedby$: Supposons que pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, f_j soit continue en a . Soit $\varepsilon > 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, il existe $\eta_j > 0$ tel que pour tout $t \in]a - \eta_j, a + \eta_j[\cap I$ on a $|f_j(t) - f_j(a)| < \varepsilon$. Soit $\eta := \min_{j \in \{1, \dots, d\}} \eta_j > 0$. Comme pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ on a $]a - \eta, a + \eta[\cap I \subset]a - \eta_j, a + \eta_j[\cap I$ on a pour tout $t \in]a - \eta, a + \eta[\cap I$ et tout $j \in \{1, \dots, d\}$

$$|f_j(t) - f_j(a)| < \varepsilon.$$

Par passage au max sur $j \in \{1, \dots, d\}$ on obtient que pour tout $t \in]a - \eta, a + \eta[\cap I$

$$\|f(t) - f(a)\|_\infty < \varepsilon$$

et donc f est continue en a .

- (ii) $\implies$: Supposons que f est dérivable en a de nombre dérivé $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_d)$. Alors pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ et tout $t \in I \setminus \{a\}$ on a

$$\left| \frac{f_j(t) - f_j(a)}{t - a} - \ell_j \right| \leq \left\| \frac{f(t) - f(a)}{t - a} - \ell \right\|_\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]a - \eta, a + \eta[\cap (I \setminus \{a\})$ on a

$$\left\| \frac{f(t) - f(a)}{t - a} - \ell \right\|_\infty < \varepsilon.$$

On en déduit que pour tout $t \in]a - \eta, a + \eta[\cap (I \setminus \{a\})$ on a pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$

$$\left| \frac{f_j(t) - f_j(a)}{t - a} - \ell_j \right| < \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, f_j est dérivable en a et $\ell_j = f'_j(a)$.

$\Leftarrow$: Supposons que pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, f_j est dérivable en a . Alors, pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, il existe $\eta_j > 0$ tel que pour tout $t \in]a - \eta_j, a + \eta_j[\cap (I \setminus \{a\})$ on a

$$\left| \frac{f_j(t) - f_j(a)}{t - a} - \ell_j \right| < \varepsilon.$$

Pour $\eta = \min(\eta_j) > 0$, on a pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ $]a - \eta, a + \eta[\subset]a - \eta_j, a + \eta_j[$ et donc pour tout $t \in]a - \eta, a + \eta[\cap (I \setminus \{a\})$

$$\left| \frac{f_j(t) - f_j(a)}{t - a} - f'_j(a) \right| < \varepsilon.$$

Par passage au max sur $j \in \{1, \dots, d\}$ on obtient que pour tout $t \in]a - \eta, a + \eta[\cap I$

$$\|\tau_a(f) - \ell\|_\infty < \varepsilon$$

et donc f est dérivable en a de dérivée $\ell = (f'_1(a), \dots, f'_d(a))$.

- (iii) Si $k = 0$, il n'y a rien à démontrer : c'est le point (i). Supposons que $k \geq 1$ et posons $g = f^{(k-1)}$ et $g_j = f_j^{(k-1)}$. D'après le point (ii)

g est dérivable sur I si et seulement si g_j est dérivable sur I

et dans ce cas $g'(t) = (g'_1(t), \dots, g'_d(t))$ pour tout $t \in I$. De plus, d'après le point (i)

g' est continue sur I si et seulement si g'_j est continue sur I .

On en déduit que

$$g \in \mathcal{C}^1(I, E) \text{ si et seulement si } g'_j \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}).$$

et dans ce cas $g'(t) = (g'_1(t), \dots, g'_d(t))$ pour tout $t \in I$.

Cela conclut la démonstration en se remémorant que $g = f^{(k-1)}$ et $g_j = f_j^{(k-1)}$. On le démontre en démontrant chaque implication. □

Exemple 33. Soit $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour $t \in [0, 2\pi]$ par

$$f(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

$f \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$ car les applications $\cos, \sin \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

1.4.2 Courbes paramétrées du plan ou de l'espace

Dans ce paragraphe, on se concentre sur des fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$ pour $d = 2, 3$. On les note

$$\gamma : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto \gamma(t) \end{cases}$$

On s'intéresse ici à la courbe

$$\Gamma := \gamma(I) \subset \mathbb{R}^d.$$

On parle de courbe paramétrée car γ est un paramétrage de la courbe Γ .

Remarque 28. Notez que les courbes paramétrées sont plus générales que les fonctions d'une variable réelle. En effet, si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, on peut définir

$$\gamma : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto (t, f(t)). \end{cases}$$

On remarque que

$$\Gamma = \gamma(I) = \{(t, f(t)) : t \in I\}$$

et donc Γ est précisément le graphe de f .

Exercice 19 (🕒 15 min). Soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour $t \in [0, 2\pi]$ par $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

(i) Dessiner les points $\gamma(t)$ pour $t \in \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.

(ii) Montrer que

$$\gamma([0, 2\pi]) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

(iii) Dessiner $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$.

Exercice 20 (15 min). Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\gamma(t) = (t, 3t)$.

(i) Dessiner les points $\gamma(t)$ pour $t \in \{-1, 0, 1\}$.

(ii) Montrer que

$$\gamma(\mathbb{R}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 3x_1\}.$$

(iii) Dessiner $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$.

Exercice 21 (15 min). Soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\gamma(t) = (2 \cos(t), 3 \sin(t))$.

(i) Dessiner les points $\gamma(t)$ pour $t \in \{-1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.

(ii) Montrer que

$$\gamma(\mathbb{R}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1\}.$$

(iii) Dessiner $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$.

Exercice 22 (15 min). Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\gamma(t) = (2 \cos(t), 3 \sin(t), t)$

(i) Dessiner les points $\gamma(t)$ pour $t \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.

(ii) Saurez-vous dessiner $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$?

Il est parfois plus difficile d'étudier les courbes paramétrées. Pour cela, nous allons introduire quelques notions puis proposer une stratégie générale.

Définition 17. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$. Pour $t_0 \in I$, on dit que $\Gamma = \gamma(I)$ admet une tangente en $t_0 \in I$ si pour tout $t \in I \setminus \{t_0\}$ la droite qui passe par $\gamma(t)$ et $\gamma(t_0)$ admet une droite limite lorsque $t \rightarrow t_0$.

Remarque 29. Lorsque $d = 2$, si $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$, la droite qui passe par $\gamma(t)$ et $\gamma(t_0)$ a pour équation

$$(x_2 - \gamma_2(t_0))(\gamma_1(t) - \gamma_1(t_0)) - (x_1 - \gamma_1(t_0))(\gamma_2(t) - \gamma_2(t_0)) = 0.$$

En particulier, si les quantités $(t \in I \mapsto \gamma_j(t) - \gamma_j(t_0))$ ont des limites finies non nulles on obtient l'équation de la droite tangente. De la même façon, même si ces deux limites sont nulles, on remarque que tant que $\frac{\gamma_1(t) - \gamma_1(t_0)}{\gamma_2(t) - \gamma_2(t_0)} \neq 0$ l'équation de droite se ré-écrit

$$(x_2 - \gamma_2(t_0)) - \frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(t_0)}{\gamma_1(t) - \gamma_1(t_0)}(x_1 - \gamma_1(t_0)) = 0.$$

et si la quantité $\frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(t_0)}{\gamma_1(t) - \gamma_1(t_0)}$ admet une limite lorsque $t \rightarrow t_0$, cette quantité est le coefficient directeur de la droite tangente à Γ en $\gamma(t_0)$. Si cette limite est nulle on obtient une tangente horizontale.

De même, si la quantité $\frac{\gamma_1(t) - \gamma_1(t_0)}{\gamma_2(t) - \gamma_2(t_0)}$ admet une limite nulle lorsque $t \rightarrow t_0$, on obtient une tangente verticale.

Définition 18. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ dérivable sur I . Soit $t \in I$, le vecteur tangent à $\Gamma = \gamma(I)$ au point $\gamma(t)$ est donnée par $\gamma'(t)$.

On peut regarder la Figure 1.10 pour comprendre pourquoi la dérivée de γ en un point donne la direction de la tangente à la courbe.

Définition 19. Soit $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$.

- Si γ est dérivable en t_0 , on dit que $t_0 \in I$ est *régulier* si $\gamma'(t_0) \neq 0$. Dans le cas contraire, on parle de point *singulier*.
- Si γ est deux fois dérivable en t_0 , on dit que $t_0 \in I$ est *bi-régulier* si $(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^d$.

Exemple 34. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour $t \in [0, 2\pi]$ par $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. On a déjà vu que $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^2)$ dans l'Exemple 33. Soit $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t)), \quad \gamma''(t) = -(\cos(t), \sin(t)).$$

En particulier, on a

$$\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} = \sqrt{\sin(t)^2 + \cos(t)^2} = 1$$

donc t est un point régulier. De plus,

$$\det(\gamma'(t), \gamma''(t)) = \begin{vmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

donc la famille $(\gamma'(t), \gamma''(t))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$. t est donc un point bi-régulier.

Exemple 35. Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\gamma(t) = (t, 3t)$. Les applications $(t \mapsto t)$ et $(t \mapsto 3t)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en tant que fonctions polynomiales donc $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\gamma'(t) = (1, 3), \quad \gamma''(t) = (0, 0).$$

Donc $\gamma'(t) \neq 0$ et t est un point régulier. En revanche, $(\gamma'(t), \gamma''(t))$ n'est pas une famille libre, ce n'est donc pas un point bi-régulier.

Proposition 27. Soit $I \subset \mathbb{R}$, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $t \in I$ par $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Si $t_0 \in I$ est un point régulier, alors $\gamma'(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à $\Gamma = \gamma(I)$ en $\gamma(t_0)$ et son équation cartésienne est donnée par

$$\gamma'_2(t_0)(x_1 - \gamma_1(t_0)) - \gamma'_1(t_0)(x_2 - \gamma_2(t_0)) = 0.$$

Preuve de la Proposition 27. D'après la Remarque 29, on sait que pour $t \in I \setminus \{0\}$, l'équation de la corde est donnée par

$$(x_2 - \gamma_2(t_0))(\gamma_1(t) - \gamma_1(t_0)) - (x_1 - \gamma_1(t_0))(\gamma_2(t) - \gamma_2(t_0)) = 0$$

Pour $t \in I \setminus \{0\}$, on a donc

$$(x_2 - \gamma_2(t_0)) \frac{\gamma_1(t) - \gamma_1(t_0)}{t - t_0} - (x_1 - \gamma_1(t_0)) \frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(t_0)}{t - t_0} = 0$$

et comme γ est dérivable en $t = t_0$, γ_1 et γ_2 le sont aussi (voir Point (ii) Proposition 26). En passant à la limite lorsque $t \rightarrow t_0$, on obtient

$$(x_2 - \gamma_2(t_0))\gamma'_1(t_0) - (x_1 - \gamma_1(t_0))\gamma'_2(t_0) = 0.$$

Pour qu'il s'agisse d'une équation de droite, il faut et il suffit que soit $\gamma'_1(t_0)$ soit $\gamma'_2(t_0)$ soit non nul et c'est le cas car $\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0)) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ puisque par hypothèse t_0 est un point régulier. On obtient donc l'équation de la tangente annoncée dans la Proposition 27.

Maintenant, on sait que si on a une droite d'équation $ax_1 + bx_2 + c = 0$ (avec $a, b, c \in \mathbb{R}$), un vecteur directeur de cette droite est donné par $(b, -a)$. Pour la tangente, on a ici

$$a = -\gamma'_2(t_0), \quad x_2 = \gamma'_1(t_0)$$

et donc un vecteur directeur de la tangente à Γ en $\gamma(t_0)$ est $\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0))$ ce qui est précisément ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Exercice 23 (5 min). Reprenons le cas particulier de la Remarque 28. On se donne une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur $t_0 \in I$ et on considère $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour $t \in I$ par $\gamma(t) = (t, f(t))$.

(i) Démontrer que t_0 est un point régulier pour γ .

(ii) Retrouver l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $f(t_0)$ à l'aide de la Proposition 27.

Définition 20. Soit $a < b$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$. On définit la longueur de l'arc $\gamma([a, b])$ comme

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt.$$

Remarque 30. On renvoie vers l'exercice 7 du TD 4 pour une compréhension géométrique de cette définition.

Définition 21. Soit $a < b$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$. On dit que γ est une paramétrisation par longueur d'arc de $\Gamma = \gamma([a, b])$ si pour tout $t \in [a, b]$ on a $\|\gamma'(t)\|_2 = 1$

Remarque 31. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation par longueur d'arc, on a

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt = b - a.$$

C'est pour cela que l'on parle de paramétrisation par longueur d'arc : quand t parcourt l'intervalle $[a, b]$ de longueur $b - a$, $\gamma(t)$ parcourt un arc de la même longueur.

Proposition 28. Soit $a < b$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$. Si pour tout $t \in [a, b]$ on a $\gamma'(t) \neq 0$ alors il existe une paramétrisation de $\Gamma = \gamma([a, b])$ par longueur d'arc $\gamma([a, b])$.

Preuve de la Proposition 28. On renvoie à l'exercice 8 du TD 4. □

Afin de pouvoir étudier de façon générale les courbes paramétrées, nous allons classer les points $t \in I$ afin de comprendre l'allure des courbes près de ces points et de pouvoir, ensuite, représenter les courbes $\Gamma = \gamma(I)$ en pratique.

Définition 22. Soit $I \subset \mathbb{R}$, $k \geq 2$ et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^2)$. Soit $t_0 \in I$. On suppose qu'il existe deux vecteurs $\gamma^{(p)}(t_0)$ et $\gamma^{(q)}(t_0)$ qui sont linéairement indépendants. Soit

$$r = \min\{p \in \{1, \dots, k\}, \gamma^{(p)}(t_0) \neq 0\}, \quad s = \min\{q \in \{r+1, \dots, k\} : \gamma^{(q)}(t_0) \neq 0\}.$$

- Si r est impair et q est pair on dit que t_0 est un point *ordinaire*.
- Si r est impair et q est impair on dit que t_0 est un point d'*inflexion*.
- Si r est pair et q est impair on dit que t_0 est un point de *rebroussement de première espèce*.
- Si r est pair et q est pair on dit que t_0 est un point de *rebroussement de deuxième espèce*.

Remarque 32. Un point bi-régulier est en particulier un point ordinaire.

Ce qu'il faut savoir, c'est quelle allure à la courbe près de chacun de ces points. Le but des exemples suivants est d'illustrer ces allures sur des exemples.

Exemple 36. Reprenons γ de l'Exemple 34. 0 est un point bi-régulier donc $r = 1$ et $s = 2$, c'est donc en particulier un point ordinaire. On illustre en Figure 1.11, l'allure de la courbe $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$ près de $t = 0$. On remarque que dans la base $(\gamma'(0), \gamma''(0))$ la courbe Γ près de $(0, 0)$ ressemble à la courbe d'une fonction $J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Cette courbe reste du même côté de la tangente dans un voisinage de 0.

Exemple 37. Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\gamma(t) = (t, t^3)$. γ est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ car $(t \mapsto t)$ et $(t \mapsto t^3)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en tant que fonctions polynômiales. On a

$$\gamma'(t) = (1, 3t^2), \quad \gamma''(t) = (0, 6t), \quad \gamma^{(3)}(t) = (0, 6)$$

et donc

$$\gamma'(0) = (1, 0), \quad \gamma''(0) = (0, 0), \quad \gamma^{(3)}(0) = (0, 6).$$

Ici $r = 1$ et $s = 3$ c'est donc un point d'inflexion. En étudiant la Figure 1.12, on remarque que dans la base $(\gamma'(0), \gamma^{(3)}(0))$ la courbe Γ près de $(0, 0)$ ressemble à la courbe d'une fonction $J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Cette courbe change de demi-plan en traversant $(0, 0)$.

Exemple 38. Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\gamma(t) = (t^2, t^3)$. γ est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ car $(t \mapsto t^2)$ et $(t \mapsto t^3)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en tant que fonctions polynômiales. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2), \quad \gamma''(t) = (2, 6t), \quad \gamma^{(3)}(t) = (0, 6)$$

et donc

$$\gamma'(0) = (0, 0), \quad \gamma''(0) = (2, 0), \quad \gamma^{(3)}(0) = (0, 6).$$

On en déduit que $r = 2$ et $s = 3$. C'est donc un point de rebroussement de première espèce. Afin de représenter Γ près du point $(0, 0)$ On va remarque que lorsque $t \leq 0$, on a

$$\gamma(t) = (t^2, -|t|^3).$$

En particulier, on a

$$\gamma([-\infty, 0]) = \{(|t|^2, -|t|^3) : t \leq 0\} = \{(\tau, -\tau^{\frac{3}{2}}) : \tau \geq 0\}.$$

Donc $\gamma([-\infty, 0])$ est le graphe de $(\tau \mapsto -\tau^{\frac{3}{2}})$ sur $\mathbb{R}_+$.

De même si $t \geq 0$, on a

$$\gamma(t) = (t^2, -|t|^3).$$

En particulier, on a

$$\gamma([0, +\infty]) = \{(|t|^2, |t|^3) : t \geq 0\} = \{(\tau, \tau^{\frac{3}{2}}) : \tau \geq 0\}.$$

Donc $\gamma([0, +\infty])$ est le graphe de $(\tau \mapsto \tau^{\frac{3}{2}})$ sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit le graphe suivant. Cela permet de tracer l'allure de Γ près de $(0, 0)$ en Figure 1.13. La courbe fait "demi-tour" en $\gamma(0)$ en traversant $\gamma''(0)$.

Exemple 39. Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\gamma(t) = (t^2, t^4 + t^5)$. γ est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ car $(t \mapsto t^2)$ et $(t \mapsto t^4 + t^5)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en tant que fonctions polynômiales. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\gamma'(t) = (2t, 4t^3 + 5t^4), \quad \gamma''(t) = (2, 12t^2 + 20t^3), \quad \gamma^{(3)}(t) = (0, 24t + 60t^2), \quad \gamma^{(4)}(0) = (0, 24 + 120t)$$

et donc

$$\gamma'(0) = (0, 0), \quad \gamma''(0) = (2, 0), \quad \gamma^{(3)}(0) = (0, 0), \quad \gamma^{(4)}(0) = (0, 24).$$

On en déduit que $r = 2$ et $s = 4$ donc 0 est un point de rebroussement de second espèce. On a

$$\gamma([-\infty, 0]) = \{(t^2, t^4 - |t|^5) : t \leq 0\} = \{(\tau, \tau^2 - \tau^{\frac{5}{2}}) : \tau \geq 0\}$$

et donc $\gamma([-\infty, 0])$ est le graphe de l'application $(\tau \mapsto \tau^2 - \tau^{\frac{5}{2}})$ sur $\mathbb{R}_+$. On a

$$\gamma([0, +\infty]) = \{(t^2, t^4 + t^5) : t \geq 0\} = \{(\tau, \tau^2 + \tau^{\frac{5}{2}}) : \tau \geq 0\}$$

et donc $\gamma([0, +\infty])$ est le graphe de l'application $(\tau \mapsto \tau^2 + \tau^{\frac{5}{2}})$ sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit la Figure 1.14 et on remarque que la courbe fait "demi-tour" en restant du même côté que sa tangente.

Exemple 40 (Étude de l'astroïde). Dans cet exemple, nous allons voir comment étudier une courbe paramétrée.

Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\gamma(t) = (\cos(t)^3, \sin(t)^3)$. On cherche à tracer la courbe Γ définie par

$$\Gamma = \gamma(\mathbb{R}).$$

Étape 1 : On cherche à simplifier le domaine d'étude. Pour cela, on commence par remarquer que

$$\gamma(\mathbb{R}) = \gamma([-\pi, \pi])$$

à cause de la 2π -périodicité de $(\gamma_1 : t \mapsto \cos(t)^3)$ et $(\gamma_2 : t \mapsto \sin(t)^3)$. On remarque aussi que pour $t \in [-\pi, \pi]$, on a

$$\gamma(-t) = (\cos(-t)^3, \sin(-t)^3) = (\cos(t)^3, -\sin(t)^3)$$

donc la courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. On peut donc réduire le domaine d'étude à un intervalle de longueur π , par exemple $[0, \pi]$ et on complètera le dessin par symétrie par rapport à l'axe des abscisses. On remarque également que pour $t \in [0, \pi]$, on a

$$\gamma(\pi - t) = (\cos(\pi - t)^3, \sin(\pi - t)^3) = ((-\cos(t))^3, \sin(t)^3) = (-\cos(t)^3, \sin(t)^3).$$

On en déduit que Γ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On peut donc réduire le domaine d'étude à un intervalle de longueur $\frac{\pi}{2}$, on choisit $[0, \frac{\pi}{2}]$. Maintenant, pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on remarque que

$$\gamma(\frac{\pi}{2} - t) = (\cos(\frac{\pi}{2} - t)^3, \sin(\frac{\pi}{2} - t)^3) = (\sin(t)^3, \cos(t)^3)$$

donc Γ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x_1 = x_2$. On réduit le domaine d'étude à un intervalle de longueur $\frac{\pi}{4}$ et on choisit $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Étape 2 : On étudie les fonctions $(\gamma_1 : t \mapsto \cos(t)^3)$ et $(\gamma_2 : t \mapsto \sin(t)^3)$. Tout d'abord, les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty([0, \frac{\pi}{4}], \mathbb{R})$ (elles sont et à valeurs dans $\mathbb{R}$). Ensuite, on pose $h : t \mapsto t^3$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en tant que fonction polynomiale. On remarque que $x_1 = h \circ \cos$ et $x_2 = h \circ \sin$. Par conséquent, x_1 et x_2 sont de classe $\mathcal{C}^\infty([0, \frac{\pi}{4}], \mathbb{R})$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a

$$\gamma'_1(t) = -3 \sin(t) \cos(t)^2, \quad \gamma'_2(t) = 3 \cos(t) \sin(t)^2.$$

On en déduit que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ on a

$$\gamma'_1(t) \leq 0, \quad \gamma'_2(t) > 0.$$

On obtient donc le tableau de signe et de variation de la Figure 1.15.

Étape 3 : On étudie la nature de quelques points particuliers $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ pour s'aider dans le tracé de la courbe Γ . Pour cela, on essaie de trouver les vecteurs directeurs des tangentes en, par exemple $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{4}$.

Il se trouve que $\gamma'(0) = (0, 0)$ donc on utilise la Remarque 29. Pour tout $t \neq 0$, on a

$$\frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(0)}{\gamma_1(t) - \gamma_1(0)} = \frac{\sin(t)^3}{\cos(t)^3 - 1}.$$

De plus, on se souvient que

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^4), \quad \sin(t) = t + \mathcal{O}(t^3), \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0$$

et donc

$$\cos(t)^3 = 1 - \frac{3}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^4), \quad \sin(t)^3 = t^3 + \mathcal{O}(t^5).$$

On en déduit que lorsque $t \rightarrow 0$, on a

$$\frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(0)}{\gamma_1(t) - \gamma_1(0)} = -\frac{2t^3}{3t^2} + \mathcal{O}(t^2).$$

Et donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(0)}{\gamma_1(t) - \gamma_1(0)} = 0$$

et γ admet une tangente horizontale en $\gamma(0)$.

De même, on $\frac{\pi}{4}$, on a $\gamma'(\frac{\pi}{4}) = (-\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}) = \frac{3}{2\sqrt{2}}(-1, 1)$.

On trace alors en premier lieu des vecteurs directeurs pour les tangentes à Γ pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire aux points $\gamma(0) = (1, 0)$ et $\gamma(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 1)$ (voir Figure 1.16).

On continue en traçant la courbe en respectant le tableau de variation 1.15 : γ_1 , qui se lit sur l'axe des abscisses, est décroissant et γ_2 , qui se lit sur l'axe des ordonnées, est croissant (voir Figure 1.17).

On continue en utilisant la symétrie par rapport à la droite d'équation $x_2 = x_1$.

Enfin, on finit le tracé en utilisant les symétries par rapport aux axes des abscisses et des ordonnées (voir Figure 1.19)

Exemple 41 (Étude de la cycloïde). Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) := (t - \sin(t), 1 - \cos(t)).$$

On cherche à tracer la courbe Γ définie par

$$\Gamma = \gamma(\mathbb{R}).$$

Étape 1 : On cherche à simplifier le domaine d'étude. Pour cela, on se rend compte que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\gamma(t + 2k\pi) = (t + 2k\pi - \sin(t), 1 - \cos(t)) = (2k\pi, 0) + \gamma(t).$$

Ainsi, on peut restreindre l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur 2π , par exemple $[-\pi, \pi]$ et compléter le dessin par translation de vecteur $(2k\pi, 0)$. Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, on remarque que

$$\gamma(-t) = (-t - \sin(-t), 1 - \cos(-t)) = (-(t + \sin(t)), 1 - \cos(t)) = (-\gamma_1(t), \gamma_2(t)).$$

Ainsi, on peut se restreindre à un intervalle de longueur π , par exemple $[0, \pi]$, et compléter par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Étape 2 : On étudie les fonctions $(\gamma_1 : t \mapsto t - \sin(t))$ et $(\gamma_2 : t \mapsto 1 - \cos(t))$ sur l'intervalle $[0, \pi]$. Tout d'abord, on pose $\alpha_1 : t \mapsto t$ et $\alpha_2 : t \mapsto 1$ qui sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty([0, \pi], \mathbb{R})$ en tant que fonctions polynomiales. De plus, les fonctions $\beta_1 : t \mapsto \cos(t)$ et $\beta_2 : t \mapsto \sin(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty([0, \pi], \mathbb{R})$ en tant que fonctions trigonométriques élémentaires. On remarque que $\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1$ et $\gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2$ donc γ_1 et γ_2 sont de classe $\mathcal{C}^\infty([0, \pi], \mathbb{R})$ en tant que somme de fonctions $\mathcal{C}^\infty([0, \pi], \mathbb{R})$. De plus, pour tout $t \in [0, \pi]$, on a

$$\gamma_1'(t) = 1 - \cos(t), \quad \gamma_2'(t) = \sin(t).$$

On en déduit que pour tout $t \in [0, \pi]$, on a

$$\gamma_1'(t) \geq 0, \quad \gamma_2'(t) \geq 0.$$

On obtient donc le tableau de signe et de variation de la Figure 1.20.

Étape 3 : On étudie, pour s'aider dans le tracé, les vecteurs directeurs des tangentes à Γ en $\gamma(0)$ et $\gamma(\pi)$. Il se trouve que $\gamma'(0) = (0, 0)$ donc on utilise la Remarque 29. Pour tout $t \in]0, \pi]$, on a

$$\frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(0)}{\gamma_1(t) - \gamma_1(0)} = \frac{1 - \cos(t)}{t - \sin(t)}.$$

On sait que lorsque $t \rightarrow 0$, on a

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^4), \quad \sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \mathcal{O}(t^5).$$

On en déduit que lorsque $t \rightarrow 0$, on a

$$\frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(0)}{\gamma_1(t) - \gamma_1(0)} = \frac{\frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^4)}{\frac{t^3}{6} + \mathcal{O}(t^5)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} +\infty.$$

Γ admet donc une tangente verticale en $\gamma(0)$. Par ailleurs, on a $\gamma'(\pi) = (2, 0)$ et donc Γ admet une tangente horizontale en $\gamma(\pi) = (\pi, 2)$. On en déduit la première étape du tracé en Figure 1.21.

On continue le tracé en utilisant la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, voir Figure 1.22.

On complète enfin le tracé par translations par les vecteurs de la forme $(2k\pi, 0)$, voir Figure 1.23.

1.4.3 Ce qu'il faut retenir sur le paragraphe 1.4

Il s'agit de ce que vous devez savoir faire *a minima* et qui concerne le paragraphe 1.4. Bien évidemment, plus vous en savez, mieux c'est !

Ce que vous devez connaître de tête :

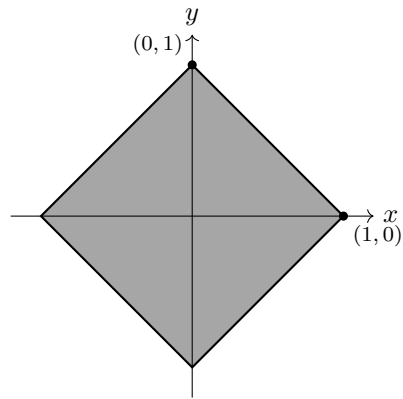
- La définition de la limite (voir Définition 13).
- La définition de la continuité (voir Définition 14).
- La définition de la dérivabilité et de la notion de classe $\mathcal{C}^k$ (voir Définitions 1.26 et 16).

Les démonstrations théoriques que vous devez savoir faire :

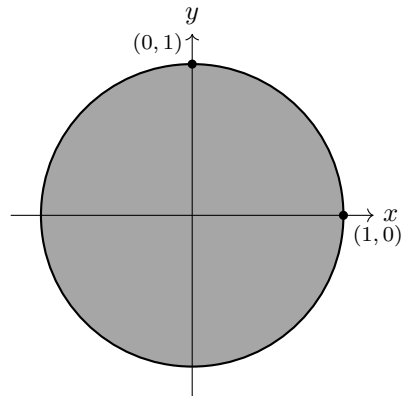
- La démonstration de la Proposition 24.
- La démonstration de la Proposition 25.

Les outils pratiques qu'il faut maîtriser :

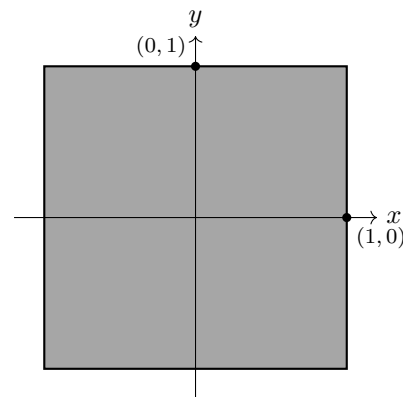
- Utiliser en pratique la Proposition 26, en justifiant la continuité, dérivabilité, classe $\mathcal{C}^k$... En étudiant les composantes.
- Reconnaître une paramétrisation de cercle, de droite ou d'ellipse (Exercices 19, 20, 21).
- Savoir faire l'étude pratique d'une courbe paramétrée, en suivant les étapes présentées dans les Exemples 40 et 41.



boule unité pour la norme $\| \cdot \|_1$.



boule unité pour la norme $\| \cdot \|_2$.



boule unité pour la norme $\| \cdot \|_\infty$.

FIGURE 1.2 – Boules unités pour les normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ dans $\mathbb{R}^2$.

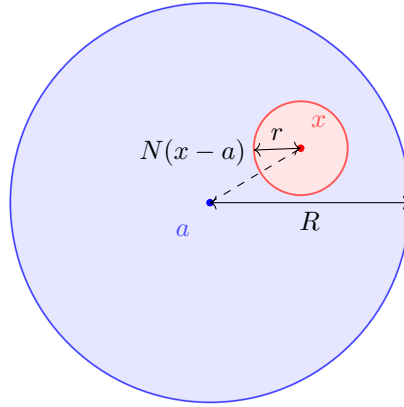


FIGURE 1.3 – Illustration du choix de $r = \frac{R-N(x-a)}{2}$ pour que $B(x, r) \subset B(a, R)$.

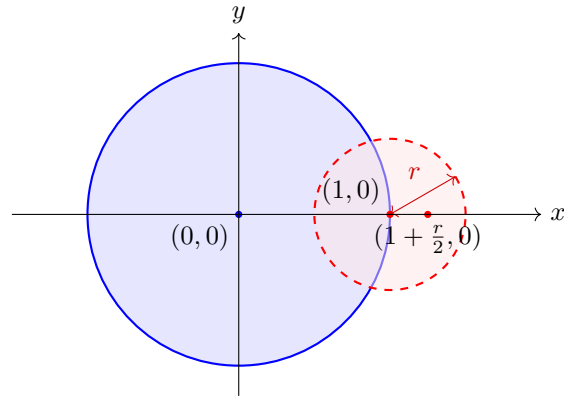


FIGURE 1.4 – La boule unité fermée $B_{\|\cdot\|_2, f}(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ (en bleu) et une boule de centre $(1,0)$ et de rayon $r > 0$ (en rouge). Le point $(1 + \frac{r}{2}, 0)$ est marqué d'un point rouge.

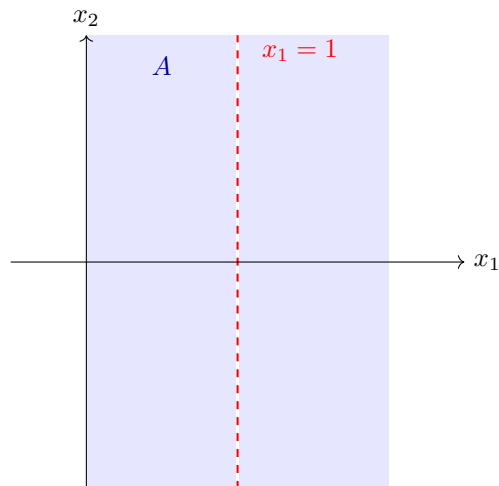


FIGURE 1.5 – L'ensemble A est l'ensemble en bleu, sans la droite en pointillés rouge (et sans les bords).

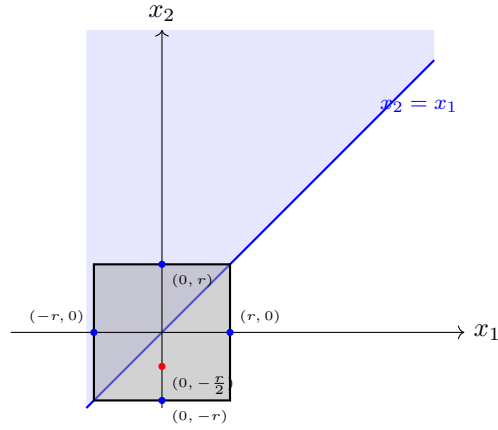


FIGURE 1.6 – L'ensemble B est en bleu et contient la droite d'équation $x_2 = x_1$. Le point rouge est le point $(0, -\frac{r}{2})$.

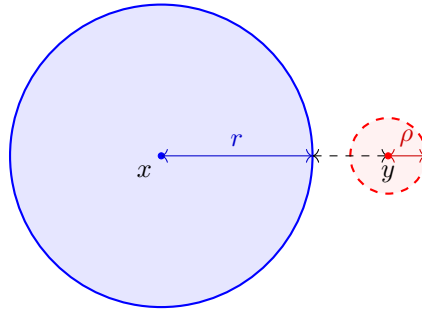


FIGURE 1.7 – La longueur du segment en pointillés (entre y et le bord de la boule) est $N(y - x) - r > 0$. C'est pourquoi on choisit ρ comme la moitié de cette longueur.

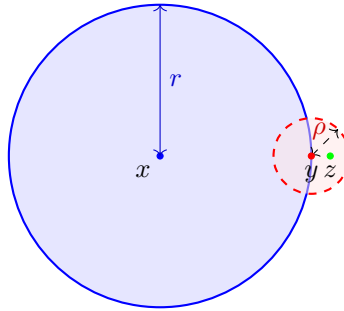


FIGURE 1.8 – Illustration du choix $z = y + \frac{\rho}{2}(y - x)$ dans la démonstration de l'inclusion $B_f(x, r) \subset B(x, r)$.

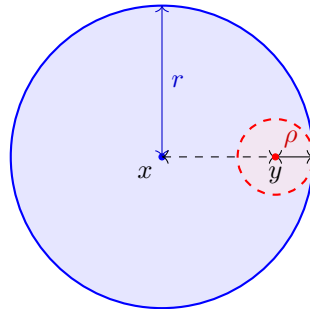


FIGURE 1.9 – Illustration du choix $\rho = r - N(x - y)$ dans la démonstration de l'inclusion $B(x, r) \subset B_f(x, r)$. La longueur du segment en pointillé est $N(x - y)$.

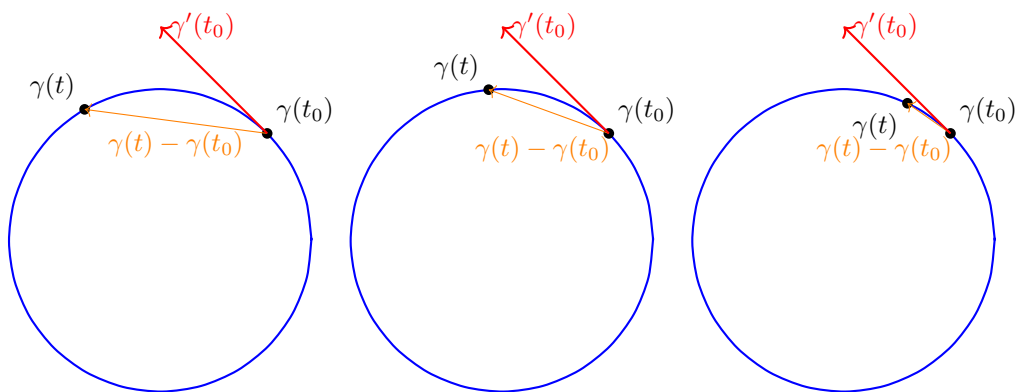


FIGURE 1.10 – Illustration de la direction de la tangente en un point $\gamma(t_0)$ à l'aide des cordes $\gamma(t) - \gamma(t_0)$.

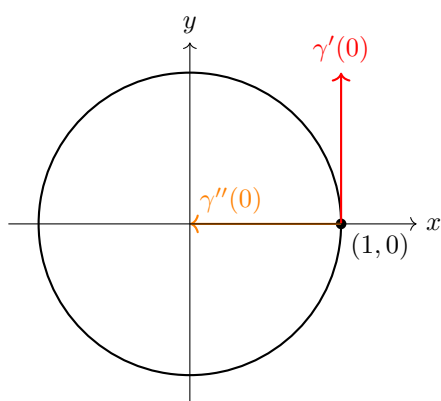


FIGURE 1.11 – On remarque que $\gamma(0) = (1, 0)$, $\gamma'(0) = (0, 1)$ et $\gamma''(0) = (-1, 0)$.

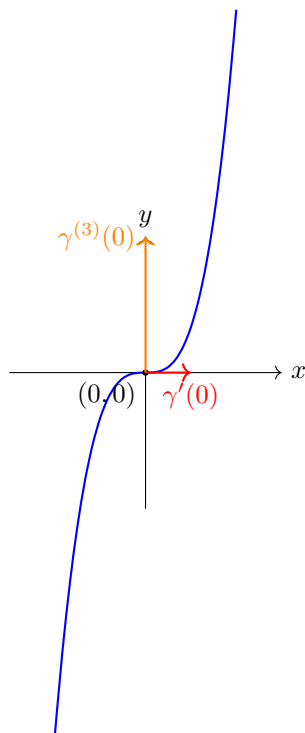


FIGURE 1.12 – Un exemple de point d'inflexion

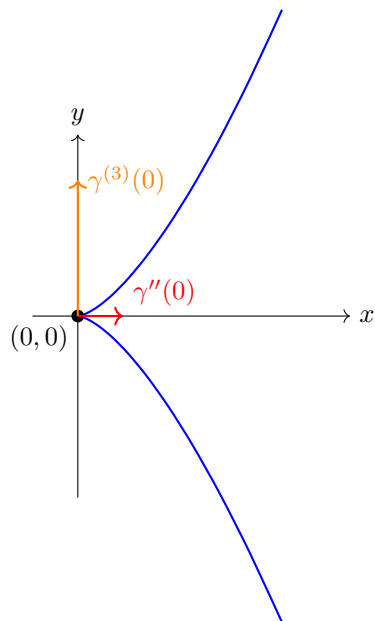


FIGURE 1.13 – Un exemple de point de rebroussement de première espèce.

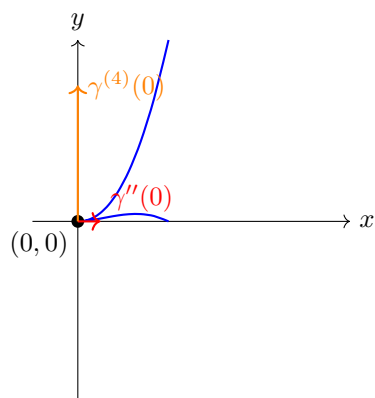


FIGURE 1.14 – Un exemple de point de rebroussement de deuxième espèce.

t	0		$\frac{\pi}{4}$
$\gamma'_1(t)$	0	–	$-\frac{3}{2\sqrt{2}}$
γ_1	1	$\longrightarrow$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$
$\gamma'_2(t)$	0	+	$\frac{3}{2\sqrt{2}}$
γ_2	0	$\longrightarrow$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

FIGURE 1.15 – Tableau de signes et de variations de γ_1 et γ_2

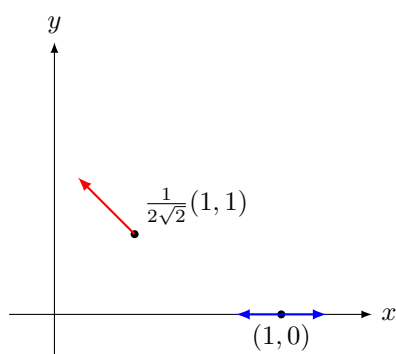


FIGURE 1.16 – Étape 1 du tracé : on dessine $\gamma(0) = (1, 0)$ et $\gamma(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 1)$ ainsi que les vecteurs directeurs des tangentes à Γ en ces points là.

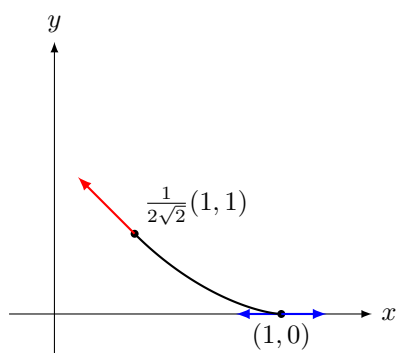


FIGURE 1.17 – Étape 2 du tracé : on dessine $\gamma(t)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

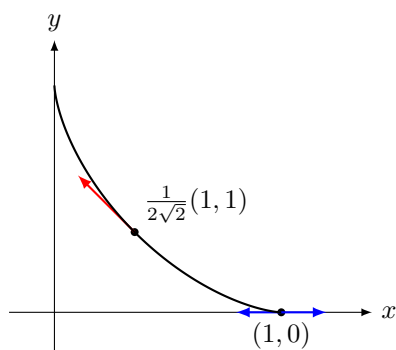


FIGURE 1.18 – Étape 3 du tracé : on dessine $\gamma(t)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ en utilisant la symétrie par rapport à la droite d'équation $x_2 = x_1$

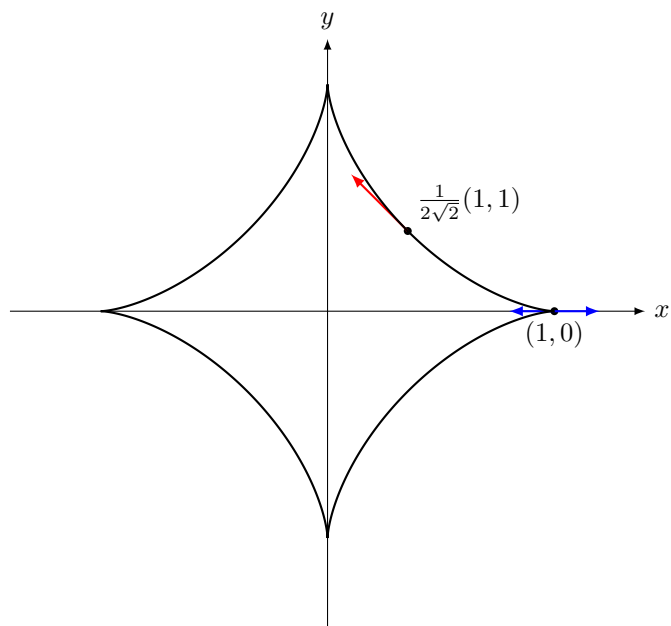


FIGURE 1.19 – Étape 4 du tracé : Représentation de la courbe Γ .

t	0	π
$\gamma'_1(t)$	0	2
γ_1	0	π
$\gamma'_2(t)$	0	0
γ_2	0	2

FIGURE 1.20 – Tableau de signes et de variations de γ_1 et γ_2

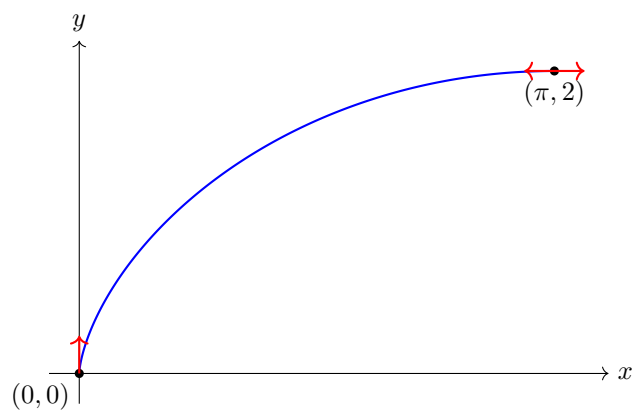


FIGURE 1.21 – Étape 1 du tracé : Représentation de $\gamma([0, \pi])$.

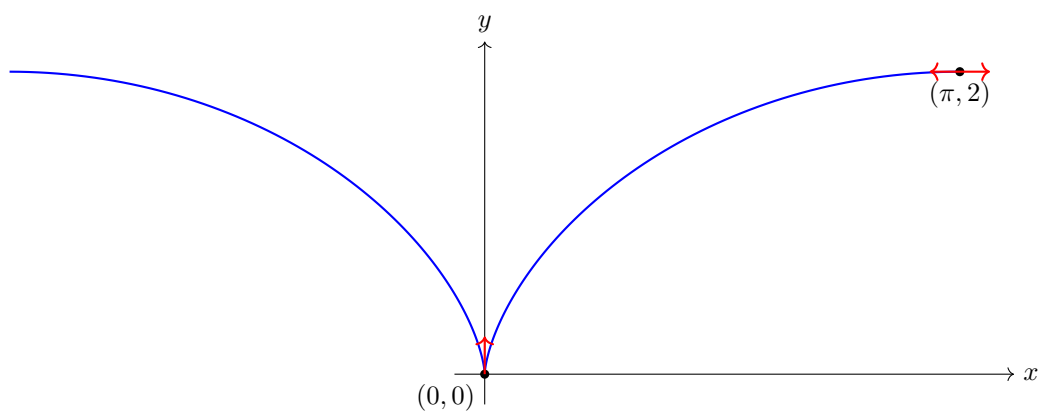


FIGURE 1.22 – Étape 2 du tracé : Représentation de $\gamma([-\pi, \pi])$.

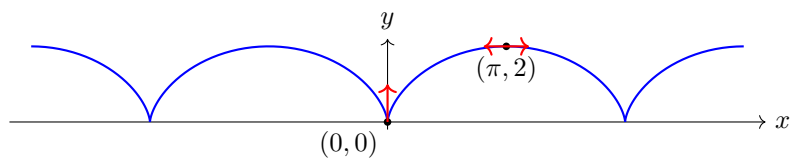


FIGURE 1.23 – Étape 3 du tracé : Représentation de Γ .

Chapitre 2

Fonctions de plusieurs variables

Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E$ une partie de E . L'objectif de ce chapitre est d'étudier des fonctions $f : A \subset E \rightarrow F$ et de pouvoir définir la continuité, et d'étendre la notion de dérivabilité pour les fonctions d'une variable réelle. L'objectif final est très souvent de considérer $A = E = \mathbb{R}^d$ et $F = \mathbb{R}^k$ voir tout simplement $F = \mathbb{R}$. On parle alors de f comme d'une fonction à *plusieurs variables*. En fait, f est une fonction d'une seule variable vectorielle $x \in \mathbb{R}^d$. Lorsque l'on utilise le terme de *fonction à plusieurs variables*, on sous-entend que $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ est on considère la fonction f comme dépendant de chacune des variables réelles x_j ($j \in \{1, \dots, d\}$).

2.1 La notion de continuité

2.1.1 Limite et continuité : définitions et premières propriétés

Définition 23. Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $A \subset E$, $f : A \rightarrow F$ et $\ell \in F$. On dit que f admet ℓ pour limite en $a \in \overline{A}$, et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 \text{ tel que } \forall x \in A \cap B_{N_E}(a, r), N_F(f(x) - \ell) < \varepsilon.$$

On peut aussi le ré-écrire comme suit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 \text{ tel que } \forall x \in A \cap B_{N_E}(a, r), f(x) \in B_{N_F}(\ell, \varepsilon).$$

Remarque 33. Dans le cas où $A \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, on retrouve la même définition que la Définition 1.24.

Remarque 34. La Définition 23 dépend *a priori* de la norme choisie sur E et de celle choisie sur F . Dans cas particulier de la dimension finie $E = \mathbb{R}^d$ et $F = \mathbb{R}^k$, cette définition ne dépend pas de la norme choisie. En effet, en utilisant l'équivalence des normes en dimension finie (Théorème 1), il est possible de démontrer ce résultat. C'est l'objectif de l'Exercice 24.

Exercice 24 (🕒 20 min). Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $A \subset E$, $f : A \rightarrow F$ et $\ell \in F$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$. Soient $\mathcal{N}_E$ et $\mathcal{N}_F$ deux normes équivalentes à N_E et N_F , respectivement. Démontrer que la définition de la limite ne dépend pas des normes choisies.

Remarque 35. Lorsque $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$, on utilisera pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ la notation suivante, qui un abus de notation :

$$f(x) = f((x_1, \dots, x_d)) = f(x_1, \dots, x_d).$$

Exemple 42. On considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2) & \mapsto \frac{2x_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{cases}.$$

f est définie sur $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car son dénominateur ne s'annule que lorsque $x_1 = x_2 = 0$ (car il s'agit de la racine d'une somme de termes positifs). Remarquons qu'ici $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$. Nous n'avons pas besoin de

préciser de normes car nous sommes en dimension finie et que toutes les normes sont équivalentes (voir Remarque 34). On remarque que $\bar{A} = \mathbb{R}^2$. En effet, $A \subset \bar{A}$ et la suite vectorielle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$x_n = \left(\frac{1}{1+n}, 0 \right)$$

est une suite d'éléments de A et converge vers $(0, 0)$ car

$$\|x_n - (0, 0)\|_2 = \frac{1}{1+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En particulier, $(0, 0) \in \bar{A}$ et on peut tâcher de trouver si f admet une limite en $(0, 0)$. Il se trouve que cette limite est 0. En effet, on remarque que pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a :

$$|f(x_1, x_2)| = \frac{2|x_1||x_2|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \leq \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|(x_1, x_2)\|_2.$$

Ici, on a utilisé l'identité remarquable

$$0 \leq (|x_1| - |x_2|)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2|x_1||x_2|$$

qui donne

$$2|x_1||x_2| \leq x_1^2 + x_2^2.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Si on choisit $r = \varepsilon$, on a pour tout $(x_1, x_2) \in B_{\|\cdot\|_2}((0, 0), r)$

$$|f(x_1, x_2)| \leq \|(x_1, x_2)\|_2 < \varepsilon$$

ce qui prouve que $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} f(x_1, x_2) = 0$.

Proposition 29. Soit (E, N_E) et (F, N_F) deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E$ et $a \in \bar{A}$. Si $f : A \rightarrow F$ admet une limite en a alors cette limite est unique.

Preuve de la Proposition 29. Supposons que $\ell_1, \ell_2 \in F$ soient deux limites de f en a . Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r_1 > 0$ tel que pour tout $x \in A \cap B(a, r_1)$ on a $f(x) \in B(\ell_1, \frac{\varepsilon}{2})$. De même, il existe $r_2 > 0$ tel que pour tout $x \in A \cap B(a, r_2)$ on a $f(x) \in B(\ell_2, \frac{\varepsilon}{2})$. On pose $r = \min(r_1, r_2) > 0$ et on a pour tout $x \in A \cap B(a, r)$ $f(x) \in B(\ell_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(\ell_2, \frac{\varepsilon}{2})$. Donc, pour tout $x \in A \cap B(a, r)$, on a

$$N_F(\ell_1 - \ell_2) = N_F(\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2) \leq N_F(\ell_1 - f(x)) + N_F(f(x) - \ell_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $N_F(\ell_1 - \ell_2) = 0$ et donc, comme N_F est une norme, que $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

Nous allons maintenant énoncer la caractérisation séquentielle de la continuité.

Proposition 30. Soit (E, N_E) et (F, N_F) deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés (ici $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $f : A \subset E \rightarrow F$. Soit $a \in \bar{A}$ et $\ell \in F$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) f admet ℓ comme limite en a .
- (ii) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell.$$

Preuve de la Proposition 30.

(i) $\implies$ (ii) : Supposons que f admette ℓ comme limite en a . Soit $\varepsilon > 0$, alors, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in \overline{B_{N_E}(a, r)} \cap A$, on a

$$f(x) \in B(\ell, \varepsilon).$$

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers a . Par définition de la limite d'une suite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $x_n \in B_{N_E}(a, r)$. En particulier, pour tout $n \geq n_0$, on a $f(x_n) \in B(\ell, \varepsilon)$. On a donc bien démontré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(x_n) \in B(\ell, \varepsilon)$: c'est précisément dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell.$$

(ii) $\implies$ (i) : Supposons que pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell.$$

Supposons par l'absurde que f n'admet pas ℓ comme limite en a . Par définition, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $r > 0$, il existe $x \in B_{N_E}(a, r) \cap A$ et $N_F(f(x) - \ell) > \varepsilon$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in B_{N_E}(a, \frac{1}{n+1}) \cap A$ tel que $N_F(f(x_n) - \ell) > \varepsilon$. Or $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A et

$$N_E(x_n - a) < \frac{1}{n+1}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_E(x_n - a) = 0$, c'est-à-dire, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$. D'après l'hypothèse, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$, c'est-à-dire, $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_F(f(x_n) - \ell) = 0$ or on a

$$N(f(x_n) - \ell) > \varepsilon > 0$$

et donc par passage à la limite

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} N_F(f(x_n) - \ell) \geq \varepsilon > 0.$$

ce qui est absurde car alors $0 > 0$. On en déduit que nécessairement, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$. $\square$

Proposition 31. Soit (E, N_E) et (F, N_F) deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés (ici $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $f : A \subset E \rightarrow F$ et $a \in A$. Si f admet une limite en a alors cette limite est unique et dans ce cas $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Preuve de la Proposition 31. Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in F$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, r) \cap A$ on ait

$$N_F(f(x) - \ell) < \varepsilon.$$

On remarque que comme $a \in B(a, r) \cap A$, on a en particulier $N_F(f(a) - \ell) < \varepsilon$. Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $N_F(f(a) - \ell) = 0$ et donc que $f(a) = \ell$ puisque N_F est une norme. $\square$

Définition 24. Soit (E, N_E) et (F, N_F) deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés (ici $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $f : A \subset E \rightarrow F$. On dit que f est continue en $a \in A$ si f admet une limite en a . On dit que f est continue sur A , et on note $f \in \mathcal{C}(A, F)$, si f est continue en tout point de A .

Remarque 36. Grâce à la Proposition 31, la Définition 24 est équivalente à dire que f est continue en $a \in A$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Exemple 43. Soit $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ une norme sur E . Alors N est continue sur E . Démontrons-le : soient $a \in E$ et $\varepsilon > 0$. On pose $r = \varepsilon$ et pour tout $x \in B_N(a, \varepsilon)$, on a

$$|N(x) - N(x_0)| \leq N(x - x_0) < \varepsilon.$$

Exemple 44. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout (x_1, x_2) par $f(x_1, x_2) = (x_2, 1 + x_1)$. Montrons que f est continue en $(0, 0)$. Il suffit de montrer que f admet une limite en $(0, 0)$. On sait d'après la Proposition 31 que, si elle existe, cette limite est $f(0, 0) = (0, 1)$. Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\|f(x_1, x_2) - (0, 1)\|_\infty = \|(x_2, x_1)\|_\infty = \|(x_1, x_2)\|_\infty.$$

On en déduit que pour $r = \varepsilon$, si $(x_1, x_2) \in B_{\|\cdot\|_\infty}((0, 0), r)$ alors $f(x_1, x_2) \in B((0, 0), \varepsilon)$ ce qui est précisément dire que $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} f(x) = f(0, 0)$.

Une conséquence directe des Propositions 30 et 31 est la caractérisation séquentielle de la continuité énoncée dans la proposition ci-dessous.

Proposition 32. Soit (E, N_E) et (F, N_F) deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés (ici $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $f : A \subset E \rightarrow F$. f est continue en $a \in A$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a alors $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

2.1.2 Opérations sur les fonctions continues

Nous allons maintenant démontrer des résultats que vous connaissez déjà très certainement dans le cas de fonctions de la variable réelle. Ils sont très utiles en pratique pour justifier qu'une fonction donnée est continue.

Proposition 33. Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $A \subset E$, $f : A \rightarrow F$ et $g : A \rightarrow F$. Si f et g sont continues en $a \in A$ alors la fonction $f + g$ est aussi continue en $a \in A$.

Preuve de la Proposition 33. Soit $\varepsilon > 0$, comme f est continue en $a \in A$, il existe $r_1 > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, r_1) \cap A$ on a $f(x) \in B(f(a), \frac{\varepsilon}{2})$. De même, comme g est continue en $a \in A$, il existe $r_2 > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, r_2)$, on a $g(x) \in B(g(a), \frac{\varepsilon}{2})$. En posant $r = \min(r_1, r_2) > 0$, pour tout $x \in B(a, r)$, on a

$$\begin{aligned} N_F(f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))) &= N_F(f(x) - f(a) + g(x) - g(a)) \leq N_F(f(x) - f(a)) + N_F(g(x) - g(a)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit que $f + g$ est continue en a . □

Exercice 25 (☹ 20 min). Soit $N \in \mathbb{N}^*$, pour $j \in \{1, \dots, N\}$ on considère $f_j : A \subset E \rightarrow F$, N fonctions continues en $a \in A$. Montrer que $f = \sum_{j=1}^N f_j$ est continue en $a \in A$.

Proposition 34. Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $A \subset E$, $f : A \rightarrow F$ et $\lambda : A \rightarrow \mathbb{K}$. Si f et λ sont continues en $a \in A$ alors la fonction λf est aussi continue en $a \in A$.

Preuve de la Proposition 34. Soit $a \in A$ et $x \in A$. On a

$$\begin{aligned} N_F(\lambda(x)f(x) - \lambda(a)f(a)) &= N_F(\lambda(x)f(x) - \lambda(a)f(x) + \lambda(a)f(x) - \lambda(a)f(a)) \\ &= N_F((\lambda(x) - \lambda(a))f(x) + \lambda(a)(f(x) - f(a))) \\ &\leq N_F((\lambda(x) - \lambda(a))f(x)) + N_F(\lambda(a)(f(x) - f(a))) \\ &= |\lambda(x) - \lambda(a)|N_F(f(x)) + |\lambda(a)|N_F(f(x) - f(a)). \end{aligned}$$

Comme f est continue en a , il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in A \cap B_{N_E}(a, r)$ on a $f(x) \in B_{N_F}(f(a), 1)$. En particulier, pour tout $x \in A \cap B(x, r)$ on a

$$N_F(f(x)) = N_F(f(x) - f(a) + f(a)) \leq N_F(f(x) - f(a)) + N_F(f(a)) < 1 + N_F(f(a)).$$

Donc, pour tout $x \in A \cap B(x, r)$ on a

$$N_F(\lambda(x)f(x) - \lambda(a)f(a)) \leq |\lambda(x) - \lambda(a)|(1 + N_F(f(a))) + |\lambda(a)|N_F(f(x) - f(a)).$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme λ est continue en a , il existe $r_1 > 0$ tel que pour tout $x \in B_{N_E}(a, r_1) \cap A$ on a

$$|\lambda(x) - \lambda(a)| < \frac{\varepsilon}{2(1 + N_F(f(a)))}.$$

De même, comme f est continue en a , il existe $r_2 > 0$ tel que pour tout $x \in B_{N_E}(a, r_2) \cap A$, on a

$$N_F(f(x) - f(a)) < \frac{\varepsilon}{2(1 + |\lambda(a)|)}.$$

Soit $\rho = \min(r, r_1, r_2) > 0$, pour tout $x \in B_{N_E}(a, \rho)$, on a

$$\begin{aligned} N_F(\lambda(x)f(x) - \lambda(a)f(a)) &< \frac{\varepsilon}{2(1 + N_F(f(a)))}(1 + N_F(f(a))) + \frac{\varepsilon}{2(1 + |\lambda(a)|)}|\lambda(a)| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(1 + |\lambda(a)|)}|\lambda(a)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

où on a utilisé que pour tout $\alpha > 0$, on a $\frac{\alpha}{1+\alpha} < 1$. On en déduit le résultat. □

Proposition 35. Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $A \subset E$, $f : A \rightarrow F$ et $\lambda : A \rightarrow \mathbb{K}$. Si f et λ sont continues en $a \in A$ et que $\lambda(a) \neq 0$ alors il existe $\delta > 0$ tel que

(i) pour tout $x \in B(a, \delta) \cap A$ on a $\lambda(x) \neq 0$,

(ii) l'application quotient

$$\frac{f}{\lambda} : x \in B(a, \delta) \cap A \mapsto \frac{f(x)}{\lambda(x)} \in F$$

est bien définie sur $B(a, \delta) \cap A$ et est continue en a .

Preuve de la Proposition 57.

Preuve du Point (i) : Supposons que $\lambda(a) \neq 0$. Comme λ est continue en a , il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B_{N_E}(a, \delta) \cap A$ on a $|\lambda(x) - \lambda(a)| < \frac{1}{2}|\lambda(a)|$. On en déduit que pour tout $x \in B_{N_E}(a, \delta) \cap A$ on a

$$|\lambda(x)| = |\lambda(x) - \lambda(a) + \lambda(a)| \geq ||\lambda(a)| - |\lambda(x) - \lambda(a)|| \geq |\lambda(a)| - |\lambda(x) - \lambda(a)| \geq |\lambda(a)| - \frac{|\lambda(a)|}{2} = \frac{|\lambda(a)|}{2} > 0.$$

On en déduit le Point (i).

Preuve du Point (ii) : Par construction, $\frac{f}{\lambda}$ est bien définie sur $B(a, \delta) \cap A$. Commençons par démontrer que $\frac{1}{\lambda}$, définie sur $B(a, \delta) \cap A$, est continue en a . On se souvient que l'on peut choisir $\delta > 0$ de telle sorte à ce que pour tout $x \in B(a, \delta) \cap A$, on a $|\lambda(x)| \geq \frac{1}{2}|\lambda(a)|$. Pour tout $x \in B(a, \delta) \cap A$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\lambda(x)} - \frac{1}{\lambda(a)} \right| &= \frac{|\lambda(x) - \lambda(a)|}{|\lambda(a)\lambda(x)|} \leq \frac{|\lambda(x) - \lambda(a)|}{|\lambda(a)|(\frac{1}{2}|\lambda(a)|)} \\ &= 2 \frac{|\lambda(x) - \lambda(a)|}{|\lambda(a)|^2}. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme λ est continue en a , il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B_{N_E}(a, r) \cap A$ on a

$$|\lambda(x) - \lambda(a)| < \frac{|\lambda(a)|^2}{2} \varepsilon.$$

En posant $\rho = \min(\delta, r) > 0$, pour tout $x \in B_{N_E}(a, \rho) \cap A$ on a

$$\left| \frac{1}{\lambda(x)} - \frac{1}{\lambda(a)} \right| \leq 2 \frac{|\lambda(x) - \lambda(a)|}{|\lambda(a)|^2} < \frac{2}{|\lambda(a)|^2} \left(\frac{|\lambda(a)|^2}{2} \varepsilon \right) = \varepsilon.$$

On en déduit que $\frac{1}{\lambda}$ est continue en a . D'après la Proposition 34, comme f et $\frac{1}{\lambda}$ sont continues en a , on en déduit que $\frac{f}{\lambda}$ est continue en a . $\square$

Proposition 36. Soient (E, N_E) , (F, N_F) et (G, N_G) trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $f : A \subset E \rightarrow F$, $g : B \subset F \rightarrow G$. On suppose que $f(A) \subset B$. Si f est continue en $a \in A$ et que g est continue en $f(a) \in B$ alors l'application $g \circ f : A \rightarrow G$ définie pour $x \in A$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ est continue en a .

Preuve de la Proposition 58. Soit $\varepsilon > 0$, comme g est continue en $f(a) \in B$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $y \in B_{N_F}(f(a), r) \cap A$ on a $g(y) \in B_{N_G}(g(f(a)), \varepsilon)$. Par ailleurs, comme f est continue en $a \in A$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B_{N_E}(a, \delta)$, on a $f(x) \in B_{N_F}(f(a), r)$. En particulier, pour tout $x \in B_{N_E}(a, \delta)$, $f(x) \in B_{N_F}(f(a), r)$ et donc $g(f(x)) \in B_{N_G}(g(f(a)), \varepsilon)$ ce qui termine la démonstration. $\square$

2.1.3 Un exemple de fonctions continues : les fonctions polynomiales

Les fonctions polynomiales, de plusieurs variables, sont les briques de base de beaucoup de fonctions que vous allez devoir étudier. Il s'agit de les définir correctement. Pour cela, on considère $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et on définit la longueur de α comme

$$L(\alpha) = \sum_{j=1}^d \alpha_j.$$

Par exemple la longueur de $\alpha = (1, 2, 0, 0, 4) \in \mathbb{N}^5$ est $L(\alpha) = 1 + 2 + 0 + 0 + 4 = 7$.

Définition 25. Une fonction polynomiale à d -variables et de degré inférieur ou égal à $N \in \mathbb{N}$ est une fonction de la forme

$$P : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_d) & \mapsto \sum_{\substack{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d \\ L(\alpha) \leq N}} c_\alpha \left(\prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j} \right). \end{cases}$$

Exemple 45. Dans $\mathbb{R}^2$, les applications suivantes sont des fonctions polynomiales (à deux variables). Elles sont définies pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par :

- (i) $P_1(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$,
- (ii) $P_2(x_1, x_2) = 1 + x_1 + x_2^2$,
- (iii) $P_3(x_1, x_2) = x_2^4$.

Proposition 37. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}^d$.

Pour démontrer la Proposition 37, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 3. Soit $c \in \mathbb{R}$. L'application constante $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par $f(x) = c$ est continue.

Preuve du Lemme 3. Soit $a \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$ et $r = 1$. Pour tout $x \in B(a, r)$, on a

$$|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

On en déduit que f est continue en $a \in \mathbb{R}^d$ pour tout $a \in \mathbb{R}^d$: f est continue sur $\mathbb{R}^d$. □

Preuve de la Proposition 37. La preuve se décompose en quatre étapes. La première étape étudie la continuité des applications coordonnées. La deuxième étape se consacre à la continuité des compositions de ces applications coordonnées avec la fonction puissance n -ième. La troisième étape consiste à démontrer par récurrence que les produits de plusieurs telles fonctions sont continue. Enfin, la dernière étape consiste à remarquer que toute fonction polynomiale est une somme de tels produits.

Étape 1 : Pour $j \in \{1, \dots, d\}$, on considère $\pi_j : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ par

$$\pi_j(x_1, \dots, x_d) = x_j.$$

Cette application est dite application coordonnée car à chaque vecteur de $\mathbb{R}^d$ elle associe sa j -ème coordonnée. Il se trouve que π_j est continue sur $\mathbb{R}^d$. En effet, soit $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$|\pi_j(x) - \pi_j(a)| = |x_j - a_j|.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on pose $r = \varepsilon$ et on remarque que si $x \in B_{\|\cdot\|_\infty}(a, r)$, on a

$$|\pi_j(x) - \pi_j(a)| = |x_j - a_j| \leq \|x - a\|_\infty < r = \varepsilon.$$

On en déduit que π_j est continue en $a \in \mathbb{R}^d$ pour tout $a \in \mathbb{R}^d$: π_j est continue sur $\mathbb{R}^d$.

Étape 2 : Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on remarque que les applications $\pi_j^n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définies pour $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ par $\pi_j^n(x) = x_j^n$ sont continues. Pour cela, on considère l'application $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $p_n(t) = t^n$. D'après le cours de L1 et L2 sur les fonctions d'une variable réelle, on sait que p_n est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. On remarque que $\pi_j^n = p_n \circ \pi_j$. π_j est continue sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et p_n étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que π_j^n est continue sur $\mathbb{R}^d$ par composition de fonctions continues (Proposition 58).

Étape 3 : Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$. Nous démontrons maintenant par récurrence finie sur $k \in \{1, \dots, d\}$, les fonctions de la forme $\prod_{j=1}^k \pi_j^{\alpha_j}$ sont continues sur $\mathbb{R}^d$

Initialisation : Pour $k = 1$, on a $\prod_{j=1}^1 \pi_j^{\alpha_j} = \pi_1^{\alpha_1}$. D'après l'étape 2, cette application est continue sur $\mathbb{R}^d$.

Hypothèse de récurrence : Soit $k \in \{1, \dots, d-1\}$, on suppose que $\prod_{j=1}^k \pi_j^{\alpha_j}$ est continue sur $\mathbb{R}^d$.

Hérédité : On pose $g = \prod_{j=1}^k \pi_j^{\alpha_j}$ et on remarque que

$$\prod_{j=1}^{k+1} \pi_j^{\alpha_j} = g \times \pi_{k+1}^{\alpha_{k+1}}.$$

g est continue sur $\mathbb{R}^d$ d'après l'hypothèse de récurrence et $\pi_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}^d$ d'après l'étape 2. On en déduit que $\prod_{j=1}^{k+1} \pi_j^{\alpha_j}$ est continue sur $\mathbb{R}^d$ en tant que produit d'applications continues sur $\mathbb{R}^d$.

En particulier, on vient de démontrer que les applications de la forme $\prod_{j=1}^d \pi_j^{\alpha_j}$ sont continues sur $\mathbb{R}^d$.

Étape 4 : Soit une fonction polynomiale $P(x) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d \\ L(\alpha)=0}}^N c_\alpha \left(\prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j} \right)$. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $L(\alpha) \leq N$, on sait que les applications

$$(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mapsto c_\alpha \prod_{j=1}^d \pi_j^{\alpha_j}(x)$$

sont continues sur $\mathbb{R}^d$ en tant que produit d'applications continues sur $\mathbb{R}^d$ (voir Proposition 34). En effet, l'application

$$(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mapsto c_\alpha$$

est continue sur $\mathbb{R}^d$ (d'après le Lemme 3) et les applications $\prod_{j=1}^d \pi_j^{\alpha_j}$ sont continues sur $\mathbb{R}^d$ d'après l'étape 3. On remarque alors que l'on a

$$P = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d \\ L(\alpha)=0}}^N c_\alpha \left(\prod_{j=1}^d \pi_j^{\alpha_j} \right)$$

P est donc une somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$: c'est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ (voir Proposition 33 et Exercice 25). $\square$

2.1.4 Les applications linéaires

Un cas important d'applications que l'on peut considérer sont les applications linéaires. Nous les avons déjà rencontrés au §1.1.6.

Proposition 38. Soit (E, N_E) et (F, N_F) deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire alors on a l'équivalence entre les assertions suivantes.

- (i) u est continue sur E .
- (ii) Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in E$, on a $N_F(u(x)) \leq CN_E(x)$.

Preuve de la Proposition 38.

(i) $\implies$ (ii) : u est en particulier continue en 0 et comme u est linéaire, on a $u(0_E) = 0_F$ donc pour $\varepsilon = 1$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B_{N_E}(0_E, \delta)$, on a $u(x) \in B_{N_F}(0_F, 1)$. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$, on considère

$$y = \frac{\delta}{2} \frac{x}{N_E(x)}.$$

On a

$$N_E(y) = \frac{\delta}{2} < \delta$$

donc $y \in B_{N_E}(0_E, \delta)$ et par suite $u(y) \in B_{N_F}(0_F, 1)$, c'est-à-dire que

$$\frac{\delta}{2N_E(x)} N_F(u(x)) = N_F(u(y)) < 1$$

et donc

$$N_F(u(x)) \leq \frac{2}{\delta} N_E(x).$$

Si $x = 0_E$ cette inégalité est automatique vérifiée et on en déduit le point (ii) en posant $C = \frac{2}{\delta}$.

(ii) $\implies$ (i) : Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $y \in E$ on a

$$N_F(u(x) - u(y)) = N_F(u(x - y)) \leq CN_E(x - y).$$

En particulier, en choisissant $\delta = \frac{1}{C}\varepsilon$, on a pour tout $y \in B_{N_E}(x, \delta)$ que

$$N_F(u(x) - u(y)) \leq CN_E(x - y) < C \frac{1}{C} \varepsilon = \varepsilon$$

et donc u est continue en x . $\square$

Remarque 37. On comprend mieux maintenant la définition de l'espace $\mathcal{L}_c(E, F)$ en (1.13) : il s'agit de l'ensemble des applications linéaires continues de E vers F . En particulier, il s'agit bien d'un espace vectoriel puisque la somme d'applications continues est toujours une application continue et qu'une fonction continue multipliée par un scalaire est également continue.

Une proposition très importante est qu'en dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues.

Proposition 39. Soit (E, N_E) et (F, N_F) deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On suppose que $\dim(E) < +\infty$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire alors u est continue sur E .

Preuve de la Proposition 39. On suppose que $\dim(E) = d \in \mathbb{N}^*$ et on considère $(e_1, \dots, e_d)$ une base de E . Pour $x = \sum_{j=1}^d x_j e_j \in E$, on définit l'application $N_\infty(x) := \max_{j \in \{1, \dots, d\}} |x_j|$. On peut démontrer que N_∞ est une norme sur E^1 . Comme les normes sont équivalents en dimension finie, on sait qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$ on a

$$N_\infty(x) \leq CN_E(x).$$

Maintenant, on a

$$\begin{aligned} N_F(u(x)) &= N_F\left(\sum_{j=1}^d x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^d |x_j| N_F(u(e_j)) \leq N_\infty(x) \underbrace{\left(\sum_{j=1}^d N_F(u(e_j))\right)}_{:= C \geq 0} \\ &\leq MCN_E(x). \end{aligned}$$

On en déduit d'après la Proposition 38 que u est continue sur E . □

2.1.5 Continuité et topologie

Nous avons vu au Chapitre 1, §1.3.2 et §1.3.3, les notions de parties ouvertes et de parties fermées. Nous avons également étudié en pratique certains ensembles de $\mathbb{R}^2$ et démontré qu'ils étaient ouverts ou fermés. En fait, il existe un lien entre ces notions et la notion de continuité.

Proposition 40. Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de E et $f : \mathcal{O} \rightarrow F$. Alors on a équivalence entre les deux points suivants.

- (i) f est continue sur $\mathcal{O}$.
- (ii) Pour tout ouvert $\mathcal{U} \subset F$ alors $f^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert de E .

Preuve de la Proposition 40.

(i) $\implies$ (ii) : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de F . On raisonne par l'absurde et on suppose que $f^{-1}(\mathcal{U})$ n'est pas ouvert. Cela veut dire qu'il existe $x \in f^{-1}(\mathcal{U})$ tel que pour tout $\delta > 0$, $B_{N_E}(x, \delta) \cap (f^{-1}(\mathcal{U}))^c \neq \emptyset$. Comme $\mathcal{O}$ est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_{N_E}(x, r) \subset \mathcal{O}$. En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$, en choisissant $\delta = \frac{\alpha}{n+1}$ on a

$$B_{N_E}\left(a, \frac{\alpha}{n+1}\right) \cap (f^{-1}(\mathcal{U}))^c \neq \emptyset, \quad B_{N_E}\left(a, \frac{\alpha}{n+1}\right) \subset B_{N_E}(a, \alpha) \subset \mathcal{O}.$$

On peut donc choisir $x_n \in B_{N_E}\left(a, \frac{\alpha}{n+1}\right) \cap (f^{-1}(\mathcal{U}))^c$ tel que $x_n \in \mathcal{O}$. En particulier $f(x_n) \notin \mathcal{U}$, c'est-à-dire $f(x_n) \in \mathcal{U}^c$. La suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite d'éléments de $\mathcal{U}^c$ qui est fermé. Par ailleurs, par construction

$$N_E(x_n - a) < \frac{\alpha}{n+1}$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \in E$. Par continuité de f en $a \in \mathcal{O}$, la Proposition 32 nous dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$. C'est absurde : $\mathcal{U}^c$ étant fermé, toute suite d'éléments de $\mathcal{U}^c$ qui converge converge dans $\mathcal{U}^c$. Hors, $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{U}^c$ qui converge vers $f(a) \notin \mathcal{U}^c$ car $a \in f^{-1}(\mathcal{U})$ donc il existe $y \in \mathcal{U}$ tel que $f(a) = y \in \mathcal{U}$.

(ii) $\implies$ (i) : Soit $a \in \mathcal{O}$ et $\varepsilon > 0$. On considère $\mathcal{U} = B_{N_F}(f(a), \varepsilon)$. Comme $\mathcal{U}$ est une boule ouverte, c'est un ouvert de F . Par hypothèse, $f^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert de E et il contient a car $f(a) \in \mathcal{U}$. Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel $B_{N_E}(a, \delta) \subset f^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{O}$. En particulier, pour tout $x \in B_{N_E}(a, \delta)$, on a $x \in f^{-1}(\mathcal{U})$, c'est-à-dire que $f(x) \in \mathcal{U}$ et donc $f(x) \in B_{N_F}(f(a), \varepsilon)$. On vient bien de démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B_{N_E}(a, \delta) \cap \mathcal{O}$, on a $f(x) \in B_{N_F}(f(a), \varepsilon)$: f est continue en $a \in \mathcal{O}$. Comme c'est vrai pour tout $a \in \mathcal{O}$, f est continue sur $\mathcal{O}$. □

1. Il suffit d'utiliser les mêmes arguments que pour démontrer que $\ell^\infty(\mathbb{R}^d)$ est une norme.

Exemple 46. Reprenons l'ensemble $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x_1 - 1| < 1\}$ de l'Exemple 19. On pose l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2) = |x_1 - 1|.$$

On remarque que $f = g_2 \circ g_1$ où $g_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $g_1(x_1, x_2) = x_1 - 1$ et $g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $g_2(t) = |t|$. g_1 est continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. De plus g_2 est continue sur $\mathbb{R}$ car la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ (c'est une norme). On en déduit que $f = g_2 \circ g_1$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que composée de fonctions continues. Par ailleurs, on remarque que

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < f(x_1, x_2) < 1\} = f^{-1}(]0, 1[).$$

Or, on sait que $]0, 1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ en tant qu'intervalle ouvert. Ainsi A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue.

Exemple 47. Soit $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \sqrt{x_1^2 + 1} > 0\}$. On pose l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2) = x_2 \sqrt{x_1^2 + 1}.$$

On remarque que $f = (h \circ g_1) \times g_2$ où $g_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont définies pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 1$, $g_2(x_1, x_2) = x_2$ et où $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est définie pour $t \in \mathbb{R}_+$ par $h(t) = \sqrt{t}$. Pour $j \in \{1, 2\}$, les applications g_j sont continues en tant que fonctions polynomiales à deux variables. De plus, comme $g_1(\mathbb{R}) \subset [1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+$, on sait que $h \circ g_1$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que composée de fonctions continues. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que produit de fonctions continues. Par ailleurs, on remarque que

$$A = f^{-1}(]0, +\infty[).$$

et donc, comme $]0, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ en tant qu'intervalle ouvert, A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Exemple 48. On considère l'ensemble des matrices inversibles de taille $d \times d$ définie par $GL_d(\mathbb{R}) := \{M \in \mathcal{M}_{d \times d}(\mathbb{R}) : \det(M) \neq 0\}$. Il se trouve que cet ensemble est ouvert dans $\mathcal{M}_{d \times d}(\mathbb{R})$. En effet, on considère

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_{d \times d}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ M = (m_{j,k})_{j,k \in \{1, \dots, d\}} & \mapsto \det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^d m_{\sigma(j), j}. \end{cases}$$

où $\mathfrak{S}_d$ est le groupe des permutations de l'ensemble à d -éléments et $\epsilon(\sigma)$ la signature de $\sigma \in \mathfrak{S}_d$. f est continue en tant que fonction polynomiale de d^2 variables. On remarque alors que

$$GL_d(\mathbb{R}) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

et comme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ car c'est le complémentaire du singleton $\{0\}$ qui est fermé alors $GL_d(\mathbb{R})$ est ouvert en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Il se trouve que la Proposition 40 possède un analogue pour les ensembles fermés. C'est le propos de la prochaine proposition.

Proposition 41. Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $\mathcal{F}$ un fermé de E et $f : \mathcal{F} \rightarrow F$. Alors on a équivalence entre les deux points suivants.

- (i) f est continue sur $\mathcal{F}$.
- (ii) Pour tout fermé $A \subset F$ alors $f^{-1}(A)$ est un fermé de E .

La preuve de la Proposition 41 est similaire à celle de la Proposition 40, elle est donc omise.

Remarque 38. La différence dans les Propositions 40 et 41 est que dans le premier cas, la fonction f est définie sur un ouvert de E et dans le deuxième cas sur un fermé de E . Très souvent, on s'intéressera au cas plus simple $E = \mathbb{R}^d$ avec $\mathcal{O} = E$ ou $\mathcal{F} = E$.

Exemple 49. Soit l'ensemble $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq e^{x_2}\}$. On montre que A est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Pour ce faire, on considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto e^{x_2} - x_1 \end{cases}$$

On remarque que $f = h \circ g_2 - g_1$ où pour $j \in \{1, 2\}$ on a posé $g_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ avec pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $g_j(x_1, x_2) = x_j$. De plus, on a $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est la fonction exponentielle. Ainsi, pour tout $j \in \{1, 2\}$, g_j est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale (de deux variables) et h est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction exponentielle. Comme $g_2(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}$, on obtient que $h \circ g_2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction continue et que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de fonctions continues. Par ailleurs, on remarque que

$$A = f^{-1}([0, +\infty[)$$

et $[0, +\infty[$ est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ donc est un fermé de $\mathbb{R}$. On en déduit que A est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continues.

2.1.6 Prolongement par continuité

Jusqu'à présent, pour E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), nous avons pu définir puis étudier la limites de fonctions $f : A \subset E \rightarrow F$ en des points $a \in \bar{A}$. Notre objectif est, si on suppose la fonction f continue, de voir si on peut la prolonger à un sous ensemble de $\bar{A}$ (voire à $\bar{A}$ tout entier) en une fonction continue.

Proposition 42. Soient $(E, N_E), (F, N_F)$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B \subset \bar{A}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) Il existe une fonction $\tilde{f} : B \rightarrow F$ continue sur B telle que $\tilde{f}|_A = f$.
- (ii) f admet une limite en tout point de B .

Preuve de la Proposition 42.

(i) $\implies$ (ii) : Soit $a \in B \subset \bar{A}$. Par définition de la continuité pour $\tilde{f}$, on sait que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B_{N_E}(a, \delta) \cap B, \tilde{f}(x) \in B_{N_F}(\tilde{f}(a), \varepsilon).$$

En particulier, en restreignant notre choix de x à l'ensemble $(B_{N_E}(a, \delta) \cap A) \subset B_{N_E}(a, \delta) \cap B$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B_{N_E}(a, \delta) \cap A, \tilde{f}(x) = f(x) \in B_{N_F}(\tilde{f}(a), \varepsilon),$$

ce qui est précisément dire que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \tilde{f}(a)$ donc f admet une limite en tout point de B .

(ii) $\implies$ (i) : Supposons que f admette une limite en tout point de B . Pour $x \in B$, on définit

$$\tilde{f} : B \rightarrow F, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) & \text{si } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

Soit $a \in B$ et $\varepsilon > 0$.

- Si $a \in A$. Comme f est continue sur A , il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x - a\| < \delta$, on ait $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$, ou encore $\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)\| < \varepsilon$, par définition du prolongement $\tilde{f}$.
- Si $a \in B \setminus A$. Comme $\tilde{f}(a)$ est la limite de f en a , il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x - a\| < \delta$, on ait $\|f(x) - \tilde{f}(a)\| < \varepsilon$, ou encore $\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)\| < \varepsilon$, par définition du prolongement $\tilde{f}$.

En résumé, dans tous les cas on a obtenu

$$\forall x \in A, \|x - a\| < \delta \implies \|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)\| < \varepsilon.$$

Pour démontrer la continuité de $\tilde{f}$ sur B il faut montrer que cette propriété est encore vraie pour tout $x \in B$ et pas seulement dans A . Il reste donc à étudier la situation dans $B \setminus A$.

Soit donc $x \in B \setminus A$ tel que $\|x - a\| < \delta/2$. Comme $\tilde{f}(x)$ est la limite de f en x , il existe $\delta' > 0$ tel que $\forall y \in A, \|y - x\| < \delta' \implies \|\tilde{f}(x) - f(y)\| < \varepsilon$. De plus, on peut toujours choisir $\delta' < \delta/2$ (quitte à remplacer δ' par $\min(\delta', \delta/2)$).

Ainsi, comme x est dans $\bar{A}$, il existe un $y \in A$ tel que $\|y - x\| < \delta' < \delta/2$ et donc tel que $\|\tilde{f}(x) - f(y)\| < \varepsilon$. Mais alors on a

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)\| \leq \underbrace{\|\tilde{f}(x) - f(y)\|}_{< \varepsilon} + \underbrace{\|f(y) - \tilde{f}(a)\|}_{< \varepsilon},$$

cette dernière inégalité étant due au fait que

$$\|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

□

Remarque 39. Une conséquence de l'unicité de la limite (voir Proposition 29) est que si un tel prolongement continu existe, il est unique.

Exemple 50. Reprenons l'Exemple 42 avec

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2) & \mapsto \frac{2x_1x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \end{cases}.$$

Ici, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Une question classique est de savoir si f admet un prolongement continu à $\mathbb{R}^2$. Cette question fait sens car $\bar{A} = \mathbb{R}^2$. Pour y répondre, d'après la Proposition 42, il faut et il suffit que f admette une limite en $(0,0)$. Or, d'après l'Exemple 42, on sait que $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} f(x_1, x_2) = 0$. En particulier, si on pose

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} \frac{2x_1x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \text{si } (x_1, x_2) \in A \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

alors $\tilde{f}$ est (l'unique) prolongement continu de f à $\mathbb{R}^2$.

Exercice 26 (25 min). Soit $A = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$. On s'intéresse à la fonction

$$f : \begin{cases} A & \rightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2) & \mapsto \frac{1+x_1^2+x_2^2}{x_2} \sin(x_2) \end{cases}.$$

- (i) Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
- (ii) Déterminer l'adhérence de $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ dans $\mathbb{R}^2$.
- (iii) Montrer que f admet une limite en tout point $a = (a_1, a_2) \in \bar{A}$ et donner cette limite.
- (iv) En déduire l'expression d'un prolongement par continuité de f .

2.1.7 Les applications partielles

On s'intéresse maintenant au cas très spécifique où $E = \mathbb{R}^d$ et $F = \mathbb{R}^p$. Nous allons définir ce que l'on nomme les applications partielles

Définition 26. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $a = (a_1, \dots, a_d) \in A$. Pour $j \in \{1, \dots, d\}$, on appelle j -ème application partielle de f au point a , l'application $f_{a,j}$ définie par

$$t \mapsto f_{a,j}(t) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^p.$$

C'est une fonction d'une seule variable réelle $t \in \mathbb{R}$. Elle est bien définie dès lors que $t \in \mathbb{R}$ est tel que $(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_d) \in A$.

Remarque 40. L'idée est que l'on peut fixer toutes les variables en un point, sauf une que l'on continue de regarder. On n'étudie alors que la dépendance à une seule variable, représentant une direction fixe de l'espace.

Exemple 51. Soit l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1^2 + x_1x_2 + 4 \end{cases}.$$

Les applications partielles de f en $a = (1, 1)$ sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$f_{a,1}(t) = f_{(1,1),1}(t) = t^2 + t + 4, \quad f_{a,2}(t) = f_{(1,1),2}(t) = 1 + t + 4 = t + 5.$$

Exemple 52. Soit l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) & \mapsto (x_1^2, e^{x_2+3}, \ln(x_2)) \end{cases}.$$

Les applications partielles de f en $a = (1, 1)$ sont définies par

$$f_{a,1}(t) = f_{(1,1),1}(t) = (t^2, e^4, 0), \quad f_{a,2}(t) = f_{(1,1),2}(t) = (1, e^{t+3}, \ln(t)).$$

On remarque que $f_{a,1}$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $f_{a,2}$ seulement pour $t > 0$.

Proposition 43. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $a = (a_1, \dots, a_d) \in \overline{A}$. Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^p$ en a , alors, pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ les applications $f_{j,a}$ admettent ℓ comme limite en a_j .

Remarque 41. Une conséquence de la Proposition 43 est que si $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ est continue en $a = (a_1, \dots, a_d) \in A$ alors, pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ les applications $f_{j,a}$ sont continues en a_j .

Remarque 42. Attention, la réciproque à la Proposition 43 est fausse. En effet, on peut considérer la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (x_1, x_2) \end{cases} \mapsto \begin{cases} \mathbb{R} \\ \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \end{cases}$$

et regarder ses applications partielles en $(0,0)$, définies pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ par

$$f_{(0,0),1}(t) = \frac{t \times 0}{t^2 + 0^2} = 0, \quad f_{(0,0),2}(t) = \frac{0 \times t}{0^2 + t^2} = 0.$$

Les applications partielles sont donc constante à 0 et par conséquent admettent 0 pour limite lorsque $t \rightarrow 0$. Toutefois, f n'admet pas de limite en $(0,0)$. En effet, si elle admettait $\ell \in \mathbb{R}$ comme limite, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x_1, x_2) \in B_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, \delta) \setminus \{0\}, |f(x_1, x_2) - \ell| < \varepsilon$$

En particulier, en choisissant pour tout $(x_1, 0) \in B_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, \delta) \setminus \{0\}$ on a $f(x_1, 0) = 0$ et

$$|\ell| < \varepsilon.$$

Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ nécessairement $\ell = 0$. De même, pour tout $(t, t) \in B_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, \delta) \setminus \{0\}$ on a $f(t, t) = \frac{1}{2}$ et donc

$$\frac{1}{2} = |\frac{1}{2} - \ell| < \varepsilon$$

ce qui est absurde donc f n'admet pas de limite finie en $(0,0)$.

Remarque 43. En fait, la Proposition 43 s'utilise essentiellement pour dire qu'une fonction f n'admet pas de limite en un point, en utilisant des applications partielles qui n'ont, par exemple, pas la même limite.

Preuve de la Proposition 43. Soit $j \in \{1, \dots, d\}$, montrons que $f_{a,j}$ admet $\ell \in \mathbb{R}^p$ comme limite en a_j . Soit $\varepsilon > 0$, comme f est continue en a , il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B_{\|\cdot\|_\infty}(a, \delta) \cap A$ on a $f(x) \in B_{\|\cdot\|_\infty}(\ell, \varepsilon)$. En particulier, pour $t \in \mathbb{R}$ tel que $(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_d) \in B_{\|\cdot\|_\infty}(a, \delta) \cap A$, on a

$$f_{a,j}(t) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_d) \in B_{\|\cdot\|_\infty}(a, \delta) \cap A.$$

On a donc démontré que $f_{a,j}$ admettait ℓ pour limite en a_j . □

2.1.8 Méthodologie

En fait, il existe une généralisation de la Proposition 43, que nous ne démontrerons pas.

Proposition 44 (Continuité le long de chemins). Supposons que $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ admette une limite $\ell \in \mathbb{R}^p$ en $a \in \overline{A}$. Soit γ une fonction continue définie sur I , un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, telle que $\gamma : I \subset \mathbb{R} \mapsto \overline{A}$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(I \setminus \{0\}) \subset A$. Alors la composée $f \circ \gamma : I \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^p$ admet une limite ℓ en 0.

Remarque 44. L'application γ est une courbe paramétrée (souvent appelée **chemin**) dans $\mathbb{R}^d$ et on dit alors que f admet une limite le long des chemins.

Cette proposition est une généralisation de la Proposition 43. En effet, pour $a \in A$ et $j \in \{1, \dots, d\}$, si on choisit comme chemin l'application

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \gamma(t) = (a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_d),$$

le fait que $f \circ \gamma$ admette une limite en 0 est équivalent au fait que $f_{a,j}$ admette une limite en a_j (ici $I = \{t \in \mathbb{R} : (a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_d) \in A\} \cup \{0\}$).

Notez que la Proposition 44 est souvent utilisée pour démontrer qu'une fonction f n'est pas continue ou n'admet pas de limite, ou encore pour *intuire* la valeur d'une limite si on ne la connaît pas a priori.

L'idée est que l'on est plus à l'aise pour manipuler des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qu'il ne faut pas se priver de s'y ramener si on le peut.

Les droites passant par le point où l'on étudie la continuité sont des chemins simples, souvent utilisés en pratique. Par exemple, étudier la continuité de f selon les droites passant par $(0, 0)$ revient à étudier la continuité de fonctions de la forme $x \mapsto f(x, ax)$ ou $x \mapsto f(bx, x)$, où a et b sont des réels. (En fait il suffit de prendre tout les $a \in \mathbb{R}$ et $b = 0$ pour avoir toutes les droites, ou bien tous les $b \in \mathbb{R}$ et $a = 0$ ce qui revient au même). On notera que regarder la continuité des applications partielles revient à regarder la continuité selon des droites particulières : les droites horizontales et verticales passant par le point dans le cas d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ (cela correspond au cas où l'on prend $a = 0$ et $b = 0$ avec la notation ci-dessus).

Il faut remarquer qu'il existe des fonctions qui sont continues le long de toute droite passant par un point mais qui ne sont pas continues en ce point.

Exemple 53. Considérons par exemple la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

- f est continue le long de toute droite passant par $(0, 0)$. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et $t \in \mathbb{R}^*$ non nul $f(t, at) = \frac{at^3}{t^4 + a^2 t^2} = a \frac{t}{t^2 + a^2}$ pour t non nul et $f(0, a \times 0) = 0$, et donc $f(t, at) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 = f(0, a \times 0)$. Si $a = 0$ (ce qui revient à regarder l'application partielle selon la première coordonnée), on a de manière immédiate $f(t, 0) = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 = f(0, 0)$. De même pour tout $b \in \mathbb{R}$ on a $f(bt, t) = \frac{b^2 t^3}{b^4 t^4 + t^2} = b^2 \frac{t}{b^2 t^2 + 1}$ pour t non nul et $f(b \times 0, 0) = 0$, et donc $f(bt, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 = f(0, a \times 0)$. (Le cas $b = 0$, qui est inclus dans le raisonnement ci-dessus revient à regarder l'application partielle selon la seconde coordonnée.) On en déduit donc que f est continue le long de toute droite passant par $(0, 0)$.
- Toutefois, f n'est pas continue en $(0, 0)$. En effet, on peut considérer $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\gamma(t) = (t, t^2)$. γ est continue sur $\mathbb{R}$ car chacune de ses composantes est une application polynomiale. Pour $t \neq 0$, $\gamma(t) \neq (0, 0)$ et on a

$$f(\gamma(t)) = \frac{t^2 \times t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}.$$

Or, si f était continue en $\gamma(0) = (0, 0)$, on devrait avoir $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = f(0, 0) = 0$ or on a $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = \frac{1}{2}$.

En conclusion, f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Pour terminer ce paragraphe, voici une "méthode" pour un exercice du type : la fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ admet-elle une limite en a ?

Étape 1 : On commence par regarder si les applications coordonnées ont des limites. Si ce n'est pas le cas ou si les limites ne sont pas égales, f n'admet pas de limite. Si elles existent et sont égales on peut éventuellement regarder le long d'autres chemins (droites, paraboles...).

Étape 2 : Si ces limites existent et sont égales (à ℓ), on peut essayer de montrer que f admet pour limite ℓ en a . Pour cela il faut majorer $|f(x) - \ell|$.

Étape 3 : Si on n'y arrive pas, c'est peut-être que la fonction n'admet en fait pas de limite, on peut essayer d'autres chemins.

Les chemins permettent de montrer que la fonction n'a pas de limite ou de trouver un candidat pour la limite. En revanche pour montrer qu'il y a bien une limite **il faut utiliser la définition**.

2.2 Différentielle, dérivées directionnelles, dérivées partielles

Le but de cette section est d'étendre la notion de dérivée que vous connaissez pour des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On se place dans le cas simplifié² où $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert et

$$f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Nous commençons par introduire la notion de différentielle.

Définition 27. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $a \in \mathcal{O}$. On dit que f est différentiable en $a \in \mathcal{O}$ s'il existe $L_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ tels que $a + h \in \mathcal{O}$, on a lorsque $h \rightarrow 0$

$$f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o(\|h\|).$$

On note souvent $D_a f = L_a$ et on dit que $D_a f$ est la différentielle de f en a .

Remarque 45. On rappelle que si $g : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^p$, alors la notation, dite de Landau, $g(h) = o(\|h\|)$ signifie que

$$\frac{\|g(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

En particulier, dans la Définition 27, ce que l'on veut dire est que

$$\frac{\|f(a + h) - f(a) - L_a(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^d}} 0.$$

Ici, aucune norme n'est précisée car il s'agit d'une norme quelconque sur $\mathbb{R}^p$ et qu'elles sont toutes équivalentes.

Remarque 46. Il est facile de voir que si f est différentiable en $a \in \mathcal{O}$ alors f est continue en a . En effet, pour tout $x \in \mathcal{O}$ tel que $x - a \in \mathcal{O}$, on a

$$f(x) = f(x + a - a) = f(a) + L_a(x - a) + o(\|x - a\|).$$

Or, on sait d'après la Proposition 39, qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\|L_a(y)\| \leq C\|y\|$$

et donc en particulier, on a

$$\|f(x) - f(a)\| \leq C\|x - a\| + o(\|x - a\|)$$

et donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. On en déduit que f est continue en $a \in \mathcal{O}$.

Exemple 54. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors les deux points suivants sont équivalents

- (i) f est dérivable en a ,
- (ii) f est différentiable en a .

De plus, lorsqu'elle existe, la différentielle de f en a est l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$D_a f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & f'(a)h \end{cases}$$

(i) $\implies$ (ii) : Supposons que f est dérivable en a . Alors, par définition, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Ce qui peut se ré-écrire comme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a + h) - f(a) - hf'(a)|}{|h|} = 0.$$

Cela nous dit que pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in I$ on a

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + o(h).$$

2. On pourrait traiter, presque de la même façon, le cas d'une fonction $f : E \rightarrow F$ où E et F sont des espaces vectoriels normés.

Comme l'application $L_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $h \in \mathbb{R}^d$ par $L_a(h) = f'(a)h$ est linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a bien démontré que f est différentiable en a et que $D_a f(h) = f'(a)h$.

(ii) $\implies$ (i) : Supposons que f soit différentiable en a . Alors, il existe $L_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in I$ on a

$$f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o(h).$$

Or, $L_a(h) = L_a(h \times 1) = hL_a(1)$ car $L_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On en déduit que

$$f(a + h) = f(a) + hL_a(1) + o(h).$$

Par suite, on aboutit à

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = L_a(1) + o(1).$$

On obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = L_a(1)$$

et donc $L_a(1) = f'(a)$.

Remarque 47. Dans le cas d'une fonction f de $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, comme mentionné dans l'Exemple 54 on identifie la différentielle en un point $a \in I$ avec un nombre réel, son nombre dérivé en a . Il faut bien remarquer qu'il s'agit d'un abus de notation. Par définition l'objet $D_a f$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f'(a) \in \mathbb{R}$ mais comme les espaces vectoriels $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ sont isomorphes, on commet parfois cet abus. Pour trouver cet isomorphisme, il suffit de démontrer

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ L & \mapsto L(1) \end{cases},$$

est un isomorphisme.

Exemple 55. On considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1^2 x_2 \end{cases}$$

Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} f(a + h) &= (a_1 + h_1)^2 (a_2 + h_2) = (a_1^2 + 2a_1 h_1 + h_1^2)(a_2 + h_2) \\ &= a_1^2 a_2 + (2a_1 a_2 h_1 + a_1^2 h_2) + 2a_1 h_1 h_2 + a_2 h_1^2 + h_1^2 h_2 \\ &= f(a) + L_a(h) + 2a_1 h_1 h_2 + a_2 h_1^2 + h_1^2 h_2 \end{aligned}$$

où on a posé

$$L_a : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (h_1, h_2) & \mapsto 2a_1 a_2 h_1 + a_1^2 h_2 \end{cases}.$$

On remarque que L_a est une application linéaire et que de plus, on a

$$\begin{aligned} |2a_1 h_1 h_2 + a_2 h_1^2 + h_1^2 h_2| &\leq 2|a_1| |h_1| |h_2| + a_2 |h_1|^2 + |h_1|^2 |h_2| \\ &\leq 2|a_1| \|h\|_\infty^2 + |a_2| \|h\|_\infty^2 + \|h\|_\infty^3. \end{aligned}$$

En particulier, on remarque que

$$\frac{|2a_1 h_1 h_2 + a_2 h_1^2 + h_1^2 h_2|}{\|h\|_\infty} \leq (|a_1| + |a_2|) \|h\|_\infty + \|h\|_\infty^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^2}} 0$$

et donc que

$$f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o(\|h\|_\infty).$$

On en déduit que f est différentiable en tout point $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et que pour tout $h = (h_1, h_2)$ on a

$$D_a f(h) = 2a_1 a_2 h_1 + a_1^2 h_2.$$

Exemple 56. On considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto \left(\frac{x_1^2}{1+x_2^2}, x_1 e^{x_2} \right) \end{cases}$$

Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(a+h) - f(a) = \left(\frac{(a_1 + h_1)^2}{1 + (a_2 + h_2)^2} - \frac{a_1^2}{1 + a_2^2}, (a_1 + h_1)e^{a_2+h_2} - a_1 e^{a_2} \right).$$

On remarque que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{(a_1 + h_1)^2}{1 + (a_2 + h_2)^2} - \frac{a_1^2}{1 + a_2^2} &= \frac{a_1^2 + 2h_1 a_1 + h_1^2}{1 + a_2^2 + 2a_2 h_2 + h_2^2} - \frac{a_1^2}{1 + a_2^2} \\ &= \frac{1}{1 + a_2^2} \left(\frac{a_1^2 + 2h_1 a_1 + h_1^2}{1 + 2a_2 h_2 (1 + a_2^2)^{-1} + h_2^2 (1 + a_2^2)^{-1}} - a_1^2 \right) \\ &= \frac{1}{1 + a_2^2} \frac{a_1^2 + 2h_1 a_1 + h_1^2 - a_1^2 - 2a_1^2 a_2 h_2 (1 + a_2^2)^{-1} - a_1^2 h_2^2 (1 + a_2^2)^{-1}}{1 + 2a_2 h_2 (1 + a_2^2)^{-1} + h_2^2 (1 + a_2^2)^{-1}} \\ &= \frac{1}{1 + a_2^2} \frac{2h_1 a_1 - 2a_2 a_1^2 h_2 (1 + a_2^2)^{-1} + h_1^2 - h_2^2 a_1^2 (1 + a_2^2)^{-1}}{1 + 2a_2 h_2 (1 + a_2^2)^{-1} + h_2^2 (1 + a_2^2)^{-1}} \\ &= 2 \frac{1}{1 + a_2^2} (h_1 a_1 - h_2 a_2 a_1^2 (1 + a_2^2)^{-1}) \\ &\quad + \frac{1}{1 + a_2^2} \left(\frac{2h_1 a_1 - 2a_2 a_1^2 h_2 (1 + a_2^2)^{-1} + h_1^2 - h_2^2 a_1^2 (1 + a_2^2)^{-1}}{1 + 2a_2 h_2 (1 + a_2^2)^{-1} + h_2^2 (1 + a_2^2)^{-1}} - 2h_1 a_1 - 2h_2 a_2 a_1^2 (1 + a_2^2)^{-1} \right) \\ &= 2 \frac{1}{1 + a_2^2} (h_1 a_1 - h_2 a_2 a_1^2 (1 + a_2^2)^{-1}) \\ &\quad + \frac{1}{1 + a_2^2} \frac{A}{1 + 2a_2 h_2 (1 + a_2^2)^{-1} + h_2^2 (1 + a_2^2)^{-1}} \end{aligned}$$

où on a posé

$$\begin{aligned} A &= 2h_1 a_1 - 2a_2 a_1^2 h_2 (1 + a_2^2)^{-1} + h_1^2 - h_2^2 a_1^2 (1 + a_2^2)^{-1} \\ &\quad - (2h_1 a_1 + 2h_2 a_1^2 (1 + a_2^2)^{-1} (1 + 2a_2 h_2 (1 + a_2^2)^{-1} + h_2^2 (1 + a_2^2)^{-1})) \\ &= h_1^2 - h_2^2 a_1^2 (1 + a_2^2)^{-1} - (2h_1 a_1 + 2h_2 a_1^2 (1 + a_2^2)^{-1}) (2a_2 h_2 (1 + a_2^2)^{-1} + h_2^2 (1 + a_2^2)^{-1}) \\ &= h_1^2 + (4a_1^2 a_2 (1 + a_2^2)^{-2} - a_1^2 (1 + a_2^2)^{-1}) h_2^2 + 4a_1 a_2 (1 + a_2^2)^{-1} h_1 h_2 + 2a_1 (1 + a_2^2)^{-1} h_1 h_2^2 + 4a_2 a_1^2 (1 + a_2^2)^{-2} h_2^3. \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe $C_1 > 0$ tel que

$$|A| \leq C_1 \|h\|_\infty^2.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} |1 + 2a_2 h_2 (1 + a_2^2)^{-1} + h_2^2 (1 + a_2^2)^{-1}| &\geq 1 - 2|a_2| (1 + a_2^2)^{-1} |h_2| - (1 + a_2^2)^{-1} |h_2|^2 \\ &\geq 1 - 2|a_2| (1 + a_2^2)^{-1} \|h\|_\infty - (1 + a_2^2)^{-1} \|h\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Soit $\delta > 0$, si $h \in B_{\|\cdot\|_\infty}(0_{\mathbb{R}^2}, \delta)$ on a

$$|1 + 2a_2 h_2 (1 + a_2^2)^{-1} + h_2^2 (1 + a_2^2)^{-1}| \geq 1 - 2|a_2| (1 + a_2^2)^{-1} \delta - (1 + a_2^2)^{-1} \delta^2.$$

On choisit alors δ suffisamment petit pour que le membre de droite soit strictement positif et on aboutit à l'existence d'une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\frac{1}{|1 + 2a_2 h_2 (1 + a_2^2)^{-1} + h_2^2 (1 + a_2^2)^{-1}|} \leq C_2.$$

Par conséquent, si on pose

$$r_1 := \frac{1}{1 + a_2^2} \frac{A}{1 + 2a_2 h_2 (1 + a_2^2)^{-1} + h_2^2 (1 + a_2^2)^{-1}}$$

il existe $K > 0$ tel que pour tout $h \in B_{\|\cdot\|_\infty}(0_{\mathbb{R}^2}, \delta)$ on ait

$$|r_1| \leq K \|h\|_\infty^2.$$

On a également

$$\begin{aligned} (a_1 + h_1)e^{a_2+h_2} - a_1e^{a_2} &= (a_1 + h_1)e^{a_2} - a_1e^{a_2} + (a_1 + h_1)(e^{a_2+h_2} - e^{a_2}) \\ &= h_1e^{a_2} + (a_1 + h_1)e^{a_2}(e^{h_2} - 1) \\ &= h_1e^{a_2} + (a_1 + h_1)e^{a_2}(h_2 + (e^{h_2} - 1 - h_2)) \\ &= e^{a_2}h_1 + (a_1 + h_1)e^{a_2}h_2 + (a_1 + h_1)e^{a_2}(e^{h_2} - 1 - h_2) \\ &= e^{a_2}h_1 + a_1e^{a_2}h_2 + e^{a_2}h_1h_2 + (a_1 + h_1)e^{a_2}(e^{h_2} - 1 - h_2) \end{aligned}$$

Comme la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c \in]0, h_2[$ tel que

$$e^{h_2} = 1 + h_2 + \frac{e^c}{2}h_2^2$$

En particulier, comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on a

$$|e^{h_2} - 1 - h_2| \leq \frac{1}{2}e^{h_2}h_2^2 \leq \frac{1}{2}e^{\|h\|_\infty}\|h\|_\infty^2.$$

Pour $\delta > 0$, si $h \in B_{\|\cdot\|_\infty}(0_{\mathbb{R}^2}, \delta)$ on a

$$|e^{h_2} - 1 - h_2| \leq \frac{1}{2}e^\delta\|h\|_\infty^2.$$

Ainsi, pour $h \in B_{\|\cdot\|_\infty}(0_{\mathbb{R}^2}, \delta)$, on a

$$|e^{a_2}h_1h_2 + (a_1 + h_1)e^{a_2}(e^{h_2} - 1 - h_2)| \leq e^{a_2}\|h\|_\infty^2 + (|a_1| + \|h\|_\infty)\frac{1}{2}e^\delta\|h\|_\infty^2$$

En particulier, on a

$$\lim_{h \rightarrow (0,0)} \frac{|e^{a_2}h_1h_2 + (a_1 + h_1)e^{a_2}(e^{h_2} - 1 - h_2)|}{\|h\|_\infty} = 0$$

et on en déduit que

$$r_2 := e^{a_2}h_1h_2 + (a_1 + h_1)e^{a_2}(e^{h_2} - 1 - h_2) = o(\|h\|_\infty).$$

Ainsi, on a

$$f(a + h) = f(a) + \left(2\frac{1}{1+a_2^2}(h_1a_1 - h_2a_2a_1^2(1+a_2^2)^{-1}), e^{a_2}h_1 + a_1e^{a_2}h_2\right) + (r_1, r_2).$$

Soit

$$L_a : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (h_1, h_2) & \mapsto \left(2\frac{a_1}{1+a_2^2}, e^{a_2}\right)h_1 + \left(-2\frac{a_2a_1^2}{(1+a_2^2)^2}, a_1e^{a_2}\right)h_2 \end{cases}$$

On remarque que $L_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ et que

$$(r_1, r_2) = o(\|h\|_\infty).$$

On en déduit que f est différentiable en tout point $a \in \mathbb{R}^2$ et que $D_af = L_a$.

Exemple 57. Soit $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Alors u est différentiable en tout point $a \in \mathbb{R}^d$ de différentielle $D_a u = u$. En effet, soit $a \in \mathbb{R}^d$ et $h \in \mathbb{R}^d$, on a

$$u(a + h) = u(a) + u(h).$$

On remarque que $0 = o(h)$ et donc que

$$u(a + h) = u(a) + u(h) + o(h).$$

Ainsi, u étant linéaire, on en déduit que $D_a u(h) = u(h)$ qui est ce qu'il fallait démontrer.

Exemple 58. Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$f(x) = \langle Mx, x \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire Euclidien usuel sur $\mathbb{R}^d$. Fixons $a \in \mathbb{R}^d$, pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \langle M(a+h), a+h \rangle = \langle Ma, a \rangle + \langle Mh, a \rangle + \langle Ma, h \rangle + \langle Mh, h \rangle \\ &= f(a) + \langle h, M^\top a \rangle + \langle h, Ma \rangle + \langle Mh, h \rangle \\ &= f(a) + \langle h, (M^\top + M)a \rangle + \langle Mh, h \rangle. \end{aligned}$$

On définit $L_a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ pour $h \in \mathbb{R}^d$ par $L_a(h) = \langle h, (M^\top + M)a \rangle$. On vérifie aisément que $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et on aimerait alors poser $D_a f = L_a$. Pour s'assurer que f est différentiable en $a \in \mathbb{R}^d$, il convient tout de même de montrer que

$$\frac{|f(a+h) - f(a) - L_a(h)|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^d}} 0.$$

Ici, on en prenant comme norme la norme 2, l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous livre :

$$|f(a+h) - f(a) - L_a(h)| = |\langle Mh, h \rangle| \leq \|h\| \|Mh\| \leq \|M\| \|h\|^2.$$

En particulier, on a

$$\frac{|f(a+h) - f(a) - L_a(h)|}{\|h\|} \leq \|M\| \|h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^d}} 0.$$

et donc

$$f(a+h) = f(a) + L_a(h) + o(\|h\|).$$

On en déduit que pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, on a $D_a f(h) = \langle h, (M^\top + M)a \rangle$.

2.2.1 Les dérivées directionnelles et les dérivées partielles

On a vu dans l'Exemple 56 qu'il pouvait être difficile de calculer explicitement une différentielle. Nous allons développer une méthode pour que cela soit plus aisé.

Définition 28. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $a \in \mathcal{O}$ et $v \in \mathbb{R}^{d-1}$. Comme $\mathcal{O}$ est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]-\delta, \delta[$ on a $a + tv \in \mathcal{O}$ et on peut définir

$$g : \begin{cases}]-\delta, \delta[& \rightarrow \mathbb{R}^p \\ t & \mapsto f(a + tv) \end{cases}.$$

Si g est dérivable en 0, de dérivée $g'(0) \in \mathbb{R}^p$, on dit que f admet une dérivée directionnelle dans la direction $v \in \mathbb{R}^d$ en a et on note

$$(\partial_v f)(a) = g'(0).$$

Exemple 59. Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1^2 + x_2 \end{cases}$$

On va montrer que f admet une dérivée directionnelle dans la direction $(1, 1)$ en $(1, 2)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(1+t, 2+t) = (1+t)^2 + 2+t = 1+2t+t^2+2+t = 3+3t+t^2 = f(1, 2) + 3t+t^2.$$

En particulier, pour $t \neq 0$, on a

$$\frac{f(1+t, 2+t) - f(1, 2)}{t} = 2+t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2.$$

On en déduit que f admet une dérivée directionnelle dans la direction $(1, 1)$ en $(1, 2)$ et que

$$(\partial_{f_{(1,1)}})(1, 2) = 2.$$

Exemple 60. Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1 \cos(x_2) + x_2 e^{x_1} \end{cases}$$

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$, on pose $v = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et on souhaite voir si f admet une dérivée directionnelle dans la direction v en $(0, 0)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) = t \cos(\theta) \cos(t \sin(\theta)) + t \sin(\theta) e^{t \cos(\theta)}.$$

Comme $f(0, 0) = 0$, on a

$$\frac{f(t \cos(\theta), t \sin(\theta))}{t} = \cos(\theta) \cos(t \sin(\theta)) + \sin(\theta) e^{t \cos(\theta)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \cos(\theta) + \sin(\theta).$$

On en déduit que f admet une dérivée directionnelle dans la direction v en $(0, 0)$ et que

$$(\partial_v f)(0, 0) = \cos(\theta) + \sin(\theta).$$

Un cas très particulier de choix de direction est le choix $v = e_j$ où pour $j \in \{1, \dots, d\}$, le vecteur e_j est le j -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Définition 29. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $a \in \mathcal{O}$ et $j \in \{1, \dots, d\}$. Si f admet une dérivée directionnelle en a dans la direction e_j on note

$$(\partial_j f)(a) := (\partial_{e_j} f)(a).$$

On dit alors que $(\partial_j f)(a)$ est la dérivée partielle de f en a par rapport à la variable x_j .

Remarque 48. Selon les autrices ou les auteurs, pour $j \in \{1, \dots, d\}$, il arrive de noter les dérivées partielles de la façon suivante

$$(\partial_j f)(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Remarque 49. Fixons $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathcal{O}$ et considérons l'application g introduite dans la Définition 28 dans le cas où $v = e_j$ (pour $j \in \{1, \dots, d\}$). Pour $t \in]-\delta, \delta[$, on a

$$g_j(t) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_d).$$

On remarque alors que $g_j(t) = f_{a,j}(a_j + t)$ et donc que g_j n'est, à translation près, rien d'autre que l'application partielle en a de f .

En pratique, si on souhaite calculer une dérivées partielles dans la direction j ($j \in \{1, \dots, d\}$), il suffit de justifier que la fonction est dérivable de la variable réelles x_j , les autres variables x_p (pour $p \in \{1, \dots, d\} \setminus \{j\}$) étant considérée comme fixées.

Exemple 61. Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto (x_1 \cos(x_2 x_3), x_3 \ln(1 + x_1^2 + x_2^4)) \end{cases}.$$

On va montrer que f admet une dérivée partielle par rapport à x_1 . Soient $(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2$ fixés. On pose

$$g_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x_1 & \mapsto x_1 \cos(x_2 x_3) \end{cases}, \quad g_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x_1 & \mapsto x_3 \ln(1 + x_1^2 + x_2^4) \end{cases}$$

et on remarque que pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x_1, x_2, x_3) = (g_1(x_1), g_2(x_1)).$$

g_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et g_2 est la composition $\ln$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec la fonction polynomiale $x_1 \mapsto 1 + x_1^2 + x_2^4$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$. On en déduit que g_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables. Par conséquent, on a

$$g_1'(x_1) = \cos(x_2 x_3), \quad g_2'(x_1) = \frac{2x_1 x_3}{1 + x_1^2 + x_2^4}$$

et donc on sait que f admet une dérivée partielle par rapport à x_1 et pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(\partial_1 f)(x_1, x_2, x_3) = (g_1'(x_1), g_2'(x_1)) = \left(\cos(x_2 x_3), \frac{2x_1 x_3}{1 + x_1^2 + x_2^4} \right).$$

Le résultat suivant est un résultat théorique qui permet de relier la notion de différentielle à la notion de dérivées directionnelles et donc de dérivées partielles.

Proposition 45. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$. Supposons que f est différentiable en $a \in \mathcal{O}$ alors, pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^d$, f admet une dérivée directionnelle en a selon v et on a

$$(\partial_v f)(a) = D_a f(v).$$

Preuve de la Proposition 45. Soit $v \in \mathbb{R}^d$, pour $t \in \mathbb{R}$ suffisamment petit $a + tv \in \mathcal{O}$ et comme f est différentiable en a , en appliquant la définition de la différentielle avec $h = tv$, on obtient

$$f(a + tv) = f(a) + (D_a f)(tv) + o(\|tv\|) = f(a) + t(D_a f)(v) + o(|t|).$$

en particulier, pour $t \neq 0$, on a

$$\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = (D_a f)(v) + o(1)$$

et donc en passant à la limite lorsque $t \rightarrow 0$, on obtient que f admet une dérivée directionnelle dans la direction v et que

$$(\partial_v f)(a) = (D_a f)(v).$$

□

Une conséquence importante de la Proposition 45 est que si f est différentiable en $a \in \mathcal{O}$ alors f admet des dérivées partielles selon chacune de ses variables x_j ($j \in \{1, \dots, d\}$). Pour le voir, il suffit de choisir $v = e_j$ où pour $j \in \{1, \dots, d\}$, e_j est le j -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Toutefois, la réciproque est fautive : ce n'est pas parce que l'on admet des dérivées partielles selon toutes les variables en un point que f est différentiable en ce point. C'est le but de l'Exemple ci-dessous.

Exemple 62. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

On remarque que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$. En effet, on va démontrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$ et donc ne peut pas y être différentiable (voir la Remarque 46). Pour cela on considère le chemin

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, t) \end{cases}.$$

γ est continu sur $\mathbb{R}$ car ses composantes sont des fonctions polynomiales donc continues sur $\mathbb{R}$ et $\gamma(0) = (0, 0)$. Par ailleurs, pour tout $t \neq 0$, on a

$$(f \circ \gamma)(t) = \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}.$$

En particulier, $\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma)(t) = \frac{1}{2} \neq 0$ et donc f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Toutefois, f admet des dérivées partielles par rapport à chacune de ses variables en $(0, 0)$. En effet, pour $t \neq 0$, on a

$$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \frac{0 - 0}{t} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

et donc f admet une dérivée partielle selon x_1 en $(0, 0)$ et $(\partial_1 f)(0, 0) = 0$. De même, pour $t \neq 0$, on a

$$\frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \frac{0 - 0}{t} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

et donc f admet une dérivée partielle selon x_2 en $(0, 0)$ et $(\partial_2 f)(0, 0) = 0$.

f n'est pas différentiable en $(0, 0)$ mais elle y admet bien des dérivées partielles.

Proposition 46. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$. Supposons que f est différentiable en $a \in \mathcal{O}$, alors pour tout $h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d$, on a

$$(D_a f)(h) = \sum_{j=1}^d h_j (\partial_j f)(a)$$

Preuve de la Proposition 46. On écrit $h = \sum_{j=1}^d h_j e_j$ où $(e_1, \dots, e_d)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On a

$$\begin{aligned} (D_a f)(h) &= (D_a f)\left(\sum_{j=1}^d h_j e_j\right) = \sum_{j=1}^d h_j (D_a f)(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^d h_j (\partial_{e_j} f)(a) \\ &= \sum_{j=1}^d h_j (\partial_j f)(a) \end{aligned}$$

on a utilisé la Proposition 45 pour simplifier $(D_a f)(e_j)$ puis la définition de la dérivée partielle. $\square$

Remarque 50. D'autres autrices ou auteurs écriront la Proposition 46 sous la forme suivante :

$$D_a f = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j \quad (2.1)$$

ce qui nécessite quelques explications. Premièrement, la notation $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ correspond à $(\partial_j f)(a)$. Deuxièmement, il s'agit d'une égalité entre applications linéaires, et non entre vecteurs, comme dans l'énoncé de la Proposition 46. Il faut comprendre la notation dx_j comme une forme linéaire³ définie pour $j \in \{1, \dots, d\}$ par les applications coordonnées :

$$dx_j : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_d) & \mapsto x_j \end{cases}$$

On a donc, pour tout $h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} (D_a f)(h) &= \sum_{j=1}^d (\partial_j f)(a) h_j = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j \\ &= \sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j(h). \end{aligned}$$

Comme c'est vrai pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, on obtient l'égalité entre applications linéaires énoncée en (2.1).

Exemple 63. Reprenons le fastidieux Exemple 56 pour lequel nous avons démontré que pour $x = (x_1, x_2)$, $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(D_{(x_1, x_2)} f)(h) = \left(\frac{2x_1}{1+x_2^2}, e^{x_2} \right) h_1 + \left(-2 \frac{x_2 x_1^2}{(1+x_1^2)^2}, x_1 e^{x_2} \right) h_2$$

En fait, si on fixe $x_2 \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x_1 & \mapsto \frac{x_1^2}{1+x_2^2} \end{cases}, \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x_1 & \mapsto x_1 e^{x_2} \end{cases}$$

on a pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_1))$ et f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynomiales. Par ailleurs, pour $x_1 \in \mathbb{R}$, on a

$$f'_1(x_1) = \frac{2x_1}{1+x_2^2}, \quad f'_2(x_1) = e^{x_2}.$$

On en déduit que f admet une dérivée partielle par rapport à x_1 et que

$$(\partial_1 f)(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1+x_2^2}, e^{x_2} \right).$$

3. Pour rappel, une forme linéaire sur $\mathbb{R}^d$ est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Maintenant, on fixe $x_1 \in \mathbb{R}$, on pose

$$g_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x_2 & \mapsto \frac{x_1^2}{1+x_2^2} \end{cases}, \quad g_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x_2 & \mapsto x_1 e^{x_2} \end{cases}$$

on a pour tout $x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (g_1(x_2), g_2(x_2))$. g_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas et g_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction exponentielle l'est. Par ailleurs, pour $x_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$g_1'(x_2) = -2 \frac{x_1 x_2}{(1+x_2^2)^2}, \quad g_2'(x_2) = x_1 e^{x_2}.$$

On en déduit que f admet une dérivée partielle par rapport à x_2 et que

$$(\partial_2 f)(x_1, x_2) = \left(-2 \frac{x_1 x_2}{(1+x_2^2)^2}, x_1 e^{x_2} \right).$$

On retrouve donc bien, pour $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, que

$$(D_a f)(h) = (\partial_1 f)(x_1, x_2) h_1 + (\partial_2 f)(x_1, x_2) h_2.$$

2.2.2 Les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Nous avons vu qu'un outil agréable pour calculer une différentielle était la notion de dérivées partielles. En effet, la Proposition 46 nous dit que si f est différentiable, il suffit de calculer ses dérivées partielles pour avoir une expression de la différentielle.

En pratique, il peut être délicat voire fastidieux de démontrer qu'une fonction est différentiable. Nous allons introduire une notion plus forte, celle de fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 30. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est de classe sur $\mathcal{O}$ et on note $\mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ si f est différentiable en tout point $a \in \mathcal{O}$ et de plus l'application

$$\begin{cases} \mathcal{O} & \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p) \\ x & \mapsto D_x f \end{cases}$$

est continue.

Remarque 51. La continuité est donc à comprendre à l'aide de normes sur $\mathbb{R}^d$ et sur l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^p$. En pratique, pour montrer une telle continuité en $a \in \mathcal{O}$, il faut démontrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B_{\mathbb{R}^d}(a, \delta) \cap \mathcal{O}, D_x f \in B_{\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}(D_a f, \varepsilon).$$

Autrement dit, il faut naturellement considérer une boule centrée en $D_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ et de rayon ε . Pour cela, on utilise très souvent une norme triple comme introduite au §1.1.6. L'assertion $D_x f \in B_{\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}(D_a f, \varepsilon)$ peut donc se ré-écrire comme $\exists C > 0$ telle que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\|(D_a f)(y) - (D_x f)(y)\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon \|y\|_{\mathbb{R}^d}.$$

Le résultat qui va nous aider en pratique est le suivant : il relie, sous certaines hypothèses, l'existence des dérivées partielles à la notion de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 47. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$.
- (ii) f admet des dérivées partielles dans toutes les directions sur $\mathcal{O}$ et ces dérivées partielles sont continues.

Remarque 52. Très souvent, en pratique, il suffit donc d'étudier l'existence de dérivées partielles et de justifier leur continuité sur $\mathcal{O}$ pour établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ (et donc en particulier différentiable).

Exemple 64. Reprenons le fastidieux Exemple 56. Nous allons montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, et donc en particulier différentiable, en utilisant les outils précédemment vus dans l'Exemple 63. On rappelle que

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto \left(\frac{x_1^2}{x_1+x_2^2}, x_1 e^{x_2} \right) \end{cases}$$

On a vu dans l'Exemple 63 que f admettait des dérivées partielles dans chaque variable

$$(\partial_1 f)(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1+x_2^2}, e^{x_2} \right), \quad (\partial_2 f)(x_1, x_2) = \left(-2\frac{x_1 x_2}{(1+x_1^2)^2}, x_1 e^{x_2} \right).$$

On considère les applications

$$g_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto \frac{2x_1}{1+x_2^2} \end{cases}, \quad g_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto e^{x_2} \end{cases}, \quad g_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto -2\frac{x_1 x_2}{(1+x_1^2)^2} \end{cases},$$

$$g_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1 e^{x_2} \end{cases}.$$

g_1 et g_3 sont continues sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fraction rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. On remarque que $g_2 = h \circ \pi_1$ où π_2 est l'application deuxième coordonnée continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction exponentielle continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, g_2 est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que composée d'applications continues. On remarque que $g_4 = \pi_1 \times g_2$ où π_1 est l'application première coordonnée (donc continue sur $\mathbb{R}^2$). On en déduit que g_4 est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que produit d'applications continues. D'après la Proposition 47, f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ et est donc en particulier différentiable. Maintenant, en utilisant la Proposition 46, on peut obtenir l'expression de la différentielle de f en tout point $a \in \mathbb{R}^2$!

Preuve de la Proposition 47.

(i) $\implies$ (ii) : Supposons que $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$. Comme f est en particulier différentiable, les dérivées partielles selon toutes les variables existent. Il faut alors montrer que ces dérivées partielles sont continues sur $\mathcal{O}$. Soit $a \in \mathcal{O}$, $\varepsilon > 0$ et $j \in \{1, \dots, d\}$. Comme $(x \mapsto D_x f)$ est continue en $a \in \mathcal{O}$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B_{\mathbb{R}^d}(a, \delta) \cap \mathcal{O}$ et tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\|(D_a f)(y) - (D_x f)(y)\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon \|y\|_{\mathbb{R}^d}.$$

En particulier, en choisissant $y = e_j$ (où e_j est le j -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$), on obtient

$$\|(D_a f)(e_j) - (D_x f)(e_j)\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon \|e_j\|_{\mathbb{R}^d}.$$

Or, on sait d'après la Proposition 45 que

$$(D_a f)(e_j) = (\partial_j f)(a), \quad (D_x f)(e_j) = (\partial_j f)(x).$$

En particulier, pour tout $x \in B_{\mathbb{R}^d}(a, \delta) \cap \mathcal{O}$, on a

$$\|(\partial_j f)(a) - (\partial_j f)(x)\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon$$

et donc les dérivées partielles sont continues en a pour tout $a \in \mathcal{O}$.

(ii) $\implies$ (i) : Soit $h = \sum_{j=1}^d h_j e_j \in \mathbb{R}^d$, on remarque que

$$f(a+h) - f(a) = f(a+h) - f\left(a + \sum_{j=2}^d h_j e_j\right) + \left(\sum_{p=2}^{d-1} f\left(a + \sum_{j=p}^d h_j e_j\right) - f\left(a + \sum_{j=p+1}^d h_j e_j\right)\right) + f(a + h_d e_d) - f(a).$$

En particulier, comme les dérivées partielles existent et sont continues en a , on a :

$$f(a+h) - f(a + \sum_{j=2}^d h_j e_j) = \int_0^{h_1} \left((\partial_1 f)(a + te_1 + (h - h_1 e_1)) \right) dt$$

$$= h_1 \int_0^1 \left((\partial_1 f)(a + th_1 e_1 + (h - h_1 e_1)) \right) dt.$$

De la même façon, pour $k \in \{2, \dots, d-1\}$ on remarque que

$$f(a + \sum_{j=k}^d h_j e_j) - f(a + \sum_{j=k+1}^d h_j e_j) = \int_0^{h_k} \left((\partial_k f)(a + te_k + \sum_{j=k+1}^d h_j e_j) \right) dt$$

$$= h_k \int_0^1 \left((\partial_k f)(a + th_k e_k + \sum_{j=k+1}^d h_j e_j) \right) dt$$

et finalement

$$\begin{aligned} f(a + h_d e_d) - f(a) &= \int_0^{h_d} ((\partial_d f)(a + t e_d)) dt \\ &= h_d \int_0^1 ((\partial_d f)(a + t h_d e_d)) dt. \end{aligned}$$

Maintenant, on considère le reste :

$$R(h) := f(a + h) - f(a) - \sum_{j=1}^d h_j (\partial_j f)(a)$$

et on obtient

$$\begin{aligned} |R(h)| &\leq \sum_{k=1}^d |h_k| \int_0^1 \left\| (\partial_k f)(a + t h_k e_k + \sum_{j=k+1}^d h_j e_j) - (\partial_k f)(a) \right\|_{\mathbb{R}^p} dt \\ &\leq \max_{k \in \{1, \dots, d\}} (|h_k|) \sum_{k=1}^d \int_0^1 \left\| (\partial_k f)(a + t h_k e_k + \sum_{j=k+1}^d h_j e_j) - (\partial_k f)(a) \right\|_{\mathbb{R}^p} dt \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $k \in \{1, \dots, d\}$. Comme les dérivées partielles sont continues, il existe $\eta_k > 0$ tel que si on choisit $t \in (0, 1)$ tel que $\|t h_k e_k + \sum_{j=k+1}^d h_j e_j\|_{\mathbb{R}^d} \leq \eta_k$ alors on a

$$\left\| (\partial_k f)(a + t h_k e_k + \sum_{j=k+1}^d h_j e_j) - (\partial_k f)(a) \right\|_{\mathbb{R}^p} \leq \varepsilon.$$

Posons $\eta = \min_{k \in \{1, \dots, d\}} (\eta_k)$, on obtient

$$R(h) \leq d \|h\|_{\infty} \varepsilon.$$

En particulier, $R(h) = o(\|h\|)$ et on obtient que f est différentiable en a avec

$$D_a f(h) = \sum_{j=1}^d h_j (\partial_j f)(a).$$

Il reste à démontrer que $(x \mapsto D_x f)$ est continue sur $\mathcal{O}$. Soit $a \in \mathcal{O}$, $\varepsilon > 0$. Comme les dérivées partielles sont continues, pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, il existe $\delta_j > 0$ tel que pour tout $x \in B_{\mathbb{R}^d}(a, \delta_j) \cap \mathcal{O}$ on a

$$\|(\partial_j f)(a) - (\partial_j f)(x)\|_{\mathbb{R}^d} < d^{-1} \varepsilon.$$

On pose $\delta = \min_{j \in \{1, \dots, d\}} (\delta_j)$ et pour tout $h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d$, et $x \in B_{\mathbb{R}^d}(a, \delta) \cap \mathcal{O}$ on a

$$\|(D_a f)(h) - (D_x f)(h)\|_{\mathbb{R}^p} = \left\| \sum_{j=1}^d h_j ((\partial_j f)(a) - (\partial_j f)(x)) \right\|_{\mathbb{R}^p} \leq \|h\|_{\infty} \sum_{j=1}^d \|(\partial_j f)(a) - (\partial_j f)(x)\|_{\mathbb{R}^p} < d \|h\|_{\infty} d^{-1} \varepsilon = \|h\|_{\infty} \varepsilon.$$

On en déduit que pour tout $x \in B_{\mathbb{R}^d}(a, \delta) \cap \mathcal{O}$ on a

$$\|D_a f - D_x f\| < \varepsilon$$

et donc $x \mapsto D_x f$ est continue sur $\mathcal{O}$: $D_x f$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{O})$. □

Remarque 53. En particulier, si f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{O})$, f est différentiable et donc, pour $a \in \mathcal{O}$ et $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $a + h \in \mathcal{O}$, on a

$$f(a + h) = f(a) + \left(\sum_{j=1}^d h_j (\partial_j f)(a) \right) + o(\|h\|_{\mathbb{R}^d}).$$

On obtient donc automatiquement un développement limité de f en a .

Exemple 65. Considérons l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto \left(x_3^3 e^{x_1^2+x_2}, \frac{\ln(1+x_3^2)}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2} \right) \end{cases}$$

On va montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Pour cela, on regarde les applications partielles. On fixe $(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2$ et on définit

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x_1 & \mapsto (f_{1,1}(x_1), f_{2,1}(x_1)) \end{cases} \quad , \quad f_{1,1}(x_1) := x_3^3 e^{x_1^2+x_2}, \quad f_{2,1}(x_1) := \frac{\ln(1+x_3^2)}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

On remarque que $f_{1,1} = x_3^3 \exp \circ P$ où $P(x_1) := x_1^2 + x_2$ est une fonction polynomiale et donc dérivable sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$). On en déduit que $f_{1,1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables et multipliée par une constante. $f_{2,1}$ est une fraction rationnelle donc le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$: $f_{2,1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f admet une dérivée partielle selon x_1 et pour tout (x_1, x_2, x_3) on a

$$(\partial_1 f)(x) = \left(2x_1 x_3^3 e^{x_1^2+x_2}, -2 \frac{x_1 \ln(1+x_3^2)}{(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2} \right).$$

On fixe $(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2$ et on définit

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x_2 & \mapsto (f_{2,1}(x_2), f_{2,2}(x_2)) \end{cases} \quad , \quad f_{2,1}(x_2) := x_3^3 e^{x_1^2+x_2}, \quad f_{2,2}(x_2) := \frac{\ln(1+x_3^2)}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

On remarque que $f_{2,1} = x_3^3 \exp \circ P$ où la fonction polynomiale P est définie pour $x_2 \in \mathbb{R}$ par $P(x_2) = x_1^2 + x_2$. P est une fonction polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et donc $\exp \circ P$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions dérivables (la fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$). La multiplication par la constante x_3^3 étant une opération continue, on en déduit que $f_{2,1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. $f_{2,2}$ est une fraction rationnelle donc le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$: $f_{2,2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f admet une dérivée partielle selon x_2 et pour tout (x_1, x_2, x_3) on a

$$(\partial_2 f)(x_1, x_2, x_3) = \left(x_3^3 e^{x_1^2+x_2}, -2 \frac{x_2 \ln(1+x_3^2)}{(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2} \right).$$

On fixe $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et on définit

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x_3 & \mapsto (f_{3,1}(x_3), f_{3,2}(x_3)) \end{cases} \quad , \quad f_{3,1}(x_3) := x_3^3 e^{x_1^2+x_2}, \quad f_{3,2}(x_3) := \frac{\ln(1+x_3^2)}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

On remarque que $f_{3,1}$ est une fonction polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on remarque que $f_{3,2} = \frac{\ln \circ P}{Q}$ où, pour $x_3 \in \mathbb{R}$, on a posé $P(x_3) = 1 + x_3^2$ et $Q(x_3) = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. P et Q sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynomiales. De plus, on a $P(\mathbb{R}), Q(\mathbb{R}) \subset [1, +\infty[$ donc en particulier $\ln \circ P$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions dérivables ($\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$) et Q ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $f_{3,2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, f admet une dérivée partielle selon x_3 et pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(\partial_3 f)(x_1, x_2, x_3) = \left(3x_3^2 e^{x_1^2+x_2}, 2 \frac{x_3}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2} \left(\frac{1}{1+x_3^2} - \frac{\ln(1+x_3^2)}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2} \right) \right)$$

Il convient maintenant de montrer que, pour $j \in \{1, 2, 3\}$, les applications $(\partial_j f)$ sont continues sur $\mathbb{R}^3$.

Commençons par étudier $\partial_1 f$. On remarque que

$$\partial_1 f = (P_1 \times \exp \circ P_2, Q \times \ln \circ P_3)$$

où pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a posé

$$P_1(x_1, x_2, x_3) := 2x_1 x_3^3, \quad P_2(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + x_2, \quad P_3(x_1, x_2, x_3) := 1 + x_3^2, \quad Q(x_1, x_2, x_3) := -\frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

P_1, P_2 et P_3 sont continus sur $\mathbb{R}^3$ en tant que fonctions polynomiales (de plusieurs variables). Q est une fraction rationnelle (de plusieurs variables) dont le dénominateur ne s'annule pas : Q est bien continue. Par ailleurs,

$P_2(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}$ et $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\exp \circ P_2$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ par composition de fonctions continues et par suite que $P_1 \times \exp \circ P_2$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que produit de fonctions continues. Par ailleurs, $P_3(\mathbb{R}^3) \subset [1, +\infty[$ et $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\ln \circ P_3$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que composée de fonctions continues et par suite $Q \times \ln \circ P_3$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^3$. On en déduit que $\partial_1 f$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.

Continuons par l'étude de $\partial_2 f$. On remarque que

$$\partial_2 f = (P_1 \times \exp \circ P_2, Q \times \ln \circ P_3)$$

où pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a posé

$$P_1(x_1, x_2, x_3) := x_3^3, \quad P_2(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + x_2, \quad P_3(x_1, x_2, x_3) := 1 + x_3^2, \quad Q(x_1, x_2, x_3) := -\frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

P_1, P_2 et P_3 sont continus sur $\mathbb{R}^3$ en tant que fonctions polynomiales (de plusieurs variables). Q est une fraction rationnelle (de plusieurs variables) dont le dénominateur ne s'annule pas : Q est bien continue. Par ailleurs, $P_2(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}$ et $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\exp \circ P_2$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ par composition de fonctions continues et par suite que $P_1 \times \exp \circ P_2$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que produit de fonctions continues. Par ailleurs, $P_3(\mathbb{R}^3) \subset [1, +\infty[$ et $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\ln \circ P_3$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que composée de fonctions continues et par suite $Q \times \ln \circ P_3$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^3$. On en déduit que $\partial_2 f$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.

Enfin, concentrons nous sur $\partial_3 f$. On a

$$\partial_3 f = (P_1 \times \exp \circ P_2, Q_1 - Q_2 \times \ln \circ P_3)$$

où pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a posé

$$P_1(x_1, x_2, x_3) := 3x_3^2, \quad P_2(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + x_2, \quad P_3(x_1, x_2, x_3) := 1 + x_3^2, \\ Q_1(x_1, x_2, x_3) := \frac{2x_3}{(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(1 + x_3^2)}, \quad Q_2(x_1, x_2, x_3) := \frac{2x_3}{(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2}.$$

P_1, P_2 et P_3 sont continus sur $\mathbb{R}^3$ en tant que fonctions polynomiales (de plusieurs variables). Q_1, Q_2 sont des fractions rationnelles (de plusieurs variables) dont le dénominateur ne s'annule pas : Q_1 et Q_2 sont continues sur $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs, $P_2(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}$ et $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\exp \circ P_2$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ par composition de fonctions continues et par suite que $P_1 \times \exp \circ P_2$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que produit de fonctions continues. Par ailleurs, $P_3(\mathbb{R}^3) \subset [1, +\infty[$ et $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\ln \circ P_3$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que composée de fonctions continues et par suite $-Q_2 \times \ln \circ P_3$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^3$. De plus, $Q_1 - Q_2 \times \ln \circ P_3$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que somme de fonctions continues. On en déduit que $\partial_3 f$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.

Nous venons bien de démontrer que les dérivées partielles de f existent dans toutes les directions et sont continues sur $\mathbb{R}^3$: $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Une conséquence directe est que f est différentiable en tout point $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et que pour tout $h = (h_1, h_2, h_3)$ on a

$$(D_{(x_1, x_2, x_3)} f)(h) = h_1(\partial_1 f) + h_2(\partial_2 f) + h_3(\partial_3 f).$$

2.2.3 Opération sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Nous allons maintenant énoncer des propriétés de régularités des sommes de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, de produits, de quotient et de composition.

Attention : on pourrait remplacer l'hypothèse $\mathcal{C}^1$ par différentiable en un point et ces résultats resteraient valides, avec la conclusion que les fonctions sont aussi différentiables en ce point.

Proposition 48. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f, g : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ telles que $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$. Alors $f + g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ et pour tout $a \in \mathcal{O}$

$$(D_a(f + g)) = (D_a f) + (D_a g).$$

Preuve de la Proposition 48. Supposons que $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$. Alors, en particulier f, g sont différentiables et pour tout $a \in \mathcal{O}$ et $h \in \mathbb{R}^d$ tels que $a + h \in \mathcal{O}$, on a

$$(f + g)(a + h) - (f + g)(a) = f(a + h) - f(a) + g(a + h) - g(a) = (D_a f)(h) + (D_a g)(h) + o(\|h\|).$$

On en déduit que $f + g$ est différentiable en a et que $D_a(f + g) = (D_a f) + (D_a g)$. Maintenant, comme $x \mapsto D_x f$ et $x \mapsto D_x g$ sont continues sur $\mathcal{O}$, on en déduit que $x \mapsto (D_x f) + (D_x g)$ est continue sur $\mathcal{O}$ en tant que somme de fonctions continues. En particulier $f + g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$. $\square$

Proposition 49. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $\lambda : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Alors $\lambda f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ et pour tout $a \in \mathcal{O}$ et $h \in \mathbb{R}^d$:

$$(D_a(\lambda f))(h) = (D_a \lambda)(h)f(a) + \lambda(a)(D_a f)(h).$$

Preuve de la Proposition 49. Soit $a \in \mathcal{O}$, pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $a + h \in \mathcal{O}$, on a

$$\begin{aligned} (\lambda f)(a + h) - (\lambda f)(a) &= \lambda(a + h)f(a + h) - \lambda(a)f(a) \\ &= (\lambda(a + h) - \lambda(a))f(a + h) + \lambda(a)(f(a + h) - f(a)) \\ &= ((D_a \lambda)(h) + o(\|h\|))(f(a) + o(1)) + \lambda(a)((D_a f)(h) + o(\|h\|)) \\ &= (D_a \lambda)(h)f(a) + \lambda(a)(D_a f)(h) + o(\|h\|). \end{aligned}$$

On en déduit que λf est différentiable en a et sa différentielle vérifie

$$D_a(\lambda f) = (D_a \lambda)f(a) + \lambda(a)(D_a f).$$

De plus, comme λ et f sont de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ les applications $(x \mapsto D_x \lambda)$ et $(x \mapsto D_x f)$ sont continues sur $\mathcal{O}$. On en déduit que $(x \mapsto D_x(\lambda f))$ est continue sur $\mathcal{O}$ en tant que somme de fonctions continues sur $\mathcal{O}$. $\square$

Proposition 50. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $\lambda : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^*$. Alors $\frac{f}{\lambda} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ et pour tout $a \in \mathcal{O}$:

$$D_a \left(\frac{f}{\lambda} \right) = -\frac{D_a \lambda}{\lambda(a)^2} f(a) + \frac{1}{\lambda(a)} (D_a f).$$

Preuve de la Proposition 50. Il suffit de démontrer que si λ ne s'annule pas sur $\mathcal{O}$ alors $\frac{1}{\lambda}$ est différentiable sur $\mathcal{O}$ et de différentielle

$$D_a \left(\frac{1}{\lambda} \right) = -\frac{D_a \lambda}{\lambda(a)^2}.$$

Ensuite, on applique la Proposition 49. Pour ce faire, on remarque que pour $a \in \mathcal{O}$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $a + h \in \mathcal{O}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(a + h)} - \frac{1}{\lambda(a)} &= -\frac{\lambda(a + h) - \lambda(a)}{\lambda(a + h)\lambda(a)} \\ &= -\frac{(D_a \lambda)(h) + o(\|h\|)}{\lambda(a)^2 + o(1)} \\ &= -\frac{(D_a \lambda)(h)}{\lambda(a)^2} + o(\|h\|). \end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{1}{\lambda}$ est différentiable en a et de différentielle

$$D_a \left(\frac{1}{\lambda} \right) = -\frac{D_a \lambda}{\lambda(a)^2}.$$

Par ailleurs $x \mapsto D_x(\frac{1}{\lambda})$ est continue sur $\mathcal{O}$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathcal{O}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. $\square$

Proposition 51. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ des ouverts. Soient $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$ et $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ et on a

$$D_a(f \circ g) = (D_{f(a)}g) \circ (D_a f).$$

Preuve de la Proposition 51. Soit $a \in \mathcal{O}$ et $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $a + h \in \mathcal{O}$. Comme f est différentiable en a , on a

$$g(f(a+h)) - g(f(a)) = g(f(a) + (D_a f)(h) + o(\|h\|_{\mathbb{R}^d})) - g(f(a)).$$

On pose $\eta = (D_a f)(h) + o(\|h\|_{\mathbb{R}^d}) \in \mathbb{R}^p$ et comme g est différentiable en $f(a)$, on a

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) - g(f(a)) &= g(f(a) + \eta) - g(f(a)) = (D_{f(a)} g)(\eta) + o(\|\eta\|_{\mathbb{R}^p}) \\ &= (D_{f(a)} g)((D_a f)(h)) + (D_{f(a)} g)(o(\|h\|_{\mathbb{R}^d})) + o(\|\eta\|_{\mathbb{R}^p}) \end{aligned}$$

On a

$$\frac{\|(D_{f(a)} g)(o(\|h\|_{\mathbb{R}^d}))\|_{\mathbb{R}^k}}{\|h\|_{\mathbb{R}^d}} = \|(D_{f(a)} g)(o(1))\|_{\mathbb{R}^k} \xrightarrow{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^d}} 0.$$

et on en déduit que $(D_{f(a)} g)(o(\|h\|_{\mathbb{R}^d})) = o(\|h\|_{\mathbb{R}^d})$. À REPRENDRE ICI. De même, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^d}} (D_a f)(h) + o(\|h\|_{\mathbb{R}^d}) = 0_{\mathbb{R}^p}$$

et donc $\eta = o(\|h\|_{\mathbb{R}^d})$. On en conclut que $g \circ f$ est différentiable en $a \in \mathcal{O}$ et de différentielle

$$D_a(g \circ f) = (D_{f(a)} g) \circ (D_a f).$$

Maintenant, on considère la fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ définie par

$$v : \begin{cases} \mathcal{U} & \rightarrow \mathbb{R}^k \\ y & \mapsto D_y g \end{cases}$$

et on remarque que $(x \in \mathcal{O} \mapsto D_{f(x)} g)$ est en fait $v \circ f$ et donc est une application continue sur $\mathcal{O}$ en tant que composée d'applications continues (on a bien $f(\mathcal{O}) \subset \mathcal{U}$). Par ailleurs, on sait que $x \mapsto D_x f$ est continue sur $\mathcal{O}$ et donc $x \mapsto D_x(g \circ f)$ est continue sur $\mathcal{O}$ en tant que composée d'applications continues sur $\mathcal{O}$ ($(D_x f)(\mathbb{R}^d) \subset \mathbb{R}^p$). $\square$

Un corollaire important de la Proposition 51 est l'expression des dérivées partielles de fonctions composées.

Corollaire 2. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ des ouverts. Soit $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$ et $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur domaine de définition. Si on note $f = (f_1, \dots, f_p)$ les composantes de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$, pour tout $a \in \mathcal{O}$, on a

$$(\partial_j(g \circ f))(a) = \sum_{q=1}^p (\partial_j f_q)(a) (\partial_q g)(f(a)).$$

Preuve du Corollaire 2. On remarque que pour $a \in \mathcal{O}$, si on note $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$, on a pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$:

$$\begin{aligned} \partial_j(g \circ f)(a) &= D_a(g \circ f)(e_j) = (D_{f(a)} g)((D_a f)(e_j)) = (D_{f(a)} g)((\partial_j f)(a)) \\ &= (D_{f(a)} g)\left(\sum_{q=1}^p (\partial_j f_q)(a) \varepsilon_q\right) \\ &= \sum_{q=1}^p (\partial_j f_q)(a) (D_{f(a)} g)(\varepsilon_q) \\ &= \sum_{q=1}^p (\partial_j f_q)(a) (\partial_q g)(f(a)) \end{aligned}$$

$\square$

Exemple 66. La proposition 51 nous permet de calculer des différentielles de composées. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$. Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1(I)$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Tout d'abord, on remarque que $f \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1(I)$ car γ est de classe $\mathcal{C}^1(I)$ à valeurs dans $\mathcal{O}$. Comme $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$, on en déduit que $f \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1(I)$ en tant que composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $t \in I$, on souhaite une expression de $(f \circ \gamma)'(t)$. Pour ce faire, on se souvient que pour $t \in I$ et $h \in \mathbb{R}$, on a $(D_t \gamma)(h) = \gamma'(t)h$ et donc, on a

$$D_t(f \circ \gamma) = (D_{\gamma(t)} f) \circ (D_t \gamma)$$

et donc pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a

$$D_t(f \circ \gamma) = h(D_{\gamma(t)}f)(\gamma'(t)).$$

D'après la Proposition 46, pour tout $a \in \mathcal{O}$ et $v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$, on a

$$(D_a f)(v) = \sum_{j=1}^d v_j (\partial_j f)(a).$$

Donc si on écrit $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_d(t))$, on a pour tout $h \in \mathbb{R}$

$$D_t(f \circ \gamma) = h \sum_{j=1}^d \gamma'_j(t) (\partial_j f)(\gamma(t)).$$

et donc, on en déduit que

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{j=1}^d \gamma'_j(t) (\partial_j f)(\gamma(t)).$$

Exemple 67. On va (re)démontrer que $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On considère la fonction

$$H : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, \xi) & \mapsto \xi^2 + x^2 \end{cases}$$

Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. On va montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(H \circ \gamma)(t) = 1$. Pour ce faire, on remarque que γ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ car ses composantes sont les fonctions cosinus et sinus qui sont $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Par ailleurs, $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ en tant qu'application polynomiale (de deux variables) et on a pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$:

$$(\partial_x H)(x, \xi) = 2x, \quad (\partial_\xi H)(x, \xi) = 2\xi.$$

On en déduit que comme $\gamma(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$, l'application $H \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Par ailleurs, pour $t \in \mathbb{R}$, si on pose $\gamma_1(t) = \cos(t)$ et $\gamma_2(t) = \sin(t)$ on a d'après l'Exemple 66

$$\begin{aligned} (H \circ \gamma)'(t) &= \gamma'_1(t) (\partial_x H)(\gamma(t)) + \gamma'_2(t) (\partial_\xi H)(\gamma(t)) \\ &= -2 \sin(t) \cos(t) + 2 \cos(t) \sin(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $H \circ \gamma$ est une fonction constante et donc que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$(H \circ \gamma)(t) = (H \circ \gamma)(0) = 1.$$

Mais par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$1 = (H \circ \gamma)(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t).$$

Exemple 68. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie pour $x \in \mathbb{R}^d$ par $f(x) = \|x\|_2$. On va montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0_{\mathbb{R}^d}\}$ mais n'est pas différentiable en $0_{\mathbb{R}^d}$. Pour ce faire, on remarque que $f = g \circ h$ où on a posé

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \sqrt{t} \end{cases}, \quad h : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto \|x\|_2^2. \end{cases}$$

On montre d'abord que h est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$. En effet, soit $a \in \mathbb{R}^d$, pour tout $v \in \mathbb{R}^d$, on a

$$h(a+v) - h(a) = \|a+v\|_2^2 - \|a\|_2^2 = \|a\|_2^2 + \|v\|_2^2 + 2\langle a, v \rangle - \|a\|_2^2 = 2\langle a, v \rangle + \|v\|_2^2 = L_a(v) + o(\|v\|_2),$$

où on a remarqué que $\|v\|_2^2 = o(\|v\|_2)$ et définit l'application linéaire $L_a(v) := 2\langle a, v \rangle$. On en déduit que $(D_a h)(v) = 2\langle a, v \rangle$. Par ailleurs, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et de différentielle en $t \in \mathbb{R}_+^*$ donnée par la multiplication par $\frac{1}{2\sqrt{t}}$. On remarque que $h(\mathbb{R}^d \setminus \{0_{\mathbb{R}^d}\}) \subset \mathbb{R}_+^*$. Comme $f = g \circ h$ on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d \setminus \{0_{\mathbb{R}^d}\})$ par composition. De plus, pour $a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0_{\mathbb{R}^d}\}$, on a pour tout $v \in \mathbb{R}^d$

$$(D_a f)(v) = (D_{h(a)} g \circ D_a h)(v) = (D_{h(a)} g)(D_a h(v)) = \frac{\langle a, v \rangle}{\sqrt{h(a)}} = \frac{\langle a, v \rangle}{\|a\|_2} = \frac{1}{\|a\|_2} \sum_{j=1}^d a_j v_j.$$

On remarque que f n'est pas différentiable en $0_{\mathbb{R}^d}$. En effet, on considère le chemin défini pour $t \in \mathbb{R}$ par $\gamma(t) = (t, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$. On a pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t} = \frac{1}{t} \|\gamma(t)\|_2 = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

En particulier $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t}$ n'admet pas de limite en 0. Or, si f était différentiable en $0_{\mathbb{R}^d}$, comme γ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\gamma(0) = 0_{\mathbb{R}^d}$ alors $f \circ \gamma$ devrait être dérivable en 0 : ce n'est pas le cas donc f n'est pas différentiable en $0_{\mathbb{R}^d}$.

Exemple 69. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On considère

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+^* \times \{0\}) \\ (r, \theta) & \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)). \end{cases}$$

On cherche à exprimer la différentielle de $f \circ \Phi$ en fonction de celles de f et de Φ . Tout d'abord, on montre que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$. On remarque que Φ admet des dérivées partielles selon r car, à $\theta \in]0, 2\pi[$ fixé, l'application partielle

$$r \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \Phi(r, \theta)$$

est la multiplication du vecteur constant $(\cos(\theta), \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2$ par l'application identité $r \mapsto r$ qui est dérivable. On en déduit que Φ admet une dérivée partielle selon r et que pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$ on a

$$(\partial_r \Phi)(r, \theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

Par ailleurs, l'application $\partial_r \Phi$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$ car on a

$$(\partial_r \Phi) = (\cos \circ \pi_2, \sin \circ \pi_2)$$

où π_2 est l'application deuxième coordonnée continue sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $(\partial_r \Phi)$ est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$. Maintenant, on fixe $r > 0$ et on considère l'application partielle

$$\theta \in]0, 2\pi[\mapsto \Phi(r, \theta).$$

Cette application est dérivable sur $]0, 2\pi[$ car les fonctions $\cos$ et $\sin$ le sont. On obtient donc pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$

$$(\partial_\theta \Phi)(r, \theta) = r(-\sin(\theta), \cos(\theta)).$$

On remarque que

$$(\partial_\theta \Phi) = (-P \times \sin \circ \pi_2, P \times \cos \circ \pi_2)$$

où π_2 est l'application deuxième coordonnée et $P : \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$ est l'application polynomiale à deux variables (donc continue sur $\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$) définie par $P(r, \theta) = r$. Comme on vient de le voir, on sait que $\sin \circ \pi_2$ et $\cos \circ \pi_2$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$ et on en déduit que $(\partial_\theta \Phi)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$ en tant que produit d'applications continues. On vient donc de démontrer que $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[)$. Par conséquent, $f \circ \Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[)$ par composition d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ et on a pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$ et tout $h = (h_r, h_\theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(r, \theta) + h \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$ l'expression suivante

$$(D_{(r, \theta)}(f \circ \Phi))(h) := ((D_{\Phi(r, \theta)} f) \circ (D_{(r, \theta)} \Phi))(h) = (D_{\Phi(r, \theta)} f)((D_{(r, \theta)} \Phi)(h)).$$

Or pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, et $v \in \mathbb{R}^2$:

$$(D_x f)(v) = v_1(\partial_1 f)(x) + v_2(\partial_2 f)(x)$$

et pour tout $h = (h_r, h_\theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(r, \theta) + h \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$

$$(D_{(r, \theta)} \Phi)(h) = h_r(\partial_r \Phi)(r, \theta) + h_\theta(\partial_\theta \Phi)(r, \theta) = (h_r \cos(\theta) - h_\theta r \sin(\theta), h_r \sin(\theta) + h_\theta r \cos(\theta)).$$

Et donc pour tout $h \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} (D_{(r, \theta)}(f \circ \Phi))(h) &= (h_r \cos(\theta) - h_\theta r \sin(\theta)) (\partial_1 f)(\Phi(r, \theta)) + (h_r \sin(\theta) + h_\theta r \cos(\theta)) (\partial_2 f)(\Phi(r, \theta)) \\ &= h_r(\cos(\theta)(\partial_1 f)(\Phi(r, \theta)) + \sin(\theta)(\partial_2 f)(\Phi(r, \theta))) \\ &\quad + h_\theta r(-\sin(\theta)(\partial_1 f)(\Phi(r, \theta)) + \cos(\theta)(\partial_2 f)(\Phi(r, \theta))). \end{aligned}$$

Comme par ailleurs, on sait que pour tout $h \in \mathbb{R}^2$

$$(D_{(r,\theta)}(f \circ \Phi))(h) = h_r(\partial_r(f \circ \Phi))(r, \theta) + h_\theta(\partial_\theta(f \circ \Phi))(r, \theta)$$

on aboutit à

$$(\partial_r(f \circ \Phi))(r, \theta) = (\cos(\theta)(\partial_1 f)(\Phi(r, \theta)) + \sin(\theta)(\partial_2 f)(\Phi(r, \theta)))$$

et

$$(\partial_\theta(f \circ \Phi))(r, \theta) = r(-\sin(\theta)(\partial_1 f)(\Phi(r, \theta)) + \cos(\theta)(\partial_2 f)(\Phi(r, \theta))).$$

On aurait aussi pu, pour gagner du temps, calculer directement les dérivées partielles à l'aide du Corollaire 2.

Exemple 70. Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application injective de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et on note $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ ses composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On suppose de plus que pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a $\|\gamma'(s)\|_2 = 1$. On considère l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R} \times]-1, 1[& \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, t) & \mapsto \gamma(s) + t\nu(s) \end{cases}$$

où le vecteur $\nu(s) = (-\gamma'_2(s), \gamma'_1(s))$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On remarque que pour $(s, t) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$, on a

$$\Phi(s, t) = (\gamma_1(s) - t\gamma'_2(s), \gamma_2(s) + t\gamma'_1(s)).$$

En particulier, à $t \in]-1, 1[$ fixé, l'application partielle $s \in \mathbb{R} \mapsto \Phi(s, t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car γ_j et γ'_j le sont ($j \in \{1, 2\}$) et on a pour tout $(s, t) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$

$$(\partial_s \Phi)(s, t) = (\gamma'_1(s) - t\gamma''_2(s), \gamma'_2(s) + t\gamma''_1(s)).$$

Par ailleurs, on a

$$(\partial_t \Phi) = (\gamma'_1 \circ \pi_1 - \pi_2 \times \gamma''_2 \circ \pi_1, \gamma'_2 \circ \pi_1 + \pi_2 \times \gamma''_1 \circ \pi_1)$$

où π_1, π_2 sont les applications premières et deuxièmes coordonnées (continues sur $\mathbb{R} \times]-1, 1[$). Comme pour $j \in \{1, 2\}$, on a par hypothèse que γ'_j et γ''_j sont continues sur $\mathbb{R}$ et que les applications coordonnées sont continues sur $\mathbb{R} \times]-1, 1[$, on en déduit que $\gamma'_1 \circ \pi_1, \gamma''_2 \circ \pi_1, \gamma'_2 \circ \pi_1$ et $\gamma''_1 \circ \pi_1$ sont continues sur $\mathbb{R} \times]-1, 1[$ par composition d'applications continues. De plus, $\pi_2 \times \gamma''_2 \circ \pi_1$ et $\pi_2 \times \gamma''_1 \circ \pi_1$ sont continues sur $\mathbb{R} \times]-1, 1[$ en tant que multiplication d'applications continues et par suite, $\partial_s \Phi$ est continue sur $\mathbb{R} \times]-1, 1[$ car chacune de ses composante est une somme d'applications continues.

De plus, à $s \in \mathbb{R}$ fixé, l'application partielle $t \in]-1, 1[\mapsto \Phi(s, t)$ est dérivable sur $] -1, 1[$ car chaque composante est une application polynomiale en t . De plus, on a pour tout $(s, t) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$

$$(\partial_t \Phi)(s, t) = (-\gamma'_2(s), \gamma'_1(s)).$$

On remarque que

$$(\partial_t \Phi) = (-\gamma'_2 \circ \pi_1, \gamma'_1 \circ \pi_1)$$

Comme pour $(\partial_s \Phi)$, on utilise un théorème de composition d'applications continues pour justifier que $\partial_t \Phi$ est continue sur $\mathbb{R} \times]-1, 1[$.

On en déduit que $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times]-1, 1[)$. Par conséquent, $f \circ \Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times]-1, 1[)$ par composition. Maintenant, on cherche à exprimer les dérivées partielles de $f \circ \gamma$ par rapport à celles de f et γ . Pour $(s, t) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$, on note $\Phi(s, t) = (\Phi_1(s, t), \Phi_2(s, t))$ et le Corollaire 2 donne

$$\begin{aligned} (\partial_s(f \circ \Phi))(s, t) &= (\partial_s \Phi_1)(s, t)(\partial_1 f)(\Phi(s, t)) + (\partial_s \Phi_2)(s, t)(\partial_2 f)(\Phi(s, t)) \\ &= (\gamma'_1(s) - t\gamma''_2(s))(\partial_1 f)(\Phi(s, t)) + (\gamma'_2(s) + t\gamma''_1(s))(\partial_2 f)(\Phi(s, t)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\partial_t(f \circ \Phi))(s, t) &= (\partial_t \Phi_1)(s, t)(\partial_1 f)(\Phi(s, t)) + (\partial_t \Phi_2)(s, t)(\partial_2 f)(\Phi(s, t)) \\ &= -\gamma'_2(s)(\partial_1 f)(\Phi(s, t)) + \gamma'_1(s)(\partial_2 f)(\Phi(s, t)). \end{aligned}$$

Pour votre culture de géométrie différentielle, on remarque que pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $(\gamma'(s), \nu(s))$ qui est un repère orthonormé direct de $\mathbb{R}^2$, où on a posé

$$\nu(s) = (-\gamma'_2(s), \gamma'_1(s)).$$

On le voit en remarquant que

$$\|\gamma'(s)\|_2 = \sqrt{\gamma'_1(s)^2 + \gamma'_2(s)^2} = \|\nu(s)\|_2$$

et que comme on a

$$1 = \|\gamma'(s)\|_2^2 = \gamma'_1(s)^2 + \gamma'_2(s)^2$$

en dérivant par rapport à $s \in \mathbb{R}$, on obtient

$$0 = 2(\gamma'_1(s)\gamma''_1(s) + \gamma'_2(s)\gamma''_2(s)) = 2\langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle.$$

En particulier, en décomposant $\gamma''(s)$ dans la base $(\gamma'(s), \nu(s))$, on sait que

$$\gamma''(s) = \kappa(s)\nu(s), \quad \text{avec} \quad \kappa(s) = \langle \gamma''(s), \nu(s) \rangle.$$

On peut donc ré-écrire pour tout $s \in \mathbb{R}$ que $\gamma''_1(s) = -\kappa(s)\gamma'_2(s)$ et $\gamma''_2(s) = \kappa(s)\gamma'_1(s)$. κ s'appelle la courbure de γ et si on reprend l'expression de $\partial_s(f \circ \Phi)$ on obtient pour tout $(s, t) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$:

$$\begin{aligned} \partial_s(f \circ \Phi)(s, t) &= (1 - t\kappa(s))\gamma'_1(s)(\partial_1 f)(\Phi(s, t)) + (1 - t\kappa(s))\gamma'_2(s)(\partial_2 f)(\Phi(s, t)) \\ &= (1 - t\kappa(s))(\gamma'_1(s)(\partial_1 f)(\Phi(s, t)) + \gamma'_2(s)(\partial_2 f)(\Phi(s, t))). \end{aligned}$$

2.2.4 La matrice Jacobienne

Un outil que l'on utilise parfois en pratique est la matrice Jacobienne. C'est le but de la définition ci-dessous.

Définition 31. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^p$. On note $(f_1, \dots, f_p)$ les composantes de f . Si f admet des dérivées partielles selon toutes ses variables, on définit la matrice jacobienne de f en $a \in \mathcal{O}$, que l'on note $J_f(a)$, par

$$J_f(a) := ((\partial_k f_j)(a))_{\substack{j \in \{1, \dots, p\} \\ k \in \{1, \dots, d\}}} = \begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(a) & (\partial_2 f_1)(a) & \cdots & (\partial_d f_1)(a) \\ (\partial_1 f_2)(a) & (\partial_2 f_2)(a) & \cdots & (\partial_d f_2)(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 f_p)(a) & (\partial_2 f_p)(a) & \cdots & (\partial_d f_p)(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R}).$$

Remarque 54. En fait, si f est différentiable en $a \in \mathcal{O}$, $J_f(a)$ n'est rien d'autre que la matrice de la différentielle $D_a f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^p$. Plus précisément, si $(e_1, \dots, e_d)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$, si on note M la matrice de $D_a f$ dans ces bases, on a, par définition $M = (M_{j,k})_{\substack{j \in \{1, \dots, p\} \\ k \in \{1, \dots, d\}}}$ où pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$ et $k \in \{1, \dots, d\}$ $M_{j,k}$ est la composante selon ε_j de $(D_a f)(e_k)$.

Pour $k \in \{1, \dots, d\}$, on a

$$(D_a f)(e_k) = (\partial_k f)(a) = \sum_{j=1}^p (\partial_k f_j)(a) \varepsilon_j$$

On en déduit que $J_f(a)$ est bien la matrice de l'application linéaire $D_a f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^p$.

Exemple 71. On considère l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+^* \times \{0\}) \\ (r, \theta) & \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)). \end{cases}$$

On a déjà vu à l'Exemple 69 que $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[)$ et en particulier admet des dérivées partielles selon r et θ . Par ailleurs, pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$, on a

$$J_\Phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

En particulier, si on reprend l'Exemple 69, on remarque que

$$\begin{pmatrix} \partial_r(f \circ \Phi)(r, \theta) \\ \partial_\theta(f \circ \Phi)(r, \theta) \end{pmatrix} = J_\Phi(r, \theta)^\top \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(\Phi(r, \theta)) \\ (\partial_2 f)(\Phi(r, \theta)) \end{pmatrix}$$

Proposition 52. Soient $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ deux ouverts. Soient $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$ et $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^q$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, on a

$$J_{g \circ f}(a) = (J_{f(a)} g)(J_a f).$$

Preuve de la Proposition 52. On a pour $j \in \{1, \dots, p\}$ et $k \in \{1, \dots, d\}$

$$(J_a f)_{j,k} = (\partial_k f_j)(a)$$

et pour $r \in \{1, \dots, k\}$, $s \in \{1, \dots, q\}$

$$(J_{f(a)} g)_{s,r} = (\partial_r g_s)(f(a)).$$

On en déduit que le pour $s \in \{1, \dots, q\}$ et $j \in \{1, \dots, d\}$, on a d'après la formule du produit des matrices

$$((J_{f(a)} g)(J_a f))_{s,j} = \sum_{r=1}^k (J_{f(a)} g)_{s,r} (J_a f)_{r,j} = \sum_{r=1}^k (\partial_r g_s)(f(a)) (\partial_j f_r)(a) = (\partial_j (g \circ f)_s)(a)$$

ce qui est précisément $(J_{g \circ f}(a))_{s,j}$. On en déduit que

$$J_{g \circ f}(a) = (J_{f(a)} g)(J_a f).$$

□

2.3 Différentielles d'ordre deux

Dans le cadre de l'étude d'extrema, nous aurons besoin de la notion de différentielle seconde.

Définition 32. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application différentiable sur $\mathcal{O}$. On dit que f est deux-fois différentiable en $a \in \mathcal{O}$ si l'application

$$Df : \begin{cases} \mathcal{O} & \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p) \\ x & \mapsto D_x f \end{cases}$$

est différentiable en $a \in \mathcal{O}$ et on note $D_a^2 f \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p), \mathbb{R}^p)$.

Remarque 55. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application différentiable sur $\mathcal{O}$. Si f est deux fois différentiable en $a \in \mathcal{O}$, on a pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $a + h \in \mathcal{O}$:

$$f(a + h) = f(a) + D_a f(h) + \frac{1}{2} D_a^2 f(h, h) + o(\|h\|^2).$$

En effet, comme $\mathcal{O}$ est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta) \subset \mathcal{O}$. Soit $v \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|v\|_{\mathbb{R}^d} = 1$, on pose $g_v :]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}^p$ définie pour $t \in]-\delta, \delta[$ par $g_v(t) = f(a + tv)$. On remarque que l'application $(t \mapsto a + tv) \in \mathcal{C}^\infty(]-\delta, \delta[, \mathcal{O})$ et comme f est différentiable sur $\mathcal{O}$ on obtient que g_v est dérivable sur $]-\delta, \delta[$ et on a

$$g'_v(t) = D_{a+tv} f(v).$$

Par ailleurs, comme Df est différentiable en a , on a

$$D_{a+\eta} f = D_a f + (D_a^2 f)(\eta, \cdot) + r_\eta \tag{2.2}$$

avec $r_\eta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ vérifiant

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\|r_\eta\|}{\|\eta\|_{\mathbb{R}^d}} = 0.$$

Par définition de la norme triple, cela signifie qu'uniformément pour $v \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|v\|_{\mathbb{R}^d} = 1$ on a

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\|r_\eta(v)\|_{\mathbb{R}^p}}{\|\eta\|_{\mathbb{R}^d}} = 0.$$

En évaluant (2.2) en v avec $\eta = tv$, on obtient

$$(D_{a+tv})f(v) = (D_a f)(v) + (D_a^2 f)(tv, v) + r_{tv}(v) = (D_a f)(v) + t(D_a^2 f)(v, v) + r_{tv}(v).$$

En particulier, pour $t \neq 0$, on a

$$\frac{g'_v(t) - g'_v(0)}{t} - (D_a^2 f)(v, v) = \frac{(D_{a+tv})f(v) - (D_a f)(v)}{t} - (D_a^2 f)(v, v) = r_{tv}(v)$$

or on a

$$\|r_{tv}(v)\|_{\mathbb{R}^p} \leq \|r_{tv}\| \|v\|_{\mathbb{R}^d} = \|r_{tv}\|$$

et donc $\lim_{t \rightarrow 0} \|r_{tv}(v)\|_{\mathbb{R}^p} = 0$ et on vient donc de démontrer que g_v est deux fois dérivable en a et de dérivée seconde vérifiant

$$g_v''(0) = (D_a^2 f)(v, v).$$

D'après le théorème de Taylor-Young, on a alors

$$g_v(t) = g_v(0) + tg_v'(0) + \frac{t^2}{2} g_v''(0) + o(t^2).$$

C'est à dire

$$f(a + tv) = f(a) + t(D_a f)(v) + \frac{t^2}{2} (D_a^2 f)(v, v) + o(t^2).$$

Maintenant, on considère $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $a + h \in \mathcal{O}$ et on suppose que $h \neq 0_{\mathbb{R}^d}$. On pose $v = \frac{h}{\|h\|_{\mathbb{R}^d}}$ et $t = \|h\|_{\mathbb{R}^d}$. On a

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a + tv) = f(a) + t(D_a f)(v) + \frac{t^2}{2} (D_a^2 f)(v, v) + o(t^2) \\ &= f(a) + (D_a f)(tv) + \frac{1}{2} (D_a^2 f)(tv, tv) + o(t^2) \\ &= f(a) + (D_a f)(h) + \frac{1}{2} (D_a^2 f)(h, h) + o(\|h\|_{\mathbb{R}^d}^2). \end{aligned}$$

Exemple 72. Lorsque $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable, cela correspond au développement de Taylor-Young.

Définition 33. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^p$ qui admet des dérivées partielles dans toutes les directions en tout point de $\mathcal{O}$. Si pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ les applications partielles $\partial_j f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^p$ admettent des dérivées partielles dans toutes les directions en $a \in \mathcal{O}$, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$ on note $\partial_{k,j} f(a) := \partial_k(\partial_j f)(a)$ la dérivée partielle de $\partial_j f$ dans selon la k -ième variable.

Remarque 56. Comme mentionné en Remarque 48 certaines personnes notent

$$\partial_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

De la même façon on peut noter

$$\partial_{k,j} f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a).$$

Exemple 73. Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1^2 x_2 \end{cases}$$

f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ en tant qu'application polynomiale et en particulier admet des dérivées partielles dans toutes les directions. Pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = 2x_1 x_2, \quad \partial_2 f(x_1, x_2) = x_1^2.$$

On remarque que $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont également de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ et donc admettent des dérivées partielles dans toutes les directions. Pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \partial_{1,1} f(x_1, x_2) &= \partial_1(\partial_1 f)(x_1, x_2) = 2x_2, & \partial_{2,1} f &= \partial_2(\partial_1 f)(x_1, x_2) = 2x_1, \\ \partial_{1,2} f(x_1, x_2) &= \partial_1(\partial_2 f)(x_1, x_2) = 2x_1 \partial_{2,2} f(x_1, x_2) = \partial_2(\partial_2 f)(x_1, x_2) = 0. \end{aligned}$$

Proposition 53. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application différentiable sur $\mathcal{O}$ et deux-fois différentiable en $a \in \mathcal{O}$ alors on a

$$(D_a^2 f)(h, h) := \sum_{j,k=1}^d (\partial_{j,k}^2 f)(a) h_j h_k$$

Preuve de la Proposition 53. Soit $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Comme $\mathcal{O}$ est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta) \subset \mathcal{O}$. Pour tout $t \in]-\delta, \delta[$ et tout $k \in \{1, \dots, d\}$, on a $a + te_k \in B(a, \delta) \subset \mathcal{O}$ et comme f est deux fois différentiable en a , pour $j, k \in \{1, \dots, d\}$, on a pour tout $t \in]-\delta, \delta[$:

$$D_{a+te_k}f(e_j) = D_af(e_j) + t(D_a^2f)(e_k, e_j) + o(t). \quad (2.3)$$

D'après la Proposition 45, comme f est différentiable sur $\mathcal{O}$, on a

$$(D_{a+te_k}f)(e_j) = (\partial_j f)(a + te_k), \quad (D_af)(e_j) = (\partial_j f)(a).$$

En particulier (2.3) se ré-écrit pour tout $t \in]-\delta, \delta[\setminus \{0\}$ comme

$$(D_a^2f)(e_k, e_j) = \frac{D_{a+te_k}f(e_j) - D_af(e_j)}{t} + o(1) = \frac{(\partial_j f)(a + te_k) - (\partial_j f)(a)}{t} + o(1).$$

Comme par hypothèse $\partial_j f$ admet une dérivée partielle dans la direction k , on obtient en passant à la limite $t \rightarrow 0$ que

$$(D_a^2f)(e_k, e_j) = \partial_k(\partial_j f)(a) = (\partial_{k,j}^2 f)(a).$$

Maintenant, on remarque que pour $h = \sum_{j=1}^d h_j e_j$ on a

$$(D_a^2f)(h, h) = (D_a^2f)\left(\sum_{j=1}^d h_j e_j, \sum_{k=1}^d h_k e_k\right) = \sum_{j,k} h_j h_k (D_a^2f)(h_j, h_k) = \sum_{j,k} h_j h_k (\partial_{k,j}^2 f)(a).$$

où on a utilisé la linéarité de D_a^2f par rapport à chacune de ses variables. $\square$

Définition 34. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. On dit que $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^2(\mathcal{O}, \mathbb{R}^p)$ si f est deux fois différentiable sur $\mathcal{O}$ et l'application

$$\begin{cases} \mathcal{O} & \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p), \mathbb{R}^p) \\ x & \mapsto D_x^2 f \end{cases}$$

est continue.

Exactement comme dans le cas de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, cette définition est peu utile en pratique (mais ô combien efficace lorsque l'on étudie des différentielle en théorie). Dans les études de fonctions de plusieurs variables, on préférera la caractérisation suivante.

Proposition 54. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est de classe $\mathcal{C}^2(\mathcal{O}, \mathbb{R}^p)$.
2. f admet des dérivées partielles secondes dans toutes les variables en tout point de $\mathcal{O}$ et ces dernières sont toutes continues sur $\mathcal{O}$

La Proposition 47 est admise. Elle s'obtient de manière similaire à la Proposition 47.

Un résultat crucial est le Théorème de Schwarz que l'on admettra.

Théorème 2. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O}, \mathbb{R}^d)$. Pour tout $j, k \in \{1, \dots, d\}$ et tout $x \in \mathcal{O}$, on a

$$(\partial_{k,j} f)(x) = (\partial_{j,k} f)(x).$$

Remarque 57. Il est aisé de démontrer que les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. En effet, pour $N \in \mathbb{N}$, on considère

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_d) & \mapsto \sum_{\substack{L(\alpha)=0 \\ \alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d}}^N c_\alpha \prod_{p=1}^d x_p^{\alpha_p} \end{cases}$$

où pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $L(\alpha) \in \{0, \dots, N\}$, $c_\alpha \in \mathbb{R}$. f est une application polynomiale donc elle admet des dérivées partielles dans toutes les directions et pour $j \in \{1, \dots, d\}$ et $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ on a

$$(\partial_j f)(x) = \sum_{\substack{L(\alpha)=0 \\ \alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d}}^N c_\alpha \alpha_j x_j^{\alpha_j-1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^d x_p^{\alpha_p}.$$

Par conséquent $\partial_j f$ est également une application polynomiale donc est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Par ailleurs pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$ on a pour $x \in \mathbb{R}^d$

$$\partial_{k,j}^2 f(x) = \begin{cases} \sum_{\substack{L(\alpha)=0 \\ \alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d}}^N c_\alpha \alpha_j \alpha_k x_k^{\alpha_k-1} x_j^{\alpha_j-1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j,k}}^d x_p^{\alpha_p} & \text{si } j \neq k \\ \sum_{\substack{L(\alpha)=0 \\ \alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d}}^N c_\alpha \alpha_j (\alpha_j - 1) x_j^{\alpha_j-2} \prod_{p \neq j}^d x_p^{\alpha_p} & \text{sinon} \end{cases}$$

Les applications dérivées partielles seconde étant toutes polynomiale, elles sont donc continues et donc $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O}, \mathbb{R}^d)$.

2.3.1 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ pour $k = 1, 2$

Nous ne démontrerons pas les énoncés de ce paragraphe suivants. N'hésitez pas à essayer de le faire chez vous, il s'agit de bons exercices.

Dans tout ce paragraphe $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert.

Proposition 55. Soit $k \in \{1, 2\}$. Si $f, g \in \mathcal{C}^k(\mathcal{O}, \mathbb{R}^p)$ alors $f + g \in \mathcal{C}^k(\mathcal{O}, \mathbb{R}^p)$.

Proposition 56. Soit $k \in \{1, 2\}$. Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{O}, \mathbb{R}^p)$ et $\lambda \in \mathcal{C}^k(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ alors la fonction $\lambda f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{O}, \mathbb{R}^p)$.

Proposition 57. Soit $k \in \{1, 2\}$. Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{O}, \mathbb{R}^p)$ et $\lambda \in \mathcal{C}^k(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ et que pour tout $a \in \mathcal{O}$, $\lambda(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{\lambda} \in \mathcal{C}^k(\mathcal{O}, \mathbb{R}^p)$.

Proposition 58. Soit $k \in \{1, 2\}$. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ deux ouverts. Soit $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^q$. On suppose que $f(\mathcal{O}) \subset \mathcal{U}$. Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{O}, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{C}^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^q)$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{O}, \mathbb{R}^q)$.

2.4 Le cas particulier des fonctions à valeurs réelles : l'optimisation

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cas particulier des fonctions à valeurs réelles, c'est-à-dire que l'on considère des fonctions

$$f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

où A est une partie de $\mathbb{R}^d$. L'objectif final de ce paragraphe est de pouvoir étudier les quantités

$$\sup_{x \in A} f(x) := \sup\{f(x) : x \in A\}, \quad \inf_{x \in A} f(x) := \inf\{f(x) : x \in A\}.$$

Ces quantités ne sont bien évidemment définies qu'à condition que f soit à valeurs dans $\mathbb{R}$. En effet, dans ce cas, on a $\{f(x) : x \in A\} \subset \mathbb{R}$ et, si $A \neq \emptyset$ on peut considérer le supremum ou bien l'infimum de ces parties de $\mathbb{R}$ (quitte à ce qu'ils soient $\pm\infty$!).

2.4.1 Existence d'extrema : compacité

La plupart des outils mentionnés dans ce paragraphe ne sont pas au programme de l'UE. Ils sont rappelés ici pour que, si vous souhaitez poursuivre des études en mathématiques, vous puissiez vous familiariser avec ces notions. En pratique, il faut retenir la Définition 35 et la Proposition 59.

Définition 35. On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}^d$ est bornée s'il existe $\rho > 0$ tel que $A \subset B_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, \rho)$.

Définition 36. On dit que $A \subset \mathbb{R}^d$ est compact si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que la suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans A .

Remarque 58. Certaines autrices et certains auteurs disent que la Définition 36 est celle de la compacité séquentielle car il s'agit d'une définition qui met en jeu des suites. Comme il n'y aura pas d'ambiguïté dans ce cours, nous dirons simplement que A est compact s'il satisfait cette propriété.

Exemple 74. Pour $a < b$, les intervalles de la forme $[a, b]$ sont des compacts de $\mathbb{R}$: c'est le théorème de Bolzano-Weirstrass. Redémontrons-le ! La démonstration se fait en trois étapes. La première consiste à prouver que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet ce que l'on appelle une limite inférieure. La deuxième consiste à fabriquer une extractrice φ adaptée à la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la dernière étape permet de vérifier que $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la limite inférieure introduite dans l'étape 1.

Étape 1 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[a, b]$. On construit la suite définie pour $k \in \mathbb{N}$ par

$$y_k := \sup_{n \geq k} x_n.$$

Ce supremum existe et est fini pour tout $k \in \mathbb{N}$ car l'ensemble $\{x_n : n \geq k\} \subset \mathbb{R}$ est non vide (il y a au moins x_k dans cet ensemble) et il est majoré car pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc *a fortiori* pour tout $n \geq k$, on a $x_n \leq b$. On remarque que par construction, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a \leq x_n \leq b$, on a également pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a \leq y_k \leq b$.

On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\{x_n : n \geq k+1\} \subset \{x_n : n \geq k\}$ et donc

$$y_{k+1} = \sup_{n \geq k+1} x_n \leq \sup_{n \geq k} x_n = y_k$$

$(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc une suite décroissante minorée qui converge vers sa borne inférieure notée $\ell \in [a, b]$:

$$\ell = \inf_{k \in \mathbb{N}} y_k = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq k} x_n.$$

Étape 2 : Construisons maintenant l'application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par récurrence. On a

$$\ell \leq y_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n. \quad (2.4)$$

Initialisation : On utilise la caractérisation de la borne⁴ sup pour $y_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$ avec $\varepsilon = 1$: il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$x_{n_0} > y_0 - 1 \geq \ell - 1$$

où on a utilisé (2.4) dans la seconde inégalité. On pose $\varphi(0) = n_0$.

Hypothèse de récurrence : Soit $m \geq 0$ supposons que pour tout $p \in \{0, \dots, m\}$ on a construit $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(m)$ tels que

$$\forall k \in \{0, \dots, m\}, \quad x_{\varphi(k)} \geq \ell - \frac{1}{k+1}.$$

Hérédité : Par définition, on a $\ell \leq y_{\varphi(m)+1} = \sup_{n \geq \varphi(m)+1} x_n$ et donc par caractérisation de la borne sup avec $\varepsilon = \frac{1}{m+1}$, il existe $n_{m+1} \geq \varphi(m) + 1 > \varphi(m)$ tel que

$$x_{n_{m+1}} > y_{\varphi(m)+1} - \frac{1}{m+1} \geq \ell - \frac{1}{m+1}.$$

On pose $\varphi(m+1) = n_{m+1}$ et cela conclut la construction par récurrence.

Étape 3 : Il reste maintenant à démontrer que la suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $[a, b]$. Par construction, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x_{\varphi(n)} > \ell - \frac{1}{n+1}.$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a également

$$x_{\varphi(n)} \leq \sup_{k \geq \varphi(n)} x_k = y_{\varphi(n)}.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\ell - \frac{1}{n+1} < x_{\varphi(n)} \leq y_{\varphi(n)}.$$

Les deux quantités qui encadrent $x_{\varphi(n)}$ convergent vers ℓ , ce qui prouve le résultat attendu à l'aide du théorème des gendarmes⁵.

4. On rappelle que pour une partie F de $\mathbb{R}$, un nombre réel M vérifie $M = \sup F$ si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées :

- pour tout $x \in F$ on a $x \leq M$,
- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in F$ tel que $x > M - \varepsilon$.

5. Ici, on a utilisé le fait que si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, on a $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ . En effet, fixons $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|y_n - \ell| < \varepsilon$. On remarque que nécessairement pour tout $n \geq n_0$, on a $\varphi(n) \geq n \geq n_0$ et donc pour tout $n \geq n_0$, on a $|y_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$.

Théorème 3. Soit $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^d$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) $\mathcal{F}$ est compact.
- (ii) $\mathcal{F}$ est fermé et borné.

Preuve du Théorème 3.

(i) $\implies$ (ii) : Supposons que $\mathcal{F}$ soit compact. Montrons que $\mathcal{F}$ est fermé en montrant que $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$. Soit $\ell \in \overline{\mathcal{F}}$, par caractérisation séquentielle de l'adhérence, il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$. Par ailleurs, comme $\mathcal{F}$ est compact, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ admette une limite $\tilde{\ell} \in \mathcal{F}$. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^d$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $\|x_n - \ell\|_{\mathbb{R}^d} < \varepsilon$. Comme $\varphi(n) \geq n$, on a pour tout $n \geq n_0$, $\|x_{\varphi(n)} - \ell\|_{\mathbb{R}^d} < \varepsilon$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = \ell$ et par unicité de la limite $\ell = \tilde{\ell} \in \mathcal{F}$ et donc $\overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est fermé.

Montrons maintenant que $\mathcal{F}$ est borné. Si ce n'était pas le cas, pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in \mathcal{F}$ telle que

$$\|x_n\|_{\mathbb{R}^d} \geq n.$$

Or, par construction $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{F}$ est compact donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathcal{F}$. C'est absurde car alors on a

$$\|x_{\varphi(n)}\|_{\mathbb{R}^d} \geq \varphi(n)$$

et, lorsque $n \rightarrow +\infty$, le membre de gauche converge vers $\|\ell\|_{\mathbb{R}^d} < +\infty$ alors que le membre de droite diverge vers $+\infty$.

On en déduit que $\mathcal{F}$ est également borné.

(ii) $\implies$ (i) : Comme $\mathcal{F}$ est borné, il existe $\rho > 0$ tel que $\mathcal{F} \subset B_{\|\cdot\|_{\infty}}(0_{\mathbb{R}^d}, \rho) = [-\rho, \rho]^d$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})$.

D'après l'Exemple 74, $[-\rho, \rho]$ est un compact de $\mathbb{R}$ donc il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{1,\varphi_1(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell_1 \in \mathbb{R}$.

Soit $k \in \{1, \dots, d-1\}$, supposons qu'il existe $\varphi_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$ on a $(x_{j,\varphi_k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell_j \in \mathbb{R}$.

On considère alors la suite $(x_{k+1,\varphi_k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[-\rho, \rho]$. Comme $[-\rho, \rho]$ est compact, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $(x_{k+1,\varphi_k(\varphi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell_{k+1} \in \mathbb{R}$. On pose alors $\varphi_{k+1} := \varphi_k \circ \varphi$.

On vient donc de construire une extractrice $\Phi := \varphi_d$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\Phi(n)} = \ell := (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_d) \in \mathbb{R}^d$. De plus, comme $\mathcal{F}$ est fermé et que $(x_{\Phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ on en déduit que $\ell \in \mathcal{F}$ et donc $\mathcal{F}$ est compact. $\square$

Proposition 59. Soit $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble fermé et borné. Soit $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f est bornée et atteint ses bornes. C'est-à-dire il existe $m, M \in \mathbb{R}$ et x_m, x_M tels que

$$f(x_m) = m = \inf_{x \in \mathcal{F}} f(x) = \min_{x \in \mathcal{F}} f(x), \quad f(x_M) = M = \sup_{x \in \mathcal{F}} f(x) = \max_{x \in \mathcal{F}} f(x).$$

Remarque 59. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. S'il existe $x_m \in A$ tel que $f(x_m) = \inf_{x \in A} f(x)$ on parle de minimum global de f . De même, s'il existe $x_M \in A$ tel que $f(x_M) = \sup_{x \in A} f(x)$ on parle de maximum global. La Proposition 59 nous permet de dire que si A est fermé et borné alors f admet un maximum global et un minimum global.

Preuve de la Proposition 59. On ne va le démontrer que pour la borne sup, l'autre démonstration étant similaire. Soit $n \in \mathbb{N}$, par caractérisation de la borne sup avec $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, il existe $x_n \in \mathcal{F}$ tel que

$$f(x_n) > \sup_{x \in \mathcal{F}} (f(x)) - \frac{1}{n+1}.$$

La suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ qui est compact donc il existe $\ell \in \mathcal{F}$ et une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = \ell$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sup_{x \in \mathcal{F}} (f(x)) \geq f(x_{\varphi(n)}) > \sup_{x \in \mathcal{F}} (f(x)) - \frac{1}{\varphi(n)+1}.$$

Comme f est continue, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(\ell)$ et donc en passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus, on aboutit à

$$f(\ell) = \sup_{x \in \mathcal{F}} (f(x)).$$

Comme $\ell \in \mathcal{F}$, le supremum est donc un maximum, ce qui termine la démonstration. $\square$

Remarque 60. Vous connaissez déjà la Proposition 59 dans le cas où $d = 1$ et pour $\mathcal{F}$ étant un intervalle de la forme $[a, b]$. Vous l'avez déjà rencontré dans votre cours d'analyse d'une fonction d'une variable réelle.

Exemple 75. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme 2 et on souhaite montrer que l'application

$$f : \begin{cases} B_f(0_{\mathbb{R}^2}, 1) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1^2 + x_1 x_2^3 \end{cases}$$

est bornée et atteint ses bornes. Pour cela, on remarque que $B_f(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ est fermée dans $\mathbb{R}^2$ en tant que boule fermée et que c'est également une partie bornée puisque pour tout $x \in B_f(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$, on a $\|x\|_2 \leq 1$. On en déduit que $B_f(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs, f est une application continue sur $B_f(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ en tant qu'application polynomiale : d'après la Proposition 59, elle y est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 27. Soit l'ensemble

$$\mathcal{F} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \leq 1 \text{ et } x_1 - 2x_2 \geq 0\}$$

1. (i) Représenter l'ensemble $\mathcal{F}$.
(ii) Montrer que $\mathcal{F}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit l'application

$$f : \begin{cases} \mathcal{F} \setminus \{(0, 0)\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \end{cases}$$

- (i) Justifier que f est continue sur son domaine de définition.
- (ii) Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathcal{F}$ en une application $\tilde{f}$ que l'on précisera.
- (iii) Justifier que $\tilde{f}$ est bornée et atteint ses bornes.

2.4.2 Gradient d'une fonction

Le paragraphe §2.4.1 nous donne un outil pour l'existence d'extrema pour une fonction définie sur une partie fermée $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^d$. Il se trouve que les outils de calcul différentiel nous permettent, quand à eux, de caractériser, sous certaines conditions, ces extremas. Pour cela, nous devons introduire la notion de gradient.

Définition 37. Soit $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{O}$. Lorsque f admet des dérivées partielles selon toutes ses variables, on définit le gradient de f en a , noté $(\nabla f)(a)$ comme le vecteur colonne

$$(\nabla f)(a) := \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(a) \\ \vdots \\ (\partial_d f)(a) \end{pmatrix}.$$

Remarque 61. On remarque que le gradient et la Jacobienne sont reliés par la relation $(\nabla f)(a) = J_f(a)^\top$.

Remarque 62. Si on suppose $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$, alors f est différentiable et en particulier, on a pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $a + h \in \mathcal{O}$:

$$f(a + h) = f(a) + (D_a f)(h) + o(\|h\|)$$

On remarque donc, que si l'on écrit le vecteur $h \in \mathbb{R}^d$ en colonne, on a

$$(D_a f)(h) = \sum_{j=1}^d (\partial_j f)(a) h_j = \langle (\nabla f)(a), h \rangle.$$

Nous allons essayer de donner une interprétation géométrique au gradient.

Définition 38. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la ligne de niveau λ de f comme

$$L_\lambda(f) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x_1, x_2) = \lambda\}.$$

Proposition 60. Soit $\mathcal{O}$ une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(x_1, x_2) \in L_\lambda(f)$, alors $(\nabla f)(x_1, x_2)$ est perpendiculaire à la tangente à $L_\lambda(f)$ en (x_1, x_2) . Le gradient pointe dans la direction de plus grande croissance de f .

Preuve de la Proposition 60. On suppose pour simplifier qu'il existe une paramétrisation

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma \in \mathcal{C}^1(I)$$

telle que $\gamma(I) = L_\lambda(f)$ (ici, I est un intervalle de $\mathbb{R}$) et telle que pour tout $t \in I$ t est un point régulier. Pour tout $t \in I$, on a $(f \circ \gamma)(t) = \lambda$ et $f \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1(I)$ par composition de fonctions de classes $\mathcal{C}^1$. On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma'_1(t)(\partial_1 f)(\gamma(t)) + \gamma'_2(t)(\partial_2 f)(\gamma(t)) \\ &= \langle (\nabla f)(\gamma(t)), \gamma'(t)^\top \rangle \end{aligned}$$

On en déduit que $(\nabla f)(\gamma(t))$ est orthogonal à la droite tangente à $L_\lambda(f)$ en $\gamma(t)$ puisque un vecteur directeur de cette droite est $\gamma'(t)$ (qui est non nul puisque t est supposé régulier).

Fixons $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^d$. Pour $v \in \mathbb{R}^d$ fixé, comme $\mathcal{O}$ est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]-\delta, \delta[$, $(x_1, x_2) + tv \in \mathcal{O}$. L'application

$$g : t \in]-\delta, \delta[\mapsto f((x_1, x_2) + tv)$$

est dérivable en 0 par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: en effet, l'application

$$t \in]-\delta, \delta[\mapsto (x_1, x_2) + tv$$

est de classe $\mathcal{C}^1(]-\delta, \delta[)$ car chacune de ses composantes sont des fonctions polynomiales. Par ailleurs, l'image de cette application est incluse dans $\mathcal{O}$.

De plus, on a

$$g'(0) = \langle (\nabla f)(x_1, x_2), v \rangle \leq \|(\nabla f)(x_1, x_2)\|_2 \|v\|_2$$

Si on souhaite maximiser $g'(0)$, c'est-à-dire choisir la direction de plus grande variation pour f , il faut choisir v colinéaire à $(\nabla f)(x_1, x_2)$ et de même sens afin que l'inégalité ci-dessus soit une égalité. $\square$

Exemple 76. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, on considère la droite

$$\mathcal{D} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1 + bx_2 + c = 0\}.$$

On sait que le vecteur $(-b, a)$ est un vecteur directeur de la droite et est donc tangent $\mathcal{D}$ en tout point $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}$. Soit l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto ax_1 + bx_2 + c \end{cases}.$$

f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ en tant qu'application polynomiale de deux variables et pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(\nabla f)(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

On remarque en particulier que pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\langle (\nabla f)(x_1, x_2), (-b, a)^\top \rangle = -ba + ab = 0.$$

On en déduit que comme $(a, b) \neq (0, 0)$, $(\nabla f)(x_1, x_2)$ est un vecteur directeur de la droite orthogonale à la droite $\mathcal{D}$ en tout point $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}$.

Exemple 77. Soient $a, b > 0$, on considère l'ellipse

$$\mathcal{E} := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

De la même façon que dans l'Exercice 21, on peut montrer que

$$\gamma : \begin{cases} [0, 2\pi] & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto (a \cos(t), b \sin(t)) \end{cases}$$

est une paramétrisation de classe $\mathcal{C}^1$ de l'ellipse $\mathcal{E}$. On définit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \end{cases}$$

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ en tant qu'application polynomiale. On remarque que pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(\nabla f)(x_1, x_2) = 2 \begin{pmatrix} \frac{x_1}{a^2} \\ \frac{x_2}{b^2} \end{pmatrix}$$

En particulier, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathcal{E}$, on remarque que $(\nabla f)(x_1, x_2) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$.

Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\gamma'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t)) \neq (0, 0)$ et donc $\gamma'(t)$ est un vecteur tangent à l'ellipse $\mathcal{E}$ au point $\gamma(t) \in \mathcal{E}$.

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $(f \circ \gamma)(t) = 1$ et donc, en dérivant pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma'_1(t)(\partial_1 f)(\gamma(t)) + \gamma'_2(t)(\partial_2 f)(\gamma(t)) \\ &= \langle (\nabla f)(\gamma(t)), \gamma'(t)^\top \rangle \end{aligned}$$

On en déduit que $(\nabla f)(\gamma(t))$ est orthogonal au vecteur tangent à la courbe représentative de $\mathcal{E}$ en $\gamma(t)$. Autrement dit, si $f(x_1, x_2) = 1$, $(\nabla f)(x_1, x_2)$ est un vecteur normal à la courbe $\mathcal{E}$ au point (x_1, x_2) .

2.4.3 Les Extrema et leur caractérisation

Caractérisation d'ordre 1

Définition 39. Soit $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable sur $\mathcal{O}$. On dit que $a \in \mathcal{O}$ est un point critique pour f lorsque $(\nabla f)(a) = 0$.

Exemple 78. Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto \frac{x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2} \end{cases}$$

f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ en tant que quotient de fonctions polynomiales (à deux variables) dont le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(\partial_1 f)(x_1, x_2) = -\frac{2x_1x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}, \quad (\partial_2 f)(x_1, x_2) = \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2} \left(1 - \frac{2x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2} \right) = \frac{1+x_1^2-x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}.$$

On en déduit que pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(\nabla f)(x_1, x_2) = \frac{1}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} \begin{pmatrix} -2x_1x_2 \\ 1+x_1^2-x_2^2 \end{pmatrix}$$

Cherchons maintenant les potentiels points critiques pour f . Cela revient à trouver l'ensemble des $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(\nabla f)(x_1, x_2) = 0_{\mathbb{R}^2}$. On doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} -2x_1x_2 & = 0 \\ 1+x_1^2-x_2^2 & = 0. \end{cases}$$

La première équation nous donne que $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$. Si $x_2 = 0$, comme $1+x_1^2-x_2^2 = 1+x_1^2 > 0$, l'équation $1+x_1^2-x_2^2 = 0$ n'a pas de solution.

Si $x_1 = 0$, la deuxième équation devient $x_2^2 = 1$ et donc $x_2 = \pm 1$. On en déduit que l'ensemble des points critiques de f est donné par

$$\{(0, -1), (0, 1)\}.$$

Définition 40. Soit $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que $a \in \mathcal{O}$ est

t	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$2t$		$-$	0	$+$	
$2t^2 - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

FIGURE 2.1 – Tableau de variations de f

(i) un maximum local pour f s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, \delta) \cap \mathcal{O}$ on a

$$f(a) \geq f(x).$$

(ii) un minimum local pour f s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, \delta) \cap \mathcal{O}$ on a

$$f(x) \geq f(a).$$

Remarque 63. Tout extrema global est en particulier un extrema local. La réciproque est bien évidemment fausse. En effet, la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto t^2(t^2 - 1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $f'(t) = 2t(2t^2 - 1)$. En particulier, les points critiques de f sont $0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. En étudiant le signe de la dérivée, et les limites de f en $\pm\infty$, on obtient le tableau de variation présent en Figure 2.1 pour f . On remarque alors qu'en 0, f admet un maximum local mais qu'il n'est pas global.

La proposition suivante est cruciale dans la recherche d'extrema.

Proposition 61. Soit $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable sur $\mathcal{O}$. Si f admet un maximum ou un minimum local en $a \in \mathcal{O}$ alors a est un point critique de f .

Preuve de la Proposition 61. Supposons que f admette un maximum ou un minimum local en $a \in \mathcal{O}$. Comme $\mathcal{O}$ est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta) \subset \mathcal{O}$. Soit $v \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|v\|_{\mathbb{R}^d} = 1$. On définit l'application

$$g_v : \begin{cases}]-\delta, \delta[& \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto g(a + tv). \end{cases}$$

Tout d'abord, g_v est bien définie car si $t \in]-\delta, \delta[$, on a $\|(a + tv) - a\|_{\mathbb{R}^d} = |t|\|v\|_{\mathbb{R}^d} < \delta$ et donc $a + tv \in B(a, \delta) \subset \mathcal{O}$. Par ailleurs, g_v est dérivable sur $]-\delta, \delta[$. En effet, on remarque que $g_v = f \circ p_v$ où

$$p_v : \begin{cases}]-\delta, \delta[& \rightarrow \mathcal{O} \\ t & \mapsto a + tv. \end{cases}$$

Comme p_v est une application polynomiale elle est de classe $\mathcal{C}^\infty(]-\delta, \delta[, \mathcal{O})$ et elle est à valeurs dans $\mathcal{O}$. Par ailleurs, f est différentiable sur $\mathcal{O}$ et donc g_v est différentiable sur $]-\delta, \delta[$ en tant que composée de fonctions différentiables. Comme $]-\delta, \delta[\subset \mathbb{R}$, cela revient à dire que g_v est dérivable sur $]-\delta, \delta[$. Par ailleurs, on a

$$g'_v(0) = (D_a f)(v) = \langle (\nabla f)(a), v \rangle_{\mathbb{R}^d}.$$

Maintenant, on remarque que g_v admet un maximum local ou un minimum local en 0. En effet, comme en $a \in \mathcal{O}$ f admet un minimum local ou un maximum local, quitte à diminuer $\delta > 0$, on a pour tout $t \in]-\delta, \delta[$

$$g_v(0) = f(a) \leq f(a + tv) = g_v(t) \quad \text{ou bien} \quad g_v(0) = f(a) \geq f(a + tv) = g_v(t)$$

selon si en a f est minimale ou maximale. Comme g_v est une fonction de la variable réelle, dérivable sur son

domaine de définition et maximale ou minimale en 0, on a nécessairement⁶ $g'_v(0) = 0$. Donc pour tout $v \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|v\|_{\mathbb{R}^d} = 1$ on a

$$g'_v(0) = \langle (\nabla f)(a), v \rangle_{\mathbb{R}^d} = 0.$$

Si $(\nabla f)(a) \neq 0_{\mathbb{R}^d}$ alors on choisit $v = \frac{(\nabla f)(a)}{\|(\nabla f)(a)\|_{\mathbb{R}^d}}$ et on a

$$0 = \langle (\nabla f)(a), v \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle (\nabla f)(a), \frac{(\nabla f)(a)}{\|(\nabla f)(a)\|_{\mathbb{R}^d}} \rangle_{\mathbb{R}^d} = \|(\nabla f)(a)\|_{\mathbb{R}^d}$$

et donc nécessairement $(\nabla f)(a) = 0$ et a est un point critique de f . $\square$

Remarque 64. Attention, ce n'est pas parce que a est un point critique que f admet un minimum ou un maximum global en a . On pensera au contre-exemple suivant qui concerne déjà les fonctions d'une variable réelle :

La fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto t^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $f'(t) = 3t^2$. En particulier $f'(0) = 0$ donc 0 est un point critique pour f . Toutefois, f n'admet ni minimum ni maximum en 0.

Caractérisation d'ordre 2

Pour une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d'une variable réelle (I est un intervalle ouvert), si elle est deux fois dérivable alors pour $a \in I$ un point critique, on a

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + o(h^2) = f(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + o(h^2).$$

En particulier, on a lorsque $h \rightarrow 0$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^2}{2}(f''(a) + o(1)).$$

En particulier, si $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$) il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in]-\delta, \delta[$ on a $f''(a) + o(1) > 0$ (resp. $f''(a) + o(1) < 0$) ce qui signifie que f admet un minimum local (resp. un maximum local) en a . Il se trouve qu'il existe une version générale de ce résultat lorsque $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$. Tout repose sur le développement de Taylor suivant.

Proposition 62. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Soit $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable sur $\mathcal{O}$. Pour tout $a \in \mathcal{O}$ et $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $a+h \in \mathcal{O}$ on a

$$f(a+h) = f(a) + \langle (\nabla f)(a), h \rangle_{\mathbb{R}^d} + \frac{1}{2} \langle (Hf)(a)h, h \rangle_{\mathbb{R}^d} + o(\|h\|_{\mathbb{R}^d}^2)$$

où on a défini la matrice Hessienne de f par $(Hf)(a) := ((\partial_{k,j}f)(a))_{j,k \in \{1,\dots,d\}} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Autrement dit, on a

$$(Hf)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_{1,1}^2 f)(a) & (\partial_{2,1}^2 f)(a) & \cdots & (\partial_{d,1}^2 f)(a) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ (\partial_{1,d}^2 f)(a) & \cdots & \cdots & (\partial_{d,d}^2 f)(a) \end{pmatrix}.$$

Remarque 65. Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ elle est en particulier deux fois différentiable. Sa matrice Hessienne est symétrique d'après le théorème de Schwarz 2.

6. Quitte à diminuer $\delta > 0$, on peut supposer que a est un point de maximum global pour g_v (si a est un point de minimum la preuve fonctionne de la même façon). Comme $g_v :]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en 0, elle vérifie

$$g_v(t) = g_v(0) + tg'_v(0) + o(t).$$

Or, pour tout $t \in]-\delta, \delta[$ on a

$$g_v(0) \geq g_v(t) = g_v(0) + tg'_v(0) + o(t).$$

Par conséquent, pour tout $t \in]-\delta, \delta[$ on a

$$0 \geq tg'_v(0) + o(t).$$

Si $t > 0$ cela se ré-écrit

$$0 \geq g'_v(0) + o(1)$$

et lorsque $t \rightarrow 0$ on obtient $0 \geq g'_v(0)$. Lorsque $t < 0$, l'inégalité change de sens et on a

$$0 \leq g'_v(0) + o(1)$$

et lorsque $t \rightarrow 0$ on obtient $0 \geq g'_v(0)$ et donc $g'_v(0) = 0$.

Preuve de la Proposition 62. Comme f est deux fois différentiable, d'après la Remarque 55, on a pour tout $a \in \mathcal{O}$ et $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $a + h \in \mathcal{O}$

$$f(a + h) = f(a) + (D_a f)(h) + \frac{1}{2}(D_a^2 f)(h, h) + o(\|h\|_{\mathbb{R}^d}^2).$$

Si $h = (h_1, \dots, h_d)^\top \in \mathbb{R}^d$, ceci se ré-écrit à l'aide de la Remarque 62 et de la Proposition 53 comme

$$f(a + h) = f(a) + \langle (\nabla f)(a), h \rangle_{\mathbb{R}^d} + \frac{1}{2} \left(\sum_{j,k=1}^d \partial_{j,k}^2 f(a) h_j h_k \right) + o(\|h\|_{\mathbb{R}^d}^2).$$

Or le coefficient numéro $k \in \{1, \dots, d\}$ du vecteur $(Hf)(a)h$ est donné par

$$((Hf)(a)h)_k = \sum_{j=1}^d ((Hf)(a))_{k,j} h_j = \sum_{j=1}^d (\partial_{j,k}^2 f)(a) h_j$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a) + \langle (\nabla f)(a), h \rangle_{\mathbb{R}^d} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^d ((Hf)(a)h)_k h_k \right) + o(\|h\|_{\mathbb{R}^d}^2) \\ &= f(a) + \langle (\nabla f)(a), h \rangle_{\mathbb{R}^d} + \frac{1}{2} \langle (Hf)(a)h, h \rangle_{\mathbb{R}^d} + o(\|h\|_{\mathbb{R}^d}^2) \end{aligned}$$

□

Exemple 79. Soit l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto \frac{1}{x_2^2 + 1} e^{x_1^2 + x_2} \end{cases}$$

On remarque que $f = g \times (h_2 \circ h_1)$ où

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto \frac{1}{x_2^2 + 1} \end{cases}, \quad h_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1^2 + x_2 \end{cases}, \quad h_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto e^t \end{cases}$$

f est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ car c'est l'inverse d'une application polynomiale qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. De plus, h_1 est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en tant que fonction polynomiale. Comme la fonction h_2 est la fonction exponentielle, elle est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et comme $h_1(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}$ on en déduit que $h_2 \circ h_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ par composition. Enfin, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en tant que multiplication de fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(\partial_1 f)(x_1, x_2) = \frac{2x_1}{x_2^2 + 1} e^{x_1^2 + x_2}, \quad (\partial_2 f)(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2^2 + 1} e^{x_1^2 + x_2} \left(1 - \frac{2x_2}{x_2^2 + 1} \right).$$

On calcule maintenant ses dérivées partielles seconde. Pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} (\partial_{1,1}^2 f)(x_1, x_2) &= \partial_1(\partial_1 f)(x_1, x_2) = \frac{2}{x_2^2 + 1} (1 + 2x_1^2) e^{x_1^2 + x_2}, & (\partial_{2,1}^2 f)(x_1, x_2) &= \frac{2x_1}{x_2^2 + 1} e^{x_1^2 + x_2} \left(1 - \frac{2x_2}{x_2^2 + 1} \right), \\ (\partial_{1,2}^2 f)(x_1, x_2) &= (\partial_{2,1}^2 f)(x_1, x_2) = \frac{2x_1}{x_2^2 + 1} e^{x_1^2 + x_2} \left(1 - \frac{2x_2}{x_2^2 + 1} \right), \\ (\partial_{2,2}^2 f)(x_1, x_2) &= \frac{e^{x_1^2 + x_2}}{(x_2^2 + 1)^3} (x_2 - 1)(x_2^3 - 3x_2^2 + 5x_2 + 1) \end{aligned}$$

où on a utilisé le Théorème de Schwarz (Théorème 2) vu que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On en déduit que

$$(Hf)(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x_2^2 + 1} (1 + 2x_1^2) e^{x_1^2 + x_2} & \frac{2x_1}{x_2^2 + 1} e^{x_1^2 + x_2} \left(1 - \frac{2x_2}{x_2^2 + 1} \right) \\ \frac{2x_1}{x_2^2 + 1} e^{x_1^2 + x_2} \left(1 - \frac{2x_2}{x_2^2 + 1} \right) & \frac{e^{x_1^2 + x_2}}{(x_2^2 + 1)^3} (x_2 - 1)(x_2^3 - 3x_2^2 + 5x_2 + 1) \end{pmatrix}.$$

Proposition 63. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2(\mathcal{O}, \mathbb{R})$.

(i) Si f admet un minimum local en $a \in \mathcal{O}$ alors $(\nabla f)(a) = 0$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^d$

$$\langle (Hf)(a)h, h \rangle_{\mathbb{R}^d} \geq 0.$$

(ii) Si f admet un maximum local en $a \in \mathcal{O}$ alors $(\nabla f)(a) = 0$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^d$

$$\langle (Hf)(a)h, h \rangle_{\mathbb{R}^d} \leq 0.$$

Preuve de la Proposition 63. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathcal{O}$ un point de minimum local (le cas où f admet un maximum local en a se montre de façon similaire). En particulier, d'après la Proposition 61, $(\nabla f)(a) = 0$ et d'après la Proposition 62, on a pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $a + h \in \mathbb{R}^d$

$$f(a + h) = f(a) + \langle (Hf)(a)h, h \rangle_{\mathbb{R}^d} + o(\|h\|_{\mathbb{R}^d}^2).$$

S'il existe $h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $\langle (Hf)(a)h, h \rangle_{\mathbb{R}^d} < 0$ alors en posant $v = \frac{h}{\|h\|_{\mathbb{R}^d}}$, comme $\mathcal{O}$ est ouvert il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]-\delta, \delta[$ $tv \in \mathcal{O}$ et on a

$$f(a + tv) - f(a) = t^2 \langle (Hf)(a)v, v \rangle_{\mathbb{R}^d} + o(|t|^2) = t^2 (\langle (Hf)(a)v, v \rangle_{\mathbb{R}^d} + o(1))$$

est strictement négatif. En effet, lorsque $t \rightarrow 0$ on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle (Hf)(a)v, v \rangle_{\mathbb{R}^d} + o(1) = \langle (Hf)(a)v, v \rangle_{\mathbb{R}^d} < 0$$

donc quitte à diminuer la taille de $\delta > 0$, on a pour tout $t \in]-\delta, \delta[$

$$(\langle (Hf)(a)v, v \rangle_{\mathbb{R}^d} + o(1)) < 0$$

et donc pour tout $t \in]-\delta, \delta[$

$$f(a + tv) - f(a) < 0 \iff f(a + tv) < f(a).$$

Cela contredit l'hypothèse que f admet un minimum local en a et donc pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ on a $\langle (Hf)(a)h, h \rangle_{\mathbb{R}^d} \geq 0$. $\square$

Remarque 66. Malheureusement, la réciproque de la Proposition 63 n'est pas vraie. Il suffit de penser à la fonction $(f : t \in \mathbb{R} \mapsto t^3)$ qui est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ en tant que fonction polynomiale. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $f'(t) = 3t^2$ et $f''(t) = 6t$. Donc $t = 0$ et $f''(0) = 0$ mais 0 n'est ni un maximum local ni un minimum local.

Si on demande un peu plus sur la matrice Hessienne, on peut obtenir la Proposition suivante.

Proposition 64. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2(\mathcal{O}, \mathbb{R})$. Soit $a \in \mathcal{O}$ un point critique de f .

(i) Si pour tout $h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ on a $\langle (Hf)(a)h, h \rangle_{\mathbb{R}^d} < 0$ alors f admet un maximum local en a .

(ii) Si pour tout $h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ on a $\langle (Hf)(a)h, h \rangle_{\mathbb{R}^d} > 0$ alors f admet un minimum local en a .

Preuve de la Proposition 64. Nous allons démontrer le deuxième point, le premier se démontrant de façon similaire. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2(\mathcal{O}, \mathbb{R})$. Soit $a \in \mathcal{O}$ un point critique de f . D'après la Proposition 62, on a pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $a + h \in \mathcal{O}$

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2} \langle (Hf)(a)h, h \rangle_{\mathbb{R}^d} + o(\|h\|_{\mathbb{R}^d}^2). \quad (2.5)$$

On remarque tout d'abord que l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \mapsto \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \langle (Hf)(a)x, y \rangle_{\mathbb{R}^d} \end{cases}$$

est un produit scalaire. En effet Φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et

(i) Φ est symétrique : pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\Phi(x, y) = \langle (Hf)(a)x, y \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle x, ((Hf)(a))^\top y \rangle_{\mathbb{R}^d}$$

Où $\top$ désigne la transposée. Par définition de la transposée $((Hf)(a))^\top = ((\partial_{j,k}^2 f)(a))_{j,k \in \{1, \dots, d\}}$. Or comme $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O}, \mathbb{R})$, le Théorème 2 affirme que pour tout $j, k \in \{1, \dots, d\}$ on a $(\partial_{j,k}^2 f)(a) = (\partial_{k,j}^2 f)(a)$ et donc que $((Hf)(a))^\top = ((\partial_{k,j}^2 f)(a))_{j,k \in \{1, \dots, d\}} = (Hf)(a)$. On en déduit que

$$\Phi(x, y) = \langle x, ((Hf)(a))^\top y \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle x, ((Hf)(a))y \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle ((Hf)(a))y, x \rangle_{\mathbb{R}^d} = \Phi(y, x)$$

où dans l'avant-dernière égalité on a utilisé le fait que le produit scalaire standard $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^d}$ est symétrique.

(ii) Φ est bilinéaire : soient $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \Phi(x + \lambda y, z) &= \langle (Hf)(a)(x + \lambda y), z \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle (Hf)(a)x + \lambda(Hf)(a)y, z \rangle_{\mathbb{R}^d} \\ &= \langle (Hf)(a)x, z \rangle_{\mathbb{R}^d} + \lambda \langle (Hf)(a)y, z \rangle_{\mathbb{R}^d} \\ &= \Phi(x, z) + \lambda \Phi(y, z) \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que le produit scalaire standard $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^d}$ est linéaire par rapport à sa première variable. Φ est linéaire par rapport à sa première variable et symétrique : Φ est donc bilinéaire.

(iii) Φ est définie positive : Par hypothèse sur $Hf(a)$ on a pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

$$\Phi(x, x) = \langle (Hf)(a)x, x \rangle_{\mathbb{R}^d} > 0$$

et donc nécessairement $\Phi(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0_{\mathbb{R}^d}$.

Notons N la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ associée à Φ . Comme toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^d$, on peut ré-écrire (2.5) comme

$$f(a + h) - f(a) = \frac{1}{2}N(h) + o(N(h)^2) = \frac{1}{2}N(h)(1 + o(N(h))).$$

Par définition de $o(N(h))$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in B_N(0_{\mathbb{R}^d}, \delta)$ on ait $(1 + o(N(h))) \geq \frac{1}{2}$ et donc pour tout $h \neq 0_{\mathbb{R}^d}$ on a

$$f(a + h) - f(a) \geq \frac{N(h)}{4} > 0.$$

En particulier pour tout $h \in B_N(0_{\mathbb{R}^d}, \delta) \setminus \{0_{\mathbb{R}^d}\}$ on a

$$f(a + h) > f(a)$$

et donc f admet un minimum local en a . □

Remarque 67. Pour vérifier les hypothèses (i) ou (ii) de la Proposition 64 on utilise très souvent de l'algèbre linéaire. En effet, lorsque $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O}, \mathbb{R})$, la matrice $(Hf)(a) \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ où

$$\mathcal{S}_d(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) : M^\top = M\}.$$

Il se trouve que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée. Cela veut dire que si $S \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$, il existe $O \in GL_d(\mathbb{R})$ vérifiant $O^\top = O$ et une matrice diagonale D telle que

$$S = O^\top D O.$$

Appliquons-le à notre matrice Hessienne $(Hf)(a)$ qui, grâce au Théorème 2, vérifie $(Hf)(a) \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$. Par conséquent, il existe $O \in GL_d(\mathbb{R})$ vérifiant $O^\top = O$ et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ telle que

$$(Hf)(a) = O^\top D O.$$

En particulier, pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\langle (Hf)(a)h, h \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle O^\top D O h, h \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle D O h, O h \rangle_{\mathbb{R}^d}.$$

Si on pose $z = O h$, on a

$$\langle (Hf)(a)h, h \rangle_{\mathbb{R}^d} = \sum_{j=1}^d \lambda_j z_j^2.$$

En particulier si pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, $\lambda_j > 0$ alors pour tout $h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0_{\mathbb{R}^d}\}$ on a $\langle (Hf)(a)h, h \rangle_{\mathbb{R}^d} > 0$ et si pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, $\lambda_j < 0$ alors pour tout $h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0_{\mathbb{R}^d}\}$ on a $\langle (Hf)(a)h, h \rangle_{\mathbb{R}^d} < 0$.

Une autre possibilité est qu'il existe $j_- \in \{1, \dots, d\}$ tel que $\lambda_{j_-} < 0$ et $j_+ \in \{1, \dots, d\}$ tel que $\lambda_{j_+} > 0$. Soit $u_{j_{\pm}}$ des vecteurs propres normalisés associés. Dans ce cas, on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]-\delta, \delta[$ $a + tu_{j_{\pm}} \in \mathcal{O}$ et on a

$$f(a + tu_{j_{\pm}}) = f(a) + \frac{t^2}{2} \langle (Hf)(a)u_{j_{\pm}}, u_{j_{\pm}} \rangle_{\mathbb{R}^d} + o(t^2) = f(a) + \frac{t^2}{2} \lambda_{j_{\pm}} + o(t^2).$$

On a donc

$$f(a + tu_{j_{\pm}}) - f(a) = \frac{t^2}{2} (\lambda_{j_{\pm}} + o(1))$$

donc par définition de $o(1)$, il existe $\eta_+ > 0$ tel que pour tout $t \in]-\eta_+, \eta_+[$ on ait $\lambda_{j_+} + o(1) > \frac{\lambda_{j_+}}{2}$ et donc

$$f(a + tu_{j_+}) - f(a) \geq \frac{t^2}{4} \lambda_{j_+} > 0. \quad (2.6)$$

De même, il existe $\eta_- < 0$ tel que pour tout $t \in]-\eta_-, \eta_-[$ on ait $\lambda_{j_-} + o(1) < \frac{\lambda_{j_-}}{2}$ et donc

$$f(a + tu_{j_-}) - f(a) \leq \frac{t^2}{4} \lambda_{j_-} < 0. \quad (2.7)$$

(2.6) et (2.7) empêche que f admette un minimum ou un maximum local en a . On parle alors de point selle car il y a une direction, à savoir u_{j_-} , dans laquelle f est maximale en a et une direction, à savoir u_{j_+} , dans laquelle f est minimale en a .

Grâce à la Remarque 67 on obtient le corollaire suivant de la Proposition 64.

Corollaire 3. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2(\mathcal{O}, \mathbb{R})$. Soit $a \in \mathcal{O}$ un point critique de f .

- (i) Si les valeurs propres de $(Hf)(a)$ sont toutes strictement négatives alors f admet un maximum local en a .
- (ii) Si les valeurs propres de $(Hf)(a)$ sont toutes strictement positives alors f admet un minimum local en a .
- (iii) Si $(Hf)(a)$ admet au moins une valeurs propre strictement positives et une valeurs propres strictement négatives alors f n'admet ni maximum ni minimum local en a . On parle de point-selle.
- (iv) Dans tous les autres cas, on ne peut conclure.

Exemple 80. Soit l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto e^{-\frac{1}{3}x_1^3 + x_1 - x_2^2}. \end{cases}$$

On cherche à déterminer les points critiques de f est leur nature. Tout d'abord, on remarque que $f = \exp \circ p$ où

$$p : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto -\frac{1}{3}x_1^3 + x_1 - x_2^2. \end{cases}$$

p est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en tant qu'application polynomiale. $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et comme $p(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}$ on en déduit que $f = \exp \circ p$ est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en tant que composée d'application de classe $\mathcal{C}^2$. En particulier, pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(\partial_1 f)(x_1, x_2) = (-x_1^2 + 1)e^{-\frac{1}{3}x_1^3 + x_1 - x_2^2}, \quad (\partial_2 f)(x_1, x_2) = -2x_2 e^{-\frac{1}{3}x_1^3 + x_1 - x_2^2}.$$

Les points critiques de f sont les points $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(\nabla f)(x_1, x_2) = 0_{\mathbb{R}^2}$ c'est-à-dire :

$$\begin{cases} (\partial_1 f)(x_1, x_2) = 0 \\ (\partial_2 f)(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1^2 + 1 = 0 \\ -2x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \pm 1 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Pour étudier la nature de ces points critiques, nous allons calculer la matrice Hessienne de f en ces points. Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} (\partial_{1,1}^2 f)(x_1, x_2) &= (-2x_1 + (-x_1^2 + 1)^2) e^{-\frac{1}{3}x_1^3 + x_1 - x_2^2}, & (\partial_{2,1}^2 f)(x_1, x_2) &= -2x_2(-x_1^2 + 1)e^{-\frac{1}{3}x_1^3 + x_1 - x_2^2} \\ (\partial_{1,2}^2 f)(x_1, x_2) &= (\partial_{2,1}^2 f)(x_1, x_2), & (\partial_{2,2}^2 f)(x_1, x_2) &= 2(2x_2^2 - 1)e^{-\frac{1}{3}x_1^3 + x_1 - x_2^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$(Hf)((-1, 0)) = \begin{pmatrix} (\partial_{1,1}^2 f)(-1, 0) & (\partial_{2,1}^2 f)(-1, 0) \\ (\partial_{1,2}^2 f)(-1, 0) & (\partial_{2,2}^2 f)(-1, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & -2e^{-\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

$(Hf)((-1, 0))$ étant diagonale, ses valeurs propres sont $2e^{-\frac{2}{3}}$ et $-2e^{-\frac{2}{3}}$. Elles sont de signes opposés et donc $(-1, 0)$ est un point selle pour f . De même, on a Par conséquent, on a

$$(Hf)((1, 0)) = \begin{pmatrix} (\partial_{1,1}^2 f)(1, 0) & (\partial_{2,1}^2 f)(1, 0) \\ (\partial_{1,2}^2 f)(1, 0) & (\partial_{2,2}^2 f)(1, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & -2e^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

$(Hf)((1, 0))$ est diagonale, sa seule valeur propre est double et est $-2e^{\frac{2}{3}}$. Toutes ses valeurs propres sont de signe strictement négatif et donc $(1, 0)$ est un maximum local pour f .

Exemple 81. Soit l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2 \end{cases}$$

f est une application polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Par ailleurs, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(\partial_1 f)(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - 3, \quad (\partial_2 f)(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 6.$$

Les points critiques de f sont les $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(\nabla f)(x_1, x_2) = 0_{\mathbb{R}^2}$, c'est-à-dire tels que

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 - 6 & = & 0 \end{cases} & \xLeftrightarrow_{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 & = & 0 \\ 3x_2 - 9 & = & 0 \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 & = & 0 \\ x_2 & = & 3 \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

On en déduit que le seul point critique de f est $(0, 3)$. Calculons la Hessienne de f en ce point critique afin d'en déterminer sa nature. Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(\partial_{1,1}^2 f)(x_1, x_2) = \partial_1(\partial_1 f)(x_1, x_2) = 2, \quad (\partial_{2,1}^2 f)(x_1, x_2) = 1, \quad (\partial_{2,2}^2 f)(x_1, x_2) = 2.$$

Comme $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, le Théorème 2 nous dit que $\partial_{2,1}^2 f = \partial_{1,2}^2 f$ et on a

$$(Hf)(0, 3) = \begin{pmatrix} (\partial_{1,1}^2 f)(0, 3) & (\partial_{2,1}^2 f)(0, 3) \\ (\partial_{2,1}^2 f)(0, 3) & (\partial_{2,2}^2 f)(0, 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il reste donc à déterminer le signe des valeurs propres de $(Hf)(0, 3)$. On a deux possibilités : soit on trouve ses valeurs propres à l'aide du polynôme caractéristique (voir (i) ci-dessous), soit on utilise que le déterminant et la trace sont invariants par changement de base (voir (ii) ci-dessous). Nous allons faire chacune de ces deux stratégies.

(i) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\det((Hf)(0, 3) - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = (2 - \lambda - 1)(2 - \lambda + 1) = (1 - \lambda)(3 - \lambda).$$

Les racines de ce polynôme sont 1 et 3 et les valeurs propres de $(Hf)(0, 3)$ sont donc 1 et 3. Comme ces deux valeurs propres sont strictement positives, on en déduit qu'en $(0, 3)$, f admet un minimum local.

(ii) On sait que $(Hf)(0, 3)$ est diagonalisable car $(Hf)(0, 3) \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$. Notons λ_1, λ_2 ses valeurs propres. On a d'une part

$$\det((Hf)(0, 3)) = \lambda_1 \lambda_2, \quad \text{Tr}((Hf)(0, 3)) = \lambda_1 + \lambda_2,$$

et d'autre part

$$\det((Hf)(0, 3)) = 3, \quad \text{Tr}((Hf)(0, 3)) = 4.$$

On en déduit que $\lambda_1 \lambda_2 = 3$ ce qui nous dit que $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$ et λ_1 et λ_2 sont de même signe. De plus $\lambda_1 + \lambda_2 = 4 > 0$ donc $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. On en déduit que f admet un minimum local en $(0, 3)$.

Exercice 28. Soit

$$\mathcal{E} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \leq 1\}.$$

On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathcal{E} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto \frac{4+2x_1^2+8x_2^2+2x_1}{4+x_1^2+4x_2^2} \end{cases}$$

- (i) Montrer que f est bornée et atteint ses bornes sur $\mathcal{E}$.
- (ii) On va maintenant tâcher de déterminer si son minimum est atteint dans $\mathring{\mathcal{E}}$ ou bien sur $\partial\mathcal{E}$
 - (a) Déterminer $\mathring{\mathcal{E}}$.
 - (b) Montrer que

$$\partial\mathcal{E} = \{(2\cos(t), \sin(t)) : t \in [0, 2\pi]\}.$$

- (c) Montrer que si f admet un minimum dans $\mathring{\mathcal{E}}$ alors nécessairement cet extrema vaut $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{2})$.
 - (d) Montrer que le minimum de $\mathcal{E}$ est atteint dans $\mathring{\mathcal{E}}$.
- (iii) Qu'en est-il du maximum de f sur $\mathcal{E}$?

Chapitre 3

Équations différentielles

Dans ce chapitre, on souhaite étudier des solutions d'équations dites différentielles. Ici, l'inconnue est une fonction qui va vérifier une équation mettant en jeu ses dérivées.

I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une application

$$f : I \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}.$$

3.1 Premières définitions et premiers exemples

Commençons par définir la notion de solutions d'une équation différentielle.

Définition 41. On appelle solution de l'équation différentielle

$$y' = f(t, y)$$

tout couple (J, φ) où $J \subset I$ est un intervalle et φ est une fonction définie et dérivable sur J à valeurs dans $\mathcal{O}$ telle que pour tout $t \in J$ on ait

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

Définition 42. Soit (J, φ) une solution de l'équation différentielle

$$y' = f(t, y). \quad (3.1)$$

- (i) On dit que la solution (J, φ) est globale lorsque $J = I$.
- (ii) On dit que la solution (J, φ) est maximale si elle n'admet pas de prolongement, c'est-à-dire que pour toute autre solution $(\tilde{J}, \tilde{\varphi})$ de (3.1), si $J \subset \tilde{J}$ et $\varphi = \tilde{\varphi}|_J$ alors $(J, \varphi) = (\tilde{J}, \tilde{\varphi})$.

Exemple 82. On considère l'équation différentielle

$$y' = y. \quad (3.2)$$

Ici, on reconnaît que si l'on choisit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on ait $f(t, x) = x$ alors l'équation différentielle (3.2) se met sous la forme

$$y' = f(t, y).$$

Maintenant, on remarque que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = e^t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi'(t) = e^t = \varphi(t) = f(t, \varphi(t))$$

et donc $(\mathbb{R}, \varphi)$ est solution de l'équation différentielle (3.2).

Exemple 83. On considère l'équation différentielle

$$y' = \sqrt{y}. \quad (3.3)$$

Ici, on reconnaît que si l'on choisit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ on ait $f(t, x) = \sqrt{x}$ alors l'équation différentielle (3.3) se met sous la forme

$$y' = f(t, y).$$

On remarque que la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $t \in \mathbb{R}_+$ par $\varphi(t) = \frac{t^2}{4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\varphi'(t) = \frac{t}{2} = \sqrt{\varphi(t)} = f(t, \varphi(t))$$

et donc $([0, +\infty[, \varphi)$ est solution de l'équation différentielle (3.3). Cette solution ne peut pas être étendue à un domaine plus grand que $\mathbb{R}_+$.

Définition 43. Soit $t_0 \in I, y_0 \in \mathcal{O}$. On appelle solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

Toute solution (J, φ) de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ qui telle que $t_0 \in J$ vérifie $\varphi(t_0) = y_0$.

Remarque 68. Bien souvent $t_0 = 0$ et correspond à une condition initiale du système étudié. Par exemple, si l'équation différentielle apparaît dans un modèle de dynamique des populations il peut s'agir du nombre de initial de personne dans cette population. En physique, il peut s'agir de la position d'une particule au temps $t = 0$...

Exemple 84. Si on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

On remarque que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = e^t$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$ et que l'on a $\varphi(0) = e^0 = 1$.

Exemple 85. Si on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= \sqrt{y} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

On remarque que $([0, +\infty[, \varphi)$ ou la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est définie pour $t \in \mathbb{R}_+$ par $\varphi(t) = \frac{t^2}{4}$ est solution de l'équation différentielle $y' = \sqrt{y}$ et vérifie $\varphi(0) = 0$. On remarque également que l'application $(\mathbb{R}, \tilde{\varphi})$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\tilde{\varphi}(t) = 0$ est solution de $y' = \sqrt{y}$ et vérifie $\tilde{\varphi}(0) = 0$.

Exemple 86. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= y^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Si on définit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}$ par $f(t, x) = x^2$ ce problème de Cauchy se met sous la forme

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

On remarque que $(]-\infty, 1[, \varphi)$ où $\varphi :]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie pour $t \in]-\infty, 1[$ par $\varphi(t) = \frac{1}{1-t}$ est solution de l'équation différentielle car φ est dérivable sur son domaine de définition en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas et pour tout $t \in]-\infty, 1[$ on a

$$\varphi'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} = \varphi(t)^2.$$

De plus on vérifie que $\varphi(0) = 1$ et donc φ est solution du problème de Cauchy.

Les questions auxquelles nous allons tenter de répondre dans ce cours sont les suivantes :

- (i) Étant donné un problème de Cauchy, existe-t-il une solution ?
- (ii) Si oui, est-elle unique ?
- (iii) Si oui, est-elle définie sur I tout entier ?

Nous aurons très bientôt les outils pour répondre à ces questions. Notez tout de même que l'unicité n'est pas toujours garantie, il suffit de penser à l'Exemple 85. De même, on remarque que dans l'Exemple 86 que la solution obtenue n'est pas solution de l'équation différentielle si elle est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ mais seulement sur $]-\infty, 1[$.

3.2 Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2

3.2.1 Les équations différentielles linéaires d'ordre 1

Dans ce paragraphe, on considère des fonctions $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues et on s'intéresse aux équations différentielles de la forme

$$y' + ay = b. \quad (3.4)$$

Notons qu'en posant $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $(t, x) \in I \times \mathbb{R}$ par $f(t, x) = -a(t)x - b(t)$, résoudre (3.4) revient à résoudre

$$y' = f(t, y).$$

f étant affine par rapport à sa deuxième variable, on parle d'équation différentielle linéaire. Elle est dite du premier ordre car elle ne fait intervenir que des dérivées premières de l'inconnue y .

Proposition 65. *L'équation différentielle linéaire $y' + ay = b$ admet des solutions. Elles vérifient pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$\varphi(t) = \varphi_p(t) + \lambda \varphi_h(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

où

- (i) (I, φ_h) est solution de l'équation différentielle $y' + ay = 0$. Cette équation différentielle est dite homogène car $b \equiv 0$.
- (ii) (I, φ_p) est une solution particulière de l'équation différentielle $y' + ay = b$.

Preuve de la Proposition 65. Si φ est de la forme annoncée, alors elle est solution. En effet, elle est dérivable sur I et pour tout $t \in I$ on a

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \varphi_p'(t) + \lambda \varphi_h'(t) = -a(t)\varphi_p(t) + b(t) - a(t)\lambda \varphi_h(t) = -a(t)(\varphi_p(t) + \lambda \varphi_h(t)) + b(t) \\ &= -a(t)\varphi(t) + b(t). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant démontrer qu'il existe des solutions. Pour ce faire, nous allons démontrer dans une première étape qu'il existe des solutions à l'équation homogène. Dans une deuxième étape qu'il existe une solution particulière et dans une troisième étape que toute solution est nécessairement de la forme annoncée.

Étape 1 : On considère l'équation différentielle homogène

$$y' + ay = 0 \quad (3.5)$$

Nous allons faire un raisonnement par analyse et synthèse afin de démontrer que (3.5) admet des solutions (I, φ_h) et que toutes ses solutions sont de la forme

$$\varphi_h(t) = \lambda e^{-A(t)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

où A est une primitive de a .

Analyse : Supposons que (I, φ_h) soit solution de (3.5). Comme a est continue sur I , elle y admet des primitives de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Notons $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ une telle primitive. On considère alors l'application

$$f : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto e^{A(t)} \varphi_h(t) \end{cases}$$

On remarque que $f = (\exp \circ A) \times \varphi_h$. Comme (I, φ_h) est solution de (3.5) alors φ_h est dérivable sur I . Par construction, A est dérivable sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ précisément là où la fonction exponentielle est dérivable. On en déduit que $\exp \circ A$ est dérivable sur I en tant que composée de fonctions dérivables et que f est dérivable sur I en tant que produit de fonctions dérivables sur I . De plus, pour tout $t \in I$, on a

$$f'(t) = A'(t)e^{A(t)}\varphi_h(t) + e^{A(t)}\varphi_h'(t) = a(t)e^{A(t)}\varphi_h(t) - a(t)e^{A(t)}\varphi_h(t) = 0$$

où on a utilisé le fait que (I, φ_h) soit solution de (3.5). On en déduit que f est constante sur I , autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) = \lambda$ ce qui se ré-écrit

$$\varphi_h(t) = \lambda e^{-A(t)}. \quad (3.6)$$

Synthèse : Maintenant, on vérifie que toute fonction de la forme donnée en (3.6) est bien solution de (3.5). Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et l'application

$$\varphi_h : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \lambda e^{-A(t)} \end{cases}$$

φ_h est dérivable sur I car $\exp \circ (-A)$ est dérivable sur I en tant que composée de fonctions dérivables (la justification est similaire à celle de la partie *Analyse* du raisonnement). On remarque par ailleurs que pour tout $t \in I$, on a

$$\varphi'_h(t) = \lambda(-a(t)e^{-A(t)}) = -a(t)\varphi_h(t)$$

et donc (I, φ_h) est solution de (3.5).

Étape 2 : On cherche maintenant à montrer l'existence d'une solution particulière de (3.4). Pour se faire, on va la chercher de la forme

$$\varphi_p(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}. \quad (3.7)$$

C'est ce que l'on nomme *méthode de variation de la constante* où on va chercher une fonction $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Supposons donc que (I, φ_p) soit solution de (3.4) avec φ_p de la forme (3.7). Comme λ est supposée dérivable sur I on en déduit que pour tout $t \in I$ on a

$$\varphi'_p(t) = \lambda'(t)e^{-A(t)} - a(t)\lambda(t)e^{-A(t)} = \lambda'(t)e^{-A(t)} - a(t)\varphi_p(t).$$

Comme (I, φ_p) est supposée solution de (3.4) on a pour tout $t \in I$

$$b(t) = \varphi'_p(t) + a(t)\varphi_p(t) = \lambda'(t)e^{-A(t)}.$$

On en déduit que pour tout $t \in I$, $\lambda'(t) = e^{A(t)}b(t)$. Or l'application $t \in I \mapsto e^{A(t)}b(t)$ est continue sur I en tant que produit d'applications continues sur I , elle y admet donc des primitives de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et on choisit pour λ une telle primitive¹. Il suffit de vérifier que φ_p ainsi construite est bien solution de (3.4). Tout d'abord, si λ est une primitive de $t \in I \mapsto e^{A(t)}b(t)$, λ est dérivable sur I et donc φ_p est dérivable sur I en tant que produit de fonctions dérivables et pour tout $t \in I$ on a

$$\varphi'_p(t) = \lambda'(t)e^{-A(t)} - a(t)\lambda(t)e^{-A(t)} = b(t) - a(t)\varphi_p(t).$$

En particulier (I, φ_p) est bien solution de (3.4).

Étape 3 : Montrons maintenant que toute solution (I, φ) de (3.4) est de la forme annoncée. Soit (I, φ_p) une solution particulière (qui existe grâce à l'Étape 2). On remarque que $(I, \varphi - \varphi_p)$ est solution de l'équation homogène (3.5). En effet, pour tout $t \in I$, on a

$$\varphi'(t) - \varphi'_p(t) = -a(t)\varphi(t) + b(t) - (-a(t)\varphi_p(t) + b(t)) = -a(t)(\varphi(t) - \varphi_p(t)).$$

D'après l'Étape 1, on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$ on a

$$\varphi(t) - \varphi_p(t) = \lambda e^{-A(t)}.$$

et donc

$$\varphi(t) = \varphi_p(t) + \lambda e^{-A(t)}$$

où $(t \mapsto e^{-A(t)})$ est une solution de l'équation homogène, ce qui termine la démonstration. $\square$

Ce qu'il faut savoir en pratique : Voilà les étapes à suivre lorsque l'on cherche à résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme

$$y' + ay = b$$

où $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur I .

(i) Les solutions (I, φ_h) de l'équation homogène $y' + ay = 0$ sont de la forme

$$\varphi_h(t) = \lambda e^{-A(t)}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et A est une primitive de a sur I .

1. En pratique, si $t_0 \in I$, on peut choisir

$$\lambda(t) = \int_{t_0}^t e^{A(s)}b(s)ds.$$

(ii) Pour trouver une solution particulière, on cherche une solution (I, φ_p) qui pour tout $t \in I$ est de la forme

$$\varphi_p(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$$

avec $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I à trouver explicitement en regardant l'équation que vérifie φ_p . Cette méthode porte le nom de *méthode de variation des constantes*.

(iii) On utilise la Proposition 65 pour dire que toute solution (I, φ) est de la forme

$$\varphi = \varphi_p + \lambda e^{-A}$$

où φ_p est la solution particulière trouvée à l'étape d'avant.

Exemple 87. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y' + ty = t. \quad (3.8)$$

Ici

$$a : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t \end{cases}, \quad b : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t \end{cases}$$

sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynomiales.

On résout dans un premier temps l'équation homogène

$$y' + ay = 0$$

et on sait d'après le cours que les solutions $(\mathbb{R}, \varphi_h)$ sont, pour tout $t \in \mathbb{R}$, de la forme

$$\varphi_h(t) = \lambda e^{-A(t)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

où A est une primitive de a . Pour $t \in \mathbb{R}$, on choisit $A(t) := \frac{1}{2}t^2$ et donc

$$\varphi_h(t) = \lambda e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche maintenant $(\mathbb{R}, \varphi_p)$ une solution particulière de (3.8) telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_p(t) = \lambda(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

avec $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_p'(t) = \lambda'(t)e^{-\frac{t^2}{2}} - t\lambda(t)e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Et donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$b(t) = t = \varphi_p'(t) + t\varphi_p(t) = \lambda'(t)e^{-\frac{t^2}{2}} - t\lambda(t)e^{-\frac{t^2}{2}} + t\lambda(t)e^{-\frac{t^2}{2}} = \lambda'(t)e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\lambda'(t) = te^{\frac{t^2}{2}}.$$

La fonction $(t \mapsto te^{\frac{t^2}{2}})$ est continue sur $\mathbb{R}$ (pourquoi ?) donc elle y admet des primitives. On choisit

$$\lambda(t) = \int_0^t se^{\frac{s^2}{2}} ds = \left[e^{\frac{s^2}{2}} \right]_{s=0}^t = e^{\frac{t^2}{2}} - 1.$$

On en déduit que la fonction φ_p définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi_p(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2}}$$

est solution². On en déduit que les solutions générales $(\mathbb{R}, \varphi)$ de (3.8) sont pour tout $t \in \mathbb{R}$ de la forme

$$\varphi(t) = \varphi_p(t) + \lambda e^{-A(t)} = 1 + (\lambda - 1)e^{-\frac{t^2}{2}} = 1 + \alpha e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \alpha, \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Ici la méthode fonctionne, mais cela paraît un peu absurde de l'utiliser : on aurait dès le début pu remarquer que la fonction constante à 1 était solution particulière.

Très souvent en pratique, la résolution de l'équation différentielle $y' + ay = b$ est assortie d'une condition dite initiale. C'est ce que l'on nomme un problème de Cauchy et c'est le but de la Proposition suivante.

Proposition 66. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + ay &= b \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution (I, φ) .

Preuve de la Proposition 66. On sait que les solutions (I, φ) de $y' + ay = b$ sont, pour tout $t \in I$, de la forme

$$\varphi(t) = \varphi_p(t) + \lambda e^{-A(t)}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et A est une primitive de a . En particulier, $\varphi(t_0) = \varphi_p(t_0) + \lambda e^{-A(t_0)}$ donc

$$y_0 = \varphi(t_0) \iff \lambda = (y_0 - \varphi_p(t_0)) e^{A(t_0)},$$

ce qui termine la démonstration. □

Exemple 88. Reprenons l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 de l'Exemple 87 et considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y' + ty &= t^2 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

On sait que si $(\mathbb{R}, \varphi)$ est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + ty = t^2$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi(t) = 1 + \lambda e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On souhaite de plus à ce que $\varphi(0) = 0$, c'est-à-dire

$$0 = \varphi(0) = 1 + \lambda.$$

Si on choisit $\lambda = -1$ on a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2}}$$

qui est l'unique solution du problème de Cauchy.

3.2.2 Quelques applications dans d'autres disciplines

Dans ce paragraphe, on étudie des applications des équations différentielles linéaires d'ordre 1 à d'autres disciplines.

Exemple 89. On considère un circuit électrique dans lequel une résistance et un condensateur en série sont soumis à une tension en entrée. Il se trouve que la tension u aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle

$$u' + \frac{1}{RC}u = E \tag{3.9}$$

où $R > 0$ est la résistance électrique de la résistance et $C > 0$ la capacité du condensateur et $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la tension en entrée que l'on suppose de la forme :

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

où $E_0 \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$. On suppose qu'au temps $t = 0$ la tension aux bornes du condensateur est nulle. On doit donc étudier le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' + \frac{1}{RC}u &= E \\ u(0) &= 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

On sait que les solutions $(\mathbb{R}, \varphi_h)$ de l'équation homogène $u' + \frac{1}{RC}u = 0$ sont de la forme

$$\varphi_h(t) = \lambda e^{-\frac{t}{RC}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche maintenant une solution particulière $(\mathbb{R}, \varphi_p)$ de (3.9) à l'aide de la méthode de variation des constantes. Soit $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, on suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi_p(t) = \lambda(t) e^{-\frac{t}{RC}}$$

alors on obtient

$$\varphi'_p(t) = \lambda'(t)e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{1}{RC}\lambda(t)e^{-\frac{t}{RC}}$$

et comme $(\mathbb{R}, \varphi_p)$ est solution de (3.9) on a

$$E_0 \cos(\omega t) = \varphi'_p(t) + \frac{1}{RC}\varphi_p(t) = \lambda'(t)e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{1}{RC}\lambda(t)e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC}\lambda(t)e^{-\frac{t}{RC}} = \lambda'(t)e^{-\frac{t}{RC}}.$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda'(t) = E_0 \cos(\omega t)e^{\frac{t}{RC}}.$$

La fonction $(t \mapsto E_0 \cos(\omega t)e^{\frac{t}{RC}})$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle y admet des primitives. Soit λ celle qui s'annule en 0, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= E_0 \int_0^t \cos(\omega s)e^{\frac{s}{RC}} ds = E_0 \Re \left(\int_0^t e^{i\omega s} e^{\frac{s}{RC}} ds \right) \\ &= E_0 \Re \left(\int_0^t e^{s(i\omega + \frac{1}{RC})} ds \right) \\ &= E_0 \Re \left(\left[\frac{1}{i\omega + \frac{1}{RC}} e^{s(i\omega + \frac{1}{RC})} \right]_{s=0}^t \right) \\ &= E_0 \Re \left(\frac{1}{i\omega + \frac{1}{RC}} \left(e^{i\omega t + \frac{t}{RC}} - 1 \right) \right) \\ &= E_0 \Re \left(\frac{RC}{i\omega RC + 1} \left(e^{i\omega t + \frac{t}{RC}} - 1 \right) \right) \\ &= E_0 \Re \left(RC \frac{1 - i\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \left(e^{i\omega t + \frac{t}{RC}} - 1 \right) \right). \end{aligned}$$

On remarque que le nombre complexe

$$z = \frac{1 - i\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

vérifie

$$|z| = 1$$

donc il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$ et on obtient donc pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= E_0 \Re \left(RC \frac{1 - i\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \left(e^{i\omega t + \frac{t}{RC}} - 1 \right) \right) \\ &= E_0 RC \Re \left(e^{i\theta} e^{i\omega t + \frac{t}{RC}} - e^{i\theta} \right) \\ &= E_0 RC \left(\cos(\omega t + \theta) e^{\frac{t}{RC}} - \cos(\theta) \right) \end{aligned}$$

et donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi_p(t) = E_0 RC \left(\cos(\omega t + \theta) - \cos(\theta) e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

On en déduit que nécessairement les solutions $(\mathbb{R}, \varphi)$ de (3.9) sont, pour tout $t \in \mathbb{R}$, de la forme

$$\varphi(t) = \varphi_p(t) + \lambda \varphi_h(t) = E_0 RC \left(\cos(\omega t + \theta) - \cos(\theta) e^{-\frac{t}{RC}} \right) + \lambda e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Comme on cherche la solution vérifiant $\varphi(0) = 0$, on obtient

$$0 = \varphi(0) = E_0 RC (\cos(\theta) - \cos(\theta)) + \lambda$$

donc $\lambda = 0$ et la solution $(\mathbb{R}, \varphi)$ du problème de Cauchy (3.10) vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = E_0 RC \left(\cos(\omega t + \theta) - \cos(\theta) e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

On remarque que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi(t) - E_0 RC \cos(\omega t + \theta)| = 0$$

On peut comprendre ce résultat de la façon suivante en temps long, la tension au borne du condensateur est donnée par $\varphi(t) \simeq E_0 RC \cos(\omega t + \theta)$. D'un point de vue mathématique, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $t > t_0$ on ait

$$\varphi(t) = E_0 RC \cos(\omega t + \theta) + r(t)$$

avec $|r(t)| < \varepsilon$. L'intérêt du circuit RC est donc d'introduire un déphasage pour la tension aux bornes du condensateur : il s'agit de θ . Bien évidemment, θ est une fonction³ de R et de C et donc on peut choisir R et C de manière à obtenir le déphasage souhaité.

Exemple 90. Le modèle de Malthus est un modèle de dynamique des populations qui essaye d'étudier l'évolution d'une population (de bactéries dans un boîte de Petri, de lapins dans une forêt ...). On suppose que la population a un taux de naissance par unité de temps donné par $n : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ et un taux de décès par unité de temps donné par $d : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. Notez que ces taux peuvent varier au cours du temps. Alors, si pour $t \in \mathbb{R}$ $I(t)$ est le nombre d'individus dans la population étudiée, pour $\Delta t > 0$ on a

$$I(t + \Delta t) = I(t) + (\Delta t)n(t)I(t) - (\Delta t)d(t)I(t) = I(t) + (n - d)(t)(\Delta t)I(t)$$

qui se comprend de la façon suivante : le nombre d'individus au temps $t + \Delta t$ est le nombre d'individus au temps t auxquels on ajoute ceux qui sont nés sur l'intervalle de temps Δt et on soustrait ceux qui sont morts sur l'intervalle de temps (Δt) . On obtient alors

$$\frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t} = (n - d)(t)I(t)$$

et en faisant tendre $\Delta t \rightarrow 0$ on obtient le modèle dit de Malthus :

$$I'(t) = (n - d)(t)I(t).$$

Lorsque n et d sont constants, les solutions $(\mathbb{R}, \varphi)$ de cette équation différentielle sont pour tout $t \in \mathbb{R}$ de la forme

$$\varphi(t) = \lambda e^{(n-d)t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si on cherche maintenant la solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} I' &= (n - d)I \\ I(0) &= I_0 \end{cases}$$

avec $I_0 > 0$, on remarque plusieurs choses :

- (i) pour tout $t \in \mathbb{R}$, $I(t) = I_0 e^{(n-d)t}$,
- (ii) pour tout $t \in \mathbb{R}$, $I(t) > 0$,
- (iii) si $n - d > 0$ alors I est croissante et $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = +\infty$. Cela s'interprète comme suit : si le taux de naissance est supérieur au taux de décès, la population croît.
- (iv) si $n - d < 0$ alors I est décroissante et $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$. Cela s'interprète comme suit : si le taux de naissance est inférieur au taux de décès, la population décroît jusqu'à disparaître.

3.2.3 Les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

D'autres équations différentielles linéaires que vous avez certainement déjà rencontrées sont celles de la forme

$$y'' + ay' + by = c(t) \tag{3.11}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Elles ne peuvent pas directement se mettre sous la forme (3.1) : elles sont d'ordre 2, c'est-à-dire qu'elles mettent en jeu une dérivée seconde. On peut toutefois le faire en posant

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

3. En fait $\theta \equiv -\arctan(\omega RC) [2\pi]$.

et en remarquant que (3.11) se ré-écrit comme

$$Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}}_{:=M} Y + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}}_{:=C}$$

donc si on pose

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, X) & \mapsto MX + C(t) \end{cases}$$

on remarque que (3.11) se ré-écrit comme

$$Y' = f(t, Y)$$

ce qui ressemble à la forme (3.1), à ceci près que l'on autorise la deuxième variable de f à être dans $\mathbb{R}^2$ et non plus dans $\mathbb{R}$.

Un outil très important dans la structure des solutions sont les solutions de l'équation polynomiale d'ordre deux suivantes, dite équation caractéristique

$$P(\lambda) = 0, \quad \text{où } P(\lambda) := \lambda^2 + a\lambda + b. \quad (3.12)$$

La structure des solutions de (3.11) est intimement liée à celles de (3.12). C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 67. *L'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ admet deux solutions $(\mathbb{R}, \varphi_{h,1})$ et $(\mathbb{R}, \varphi_{h,2})$ linéairement indépendantes en suivant l'alternative suivante :*

(i) Si P a deux racines réelles λ_1, λ_2 alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi_{h,1}(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad \varphi_{h,2}(t) = e^{\lambda_2 t}$$

(ii) Si P a deux racines complexes elles sont de la forme $\lambda, \bar{\lambda}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi_{h,1}(t) = e^{\Re(\lambda)t} \cos(\Im(\lambda)t), \quad \varphi_{h,2}(t) = e^{\Re(\lambda)t} \sin(\Im(\lambda)t).$$

(iii) Si P n'admet qu'une seule racine réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi_{h,1}(t) = e^{\lambda t}, \quad \varphi_{h,2}(t) = te^{\lambda t}.$$

Dans tous les cas, les solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ sont de la forme $(\mathbb{R}, \varphi_h)$ avec pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_h(t) = \alpha_1 \varphi_{h,1}(t) + \alpha_2 \varphi_{h,2}(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Preuve de la Proposition 67. Nous allons raisonner par analyse et synthèse.

Analyse : Supposons que $(\mathbb{R}, \varphi_h)$ est solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$. En particulier, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \varphi_h(t) \\ \varphi_h'(t) \end{pmatrix}' = M \begin{pmatrix} \varphi_h(t) \\ \varphi_h'(t) \end{pmatrix}, \quad \text{avec } M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Le polynôme caractéristique de M est

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ b & \lambda + a \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + b = P(\lambda).$$

Chercher les valeurs propres de M revient donc à résoudre l'équation caractéristique.

1. Si P a deux racines réelles notées $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on peut diagonaliser M et il existe $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que M s'écrive

$$M = Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} Q.$$

(3.13) devient

$$\left(Q \begin{pmatrix} \varphi_h(t) \\ \varphi_h'(t) \end{pmatrix} \right)' = Q \begin{pmatrix} \varphi_h(t) \\ \varphi_h'(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \varphi_h(t) \\ \varphi_h'(t) \end{pmatrix}.$$

On pose alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\psi_h(t) = \begin{pmatrix} \psi_{h,1}(t) \\ \psi_{h,2}(t) \end{pmatrix} := Q \begin{pmatrix} \varphi_h(t) \\ \varphi'_h(t) \end{pmatrix}$$

et comme pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\psi'_h(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \psi_h(t)$$

on en déduit que

$$\psi'_{h,1}(t) = \lambda_1 \psi_{h,1}(t), \quad \psi'_{h,2}(t) = \lambda_2 \psi_{h,2}(t).$$

Pour tout $j \in \{1, 2\}$ on a alors $\psi_{h,j}$ est solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1

$$y' - \lambda_j y = 0.$$

En utilisant la structure des solutions données en Proposition 65, on obtient qu'il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\psi_{h,j}(t) = \beta_j e^{\lambda_j t}.$$

Et donc pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} \varphi_h(t) \\ \varphi'_h(t) \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} \psi_{h,1}(t) \\ \psi_{h,2}(t) \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 e^{\lambda_1 t} \\ \beta_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

et donc si on écrit $Q^{-1} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$, la première ligne de cette équation donne

$$\varphi_h(t) = m_{1,1} \beta_1 e^{\lambda_1 t} + m_{2,1} \beta_2 e^{\lambda_2 t} \quad (3.14)$$

qui, si on pose $\alpha_1 = m_{1,1} \beta_1$ et $\alpha_2 = m_{2,1} \beta_2$ est précisément la structure des solutions annoncées.

2. Si P a deux racines complexes (non-réelles), comme P est à coefficient réels, si λ est une racine alors $\bar{\lambda}$ est l'autre racine. On peut alors reproduire la démonstration du point précédent avec les particularités suivantes :
 - (a) $Q \in GL_2(\mathbb{C})$ et non plus $GL_2(\mathbb{R})$,
 - (b) On utilise le fait que l'on sache résoudre $y' - \lambda y = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ (et non simplement $\lambda \in \mathbb{R}$) et que les solutions sont définies pour $t \in \mathbb{R}$ et sont de la forme $\beta_j e^{\lambda t}$ avec $\beta_j \in \mathbb{C}$.

(3.14) devient donc

$$\varphi_h(t) = \gamma_1 e^{\lambda t} + \gamma_2 e^{\bar{\lambda} t} = e^{\Re(\lambda)t} \left(\gamma_1 e^{i\Im(\lambda)t} + \gamma_2 e^{-i\Im(\lambda)t} \right)$$

avec $\gamma_1 = a_1 + ib_1, \gamma_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$. On cherche des solutions à valeurs réelles donc

$$\begin{aligned} \varphi_h(t) &= \Re(\varphi_h(t)) = e^{\Re(\lambda)t} \Re \left(\gamma_1 e^{i\Im(\lambda)t} + \gamma_2 e^{-i\Im(\lambda)t} \right) \\ &= e^{\Re(\lambda)t} (a_1 \cos(\Im(\lambda)t) - b_1 \sin(\Im(\lambda)t) + a_2 \cos(-\Im(\lambda)t) - b_2 \sin(-\Im(\lambda)t)) \\ &= e^{\Re(\lambda)t} (a_1 \cos(\Im(\lambda)t) - b_1 \sin(\Im(\lambda)t) + a_2 \cos(\Im(\lambda)t) + b_2 \sin(\Im(\lambda)t)) \\ &= (a_1 + a_2) \cos(\Im(\lambda)t) e^{\Re(\lambda)t} + (b_2 - b_1) \sin(\Im(\lambda)t) e^{\Re(\lambda)t}. \end{aligned}$$

En posant $\alpha_1 = a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$ et $\alpha_2 = b_2 - b_1 \in \mathbb{R}$ on obtient le résultat annoncé.

3. Supposons que P a une racine double $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit ε_1 un vecteur propre de la matrice M associé à λ et l'on complète le vecteur ε_1 de telle sorte à ce que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ soit une base de $\mathbb{R}^2$. Si on note

$$Q = \begin{pmatrix} \langle \varepsilon_1, e_1 \rangle_{\mathbb{R}^2} & \langle \varepsilon_2, e_1 \rangle_{\mathbb{R}^2} \\ \langle \varepsilon_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} & \langle \varepsilon_2, e_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} \end{pmatrix}$$

On remarque que

$$Qe_1 = Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \varepsilon_1, e_1 \rangle_{\mathbb{R}^2} \\ \langle \varepsilon_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} \end{pmatrix} = \langle \varepsilon_1, e_1 \rangle_{\mathbb{R}^2} e_1 + \langle \varepsilon_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} e_2 = \varepsilon_1$$

et de même

$$Qe_2 = Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \varepsilon_2, e_1 \rangle_{\mathbb{R}^2} \\ \langle \varepsilon_2, e_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} \end{pmatrix} = \langle \varepsilon_2, e_1 \rangle_{\mathbb{R}^2} e_1 + \langle \varepsilon_2, e_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} e_2 = \varepsilon_2.$$

Comme l'image d'une base par Q est une base, cette matrice est inversible donc $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ et on a

$$M = Q \begin{pmatrix} \lambda & \theta_1 \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

pour certaines constantes réelles $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. En effet

$$Q^{-1}MQe_1 = Q^{-1}M\varepsilon_1 = \lambda Q^{-1}\varepsilon_1 = \lambda e_1$$

et

$$Q^{-1}MQe_2 = Q^{-1}M\varepsilon_2 = \theta_1 e_1 + \theta_2 e_2 \in \mathbb{R}^2.$$

Maintenant, on remarque que comme λ est racine double on a

$$P(X) = (X - \lambda)^2 = \lambda^2 - 2\lambda X + X^2.$$

Par ailleurs, on sait que le polynôme caractéristique vérifie

$$P(X) = X^2 + aX + b = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det(M).$$

On en conclut que $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(Q^{-1}MQ) = \lambda + \theta_2 = 2\lambda$ et donc que $\theta_2 = \lambda$. On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \varphi_h(t) \\ \varphi'_h(t) \end{pmatrix}' = M \begin{pmatrix} \varphi_h(t) \\ \varphi'_h(t) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \lambda & \theta_1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} Q^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_h(t) \\ \varphi'_h(t) \end{pmatrix}$$

et donc

$$\left(Q^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_h(t) \\ \varphi'_h(t) \end{pmatrix} \right)' = \begin{pmatrix} \lambda & \theta_1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \left(Q^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_h(t) \\ \varphi'_h(t) \end{pmatrix} \right)$$

On pose donc pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\psi_h(t) = \begin{pmatrix} \psi_{h,1}(t) \\ \psi_{h,2}(t) \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_h(t) \\ \varphi'_h(t) \end{pmatrix}$$

et donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{pmatrix} \psi'_{h,1}(t) \\ \psi'_{h,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \theta_1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{h,1}(t) \\ \psi_{h,2}(t) \end{pmatrix}.$$

En particulier, $\psi_{h,2}$ est solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre un $y' - \lambda y = 0$ et donc il existe $\beta_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait

$$\psi_{h,2}(t) = \beta_2 e^{\lambda t}.$$

L'équation sur $\psi_{h,1}$ devient donc

$$y' - \lambda y = \theta_1 \beta_2 e^{\lambda t}.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre un avec second membre. Les solutions sont donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ de la forme

$$\psi_{h,1}(t) = \beta_1 e^{\lambda t} + \psi_p(t)$$

où ψ_p est une solution particulière. On la cherche à l'aide de la méthode de variation de la constante donc on cherche ψ_p de la forme $\psi_p(t) = C(t)e^{\lambda t}$ et donc $\psi'_p(t) = C'(t)e^{\lambda t} + \lambda\psi_p(t)$ et comme ψ_p est solution de $y' - \lambda y = \theta_1 \beta_2 e^{\lambda t}$ on a

$$C'(t)e^{\lambda t} = \theta_1 \beta_2 e^{\lambda t}$$

et donc on peut choisir $C(t) = t\theta_1 \beta_2$ ce qui donne que pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\psi_{h,1}$ est de la forme

$$\psi_{h,1}(t) = (\beta_1 + \theta_1 \beta_2 t) e^{\lambda t}.$$

Maintenant, si on écrit $Q^{-1} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$ et on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_h(t) = m_{1,1}\psi_{h,1}(t) + m_{2,1}\psi_{h,2}(t) = (m_{1,1}\beta_1 + m_{2,1}\theta_1\beta_2)e^{\lambda t} + m_{1,1}\theta_1\beta_2 t e^{\lambda t}$$

ce qui en posant $\alpha_1 := (m_{1,1}\beta_1 + m_{2,1}\theta_1\beta_2) \in \mathbb{R}$ et $\alpha_2 := m_{1,1}\theta_1\beta_2 \in \mathbb{R}$ donne la forme annoncée.

Synthèse : On vérifie que les expressions trouvées pour φ_h sont solutions dans chacun des cas.

1. Supposons que $\lambda \in \mathbb{R}$ est racine de P . Alors si pour tout $t \in \mathbb{R}$ on définit $\varphi_h(t) := e^{\lambda t}$ on a

$$\varphi_h''(t) + a\varphi_h'(t) + b\varphi_h(t) = e^{\lambda t} (\lambda^2 + a\lambda + b) = e^{\lambda t} P(\lambda) = 0$$

donc $(\mathbb{R}, \varphi_h)$ est bien solution de $y'' + ay + by = 0$. On en déduit par linéarité de l'équation différentielle que si pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\varphi_h(t) := \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$ avec λ_1, λ_2 deux racines réelles distinctes de P alors $(\mathbb{R}, \varphi_h)$ est solution de $y'' + ay + by = 0$ et donc, dans ce cas, toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay + by = 0$ sont de cette forme.

2. Si P a deux racines complexes conjuguées λ et $\bar{\lambda}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{h,1}(t) = e^{\Re(\lambda)t} \cos(\Im(\lambda)t)$ alors $\varphi_{h,1}(t) = \frac{1}{2}(e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda}t})$ et donc

$$\varphi_{h,1}'(t) = \frac{1}{2}(\lambda e^{\lambda t} + \bar{\lambda} e^{\bar{\lambda}t}), \quad \varphi_{h,1}''(t) = \frac{1}{2}(\lambda^2 e^{\lambda t} + (\bar{\lambda})^2 e^{\bar{\lambda}t})$$

ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_{h,1}''(t) + a\varphi_{h,1}'(t) + b\varphi_{h,1}(t) &= \frac{1}{2}e^{\lambda t} P(\lambda) + \frac{1}{2}e^{\bar{\lambda}t} P(\bar{\lambda}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $(\mathbb{R}, \varphi_{h,1})$ est solution de l'équation différentielle homogène linéaire d'ordre deux $y'' + ay' + b = 0$. On démontrerait de même que pour tout $t \in \mathbb{R}$ si on a $\varphi_{h,2}(t) = e^{\Re(\lambda)t} \sin(\Im(\lambda)t) = \frac{1}{2i}(e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda}t})$ alors $(\mathbb{R}, \varphi_{h,2})$ est solution de l'équation différentielle homogène linéaire d'ordre deux $y'' + ay' + b = 0$. Par linéarité, on en conclut que toute solution de la forme $\alpha_1 \varphi_{h,1} + \alpha_2 \varphi_{h,2}$ est solution de l'équation différentielle homogène linéaire d'ordre deux $y'' + ay' + b = 0$.

3. Maintenant, si on considère que P a une racine réelle double notée λ alors si pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\varphi_{h,1}(t) = e^{\lambda t}$ qui est solution d'après le Point 1. Maintenant, on considère pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $\varphi_{h,2}(t) = te^{\lambda t}$. On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi_{h,2}'(t) = (\lambda t + 1)e^{\lambda t}, \quad \varphi_{h,2}''(t) = (\lambda^2 t + 2\lambda) e^{\lambda t}$$

et donc

$$\begin{aligned} \varphi_{h,2}''(t) + a\varphi_{h,2}'(t) + b\varphi_{h,2}(t) &= e^{\lambda t} (\lambda^2 t + 2\lambda + a\lambda t + a + bt) \\ &= e^{\lambda t} (tP(\lambda) + 2\lambda + a) \\ &= e^{\lambda t} (tP(\lambda) + P'(\lambda)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car λ est racine double. Par linéarité, on en conclut que toute solution de la forme $\alpha_1 \varphi_{h,1} + \alpha_2 \varphi_{h,2}$ est solution de l'équation différentielle homogène linéaire d'ordre deux $y'' + ay' + by = 0$. □

Le but de la proposition suivante est de donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre deux $y'' + ay' + by = c(t)$.

Proposition 68. Soit $c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Les solutions (I, φ_h) de l'équation différentielle linéaire d'ordre deux $y'' + ay' + by = c(t)$ sont, pour tout $t \in \mathbb{R}$, de la forme

$$\varphi(t) = \varphi_h(t) + \varphi_p(t)$$

où $(\mathbb{R}, \varphi_h)$ est une solution de l'équation homogène et $(\mathbb{R}, \varphi_p)$ une solution particulière.

Preuve de la Proposition 68. On commence par démontrer l'existence d'une solution particulière $(\mathbb{R}, \varphi_p)$. Pour cela, on utilise une méthode de variation de la constante et on la cherche sous la forme

$$\varphi_p(t) = \alpha_1(t)\varphi_{h,1}(t) + \alpha_2(t)\varphi_{h,2}(t) \tag{3.15}$$

où $\varphi_{h,1}$ et $\varphi_{h,2}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle homogène $y'' + ay' + b = 0$ et α_1, α_2 sont deux fonctions dérivables sur I . On a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_p'(t) = \alpha_1'(t)\varphi_{h,1}(t) + \alpha_2'(t)\varphi_{h,2}(t) + \alpha_1(t)\varphi_{h,1}'(t) + \alpha_2(t)\varphi_{h,2}'(t).$$

Et on suppose que la solution recherchée vérifie $\alpha'_1(t)\varphi_{h,1}(t) + \alpha'_2(t)\varphi_{h,2}(t) = 0$. Par ailleurs, on a

$$\varphi_p''(t) = \alpha'_1(t)\varphi'_{h,1}(t) + \alpha'_2(t)\varphi'_{h,2}(t) + \alpha_1(t)\varphi''_{1,h}(t) + \alpha_2(t)\varphi''_{1,h}(t).$$

Comme (I, φ_p) est solution de $y'' + ay' + b = c(t)$ on a

$$\begin{aligned} c(t) &= \alpha'_1(t)\varphi'_{h,1}(t) + \alpha'_2(t)\varphi'_{h,2}(t) + \alpha_1(t)\varphi''_{h,1}(t) + \alpha_2(t)\varphi''_{h,1}(t) \\ &\quad + a(\alpha_1(t)\varphi'_{h,1}(t) + \alpha_2(t)\varphi'_{h,2}(t)) + b(\alpha_1(t)\varphi_{h,1}(t) + \alpha_2(t)\varphi_{h,2}(t)) \\ &= \alpha'_1(t)\varphi'_{h,1}(t) + \alpha'_2(t)\varphi'_{h,2}(t) + \alpha_1(t)(\varphi''_{h,1}(t) + a\varphi'_{h,1}(t) + b\varphi_{h,1}(t)) \\ &\quad + \alpha_2(t)(\varphi''_{h,2}(t) + a\varphi'_{h,2}(t) + b\varphi_{h,2}(t)) \\ &= \alpha'_1(t)\varphi'_{h,1}(t) + \alpha'_2(t)\varphi'_{h,2}(t). \end{aligned}$$

On en déduit pour tout $t \in \mathbb{R}$ le système suivant

$$\begin{cases} \alpha'_1(t)\varphi_{h,1}(t) + \alpha'_2(t)\varphi_{h,2}(t) &= 0 \\ \alpha'_1(t)\varphi'_{h,1}(t) + \alpha'_2(t)\varphi'_{h,2}(t) &= c(t). \end{cases}$$

que l'on peut ré-écrire pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{pmatrix} \varphi_{h,1}(t) & \varphi_{h,2}(t) \\ \varphi'_{h,1}(t) & \varphi'_{h,2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'_1(t) \\ \alpha'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

On a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$W(t) := \begin{vmatrix} \varphi_{h,1}(t) & \varphi_{h,2}(t) \\ \varphi'_{h,1}(t) & \varphi'_{h,2}(t) \end{vmatrix} = \varphi_{h,1}(t)\varphi'_{h,2}(t) - \varphi'_{h,1}(t)\varphi_{h,2}(t) \quad (3.17)$$

et

$$\begin{aligned} W'(t) &= \varphi'_{h,1}(t)\varphi'_{h,2}(t) + \varphi_{h,1}(t)\varphi''_{h,2}(t) - \varphi''_{h,1}(t)\varphi_{h,2}(t) - \varphi'_{h,1}(t)\varphi'_{h,2}(t) \\ &= \varphi_{h,1}(t)\varphi''_{h,2}(t) - \varphi''_{h,1}(t)\varphi_{h,2}(t) \\ &= -\varphi_{h,1}(t)(a\varphi'_{h,2}(t) + b\varphi_{h,2}(t)) + (a\varphi'_{h,1}(t) + b\varphi_{h,1}(t))\varphi_{h,2}(t) \\ &= -a\varphi_{h,1}(t)\varphi'_{h,2}(t) + a\varphi'_{h,1}(t)\varphi_{h,2}(t) \\ &= aW(t). \end{aligned}$$

On en déduit que W vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre un $y' - ay = 0$ et donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, W vérifie

$$W(t) = W(0)e^{at}.$$

On s'assure maintenant que $W(0) \neq 0$ selon qui sont $\varphi_{h,1}$ et $\varphi_{h,2}$.

1. Si P a deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2 alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{h,1}(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad \varphi_{h,2}(t) = e^{\lambda_2 t}$$

et donc

$$\varphi'_{h,1}(t) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \varphi'_{h,2}(t) = \lambda_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Ainsi, on obtient

$$W(0) = \begin{vmatrix} \varphi_{h,1}(0) & \varphi_{h,2}(0) \\ \varphi'_{h,1}(0) & \varphi'_{h,2}(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0.$$

2. Si P a deux racines complexes conjuguées (non-réelles) λ et $\bar{\lambda}$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{h,1}(t) = e^{\Re(\lambda)t} \cos(\Im(\lambda)t), \quad \varphi_{h,2}(t) = e^{\Re(\lambda)t} \sin(\Im(\lambda)t)$$

et donc

$$\begin{aligned} \varphi'_{h,1}(t) &= e^{\Re(\lambda)t} (\Re(\lambda) \cos(\Im(\lambda)t) - \Im(\lambda) \sin(\Im(\lambda)t)), \\ \varphi'_{h,2}(t) &= e^{\Re(\lambda)t} (\Re(\lambda) \sin(\Im(\lambda)t) + \Im(\lambda) \cos(\Im(\lambda)t)). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$W(0) = \begin{vmatrix} \varphi_{h,1}(0) & \varphi_{h,2}(0) \\ \varphi'_{h,1}(0) & \varphi'_{h,2}(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \Re(\lambda) & \Im(\lambda) \end{vmatrix} = \Im(\lambda) \neq 0.$$

3. Si P a une racine réelle double $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{h,1}(t) = e^{\lambda t}, \quad \varphi_{h,2}(t) = te^{\lambda t}$$

et donc

$$\varphi'_{h,1}(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad \varphi'_{h,2}(t) = (1 + \lambda t)e^{\lambda t}.$$

On en déduit alors que

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1$$

et donc $W(0) \neq 0$.

On en déduit que dans chacun des trois cas possibles

$$W(0) \neq 0 \tag{3.18}$$

et donc $W(t) = W(0)e^{at} \neq 0$. En particulier on peut inverser la matrice dans (3.16) et on obtient

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1(t) \\ \alpha'_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(t)} \begin{pmatrix} \varphi'_{h,2}(t) & -\varphi_{h,2}(t) \\ -\varphi'_{h,1}(t) & \varphi_{h,1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(t)} \begin{pmatrix} -c(t)\varphi_{h,2}(t) \\ c(t)\varphi_{h,1}(t) \end{pmatrix}$$

et donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\alpha'_1(t) = -\frac{c(t)\varphi_{h,2}(t)}{W(t)}, \quad \alpha'_2(t) = \frac{c(t)\varphi_{h,1}(t)}{W(t)}.$$

Comme les applications $\left(t \in I \mapsto -\frac{c(t)\varphi_{h,2}(t)}{W(t)}\right)$ et $\left(t \in I \mapsto \frac{c(t)\varphi_{h,1}(t)}{W(t)}\right)$ sont des applications continues sur I elles y admettent des primitives : on en déduit l'existence de fonctions dérivables sur I , α_1 et α_2 . On en déduit l'existence de solutions particulières de la forme (3.15).

On remarque par ailleurs que toute fonction φ de la forme

$$\varphi : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \alpha_1\varphi_{h,1}(t) + \alpha_2\varphi_{h,2}(t) + \varphi_p(t) \end{cases} \tag{3.19}$$

où $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ est solution de $y'' + ay' + by = c(t)$ sur I . En effet, pour tout $t \in I$, on a

$$\varphi'(t) = \alpha_1\varphi'_{h,1}(t) + \alpha_2\varphi'_{h,2}(t) + \varphi'_p(t), \quad \varphi''(t) = \alpha_1\varphi''_{h,1}(t) + \alpha_2\varphi''_{h,2}(t) + \varphi''_p(t)$$

et donc

$$\begin{aligned} \varphi''(t) + a\varphi'(t) + b\varphi(t) &= \alpha_1 (\varphi''_{h,1}(t) + a\varphi'_{h,1}(t) + b\varphi_{h,1}(t)) + \alpha_2 (\varphi''_{h,2}(t) + a\varphi'_{h,2}(t) + b\varphi_{h,2}(t)) \\ &\quad + \varphi''_p(t) + a\varphi'_p(t) + b\varphi_p(t) \\ &= c(t) \end{aligned}$$

car pour $j \in \{1, 2\}$, comme $(I, \varphi_{j,h})$ est solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux $y'' + ay' + by = 0$ les deux premiers termes sont nuls et comme (I, φ_p) est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre deux $y'' + ay' + by = c(t)$ le dernier terme est égale à $c(t)$.

On vient donc de montrer que toute fonction de la forme (3.19) est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre deux $y'' + ay' + by = c(t)$. Il faut maintenant démontrer que toute solution est de cette forme. Soit une deux solutions (I, φ_p) et $(I, \widetilde{\varphi}_p)$ de $y'' + ay' + by = c(t)$. On remarque que $\varphi_h := \widetilde{\varphi}_p - \varphi_p$ est solution de l'équation différentielle linéaire homogène $y'' + ay' + by = 0$ sur I . En effet, pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned} \varphi''_h(t) + a\varphi'_h(t) + b\varphi_h(t) &= (\widetilde{\varphi}_p(t) - \varphi_p(t))'' + a(\widetilde{\varphi}_p(t) - \varphi_p(t))' + b(\widetilde{\varphi}_p(t) - \varphi_p(t)) \\ &= \widetilde{\varphi}_p''(t) + a\widetilde{\varphi}_p'(t) + b\widetilde{\varphi}_p(t) - (\varphi_p''(t) + a\varphi_p'(t) + b\varphi_p(t)) \\ &= c(t) - c(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

En particulier, d'après la Proposition 67, on sait que $\varphi_h = \alpha_1\varphi_{h,1} + \alpha_2\varphi_{h,2}$ avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et donc

$$\widetilde{\varphi}_p = \alpha_1\varphi_{h,1} + \alpha_2\varphi_{h,2} + \varphi_p$$

et donc toutes les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre deux $y'' + ay' + by = c(t)$ sont de la forme annoncée. $\square$

Un corollaire immédiat de la Proposition 67 est l'existence d'une unique solution au problème de Cauchy de la forme

$$\begin{cases} y'' + ay' + by &= c(t) \\ y(t_0) &= y_0 \\ y'(t_0) &= z_0 \end{cases} \quad (3.20)$$

où $t_0 \in I$.

Corollaire 4. Soit $c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $t_0 \in I$ et $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution au problème de Cauchy (3.20).

Preuve du Corollaire 4. Supposons que (I, φ) soit solution du problème de Cauchy (3.20). En particulier, d'après la Proposition 68, on sait qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \in I$ on a

$$\varphi(t) = \alpha_1 \varphi_{h,1}(t) + \alpha_2 \varphi_{h,2}(t) + \varphi_p(t)$$

où (I, φ_p) est une solution particulière de l'équation différentielle linéaire d'ordre deux $y'' + ay' + by = c(t)$. Comme (I, φ) est solution du problème de Cauchy (3.20) on a

$$y_0 = \varphi(0) = \alpha_1 \varphi_{h,1}(0) + \alpha_2 \varphi_{h,2}(0) + \varphi_p(0).$$

De même, on a

$$z_0 = \varphi'(0) = \alpha_1 \varphi'_{h,1}(0) + \alpha_2 \varphi'_{h,2}(0) + \varphi'_p(0).$$

On obtient le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{h,1}(0) & \varphi_{h,2}(0) \\ \varphi'_{h,1}(0) & \varphi'_{h,2}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

et comme

$$\begin{vmatrix} \varphi_{h,1}(0) & \varphi_{h,2}(0) \\ \varphi'_{h,1}(0) & \varphi'_{h,2}(0) \end{vmatrix} = W(0)$$

où W est l'application définie en (3.17) et $W(0) \neq 0$ comme expliqué en (3.18). Par conséquent, le système linéaire (3.21) admet une unique solution ce qui conclut la démonstration. $\square$

3.2.4 Quelques exemples

Exemple 91. On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 donnée par

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

munie des conditions initiales $y(0) = 1, y'(0) = 0$. On étudie l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

dont le discriminant est

$$\Delta = 9 - 8 = 1 > 0.$$

On trouve alors deux solutions à l'équation caractéristique données par

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1, \quad \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2.$$

D'après la Proposition 67, on sait que les solutions $(\mathbb{R}, \varphi)$ de $y'' - 3y' + 2y = 0$ sont pour tout $t \in \mathbb{R}$ de la forme

$$\varphi(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Pour satisfaire la condition initiale, on a $1 = \varphi(0) = \alpha_1 + \alpha_2$ et comme pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi'(t) = \alpha_1 e^t + 2\alpha_2 e^{2t}$$

on a également $0 = \varphi'(0) = \alpha_1 + 2\alpha_2$ et donc

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \end{cases}.$$

On en déduit que $\alpha_2 = -1$ et $\alpha_1 = 2$ et donc que l'unique solution au problème de Cauchy est donnée pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi(t) = 2e^t - e^{2t}.$$

Exemple 92. On cherche à résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y &= 2 \cos^2(t), \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0 \end{cases}. \quad (3.22)$$

On commence par résoudre l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 $y'' + y = 0$. Pour cela on étudie l'équation caractéristique

$$0 = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

qui admet deux racines complexes conjuguées : $\pm i$. D'après la Proposition 67 on sait que les solutions $(\mathbb{R}, \varphi)$ de $y'' + y = 0$ sont, pour tout $t \in \mathbb{R}$, de la forme

$$\varphi(t) = \alpha_1 \cos(t) + \alpha_2 \sin(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Cherchons maintenant une solution particulière de la forme

$$\varphi_p(t) = \alpha_1(t) \cos(t) + \alpha_2(t) \sin(t)$$

On souhaite que $\alpha_1'(t) \cos(t) + \alpha_2'(t) \sin(t) = 0$ et comme $(\mathbb{R}, \varphi_p)$ doit être solution de $y'' + y = 2 \cos^2(t)$ on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_p'(t) = \alpha_1'(t) \cos(t) + \alpha_2'(t) \sin(t) - \alpha_1(t) \sin(t) + \alpha_2(t) \cos(t) = -\alpha_1(t) \sin(t) + \alpha_2(t) \cos(t)$$

et

$$\varphi_p''(t) = -\alpha_1'(t) \sin(t) + \alpha_2'(t) \cos(t) - \alpha_1(t) \cos(t) - \alpha_2(t) \sin(t) + \alpha_1(t) \cos(t) + \alpha_2(t) \sin(t)$$

donc

$$\begin{aligned} 2 \cos^2(t) &= \varphi_p''(t) + \varphi_p(t) \\ &= -\alpha_1'(t) \sin(t) + \alpha_2'(t) \cos(t) - \alpha_1(t) \cos(t) - \alpha_2(t) \sin(t) + \alpha_1(t) \cos(t) + \alpha_2(t) \sin(t) \\ &= -\alpha_1'(t) \sin(t) + \alpha_2'(t) \cos(t). \end{aligned}$$

On obtient alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ le système d'équation

$$\begin{cases} \alpha_1'(t) \cos(t) + \alpha_2'(t) \sin(t) &= 0 \\ -\alpha_1'(t) \sin(t) + \alpha_2'(t) \cos(t) &= 2 \cos^2(t). \end{cases}$$

On en déduit le système d'équation suivant

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \\ \alpha_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cos^2(t) \end{pmatrix}$$

On remarque que

$$\begin{vmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 \neq 0$$

donc le système est inversible et on a

$$\begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \\ \alpha_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cos^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \cos^2(t) \\ 2 \cos^3(t) \end{pmatrix}.$$

On cherche donc une primitive de $(t \mapsto -2 \sin(t) \cos^2(t))$ et $(t \mapsto 2 \cos^3(t))$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sin(t) \cos^2(t) &= \Re(\sin(t) \cos^2(t)) = \Re \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 \right) \\ &= \Re \left(\frac{1}{8i} ((e^{it} - e^{-it})(e^{2it} + e^{-2it} + 2)) \right) \\ &= \Re \left(\frac{1}{8i} (e^{3it} + e^{-it} + 2e^{it} - e^{it} - e^{-3it} - 2e^{-it}) \right) \\ &= \Re \left(\frac{1}{8i} (e^{3it} + e^{it} - e^{-it} - e^{-3it}) \right) \\ &= \frac{1}{8} (\sin(3t) + \sin(t) - \sin(-t) - \sin(-3t)) \\ &= \frac{1}{4} (\sin(3t) + \sin(t)). \end{aligned}$$

On peut donc choisir pour α_1 la primitive définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &= -\frac{1}{2} \int_0^t (\sin(3\tau) + \sin(\tau)) d\tau = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \cos(3\tau) + \cos(\tau) \right]_{\tau=0}^t \\ &= \frac{1}{6} \cos(3t) + \frac{1}{2} \cos(t) - \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

On a également pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\cos^3(t) &= \Re(\cos^3(t)) \\ &= \Re\left(\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^3\right) \\ &= \frac{1}{8} \Re(e^{3it} + e^{-3it} + 3e^{-it} + 3e^{it}) \\ &= \frac{1}{8} (2 \cos(3t) + 6 \cos(t)) \\ &= \frac{1}{4} \cos(3t) + \frac{3}{4} \cos(t).\end{aligned}$$

On peut donc, par exemple, choisir pour α_2 la primitive définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned}\alpha_2(t) &= \int_0^t \left(\frac{1}{2} \cos(3\tau) + \frac{3}{2} \cos(\tau) \right) d\tau \\ &= \left[\frac{1}{6} \sin(3\tau) + \frac{3}{2} \sin(\tau) \right]_{\tau=0}^t \\ &= \left(\frac{1}{6} \sin(3t) + \frac{3}{2} \sin(t) \right).\end{aligned}$$

On en déduit qu'une solution particulière est donnée par

$$\begin{aligned}\varphi_p(t) &= \left(\frac{1}{6} \cos(3t) + \frac{1}{2} \cos(t) - \frac{2}{3} \right) \cos(t) + \left(\frac{1}{6} \sin(3t) + \frac{3}{2} \sin(t) \right) \sin(t) \\ &= \frac{1}{6} \cos(3t) \cos(t) + \frac{1}{2} \cos^2(t) + \frac{1}{6} \sin(3t) \sin(t) + \frac{3}{2} \sin^2(t) - \frac{2}{3} \cos(t).\end{aligned}$$

On en déduit que les solutions générales $(\mathbb{R}, \varphi)$ de l'équation différentielle $y'' + y = 2 \cos^2(t)$ sont de la forme

$$\varphi(t) = \alpha_1 \cos(t) + \alpha_2 \sin(t) + \frac{1}{6} \cos(3t) \cos(t) + \frac{1}{2} \cos^2(t) + \frac{1}{6} \sin(3t) \sin(t) + \frac{3}{2} \sin^2(t)$$

où on a remarqué que le terme $-\frac{2}{3} \cos(t)$ présent dans $\varphi_p(t)$ peut en fait être inclus dans le terme $\alpha_1 \cos(t)$ venant des solutions de l'équation homogène.

En particulier, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -\alpha_1 \sin(t) + \alpha_2 \cos(t) - \frac{1}{6} (\sin(3t) \cos(t) + \cos(3t) \sin(t)) \\ &\quad - \cos(t) \sin(t) + \frac{1}{6} (3 \cos(3t) \sin(t) + \sin(3t) \cos(t)) + 3 \sin(t) \cos(t).\end{aligned}$$

Maintenant, si φ satisfait le problème de Cauchy (3.22), on a

$$1 = \varphi(0) = \alpha_1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \alpha_1 + \frac{2}{3}$$

et

$$0 = \varphi'(0) = \alpha_2.$$

On en déduit que $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ et $\alpha_2 = 0$ et donc que l'unique solution du problème de Cauchy vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = \frac{1}{3} \cos(t) + \frac{1}{6} \cos(3t) \cos(t) + \frac{1}{2} \cos^2(t) + \frac{1}{6} \sin(3t) \sin(t) + \frac{3}{2} \sin^2(t).$$

On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\cos(3t) \cos(t) &= \left(\frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2} \right) \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (e^{4it} + e^{2it} + e^{-2it} + e^{-4it}) \\ &= \frac{1}{4} (2 \cos(4t) + 2 \cos(2t)) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(4t) + \cos(2t)).\end{aligned}$$

De même, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\cos^2(t) &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2it} + e^{-2it} + 2) \\ &= \frac{1}{4} (2 \cos(2t) + 2) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(2t) + 1).\end{aligned}$$

On a également pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sin(3t) \sin(t) &= \left(\frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i} \right) \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right) \\ &= -\frac{1}{4} (e^{4it} - e^{2it} - e^{-2it} + e^{-4it}) \\ &= -\frac{1}{4} (2 \cos(4t) - 2 \cos(2t)) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(2t) - \cos(4t)).\end{aligned}$$

Enfin, comme pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$ on obtient $\sin^2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t)$. On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{1}{3} \cos(t) + \frac{1}{12} (\cos(4t) + \cos(2t)) + \frac{1}{4} (\cos(2t) + 1) + \frac{1}{12} (\cos(2t) - \cos(4t)) + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cos(2t) \\ &= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{3}{4} \right) \cos(2t) + \frac{1}{3} \cos(t) + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{3} \cos(2t) + \frac{1}{3} \cos(t) + 1.\end{aligned}$$

Exemple 93. On cherche à résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y &= e^t \\ y(0) &= 2 \\ y'(0) &= -1. \end{cases} \quad (3.23)$$

On commence par résoudre l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 $y'' - 2y' + y = 0$. Pour cela, on étudie l'équation caractéristique

$$0 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Elle admet une racine réelle double : 1. D'après la Proposition 67 on sait que les solutions $(\mathbb{R}, \varphi_h)$ de $y'' - 2y' + y = 0$ sont, pour tout $t \in \mathbb{R}$, de la forme

$$\varphi_h(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 t e^t, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Cherchons maintenant une solution particulière de la forme

$$\varphi_p(t) = \alpha_1(t) e^t + \alpha_2(t) t e^t.$$

On souhaite que $\alpha_1'(t)e^t + \alpha_2'(t)te^t = 0$ et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_p'(t) = \alpha_1'(t)e^t + \alpha_1(t)e^t + \alpha_2'(t)te^t + \alpha_2(t)e^t + \alpha_2(t)te^t = \alpha_1(t)e^t + \alpha_2(t)(t+1)e^t$$

et

$$\varphi_p''(t) = \alpha_1'(t)e^t + \alpha_1(t)e^t + \alpha_2'(t)(t+1)e^t + \alpha_2(t)e^t + \alpha_2(t)(t+1)e^t.$$

Comme $(\mathbb{R}, \varphi_p)$ doit être solution de $y'' - 2y' + y = e^t$ on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^t &= \varphi_p''(t) - 2\varphi_p'(t) + \varphi_p(t) \\ &= \alpha_1'(t)e^t + \alpha_1(t)e^t + \alpha_2'(t)(t+1)e^t + \alpha_2(t)e^t + \alpha_2(t)(t+1)e^t - 2(\alpha_1(t)e^t + \alpha_2(t)(t+1)e^t) \\ &\quad + \alpha_1(t)e^t + \alpha_2(t)te^t \\ &= e^t\alpha_1'(t) + (t+1)e^t\alpha_2'(t) \end{aligned}$$

et donc on en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{pmatrix} 1 & t+1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \\ \alpha_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & t+1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

donc le système est inversible et on obtient

$$\begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \\ \alpha_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t & t+1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on peut choisir pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1(t) = -\frac{t^2}{2}, \quad \alpha_2(t) = t$$

et on en déduit que $(\mathbb{R}, \varphi_p)$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi_p(t) = -\frac{t^2}{2}e^t + t(te^t) = \frac{1}{2}t^2e^t$$

est une solution particulière de $y'' - 2y' + y = e^t$. Par conséquent, les solutions générales $(\mathbb{R}, \varphi)$ de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = e^t$ sont pour tout $t \in \mathbb{R}$ de la forme

$$\varphi(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 t e^t + \frac{1}{2} t^2 e^t, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, on cherche à vérifier les conditions initiales afin de satisfaire le problème de Cauchy. Tout d'abord, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi'(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2(1+t)e^t + te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$$

et donc on souhaite que

$$2 = \varphi(0) = \alpha_1, \quad -1 = \varphi'(0) = \alpha_1 + \alpha_2.$$

On en déduit que $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = -3$ et donc que l'unique solution au problème de Cauchy (3.23) est donnée par $(\mathbb{R}, \varphi)$ où pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi(t) = 2e^t - 3te^t + \frac{1}{2}t^2e^t.$$

3.2.5 Quelques applications dans d'autres disciplines

Exemple 94. Un pendule simple est une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil de masse nulle est inextensible, oscillant sous l'effet de la pesanteur. L'angle θ que forme le fil avec l'axe des ordonnées satisfait, pour θ suffisamment petit, l'équation différentielle suivante

$$\ell\theta'' + g\theta = 0$$

où $\ell > 0$ est la longueur du fil et $g > 0$ est la constante gravitationnelle de pesanteur. Si on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ cette équation différentielle se ré-écrit

$$\theta'' + \omega_0^2 \theta = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux et son équation caractéristique est donné par

$$0 = \lambda^2 + \omega_0^2 = (\lambda - i\omega_0)(\lambda + i\omega_0).$$

On en déduit que comme les deux racines sont complexes conjuguées que les solutions $(\mathbb{R}, \varphi)$ de $\theta'' + \omega_0^2 \theta = 0$ sont pour tout $t \in \mathbb{R}$ de la forme

$$\varphi(t) = \alpha_1 \cos(\omega_0 t) + \alpha_2 \sin(\omega_0 t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

On remarque que

$$\varphi(0) = \alpha_1, \quad \varphi'(0) = \alpha_2 \omega_0$$

et donc que

$$\varphi(t) = \varphi(0) \cos(\omega_0 t) + \varphi'(0) \omega_0^{-1} \sin(\omega_0 t).$$

En particulier, si $\varphi(0) = 0$ et que $\varphi'(0) = 0$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\varphi(t) = 0$. C'est physiquement raisonnable : si $\varphi(0) = 0$ alors le pendule est au temps $t = 0$ le long de l'axe des ordonnées et si $\varphi'(0) = 0$, cela veut dire qu'on ne lui donne aucune impulsion pour qu'il commence à osciller, il reste donc au repos.

Exemple 95. On peut considérer l'évolution du nombre d'individu d'une population au cours du temps. Cette évolution dépend du taux de naissance $b \in [0, 1]$ et du taux de décès $d \in [0, 1]$. On suppose que les individus qui sont nés au temps $t \in \mathbb{R}$ ne pourront se reproduire qu'après un certain temps $\tau > 0$, dite phase de maturation. L'équation différentielle qui régit ce modèle est

$$n'(t) = bn(t - \tau) - dn(t).$$

C'est une équation différentielle qui ne ressemble à aucune de celles que nous avons étudiées à cause du terme de retard $t - \tau$. Si τ est suffisamment petit on fait l'approximation (formelle, non rigoureuse) suivante

$$n(t - \tau) \simeq n(t) - \tau n'(t) + \frac{\tau^2}{2} n''(t).$$

On doit donc étudier l'équation différentielle linéaire d'ordre deux :

$$n' = b(n - \tau n' + \frac{\tau^2}{2} n'') - dn$$

qui se ré-écrit

$$\frac{\tau^2}{2} bn'' - (1 + b\tau)n' + (b - d)n = 0.$$

On suppose que $b > d$, c'est-à-dire que le taux de naissance est strictement supérieur à celui de décès. On a alors l'équation caractéristique de cette équation différentielle qui est

$$0 = \frac{\tau^2}{2} \lambda^2 - (1 + b\tau)\lambda + (b - d), \quad \Delta = (1 + b\tau)^2 - 4\frac{\tau^2}{2}b(b - d) > 0.$$

On a donc deux racines réelles données par

$$\lambda_{\pm} := \frac{1}{\tau^2 b} \left(1 + b\tau \pm \sqrt{(1 + b\tau)^2 - 2\tau^2 b(b - d)} \right).$$

On remarque que

$$\lambda_+ > 0, \quad \lambda_- > 0.$$

En effet, λ_+ est une somme de termes strictement positifs et

$$\lambda_- > 0 \iff (1 + b\tau)^2 > (1 + b\tau)^2 - 4\frac{\tau^2}{2}b(b - d) \iff 0 > -4\frac{\tau^2}{2}b(b - d)$$

et la dernière assertion est vraie. Les solutions générales $(\mathbb{R}, \varphi)$ de l'équation différentielle $\frac{\tau^2}{2}bn'' - (1 + b\tau)n' + (b - d)n = 0$ sont pour tout $t \in \mathbb{R}$ de la forme

$$\varphi(t) = \alpha_1 e^{\lambda_+ t} + \alpha_2 e^{\lambda_- t}.$$

On remarque que

$$\alpha_1 = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} (\varphi'(0) - \lambda_- \varphi(0)), \quad \alpha_2 = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} (\lambda_+ \varphi(0) - \varphi'(0)).$$

Exemple 96. Le circuit RLC en électrocinétique est un circuit composé d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur. L'équation différentielle qui régit l'évolution de la tension aux bornes de la résistance est

$$y'' + \frac{R}{L}y' + \omega_0^2 y = e(t)$$

où $e \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ représente la tension apportée par une source extérieure au circuit, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} > 0$ avec $R > 0$ la résistance du circuit, $L > 0$ l'impédance de la bobine et $C > 0$ la capacité du condensateur. On va faire le choix pour $t \in \mathbb{R}$ de $e(t) = \cos(\omega t)$ pour $\omega \in \mathbb{R}$ et on suppose qu'à l'instant initial on a $y(0) = y'(0) = 0$. On résout dans un premier temps l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre $y'' + \frac{R}{L}y' + \omega_0^2 y = 0$. Son équation caractéristique est

$$0 = \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \omega_0^2 \quad (3.24)$$

et son discriminant

$$\Delta = \frac{R^2}{L^2} - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 \left(\frac{R^2}{4L^2\omega_0^2} - 1 \right) = 4\omega_0^2 (\alpha^2 - 1) = 4\omega_0^2 (\alpha^2 - 1), \quad \alpha := \frac{R}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Ainsi, selon le signe de $\alpha^2 - 1$, on observe différents comportements. Concentrons-nous sur le cas $\alpha^2 - 1 > 0$. Si $\alpha^2 - 1 > 0$ alors l'équation caractéristique (3.24) admet deux racines réelles

$$\lambda_- := \frac{-RL^{-1} - 2\omega_0\sqrt{\alpha^2 - 1}}{2}, \quad \lambda_+ := \frac{-RL^{-1} + 2\omega_0\sqrt{\alpha^2 - 1}}{2}$$

les solutions $(\mathbb{R}, \varphi_h)$ de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre $y'' + \frac{R}{L}y' + \omega_0^2 y = 0$ sont de la forme

$$\varphi_h(t) = \alpha_1 e^{\lambda_- t} + \alpha_2 e^{\lambda_+ t}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche alors une solution particulière à l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre $y'' + \frac{R}{L}y' + \omega_0^2 y = e(t)$ par la méthode de variation des constantes. On suppose que $(\mathbb{R}, \varphi_p)$ est solution de cette équation différentielle et pour tout $t \in \mathbb{R}$ est de la forme

$$\varphi_p(t) = \alpha_1(t) e^{\lambda_- t} + \alpha_2(t) e^{\lambda_+ t}$$

où α_1, α_2 sont des fonctions dérivables et vérifient pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\alpha_1'(t) e^{\lambda_- t} + \alpha_2'(t) e^{\lambda_+ t} = 0$. On obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_p'(t) = \lambda_- \alpha_1(t) e^{\lambda_- t} + \lambda_+ \alpha_2(t) e^{\lambda_+ t}$$

et

$$\varphi_p''(t) = (\lambda_-^2 \alpha_1(t) + \lambda_- \alpha_1'(t)) e^{\lambda_- t} + (\lambda_+^2 \alpha_2(t) + \lambda_+ \alpha_2'(t)) e^{\lambda_+ t}.$$

Comme $(\mathbb{R}, \varphi_p)$ est solution de $y'' + \frac{R}{L}y' + \omega_0^2 y = e(t)$ on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e(t) &= \varphi_p''(t) + \frac{R}{L}\varphi_p'(t) + \omega_0^2 \varphi_p(t) \\ &= (\lambda_-^2 \alpha_1(t) + \lambda_- \alpha_1'(t)) e^{\lambda_- t} + (\lambda_+^2 \alpha_2(t) + \lambda_+ \alpha_2'(t)) e^{\lambda_+ t} + \frac{R}{L} (\lambda_- \alpha_1(t) e^{\lambda_- t} + \lambda_+ \alpha_2(t) e^{\lambda_+ t}) \\ &\quad + \omega_0^2 (\alpha_1(t) e^{\lambda_- t} + \alpha_2(t) e^{\lambda_+ t}) \\ &= \left(\lambda_-^2 + \frac{R}{L}\lambda_- + \omega_0^2 \right) \alpha_1(t) e^{\lambda_- t} + \left(\lambda_+^2 + \frac{R}{L}\lambda_+ + \omega_0^2 \right) \alpha_2(t) e^{\lambda_+ t} + \lambda_- \alpha_1'(t) e^{\lambda_- t} + \lambda_+ \alpha_2'(t) e^{\lambda_+ t} \\ &= \lambda_- \alpha_1'(t) e^{\lambda_- t} + \lambda_+ \alpha_2'(t) e^{\lambda_+ t} \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que λ_- et λ_+ sont solutions de l'équation caractéristique. On en déduit alors le système

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_- t} & e^{\lambda_+ t} \\ \lambda_- e^{\lambda_- t} & \lambda_+ e^{\lambda_+ t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \\ \alpha_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e(t) \end{pmatrix}.$$

Or on a

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_- t} & e^{\lambda_+ t} \\ \lambda_- e^{\lambda_- t} & \lambda_+ e^{\lambda_+ t} \end{vmatrix} = (\lambda_+ - \lambda_-) e^{(\lambda_- + \lambda_+)t} = -RL^{-1} e^{(\lambda_- + \lambda_+)t} \neq 0.$$

On en déduit que le système est inversible et donc que l'on a

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1(t) \\ \alpha'_2(t) \end{pmatrix} = \frac{L}{R} \begin{pmatrix} -\lambda_+ e^{-\lambda_- t} & e^{-\lambda_- t} \\ \lambda_- e^{-\lambda_+ t} & -e^{-\lambda_+ t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L}{R} e(t) \\ -\frac{L}{R} e(t) \end{pmatrix}.$$

Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e(t) = \cos(\omega t)$, on choisit donc comme primitive pour α_1 et α_2 , pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1(t) = \frac{L}{R\omega} \sin(\omega t), \quad \alpha_2(t) = -\frac{L}{R\omega} \sin(\omega t).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \varphi_p(t) &= \frac{L}{R\omega} \sin(\omega t) (e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}) = \frac{L}{R\omega} \sin(\omega t) e^{-\frac{R}{2L}t} \left(e^{-\omega_0 \sqrt{\alpha^2 - 1}t} - e^{\omega_0 \sqrt{\alpha^2 - 1}t} \right) \\ &= -2 \frac{L}{R\omega} \sin(\omega t) e^{-\frac{R}{2L}t} \sinh(\omega_0(\sqrt{\alpha^2 - 1}t)). \end{aligned}$$

Les solutions générales $(\mathbb{R}, \varphi)$ de $y'' + \frac{R}{L}y' + \omega_0^2 y = e(t)$ sont pour tout $t \in \mathbb{R}$ de la forme

$$\varphi(t) = \alpha_1 e^{\lambda_- t} + \alpha_2 e^{\lambda_+ t} - 2 \frac{L}{R\omega} \sin(\omega t) e^{-\frac{R}{2L}t} \sinh(\omega_0(\sqrt{\alpha^2 - 1}t)), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme on cherche la solution de cette équation différentielle qui vérifie $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 0$ cherche $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$0 = \varphi(0) = \alpha_1 + \alpha_2$$

et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \lambda_- \alpha_1 e^{\lambda_- t} + \lambda_+ \alpha_2 e^{\lambda_+ t} - 2 \frac{L}{R} \cos(\omega t) e^{-\frac{R}{2L}t} \sinh(\omega_0(\sqrt{\alpha^2 - 1}t)) + \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) e^{-\frac{R}{2L}t} \sinh(\omega_0(\sqrt{\alpha^2 - 1}t)) \\ &\quad - 2\omega_0(\sqrt{\alpha^2 - 1}) \frac{L}{R\omega} \sin(\omega t) e^{-\frac{R}{2L}t} \cosh(\omega_0(\sqrt{\alpha^2 - 1}t)) \end{aligned}$$

et donc

$$0 = \varphi'(0) = \lambda_- \alpha_1 + \lambda_+ \alpha_2.$$

Donc $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et par conséquent pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi(t) = -2 \frac{L}{R\omega} \sin(\omega t) e^{-\frac{R}{2L}t} \sinh(\omega_0(\sqrt{\alpha^2 - 1}t)).$$

3.3 Les équations différentielles ordinaires

Jusqu'à présent, nous avons étudié des équations différentielles linéaires pour lesquelles on peut calculer explicitement des solutions. Dans de nombreuses applications (dynamique des populations, propagation d'épidémie, mécanique, électrocinétique, cinétique chimique...) les équations différentielles obtenues ne sont pas linéaires. Lorsque c'est possible, on essaie alors de démontrer

- (i) que le problème de Cauchy est *bien posé* : on montre qu'il existe une unique solution maximale,
- (ii) que la solution maximale est globale,
- (iii) des propriétés qualitatives de la solution, sans pour autant avoir la capacité de la calculer explicitement (limites, bornes etc...).

3.3.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz et ses conséquences

Le résultat le plus important de ce chapitre est le Théorème de Cauchy-Lipschitz. Afin de l'énoncer, nous rappelons la Définition 42.

Définition 44 (solution maximale, solution globale). Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ un ouvert. Soit $f : \mathcal{O} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ et (J, φ) une solution de

$$y' = f(t, y). \quad (3.25)$$

On dit que (J, φ) est une solution maximale de l'équation différentielle ordinaire (3.25) si pour toute autre solution $(\tilde{J}, \tilde{\varphi})$ de l'équation différentielle ordinaire (3.25) vérifiant $J \subset \tilde{J}$ et $\varphi = \tilde{\varphi}|_J$ alors $(J, \varphi) = (\tilde{J}, \tilde{\varphi})$. On parle de solution globale lorsque $J = I$.

Remarque 69. La notion de solution maximale s'interprète comme suit : si (J, φ) est une solution maximale de l'équation différentielle ordinaire (3.25), elle ne peut pas être la restriction d'une solution de l'équation différentielle ordinaire (3.25) définie sur un intervalle plus grand.

Théorème 4 (Théorème de Cauchy-Lipschitz). Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ un ouvert. Soit $f : I \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1(I \times \mathcal{O}, \mathbb{R})$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathcal{O}$, on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Alors il existe $t_+, t_- \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ tels que $]t_0 - t_-, t_0 + t_+[\subset I$ et un couple $(]t_0 - t_-, t_0 + t_+[, \varphi)$ qui est l'unique solution maximale du problème de Cauchy (3.26).

Le Théorème de Cauchy-Lipschitz est admis. Pour le démontrer, il faut utiliser des outils de topologie que vous n'avez pas à votre disposition. On se concentrera donc plutôt sur son utilisation.

Remarque 70. On remarque que l'unique solution maximale $(]t_0 - t_-, t_0 + t_+[, \varphi)$ du problème de Cauchy (3.26) donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz est de classe $\mathcal{C}^2([t_0 - t_-, t_0 + t_+], \mathbb{R})$. En effet, par définition de la notion de solution, φ est dérivable et pour tout $t \in]t_0 - t_-, t_0 + t_+[$ on a

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

Pour $t \in]t_0 - t_-, t_0 + t_+[$, on pose $\psi(t) = f(t, \varphi(t))$ et on remarque que $\psi = f \circ g$ où $g : t \in]t_0 - t_-, t_0 + t_+[\mapsto (t, \varphi(t)) \in I \times \mathcal{O}$. g est dérivable sur son domaine de définition car chacune des deux composante l'est et $g([t_0 - t_-, t_0 + t_+]) \subset I \times \mathcal{O}$ donc ψ est dérivable sur $]t_0 - t_-, t_0 + t_+[$ en tant que composée de fonctions dérivables. On en déduit que φ est deux fois dérivable sur $]t_0 - t_-, t_0 + t_+[$ et que l'on a pour $t \in]t_0 - t_-, t_0 + t_+[$

$$\varphi''(t) = (\partial_t f)(t, \varphi(t)) + \varphi'(t)(\partial_x f)(t, \varphi(t)).$$

Maintenant, si on pose $\theta :]t_0 - t_-, t_0 + t_+[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $t \in]t_0 - t_-, t_0 + t_+[$ par

$$\theta(t) = (\partial_t f)(t, \varphi(t)) + \varphi'(t)(\partial_x f)(t, \varphi(t))$$

on remarque que $\theta = (\partial_t f) \circ g + \varphi' \times (\partial_x f) \circ g$. Comme $f \in \mathcal{C}^1(I \times \mathcal{O}, \mathbb{R})$ ses dérivées partielles sont continues sur $I \times \mathcal{O}$ et donc $(\partial_t f) \circ g$ et $(\partial_x f) \circ g$ sont continues sur $]t_0 - t_-, t_0 + t_+[$ en tant que composée de fonctions continues. Comme φ' est continue sur $]t_0 - t_-, t_0 + t_+[$ alors $\varphi' \times (\partial_x f) \circ g$ est continue sur $]t_0 - t_-, t_0 + t_+[$ en tant que produit de fonctions continues et θ est continue sur $]t_0 - t_-, t_0 + t_+[$ en tant que somme de fonctions continues. On en déduit que $\varphi \in \mathcal{C}^2([t_0 - t_-, t_0 + t_+])$.

Exemple 97. On considère le problème de Cauchy

$$y' = t + y(y - 1), \quad y(0) = 0. \quad (3.27)$$

On pose l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \mapsto \mathbb{R} \\ (t, x) & \mapsto t + x(x - 1) \end{cases}$$

et on remarque que (3.27) se ré-écrit sous la forme

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 0.$$

Par ailleurs, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ en tant qu'application polynomiale à deux variables. D'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe $t_+, t_- > 0$ et $(]-t_-, +t_+[, \varphi)$ tels que $(]-t_-, +t_+[, \varphi)$ soit l'unique solution maximale du problème de Cauchy (3.27).

Exemple 98. On considère le problème de Cauchy

$$y' = \arctan(ty), \quad y(0) = 1. \quad (3.28)$$

On pose l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \mapsto \mathbb{R} \\ (t, x) & \mapsto \arctan(tx) \end{cases}$$

et on remarque que (3.28) se ré-écrit sous la forme

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 1.$$

On remarque que $f = \arctan \circ P$ où $P : (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mapsto tx \in \mathbb{R}$. $P \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ en tant qu'application polynomiale et $\arctan \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Comme $P(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ en tant que composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe $t_+, t_- > 0$ et $(]-t_-, +t_+[, \varphi)$ tels que $(]-t_-, +t_+[, \varphi)$ soit l'unique solution maximale du problème de Cauchy (3.28).

Exemple 99. On considère le problème de Cauchy

$$y' = e^y \tan(t), \quad y(0) = 1. \quad (3.29)$$

On doit alors faire attention au plus grand intervalle contenant 0 pour lequel le membre de droite est défini. Pour cela, on pose

$$f : \begin{cases}] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R} & \mapsto \mathbb{R} \\ (t, x) & \mapsto e^x \tan(t) \end{cases}$$

et on remarque que (3.29) se ré-écrit sous la forme

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 1.$$

On observe que $f = (\exp \circ \pi_2) \times \tan \circ \pi_1$ où π_1 et π_2 sont les applications première et deuxième coordonnées respectivement. On sait que π_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}$ et que $\pi_1(] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}) \subset] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Comme $\tan \in \mathcal{C}^1(] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \mathbb{R})$, on en déduit que $\tan \circ \pi_1 \in \mathcal{C}^1(] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ par composition. De même, on sait que $\pi_2 \in \mathcal{C}^1(] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que $\pi_2(] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Comme $\exp \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on en déduit que $\exp \circ \pi_2 \in \mathcal{C}^1(] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ par composition. Finalement $f \in \mathcal{C}^1(] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1(] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. D'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe $t_+, t_- > 0$ et $(] - t_-, +t_+[, \varphi)$ tels que $(] - t_-, +t_+[, \varphi)$ soit l'unique solution maximale du problème de Cauchy (3.29).

Une autre application du théorème de Cauchy-Lipschitz est liée à la notion de trajectoire des solutions d'une l'équation différentielle.

Définition 45. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ un ouvert. Soit $f : I \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1(I \times \mathcal{O}, \mathbb{R})$. Soit (J, φ) une solution de $y' = f(t, y)$ (avec $J \subset I$). L'ensemble

$$\Gamma_{(J, \varphi)} := \{(t, \varphi(t)) : t \in J\}$$

est la trajectoire de la solution (J, φ) .

Si $(\tilde{J}, \tilde{\varphi})$ est une autre solution de $y' = f(t, y)$, on dit que les trajectoires $\Gamma_{(J, \varphi)}$ et $\Gamma_{(\tilde{J}, \tilde{\varphi})}$ se croisent s'il existe $t_* \in J \cap \tilde{J}$ tel que $\varphi(t_*) = \tilde{\varphi}(t_*)$.

Remarque 71. La trajectoire $\Gamma_{(J, \varphi)}$ n'est rien d'autre que le graphe de la fonction $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$. Le fait que deux trajectoires se croisent revient simplement à dire que leurs graphes respectifs se croisent en un point.

Proposition 69. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ un ouvert. Soit $f : I \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1(I \times \mathcal{O}, \mathbb{R})$. Soient (J, φ) et $(\tilde{J}, \tilde{\varphi})$ deux solutions de $y' = f(t, y)$. Si les trajectoires $\Gamma_{(J, \varphi)}$ et $\Gamma_{(\tilde{J}, \tilde{\varphi})}$ se croisent alors $\varphi|_{J \cap \tilde{J}} = \tilde{\varphi}|_{J \cap \tilde{J}}$.

Remarque 72. Autrement dit, la Proposition 69 nous dit que si des trajectoires se coupent en un point, elles coïncident sur $\Gamma_{(J, \varphi)} \cap \Gamma_{(\tilde{J}, \tilde{\varphi})}$.

Preuve de la Proposition 69. Soient (J, φ) et $(\tilde{J}, \tilde{\varphi})$ deux solutions de $y' = f(t, y)$, on suppose que les trajectoires $\Gamma_{(J, \varphi)}$ et $\Gamma_{(\tilde{J}, \tilde{\varphi})}$ se croisent. Par définition, il existe $t_* \in J \cap \tilde{J}$ tel que $\varphi(t_*) = \tilde{\varphi}(t_*) =: \varphi_*$. On considère alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_*) &= \varphi_* \end{cases} \quad (3.30)$$

Comme $f \in \mathcal{C}^1(I \times \mathcal{O})$, d'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe $t_-, t_+ > 0$ et une unique solution maximale $(]t_* - t_-, t_* + t_+[, \varphi_c)$ à ce problème de Cauchy. Or, comme (J, φ) est solution de $y' = f(t, y)$ et que $\varphi(t_*) = \varphi_*$, le couple (J, φ) est aussi solution du problème de Cauchy (3.30). Comme $(]t_* - t_-, t_* + t_+[, \varphi_c)$ est l'unique solution maximale du problème de Cauchy (3.30) on en déduit que $\varphi_c|_J = \varphi$. De même, comme $(\tilde{J}, \tilde{\varphi})$ est solution de $y' = f(t, y)$ et que $\tilde{\varphi}(t_*) = \varphi_*$, le couple $(\tilde{J}, \tilde{\varphi})$ est aussi solution du problème de Cauchy (3.30). Comme $(]t_* - t_-, t_* + t_+[, \varphi_c)$ est l'unique solution maximale du problème de Cauchy (3.30) on en déduit que $\varphi_c|_{\tilde{J}} = \tilde{\varphi}$. En particulier, on obtient que

$$\tilde{\varphi}|_{\tilde{J} \cap J} = \varphi_c|_{\tilde{J} \cap J} \quad \text{et} \quad \varphi|_{\tilde{J} \cap J} = \varphi_c|_{\tilde{J} \cap J}$$

On en déduit que $\tilde{\varphi}|_{\tilde{J} \cap J} = \varphi|_{\tilde{J} \cap J}$. □

Nous allons maintenant voir quelques exemples permettant de voir comment utiliser cette notion.

Exemple 100. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(1 - y) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.31)$$

On va démontrer qu'il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy (3.31) $(] - t_-, t_+[, \varphi)$ avec $t_-, t_+ > 0$ puis que cette solution vérifie pour tout $t \in] - t_-, t_+[$:

$$0 < \varphi(t) < 1.$$

On commence par poser la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) & \mapsto x(1 - x) \end{cases}.$$

On remarque que l'équation différentielle $y' = y(1 - y)$ se ré-écrit $y' = f(t, y)$. Par ailleurs, on remarque que f est une fonction polynomiale (des deux variables t et x) et est donc de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. D'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale de la forme $(] - t_-, t_+[, \varphi)$ (avec $t_-, t_+ > 0$) au problème de Cauchy (3.31).

On démontre maintenant que pour tout $t \in] - t_-, t_+[$, on a $0 < \varphi(t) < 1$. On le fait en deux temps en démontrant d'abord la première inégalité $0 < \varphi(t)$ puis $\varphi(t) < 1$. La démonstration de chacune de ces inégalités est très similaire mais on la détaille dans les deux points ci-dessous.

- (i) Supposons maintenant qu'il existe $t_1 \in] - t_-, t_+[$ tel que $\varphi(t_1) \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $\varphi \in \mathcal{C}^1(] - t_-, t_+[, \mathbb{R})$, elle est en particulier continue sur $] - t_-, t_+[$ donc comme $\varphi(0) = \frac{1}{2}$ et $\varphi(t_1) < 0$ il existe $t_* \in] - t_-, t_+[$ tel que $\varphi(t_*) = 0$. On considère alors le nouveau problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(1 - y) \\ y(t_*) = 0 \end{cases}. \quad (3.32)$$

Comme $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, d'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale de la forme $(] - t_* - \tilde{t}_-, t_* + \tilde{t}_+[, \varphi_0)$ (avec $\tilde{t}_-, \tilde{t}_+ > 0$) au problème de Cauchy (3.32). Cependant, on remarque que la fonction constante à 0 sur tout $\mathbb{R}$ est solution du problème de Cauchy (3.32). On en déduit que $] - t_* - \tilde{t}_-, t_* + \tilde{t}_+[= \mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\varphi_0(t) = 0$. Toutefois, $(] - t_-, t_+[, \varphi)$ est également solution du problème de Cauchy (3.32) puisque $(] - t_-, t_+[, \varphi)$ est solution de l'équation différentielle $y' = y(1 - y)$ et $\varphi(t_*) = 0$. Comme $(\mathbb{R}, \varphi_0)$ est l'unique solution maximale du problème de Cauchy (3.32), on en déduit que pour tout $t \in] - t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) = \varphi_0(t) = 0$. C'est absurde car pour $t = 0$ on a $\varphi(0) = \frac{1}{2} \neq 0$. On en déduit que pour tout $t \in] - t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) > 0$.

- (ii) Supposons maintenant qu'il existe $t_1 \in] - t_-, t_+[$ tel que $\varphi(t_1) > 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $\varphi \in \mathcal{C}^1(] - t_-, t_+[, \mathbb{R})$, elle est en particulier continue sur $] - t_-, t_+[$ donc comme $\varphi(0) = \frac{1}{2}$ et $\varphi(t_1) > 1$ il existe $t_* \in] - t_-, t_+[$ tel que $\varphi(t_*) = 1$. On considère alors le nouveau problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(1 - y) \\ y(t_*) = 1 \end{cases}. \quad (3.33)$$

Comme $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, d'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale de la forme $(] - t_* - \tilde{t}_-, t_* + \tilde{t}_+[, \varphi_1)$ (avec $\tilde{t}_-, \tilde{t}_+ > 0$) au problème de Cauchy (3.33). Cependant, on remarque que la fonction constante à 1 sur tout $\mathbb{R}$ est solution du problème de Cauchy (3.33). On en déduit que $] - t_* - \tilde{t}_-, t_* + \tilde{t}_+[= \mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\varphi_1(t) = 1$. Toutefois, $(] - t_-, t_+[, \varphi)$ est également solution du problème de Cauchy (3.33) puisque $(] - t_-, t_+[, \varphi)$ est solution de l'équation différentielle $y' = y(1 - y)$ et $\varphi(t_*) = 1$. Comme $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ est l'unique solution maximale du problème de Cauchy (3.33), on en déduit que pour tout $t \in] - t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) = \varphi_1(t) = 1$. C'est absurde car pour $t = 0$ on a $\varphi(0) = \frac{1}{2} \neq 1$. On en déduit que pour tout $t \in] - t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) < 1$.

Exemple 101. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= t \tan(y) \\ y(0) &= \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (3.34)$$

On va montrer qu'il existe une unique solution maximale $(] - t_-, t_+[, \varphi)$ à ce problème de Cauchy et que pour tout $t \in] - t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) > 0$. On commence par définir

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) & \mapsto t \tan(x) \end{cases}$$

et on remarque que le problème de Cauchy (3.34) se met sous la forme

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

On remarque que $f = \pi_1 \times (\tan \circ \pi_2)$ où π_1 et π_2 sont les applications premières et deuxièmes coordonnées. Or $\pi_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \mathbb{R})$ et $\pi_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \mathbb{R})$ avec $\pi_2(\mathbb{R} \times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) \subset] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. De plus $\tan \in \mathcal{C}^1(] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \mathbb{R})$ donc par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ on a $\tan \circ \pi_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \mathbb{R})$ et donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \mathbb{R})$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale $(] - t_-, t_+[, \varphi)$ au problème de Cauchy (3.34).

Montrons maintenant que pour tout $t \in] - t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) > 0$. S'il existe $t_1 \in] - t_-, t_+[$ tel que $\varphi(t_1) \leq 0$ alors, comme φ est continue sur $[t_1, 0]$ ou $[0, t_1]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t_* \in] - t_-, t_+[$ tel que $\varphi(t_*) = 0$. On doit étudier alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_*) &= 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

On remarque que l'application définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\varphi_0(t) := 0$ est solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy (3.35). Or d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale à ce problème et comme $(\mathbb{R}, \varphi_0)$ est une solution globale, c'est en particulier la solution maximale du problème de Cauchy (3.35). On remarque cependant que $(] - t_-, t_+[, \varphi)$ est aussi solution du problème de Cauchy (3.35) et par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on en déduit que pour tout $t \in] - t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) = \varphi_0(t) = 0$. C'est absurde car $\varphi(0) = \frac{\pi}{4} \neq 0$. Par conséquent, pour tout $t \in] - t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) > 0$.

3.3.2 Le théorème d'explosion en temps fini

Une question que l'on se pose naturellement est de savoir quelles sont les valeurs de t_- et t_+ qui apparaissent dans l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz, en particulier on voudrait savoir si la solution est globale, c'est-à-dire si $] - t_-, t_+[= I$. C'est la réponse qu'apporte la proposition suivante.

Proposition 70 (Explosion en temps fini). *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ un ouvert. Soit $f : I \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1(I \times \mathcal{O}, \mathbb{R})$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathcal{O}$, et $(]t_0 - t_-, t_0 + t_+[, \varphi)$ l'unique solution maximale du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Si $t_+ < \sup I$ alors $\lim_{t \rightarrow t_0 + t_+} |\varphi(t)| = +\infty$, de même si $t_- > \inf I$ alors $\lim_{t \rightarrow t_0 - t_-} |\varphi(t)| = +\infty$.

La Proposition 70 a un corollaire crucial.

Corollaire 5. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ un ouvert. Soit $f : I \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1(I \times \mathcal{O}, \mathbb{R})$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathcal{O}$, et $(]t_0 - t_-, t_0 + t_+[, \varphi)$ l'unique solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in] - t_-, t_+[$ on a $|\varphi(t)| \leq M$ alors $]t_0 - t_-, t_0 + t_+[= I$.

Remarque 73. Le Corollaire 5 nous dit simplement que si on arrive à prouver que la solution obtenue par Cauchy-Lipschitz est bornée alors c'est une solution globale. Dans l'Exemple 100, on a étudié le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= y(1 - y) \\ y(0) &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

et on a montré qu'il existait une unique solution maximale $(] - t_-, t_+[, \varphi)$ vérifiant pour tout $t \in] - t_-, t_+[$, $0 < \varphi(t) < 1$. On en déduit que φ est bornée et donc que $] - t_-, t_+[= \mathbb{R}$.

Preuve du Corollaire 5. Supposons par l'absurde que $t_0 + t_+ < \sup I$, alors d'après la Proposition 70, on a d'une part $\lim_{t \rightarrow t_0 + t_+} |\varphi(t)| = +\infty$ donc grâce à la définition de la limite, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]t_0 - t_-, t_0 + t_+[\cap]t_0 + t_+ - \delta, t_0 + t_+[$ on ait $|\varphi(t)| \geq M + 1$. Cependant, d'autre part, par hypothèse, on sait que pour tout $t \in]t_0 - t_-, t_0 + t_+[$ on a $|\varphi(t)| \leq M$ et donc pour tout $t \in] - t_-, t_+[\cap]t_0 + t_+ - \delta, t_0 + t_+[$ on a $M + 1 \leq |\varphi(t)| \leq M$ ce qui donne $1 \leq 0$ et est absurde donc nécessairement $t_+ = \sup I$.

On démontrerait de la même façon que $t_0 - t_- = \inf I$. $\square$

On donne deux autres conséquences de la Proposition 70.

Proposition 71. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ un ouvert. Soit $f : I \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1(I \times \mathcal{O}, \mathbb{R})$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathcal{O}$, et $]t_0 - t_-, t_0 + t_+[$, φ l'unique solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Si f est bornée⁴ sur $I \times \mathcal{O}$ alors $]t_0 - t_-, t_0 + t_+[= I$ et donc la solution est globale.

Preuve de la Proposition 71. Supposons par l'absurde que $t_0 + t_+ < \sup I$. Alors, $t_0 + t_+ \in \mathbb{R}$ et comme φ est solution du problème de Cauchy on a pour tout $t \in]t_0 - t_-, t_0 + t_+[$:

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

et en intégrant entre t_0 et $t \in]t_0 - t_-, t_0 + t_+[$ on obtient

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

Maintenant, comme f est bornée sur $I \times \mathcal{O}$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(t, x) \in I \times \mathcal{O}$ on a $|f(t, x)| \leq M$. Par conséquent, on a pour tout $t \in [t_0, t_0 + t_+[\subset I$

$$|\varphi(t)| \leq y_0 + \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s))| ds \leq |y_0| + M|t - t_0| \leq |y_0| + Mt_+ < +\infty.$$

Mais comme $t_0 + t_+ < \sup I$, on a d'après la Proposition 70 que $\lim_{t \rightarrow t_0 + t_+} |\varphi(t)| = +\infty$. En utilisant la définition de la limite, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]t_0 - t_-, t_0 + t_+[\cap]t_0 + t_+ - \delta, t_0 + t_+[$ on ait $|\varphi(t)| \geq |y_0| + Mt_+ + 1$. Et donc, pour tout $t \in]t_0 - t_-, t_0 + t_+[\cap]t_0 + t_+ - \delta, t_0 + t_+[$ on a

$$|y_0| + Mt_+ + 1 \leq |\varphi(t)| \leq |y_0| + Mt_+$$

ce qui donne $1 \leq 0$ et est absurde donc $t_0 + t_+ = \sup I$. On démontrerait de la même façon que $t_0 - t_- = \inf I$. $\square$

Un autre cas de figure est quand la fonction f est globalement Lipschitzienne uniformément par rapport à sa première variable. Nous en donnons d'abord la définition.

Définition 46. Soit $f : I \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1(I \times \mathcal{O}, \mathbb{R})$. On dit que f est globalement Lipschitzienne uniformément par rapport à sa première variable s'il existe $L > 0$ tel que pour tout $(x_1, x_2) \in \mathcal{O}$ et tout $t \in I$ on a

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

La proposition suivante est souvent connue sous le nom de théorème de Cauchy-Lipschitz global⁵.

Proposition 72. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ un ouvert. Soit $f : I \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1(I \times \mathcal{O}, \mathbb{R})$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathcal{O}$, et $]t_0 - t_-, t_0 + t_+[$, φ l'unique solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Si f est globalement Lipschitzienne uniformément par rapport à sa première variable alors $]t_0 - t_-, t_0 + t_+[= I$.

Pour démontrer la Proposition 72 nous aurons besoin du lemme suivant.

4. On dit que f est bornée sur $I \times \mathcal{O}$ s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(t, x) \in I \times \mathcal{O}$ on a

$$|f(t, x)| \leq M.$$

5. En pratique, on n'est pas obligé de demander autant que la régularité $\mathcal{C}^1$ pour notre fonction f . Toutefois, dans le cadre de ce cours, on se limite à ce cas là.

Lemme 4 (Lemme de Grönwall). Soient $t_0 < t_1$ et $K, L \geq 0$. Soit $\psi : [t_0, t_1[\rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $t \in [t_0, t_1[$ on ait

$$\psi(t) \leq K + L \int_{t_0}^t \psi(s) ds$$

alors pour tout $t \in [t_0, t_1[$ on a

$$\psi(t) \leq Ke^{L(t_1-t_0)}.$$

Preuve du Lemme 4. On considère la fonction

$$G : \begin{cases} [t_0, t_1[& \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto e^{L(t_0-t)} \left(K + L \int_{t_0}^t \psi(s) ds \right) \end{cases}$$

Comme ψ est continue sur $[t_0, t_1[$, G est dérivable sur $[t_0, t_1[$ et on a pour tout $t \in [t_0, t_1[$

$$G'(t) = -Le^{L(t_0-t)} \left(K + L \int_{t_0}^t \psi(s) ds \right) + Le^{L(t_0-t)} \psi(t) = e^{L(t_0-t)} \left(\psi(t) - \left(K + L \int_{t_0}^t \psi(s) ds \right) \right) \leq 0.$$

On en déduit que G est décroissante sur $[t_0, t_1[$ et donc que pour tout $t \in [t_0, t_1[$ on a

$$e^{L(t_0-t)} \left(K + L \int_{t_0}^t \psi(s) ds \right) = G(t) \leq G(t_0) = K.$$

Ce qui pour tout $t \in [t_0, t_1[$ se ré-écrit

$$K + \int_{t_0}^t \psi(s) ds \leq Ke^{L(t-t_0)} \leq Ke^{L(t_1-t_0)}.$$

et donc comme par hypothèse on a pour tout $t \in [t_0, t_1[$ l'inégalité $\psi(t) \leq K + \int_{t_0}^t \psi(s) ds$, on obtient pour tout $t \in [t_0, t_1[$

$$\psi(t) \leq Ke^{L(t_1-t_0)}.$$

□

Nous avons maintenant tous les outils à disposition pour démontrer la Proposition 72.

Preuve de la Proposition 72. Supposons par l'absurde que $t_0 + t_+ < \sup I$. Alors, $t_0 + t_+ \in \mathbb{R}$ et comme φ est solution du problème de Cauchy on a pour tout $t \in]t_0 - t_-, t_0 + t_+[$:

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

et en intégrant entre t_0 et $t \in]t_0 - t_-, t_0 + t_+[$ on obtient

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

Maintenant, comme f est globalement Lipschitzienne uniformément par rapport à sa deuxième variable, il existe $L > 0$ tel que pour tout $s \in]t_0 - t_-, t_0 + t_+[$ on a

$$|f(s, \varphi(s)) - f(s, y_0)| \leq L|\varphi(s) - y_0|$$

ce qui donne

$$|f(s, \varphi(s))| \leq L|\varphi(s) - y_0| + |f(s, y_0)|.$$

En particulier, pour tout $t \in [t_0, t_0 + t_+[$, on a

$$|\varphi(t) - y_0| \leq L \int_{t_0}^t |\varphi(s) - y_0| ds + \int_{t_0}^t |f(s, y_0)| ds \leq L \int_{t_0}^t |\varphi(s) - y_0| ds + \int_{t_0}^{t_0+t_+} |f(s, y_0)| ds$$

Maintenant, comme $f \in \mathcal{C}^1(I \times \mathcal{O}, \mathbb{R})$ l'application $s \mapsto f(s, y_0)$ est continue sur $[t_0, t_0 + t_+] \subset I$ (car $t_0 + t_+ < \sup I$). Cette application est donc continue sur un intervalle fermé bornée : elle y est bornée et atteint ses bornes. Par conséquent, il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $s \in [t_0, t_0 + t_+]$ $|f(s, y_0)| \leq M$ et donc

$$|\varphi(t) - y_0| \leq L \int_{t_0}^t |\varphi(s) - y_0| ds + \int_{t_0}^t |f(s, y_0)| ds \leq L \int_{t_0}^t |\varphi(s) - y_0| ds + Mt_+. \quad (3.36)$$

Maintenant, on pose

$$\psi : \begin{cases} [t_0, t_0 + t_+[& \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto |\varphi(t) - y_0| \end{cases}$$

et on remarque que ψ est continue sur $[t_0, t_0 + t_+[$ car c'est la composée de $\varphi - y_0$ qui est dérivable (donc continue) sur $[t_0, t_0 + t_+[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec la fonction valeur absolue qui est continue sur $\mathbb{R}$. En posant $K = Mt_+$, l'équation (3.36) se ré-écrit donc pour tout $t \in [t_0, t_0 + t_+[$

$$\psi(t) \leq K + L \int_{t_0}^t \psi(s) ds$$

et d'après le Lemme de Grönwall 4 on obtient, pour tout $t \in [t_0, t_0 + t_+[$

$$\psi(t) \leq Ke^{Tt_+}$$

ce qui implique que pour tout $t \in [t_0, t_0 + t_+[$ on a

$$|\varphi(t)| \leq |y_0| + Ke^{Tt_+}.$$

Comme $t_+ \in \mathbb{R}$, on en déduit que φ est bornée et donc, d'après le Corollaire 5 on en déduit que la solution est globale c'est-à-dire que $]t_0 - t_-, t_0 + t_+[= I$. $\square$

3.3.3 Les solutions stationnaires

Un outil très important pour être capable d'utiliser le Corollaire 5 est la notion de solution stationnaire qui permet, grâce au fait que deux trajectoires différentes d'une équation différentielle ne peuvent se couper (voir la Proposition 69) de donner des bornes *a priori* sur la solution maximale à une problème de Cauchy.

Définition 47 (Solution stationnaire). Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ un ouvert. Soit $f : I \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1(I \times \mathcal{O}, \mathbb{R})$. On dit qu'une solution (J, φ) de $y' = f(t, y)$ si φ est constante sur J .

Exemple 102. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= -t^2 y(y^3 - 1) \\ y(0) &= y_0 \end{cases} \quad (3.37)$$

où $y_0 \geq 0$. On remarque tout d'abord qu'en posant

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) & \mapsto -t^2 x(x^3 - 1) \end{cases}$$

on peut ré-écrire l'équation différentielle $y' = -t^2 y(y^3 - 1)$ sous la forme $y' = f(t, y)$. Par ailleurs, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ en tant qu'application polynomiale (de deux variables). D'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale $] - t_-, t_+[, \varphi)$ au problème de Cauchy (3.37).

On veut discuter selon les valeurs de y_0 de l'existence de solutions pour tout temps $t \geq 0$, c'est à dire essayer de montrer que $t_+ = +\infty$. Pour cela, on commence par rechercher des solutions stationnaires. Supposons donc qu'il existe une solution (J, φ_c) constante à l'équation différentielle $y' = -t^2 y(y^3 - 1)$, c'est-à-dire que pour tout $t \in J$, on a $\varphi_c(t) = c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$. Comme (J, φ_c) est solution de $y' = -t^2 y(y^3 - 1)$, on a pour tout $t \in J$

$$0 = \varphi'_c(t) = -t^2 \varphi_c(t)(\varphi_c^3 - 1) = -t^2 c(c^3 - 1).$$

On en déduit que nécessairement, $c = 0$ ou $c = 1$. On a donc trouvé deux solutions stationnaires qui sont définies sur $\mathbb{R} : (\mathbb{R}, \varphi_0)$ et $(\mathbb{R}, \varphi_1)$. On va donc maintenant distinguer les cas :

- (i) Si $y_0 = 0$ ou $y_0 = 1$, comme les solutions $(\mathbb{R}, \varphi_0)$ et $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ sont globales (donc maximales) et vérifient le problème de Cauchy (3.37), par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz on sait que ce sont les seules solutions qui vérifient ces problèmes de Cauchy : les solutions sont donc globale.
- (ii) Si $y_0 \in]0, 1[$ alors on considère l'unique solution maximale du problème de Cauchy (3.37) donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz. On la note $] - t_-, t_+[, \varphi)$. D'après la Proposition 69, les trajectoires ne peuvent pas se croiser ce qui va nous permettre de dire que pour tout $t \in] - t_-, t_+[$ on a $0 < \varphi(t) < 1$, re-détaillons ce raisonnement. Démontrons tout d'abord que pour tout $t \in] - t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) > 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe $t_1 \in] - t_-, t_+[$ tel que $\varphi(t_1) \leq 0$. Alors, φ étant dérivable sur $[t_1, 0]$ (si $t_1 < 0$) ou sur $[0, t_1]$ (si $t_1 > 0$), elle y est continue. Par ailleurs on a $\varphi(0) = y_0 > 0$ et $\varphi(t_1) \leq 0$. D'après le Théorème

des valeurs intermédiaires, il existe $t_* \in [t_1, 0]$ (si $t_1 < 0$) ou $t_* \in [0, t_1]$ (si $t_1 > 0$) tel que $\varphi(t_*) = 0$. Notons que $t_* \in]-t_-, t_+[$. On considère alors le nouveau problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= -t^2 y(y^3 - 1) \\ y(t_*) &= 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

pour lequel on sait que $(\mathbb{R}, \varphi_0)$ est solution globale (donc maximale). Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, comme $(]-t_-, t_+[, \varphi)$ est aussi solution du problème de Cauchy (3.40) on a que pour tout $t \in]-t_-, t_+[$, $\varphi(t) = \varphi_0(t) = 0$. Or $\varphi(0) = y_0 > 0$ ce qui est absurde donc pour tout $t \in]-t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) > 0$.

Démontrons tout d'abord que pour tout $t \in]-t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) < 1$. Supposons par l'absurde qu'il existe $t_1 \in]-t_-, t_+[$ tel que $\varphi(t_1) \geq 1$. Alors, φ étant dérivable sur $[t_1, 0]$ (si $t_1 < 0$) ou sur $[0, t_1]$ (si $t_1 > 0$), elle y est continue. Par ailleurs on a $\varphi(0) = y_0 < 1$ et $\varphi(t_1) \geq 1$. D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_* \in [t_1, 0]$ (si $t_1 < 0$) ou $t_* \in [0, t_1]$ (si $t_1 > 0$) tel que $\varphi(t_*) = 1$. Notons que $t_* \in]-t_-, t_+[$. On considère alors le nouveau problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= -t^2 y(y^3 - 1) \\ y(t_*) &= 1 \end{cases} \quad (3.39)$$

pour lequel on sait que $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ est solution globale (donc maximale). Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, comme $(]-t_-, t_+[, \varphi)$ est aussi solution du problème de Cauchy (3.40) on a que pour tout $t \in]-t_-, t_+[$, $\varphi(t) = \varphi_1(t) = 1$. Or $\varphi(1) = y_0 < 1$ ce qui est absurde donc pour tout $t \in]-t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) > 0$. φ est donc bornée sur $] -t_-, t_+[$ et d'après le Corollaire 5, $] -t_-, t_+[= \mathbb{R}$ et la solution obtenue grâce au Théorème de Cauchy-Lipschitz est en fait globale.

- (iii) Si $y_0 > 0$, on considère l'unique solution maximale du problème de Cauchy (3.37) donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz. On la note $(]-t_-, t_+[, \varphi)$. On va montrer que $t_+ = +\infty$ (on ne pourra pas dire⁶ que $t_- = -\infty$). Démontrons tout d'abord que pour tout $t \in]-t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) > 1$. Supposons par l'absurde qu'il existe $t_1 \in]-t_-, t_+[$ tel que $\varphi(t_1) \leq 1$. Alors, φ étant dérivable sur $[t_1, 0]$ (si $t_1 < 0$) ou sur $[0, t_1]$ (si $t_1 > 0$), elle y est continue. Par ailleurs on a $\varphi(0) = y_0 > 1$ et $\varphi(t_1) \leq 1$. D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_* \in [t_1, 0]$ (si $t_1 < 0$) ou $t_* \in [0, t_1]$ (si $t_1 > 0$) tel que $\varphi(t_*) = 1$. Notons que $t_* \in]-t_-, t_+[$. On considère alors le nouveau problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= -t^2 y(y^3 - 1) \\ y(t_*) &= 1 \end{cases} \quad (3.40)$$

pour lequel on sait que $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ est solution globale (donc maximale). Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, comme $(]-t_-, t_+[, \varphi)$ est aussi solution du problème de Cauchy (3.40) on a que pour tout $t \in]-t_-, t_+[$, $\varphi(t) = \varphi_1(t) = 1$. Or $\varphi(1) = y_0 > 1$ ce qui est absurde donc pour tout $t \in]-t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) > 1$. De plus, φ est décroissante sur $] -t_-, t_+[$. En effet, pour tout $t \in]-t_-, t_+[$ on a

$$\varphi'(t) = -t^2 \varphi(t)(\varphi(t)^3 - 1) < 0$$

car $\varphi(t) > 1$. On en déduit donc que pour tout $t \in [0, t_+[$ on a

$$y_0 = \varphi(0) > \varphi(t)$$

et donc pour tout $t \in [0, t_+[$ on a $1 < \varphi(t) < y_0$. Si $t_+ \in \mathbb{R}$ alors, d'après le théorème d'explosion en temps fini (Proposition 70), on a

$$\lim_{t \rightarrow t_+} |\varphi(t)| = +\infty$$

ce qui contredit le fait que pour tout $t \in [0, t_+[$ on a $1 < \varphi(t) < y_0$. On en déduit que $t_+ = +\infty$ et donc que φ est définie pour tout $t \geq 0$.

Pour finir ce paragraphe, on va se concentrer sur le cas particulier des équations différentielles dites autonomes c'est à dire pour lesquelles l'équation différentielle est de la forme

$$y' = g(y) \quad (3.41)$$

où $g : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}$. L'équation est dite autonome car la fonction g ne dépend pas du temps.

Commençons par quelques remarques.

6. Très souvent, t est le temps et donc on ne s'intéresse pas nécessairement à ce qu'il se passe pour des temps négatifs mais plutôt à ce qu'il se passe pour des temps $t \geq 0$.

Remarque 74. Un système autonome de la forme (3.41) est bien de la forme

$$y' = f(t, y)$$

Il suffit de poser $f : I \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(t, x) \in I \times \mathcal{O}$ par $f(t, x) = g(x)$. En particulier, si $g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ alors $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathcal{O}, \mathbb{R})$. On le voit en remarquant que $f = g \circ \pi_2$ où π_2 est l'application deuxième coordonnée. On sait que $\pi_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathcal{O}, \mathbb{R})$ et $\pi_2(\mathbb{R} \times \mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$. Comme $g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ alors $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathcal{O}, \mathbb{R})$ par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque 75. Chercher les solutions stationnaires pour un système autonome de la forme (3.41) revient à trouver les solutions $x \in \mathcal{O}$ de $g(x) = 0$.

Proposition 73. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ un ouvert et $g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$, $y_0, t_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= g(y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \quad (3.42)$$

et on suppose que l'unique solution maximale à ce problème de Cauchy soit de la forme $]t_0 - t_-, +\infty[, \varphi)$ et vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \ell \in \mathcal{O}$. Alors $(\mathbb{R}, \varphi_\ell)$ est solution stationnaire de $y' = g(y)$ où pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a posé $\varphi_\ell(t) = \ell$.

Remarque 76. Bien évidemment, dans la Proposition 73 les rôles de t_- et t_+ sont interchangeables : si $(]-\infty, t_0 + t_+[, \varphi)$ est solution du problème de Cauchy et vérifie $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = \ell$ alors $(\mathbb{R}, \varphi_\ell)$ est solution stationnaire de $y' = g(y)$ où pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a posé $\varphi_\ell(t) = \ell$.

Preuve de la Proposition 73. Soit $(]t_0 - t_-, +\infty[, \varphi)$ l'unique solution maximale du problème de Cauchy (3.42). On suppose que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \ell \in \mathcal{O}$. Soit $t > t_0$, comme φ est continue sur $[t, t+1]$ et dérivable sur $]t, t+1[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_t \in]t, t+1[$ tel que

$$\varphi'(c_t) = \frac{\varphi(t+1) - \varphi(t)}{t+1-t} = \varphi(t+1) - \varphi(t).$$

Or $(]t_0 - t_-, +\infty[, \varphi)$ est l'unique solution maximale du problème de Cauchy (3.42) donc $\varphi'(c_t) = g(\varphi(c_t))$. Maintenant, par construction, on a $c_t > t$ donc $c_t \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Par continuité de g en $\ell \in \mathcal{O}$ on a donc d'une part

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(c_t) = g(\ell).$$

D'autre part, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(c_t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\varphi(t+1) - \varphi(t)) = \ell - \ell = 0.$$

Par unicité de la limite, on en déduit que $g(\ell) = 0$. □

Exemple 103. On considère pour $y_0 \in]0, 1[$ le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= \ln(y+1)(y-1) \\ y(0) &= y_0 \end{cases} \quad (3.43)$$

On commence par poser

$$g : \begin{cases}]-1, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(1+x)(x-1) \end{cases}$$

et on remarque que le problème de Cauchy (3.43) se met sous la forme

$$\begin{cases} y' &= g(y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système autonome et on remarque que $g = (\ln \circ P_1) \times P_2$ où pour tout $x \in]-1, +\infty[$ on a $P_1(x) = 1+x$ et $P_2(x) = x-1$. P_1 et P_2 sont de classe $\mathcal{C}^1(]-1, +\infty[, \mathbb{R})$ en tant que fonctions polynomiales. De plus $P_1(]-1, +\infty[) \subset \mathbb{R}_+^*$ donc $\ln \circ P_1 \in \mathcal{C}^1(]-1, +\infty[, \mathbb{R})$ par composition de fonctions de classes $\mathcal{C}^1$. On en déduit que $g \in \mathcal{C}^1(]-1, +\infty[, \mathbb{R})$ en tant que produit d'applications de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale $(]-t_-, t_+[, \varphi)$ à ce problème de Cauchy avec $t_-, t_+ \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.

Recherchons les solutions stationnaires de $y' = g(y)$. Pour cela, on résout sur $] -1, +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$:

$$g(x) = 0 \iff \begin{cases} \ln(1+x) = 0 \\ \text{ou} \\ x-1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases}$$

On en déduit l'existence de deux solutions stationnaires $(\mathbb{R}, \varphi_0)$ et $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi_0(t) = 0, \quad \varphi_1(t) = 1.$$

En particulier, comme les trajectoires ne se croisent pas, la Proposition 69 nous permet de dire que comme on a pour tout $t \in] -t_-, t_+[$ $0 < \varphi(t) < 1$. Re-démontrons-le ici pour s'assurer d'avoir bien compris comment utiliser le résultat d'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz.

- (i) Montrons que pour tout $t \in] -t_-, t_+[$ $\varphi(t) > 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe $t_1 \in] -t_-, t_+[$ tel que $\varphi(t_1) \leq 0$. Comme φ est continue sur $[t_1, 0]$ (si $t_1 < 0$) ou $[0, t_1]$ (si $t_1 > 0$) et $\varphi(0) = y_0 > 0$ et $\varphi(t_1) \leq 0$ il existe $t_* \in [t_1, 0]$ (si $t_1 < 0$) ou $t_* \in [0, t_1]$ (si $t_1 > 0$) tel que $\varphi(t_*) = 0$. On considère alors le nouveau problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= \ln(y+1)(y-1) \\ y(t_*) &= 0 \end{cases}. \quad (3.44)$$

On sait qu'il existe une unique solution maximale à ce problème de Cauchy et c'est nécessairement la solution stationnaire $(\mathbb{R}, \varphi_0)$ car elle est globale. On en déduit que pour tout $t \in] -t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) = \varphi_0(t) = 0$. Or $\varphi(0) = y_0 \neq 0$ donc c'est absurde et pour tout $t \in] -t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) > 0$.

- (ii) Montrons que pour tout $t \in] -t_-, t_+[$ $\varphi(t) < 1$. Supposons par l'absurde qu'il existe $t_1 \in] -t_-, t_+[$ tel que $\varphi(t_1) \geq 1$. Comme φ est continue sur $[t_1, 0]$ (si $t_1 < 0$) ou $[0, t_1]$ (si $t_1 > 0$) et $\varphi(0) = y_0 < 1$ et $\varphi(t_1) \geq 1$ il existe $t_* \in [t_1, 0]$ (si $t_1 < 0$) ou $t_* \in [0, t_1]$ (si $t_1 > 0$) tel que $\varphi(t_*) = 1$. On considère alors le nouveau problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= \ln(y+1)(y-1) \\ y(t_*) &= 1 \end{cases}. \quad (3.45)$$

On sait qu'il existe une unique solution maximale à ce problème de Cauchy et c'est nécessairement la solution stationnaire $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ car elle est globale. On en déduit que pour tout $t \in] -t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) = \varphi_1(t) = 1$. Or $\varphi(0) = y_0 \neq 1$ donc c'est absurde et pour tout $t \in] -t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) < 1$.

On en déduit que φ est bornée sur $] -t_-, t_+[$ et donc que $] -t_-, t_+[= \mathbb{R}$ d'après le Corollaire 5. On peut donc étudier les limites de φ en $\pm\infty$ et on va montrer que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$. Tout d'abord, on remarque que φ est décroissante. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, comme $(\mathbb{R}, \varphi)$ est solution de (3.45) on a

$$\varphi'(t) = \ln(\varphi(t)+1)(\varphi(t)-1) < 0 \text{ car } \varphi(t) \in]0, 1[.$$

Ainsi, φ est strictement décroissante et minorée donc elle admet une limite finie notée ℓ_+ en $+\infty$. De même, elle est décroissante et majorée donc elle admet une limite finie notée ℓ_- en $-\infty$. D'après la Proposition 73 on a nécessairement $\ell_{\pm} \in \{0, 1\}$. Or $\varphi(0) = y_0 \in]0, 1[$ donc $\ell_- > y_0$ et $y_0 > \ell_+$ donc $\ell_- > \ell_+$ et donc $\ell_- = 1$ et $\ell_+ = 0$. On dit qu'une telle solution *connecte* les deux solutions stationnaires $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ et $(\mathbb{R}, \varphi_0)$.

3.3.4 Les outils à maîtriser pour étudier un problème de Cauchy

Lorsque l'on étudie un problème de Cauchy, il faut respecter les étapes suivantes. Voilà ce qui est attendu de vous.

1. Être capable d'identifier une fonction $f : I \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ pour mettre une équation différentielle donnée sous la forme théorique $y' = f(t, y)$. Attention : il faut trouver l'expression de f mais aussi la définir sur le produit $I \times \mathcal{O}$. I et $\mathcal{O}$ sont des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ que vous devez trouver.
2. Être capable de justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1(I \times \mathcal{O}, \mathbb{R})$ afin d'appliquer le Théorème de Cauchy-Lipschitz. Il suffit d'utiliser les outils vus dans le §2.2.2 du Chapitre 2 : on utilise des théorèmes généraux (somme, produit, quotient et/ou composition) sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, ou alors on démontre que les dérivées partielles existent et sont continues.
3. On essaie, lorsque c'est possible, d'utiliser le Corollaire 5 pour démontrer qu'une solution maximale est en fait globale. Pour cela, un outil crucial est soit une approche un peu théorique comme les résultats fournis par la Proposition 71 et la Proposition 72 ou bien on cherche des solutions stationnaires pour avoir une ou deux bornes sur nos solutions comme dans l'Exemple 100 et l'Exemple 101. Lorsqu'à l'aide des solutions stationnaires on n'obtient qu'une minoration (respectivement une majoration), pour montrer que $t_+ = +\infty$ on essaie de démontrer que la solution est décroissante (respectivement croissante) ce qui permet alors de la borner.

4. Si on arrive à démontrer que $t_+ = +\infty$, on peut essayer de voir si la solution $(] - t_-, +\infty[, \varphi)$ au problème de Cauchy admet une limite en $+\infty$. On y arrive bien souvent dans le cadre de systèmes autonomes, c'est-à-dire lorsque la fonction f n'est en fait qu'une fonction de la variable spatiale x . Dans ce cas là, si on arrive à démontrer que la solution $(] - t_-, +\infty[, \varphi)$ admet une limite finie⁷, on montre que nécessairement cette limite est donnée par la valeur que prend une solution stationnaire de l'équation différentielle.

3.3.5 Le cas des équations à variables séparées

Il existe un type d'équations différentielles ordinaires pour lesquelles on a une chance de pouvoir calculer une solution explicite. Ces équations différentielles ordinaires sont de la forme

$$y' = h(t)g(y)$$

on parle alors de variables séparées car on peut, sous réserve que l'on ne divise pas par 0, ré-écrire cette équation sous la forme

$$\frac{y'}{g(y)} = h(t).$$

On a donc "séparé les variables" : à gauche tout ne dépend plus que de y et à droite que de t . On peut alors tâcher d'intégrer en t . Nous allons illustrer sur quelques exemples la force de cette méthode.

Exemple 104. Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= \frac{t}{y^2} \\ y(0) &= 1 \end{cases} \quad (3.46)$$

On pose

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto \frac{t}{x^2} \end{cases}$$

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. En particulier, d'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale $(] - t_-, t_+[, \varphi)$ à ce problème de Cauchy. Par conséquent, pour tout $t \in] - t_-, t_+[$ on a

$$\varphi(t)^2 \varphi'(t) = t.$$

On intègre cette identité entre 0 et $t \in] - t_-, t_+[$, on a alors

$$\int_0^t \varphi(s)^2 \varphi'(s) ds = \frac{t^2}{2}. \quad (3.47)$$

Dans l'intégrale à gauche, on remarque que $\varphi \in \mathcal{C}^1(] - t_-, t_+[, \mathbb{R})$. En effet, φ est dérivable par définition de la notion de solution et on a pour tout $t \in] - t_-, t_+[$

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

Or $t \mapsto (t, \varphi(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ est continue sur $] - t_-, t_+[$ car chacune des composantes est continue donc, comme f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ elle est en particulier continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et on obtient que $\varphi' \in \mathcal{C}(] - t_-, t_+[, \mathbb{R}_+^*)$ par composition. On en déduit que $\varphi \in \mathcal{C}^1(] - t_-, t_+[, \mathbb{R}_+^*)$. On peut alors poser le changement de variable $u = \varphi(s)$, $du = \varphi'(s)ds$ et (3.47) devient

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} u^2 du = \int_1^{\varphi(t)} u^2 du = \frac{t^2}{2}.$$

On aboutit pour tout $t \in] - t_-, t_+[$

$$\frac{t^2}{2} = \int_1^{\varphi(t)} u^2 du = \left[\frac{u^3}{3} \right]_1^{\varphi(t)} = \frac{1}{3} (\varphi(t)^3 - 1).$$

On obtient alors

$$\varphi(t)^3 = \frac{3}{2}t^2 + 1, \quad \varphi(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 + 1 \right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3} \ln(\frac{3}{2}t^2 + 1)}.$$

7. Pour cela, on démontre que φ est croissante majorée ou décroissante minorée.

On remarque que l'expression obtenue est en fait définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ et non seulement sur $] -t_-, t_+[$. En particulier, si $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\tilde{\varphi}(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 + 1\right)^{\frac{1}{3}}$, $\tilde{\varphi}$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ car on a

$$\tilde{\varphi} = \exp \circ \left(\frac{1}{3} \times \ln \circ P \right)$$

où pour $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \frac{3}{2}t^2 + 1$ est une fonction polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $P(\mathbb{R}) \subset [1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$ donc $\frac{1}{3} \ln \circ P$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables. De plus, $(\frac{1}{3} \ln \circ P)(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ donc $\tilde{\varphi}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs

$$\tilde{\varphi}'(t) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}t^2 + 1 \right)^{-\frac{2}{3}} (3t) = \frac{t}{\left(\frac{3}{2}t^2 + 1\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{t}{\tilde{\varphi}(t)^2}.$$

De plus $\tilde{\varphi}(0) = 1$ donc $(\mathbb{R}, \tilde{\varphi})$ est une solution globale (donc maximale) du problème de Cauchy (3.46) donc par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz on a $(\mathbb{R}, \tilde{\varphi}) = (] -t_-, t_+[, \varphi)$.

Exemple 105. Soit le problème de Cauchy définie par

$$\begin{cases} y' &= t(1 - y^2) \\ y(0) &= 2 \end{cases} \quad (3.48)$$

On pose

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto t(1 - x^2) \end{cases}.$$

On remarque que le problème de Cauchy (3.48) se ré-écrit comme

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= 2 \end{cases}$$

et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ en tant qu'application polynomiale à plusieurs variables. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale $(] -t_-, t_+[, \varphi)$ au problème de Cauchy (3.48). On remarque que pour tout $t \in] -t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) > 1$. En effet, $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\varphi_1(t) = 1$ est une solution stationnaire de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ donc, comme les trajectoires ne peuvent se croiser (voir la Proposition 69) on sait que pour tout $t \in] -t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) > 1$ car $\varphi(0) = 2 > 1$. On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{\varphi'(t)}{1 - \varphi(t)^2} = t.$$

On intègre alors entre 0 et $t \in] -t_-, t_+[$ cette identité et

$$\int_0^t \frac{\varphi'(s)}{1 - \varphi(s)^2} ds = \frac{t^2}{2}.$$

On pose alors $u = \varphi(s)$, $du = \varphi'(s)ds$ et on a

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{1}{1 - u^2} du = \int_2^{\varphi(t)} \frac{1}{1 - u^2} du = \frac{t^2}{2}.$$

On décompose alors en éléments simples la fraction $\frac{1}{1 - u^2} = \frac{1}{(1 - u)(u + 1)}$. On a pour tout $u \neq \pm 1$:

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{1}{2(u + 1)} - \frac{1}{2(1 - u)}$$

et en particulier pour tout $t \in] -t_-, t_+[$ on a

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{2} &= \int_2^{\varphi(t)} \frac{1}{2(u + 1)} - \frac{1}{2(1 - u)} du \\ &= \frac{1}{2} [\ln(u + 1) - \ln(u - 1)]_2^{\varphi(t)} \\ &= \frac{1}{2} (\ln(\varphi(t) + 1) - \ln(\varphi(t) - 1)) - \frac{1}{2} \ln(3) \\ &= \ln \left(\sqrt{\frac{\varphi(t) + 1}{3(\varphi(t) - 1)}} \right) \end{aligned}$$

On en déduit alors que pour tout $t \in]-t_-, t_+[$ on a

$$(\varphi(t) - 1) = 3(\varphi(t) + 1)e^{t^2} \iff \varphi(t) = \frac{1 + 3e^{t^2}}{3e^{t^2} - 1}.$$

On considère alors $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{1 + 3e^{t^2}}{3e^{t^2} - 1}.$$

Cette application est bien définie car pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $3e^{t^2} \geq 3 > 1$. L'application $t \mapsto e^{t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de l'application polynomiale $(t \mapsto t^2)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de l'application $\exp$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $3e^{t^2} - 1 \neq 0$ donc $\tilde{\varphi}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient d'applications dérivables sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\tilde{\varphi}'(t) = \frac{6te^{t^2}(3e^{t^2} - 1) - (1 + 3e^{t^2})(6te^{t^2})}{(3e^{t^2} - 1)^2} = \frac{-12te^{t^2}}{(3e^{t^2} - 1)^2}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} t(1 - \tilde{\varphi}(t)^2) &= t \left(1 - \left(\frac{1 + 3e^{t^2}}{3e^{t^2} - 1} \right)^2 \right) = t \frac{(3e^{t^2} - 1)^2 - (3e^{t^2} + 1)^2}{(3e^{t^2} - 1)^2} \\ &= t \frac{(3e^{t^2} - 1 - 3e^{t^2} - 1)(3e^{t^2} - 1 + 3e^{t^2} + 1)}{(3e^{t^2} - 1)^2} \\ &= -\frac{12te^{t^2}}{(3e^{t^2} - 1)^2} \end{aligned}$$

de plus $\tilde{\varphi}(0) = 2$ donc $(\mathbb{R}, \tilde{\varphi})$ est une solution maximale (donc globale) du problème de Cauchy (3.48). Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on en déduit que $(\mathbb{R}, \tilde{\varphi}) = (]-t_-, t_+[, \varphi)$.

Exemple 106. Soit le problème de Cauchy définie par

$$\begin{cases} y' &= ty^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases} \quad (3.49)$$

On pose

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto tx^2 \end{cases}.$$

On remarque que le problème de Cauchy (3.49) se ré-écrit comme

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ en tant qu'application polynomiale à plusieurs variables. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale $(]-t_-, t_+[, \varphi)$ au problème de Cauchy (3.49). Par ailleurs, on remarque que $(\mathbb{R}, \varphi_0)$ où pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\varphi_0(t) = 0$ est solution stationnaire de l'équation différentielle $y' = ty^2$. Comme les trajectoires ne peuvent se croiser (voir la Proposition 69) on sait que pour tout $t \in]-t_-, t_+[$ on $\varphi(t) \neq 0$ car $\varphi(0) = 1 \neq 0$. On en déduit que pour tout $t \in]-t_-, t_+[$ on a

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^2} = t$$

et en intégrant entre 0 et t :

$$\int_0^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)^2} ds = \frac{t^2}{2}.$$

On pose $u = \varphi(s)$, $du = \varphi'(s)ds$ et on a pour tout $t \in]-t_-, t_+[$

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{2} &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{1}{u^2} du = \int_1^{\varphi(t)} \frac{1}{u^2} du \\ &= \left[-\frac{1}{u} \right]_{y_0}^{\varphi(t)} = 1 - \frac{1}{\varphi(t)}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $t \in]-t_-, t_+[$ on a

$$\varphi(t) = \frac{2}{2-t^2}.$$

Soit $\tilde{\varphi} :]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\rightarrow \frac{1}{2-t^2}$. $\tilde{\varphi}$ est dérivable sur son domaine de définition en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, pour tout $t \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ on a

$$\varphi'(t) = \frac{4t}{(2-t^2)^2} = t\varphi(t)^2$$

et également

$$\varphi(0) = 1.$$

On en déduit que $(]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[, \tilde{\varphi})$ est solution du problème de Cauchy (3.49). Par ailleurs on a

$$\lim_{t \rightarrow -\sqrt{2}} \varphi(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \sqrt{2}} \varphi(t) = +\infty$$

donc $\tilde{\varphi}$ n'est pas prolongeable en dehors de son domaine de définition en une fonction continue (donc même pas dérivable). On en déduit que $(]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[, \tilde{\varphi})$ est la solution maximale du problème de Cauchy (3.49) et donc par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz on a $(]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[, \tilde{\varphi}) = (J, \varphi)$. C'est un exemple de solution maximale qui n'est pas globale.

3.3.6 Quelques applications dans d'autres disciplines

Exemple 107 (Chute libre avec frottement). On considère lâche à vitesse nulle un objet ponctuel de masse $m > 0$ dans l'air à une certaine altitude donnée. Sa vitesse selon un axe qui représenterait l'altitude est donnée, au cours du temps, par l'équation différentielle

$$v' + \frac{k}{m}v^2 = g$$

où $g > 0$ est la constante gravitationnelle de pesanteur et $k > 0$ une constante liée aux frottements de l'air. On considère donc le problème de Cauchy

$$\begin{cases} v' + \frac{k}{m}v^2 = g \\ v(0) = 0. \end{cases} \quad (3.50)$$

Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) & \mapsto g - \frac{k}{m}x^2 \end{cases}$$

On remarque que le problème de Cauchy (3.50) se ré-écrit sous la forme

$$\begin{cases} v' & = f(t, v) \\ v(0) & = 0. \end{cases}$$

Par ailleurs, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ en tant qu'application polynomiale donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale de la forme $(]-t_-, t_+[, \varphi)$ (avec $t_-, t_+ \in \mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\}$). Soit $\lambda := \sqrt{\frac{gm}{k}}$, on remarque que $(\mathbb{R}, \varphi_{\pm\lambda})$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\varphi_{\pm\lambda}(t) = \pm\lambda$ est solution stationnaire de $v' = g - \frac{k}{m}v^2$. Comme les trajectoires ne peuvent pas se croiser et que $\varphi(0) = 0$ on a alors que pour tout $t \in]-t_-, t_+[$ on a $-\lambda < \varphi(t) < \lambda$. φ est donc bornée et donc nécessairement $]-t_-, t_+[= \mathbb{R}$ et $(\mathbb{R}, \varphi)$ est en fait solution globale.

On remarque aussi que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \left(\sqrt{g} - \varphi(t) \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \left(\sqrt{g} + \varphi(t) \sqrt{\frac{k}{m}} \right) = g \left(1 - \varphi(t) \sqrt{\frac{k}{gm}} \right) \left(1 + \varphi(t) \sqrt{\frac{k}{gm}} \right) \\ &= g \left(1 - \frac{\varphi(t)}{\lambda} \right) \left(1 + \frac{\varphi(t)}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $-\lambda < \varphi(t) < \lambda$ alors $\varphi'(t) \geq 0$. En particulier φ est croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout temps positif (c'est-à-dire $t \geq 0$) on a $\varphi(t) \in [0, \lambda[$. φ est croissante et majorée donc converge vers une limite $\ell \in [0, \lambda]$. Toutefois, comme f ne dépend en réalité pas de la variable t , d'après la Proposition 3.42, cette limite doit vérifier $f(t, \ell) = 0$ c'est à dire $\ell = \pm\lambda$. Comme $\ell \in [0, \lambda]$ on en déduit que $\ell = \lambda$. L'objet en chute libre a donc une vitesse qui augmente au cours du temps (l'objet accélère) mais il ne dépasse pas une vitesse

limite donnée par $\lambda = \sqrt{\frac{gm}{k}}$. On remarque d'ailleurs $k \mapsto \sqrt{\frac{gm}{k}}$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ ce qui est naturel : plus le paramètre de frottement k augmente, plus l'objet est ralenti dans l'air.

Il se trouve que ce problème est à variables séparées et est en fait explicitement soluble ! En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g - \frac{k}{m}\varphi(t) \neq 0$ donc

$$\frac{\varphi'(t)}{g - \frac{k}{m}\varphi(t)^2} = 1.$$

En intégrant par rapport entre 0 et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^t \frac{\varphi'(s)}{g - \frac{k}{m}\varphi(s)^2} ds = t.$$

On pose $u = \varphi(s)$, $du = \varphi'(s)ds$ (changement de variable $\mathcal{C}^1$ d'après la Remarque 70) et on a

$$\begin{aligned} t &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{u}{g - \frac{k}{m}u^2} du = \int_0^{\varphi(t)} \frac{1}{g - \frac{k}{m}u^2} du \\ &= \frac{1}{g} \int_0^{\varphi(t)} \frac{1}{1 - \left(\frac{u}{\lambda}\right)^2} du \end{aligned}$$

On pose alors $\sigma = u\lambda^{-1}$, $d\sigma = \lambda^{-1}du$ (changement de variable $\mathcal{C}^1$) et on a

$$\begin{aligned} t &= \frac{\lambda}{g} \int_0^{\lambda^{-1}\varphi(t)} \frac{1}{1 - \sigma^2} d\sigma = \frac{\lambda}{2g} \int_0^{\lambda^{-1}\varphi(t)} \left(\frac{1}{1 + \sigma} + \frac{1}{1 - \sigma} \right) d\sigma \\ &= \frac{\lambda}{2g} [\ln(|1 + \sigma|) - \ln(|1 - \sigma|)]_0^{\lambda^{-1}\varphi(t)} \\ &= \frac{\lambda}{2g} \ln \left(\frac{1 + \lambda^{-1}\varphi(t)}{1 - \lambda^{-1}\varphi(t)} \right) \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \in]-\lambda, \lambda[$. On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1 + \lambda^{-1}\varphi(t)}{1 - \lambda^{-1}\varphi(t)} = e^{\frac{2g}{\lambda}t} \iff \varphi(t) = \lambda \frac{e^{\frac{2g}{\lambda}t} - 1}{e^{\frac{2g}{\lambda}t} + 1}.$$

On retrouve les propriétés qualitatives que l'on a réussi à obtenir sans utiliser l'expression explicite que l'on vient d'obtenir :

1. φ est croissante,
2. pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \in]-\lambda, \lambda[$
3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \lambda$

Exemple 108 (Un modèle à ressources limitées). Le modèle de Malthus vu dans l'Exemple 90 est un modèle très simplifié de dynamique des populations où l'on ne prend en compte que des taux de naissance et de mortalité constants. Il se peut que le milieu dans lequel évolue la population soit limité (par exemple, la quantité de nourriture est fixe donc si la population devient trop grande, il ne sera pas possible de nourrir tout le monde).

Un modèle classique est le modèle de Verhulst pour lequel on suppose que la différence entre le taux de reproduction et le taux de décès dépend de la population elle-même. On modélise l'évolution de la population au cours du temps par le problème de Cauchy

$$\begin{cases} n' &= r(n)n \\ n(0) &= n_0 \end{cases} \quad (3.51)$$

où $n_0 > 0$ est la population au temps initial et $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule en un unique point $n_* \in]0, +\infty[$. Un exemple de telle fonction r est donné pour $x \in \mathbb{R}$ par $r(x) = \lambda(1 - \frac{x}{n_*})$ avec $\lambda > 0$ et $n_* > 0$ deux paramètres du modèle. On commence par remarquer que si l'on pose

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto r(x)x \end{cases}$$

le problème de Cauchy (3.51) se ré-écrit sous la forme

$$\begin{cases} n' &= f(t, n) \\ n(0) &= n_0 \end{cases}.$$

Par ailleurs, on a $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ car $f = \pi_2 \times (r \circ \pi_2)$ où π_2 est l'application deuxième coordonnée de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme $r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $r \circ \pi_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale $(] - t_-, t_+[, \varphi)$ au problème de Cauchy (3.51). On remarque que l'équation différentielle $n' = r(n)n$ admet deux solutions stationnaires qui sont $(\mathbb{R}, \varphi_0)$ et $(\mathbb{R}, \varphi_*)$ qui sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi_0(t) = 0, \quad \varphi_*(t) = n_*.$$

On en déduit que si $n_0 \in]0, n_*[$ alors pour tout $t \in] - t_-, t_+[$ on a $\varphi(t) \in]0, n_*[$ sinon deux trajectoires se croiseraient sans être identique (voir la Proposition 69). En particulier φ est bornée donc d'après le Corollaire 5, $] - t_-, t_+[= \mathbb{R}$. On remarque aussi que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a on a

$$\varphi'(t) = \varphi(t)r(\varphi(t)).$$

Comme r est décroissante et ne s'annule qu'en n_* on a $r(x) > 0$ pour $x \in]0, n_*[$ et $r(x) < 0$ pour $x \in]n_*, +\infty[$. Ici, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \in]0, n_*[$ donc $\varphi'(t) > 0$. Ainsi, φ est croissante et majorée donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \ell$ pour $\ell \in [n_0, 1]$. D'après la Proposition 3.42 (l'équation différentielle est ici autonome), on a ℓ qui vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$ $f(t, \ell) = 0$ c'est-à-dire $\ell r(\ell) = 0$ donc nécessairement $\ell = 0$ ou $\ell = n_*$. Or $\ell \in [n_0, n_*]$ donc $\ell = n_*$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = n_*$.

Si $n_0 > 1$, alors $\varphi(t) \in]n_*, +\infty[$ sinon deux trajectoires se croiseraient sans être identique (voir la Proposition 69). De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi'(t) = \varphi(t)r(\varphi(t)) < 0$ donc φ est décroissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que φ est décroissante et minorée donc elle admet une limite finie $\ell \geq n_*$ en $+\infty$. Là encore, d'après la Proposition 3.42, ℓ vérifie $\ell r(\ell) = 0$ donc nécessairement $\ell = n_*$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = n_*$.

On peut interpréter n_* comme un seuil critique de population dans le milieu. Si $n_0 \in]0, n_*[$, il y a suffisamment de ressources pour toute la population, le taux de naissance est plus élevé que le taux de décès, et la population croît vers le seuil critique n_* qu'elle ne peut dépasser. Si $n_0 \in]n_*, +\infty[$ il n'y a pas suffisamment de ressources pour toute la population, le taux de décès est plus élevé que le taux de naissance, et la population décroît vers le seuil critique n_* .

Exemple 109 (Les quotas de pêche). On considère une population de poisson dans un lac. En l'absence de pêche cette population de poissons évolue au cours du temps selon le modèle de Verhulst présenté dans l'Exemple 108

$$n' = \lambda n \left(1 - \frac{K}{n_*} n\right)$$

où $K, \lambda, n_* > 0$ sont des constantes du problème.

1. On considère qu'à partir du temps $t = 0$, des pêcheurs commencent à exploiter le lac avec un taux de poissons pêchés par unité de temps constant noté $p > 0$. On est amené à considérer le problème de Cauchy

$$\begin{cases} n' &= \lambda n \left(1 - \frac{K}{n_*} n\right) - p \\ n(0) &= n_0 \end{cases} \quad (3.52)$$

où $n_0 > 0$.

- (i) On montre dans un premier temps qu'il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy (3.52). Pour cela, on remarque que l'équation différentielle est autonome et on pose

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda x \left(1 - \frac{K}{n_*} x\right) - p \end{cases}.$$

On remarque que le problème de Cauchy (3.52) se ré-écrit sous la forme

$$\begin{cases} n' &= g(n) \\ n(0) &= n_0 \end{cases}.$$

Par ailleurs $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car c'est une application polynomiale. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale $(] - t_-, t_+[, \varphi)$ au problème de Cauchy (3.52) avec $t_-, t_+ \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.

- (ii) On cherche maintenant des solutions stationnaires à l'équation différentielle $n' = \lambda n \left(1 - \frac{K}{n_*} n\right) - p$. Cela revient à résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$ c'est à dire

$$0 = \lambda x \left(1 - \frac{K}{n_*} x\right) - p = \lambda \left(-\frac{K}{n_*} x^2 + x - \frac{p}{\lambda}\right) = -\frac{K\lambda}{n_*} \left(x^2 - \frac{n_*}{K} x + \frac{pn_*}{K\lambda}\right).$$

En posant $\alpha = \frac{n_*}{K}$, on doit donc étudier les racines de l'équation de polynôme du second degré

$$x^2 - \alpha x + \frac{p}{\lambda} \alpha = 0$$

donc le discriminant est

$$\Delta = \alpha^2 - 4\alpha \frac{p}{\lambda} = \alpha \left(\alpha - \frac{p}{\lambda} \right).$$

Il y a donc trois cas possible.

- Si $\lambda\alpha < p$, il n'y a pas de racines réelles donc l'équation différentielle n'admet pas de solutions stationnaires.
- Si $p = \lambda\alpha$ il existe une solution stationnaire $(\mathbb{R}, \varphi_0)$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi_0(t) = \frac{\alpha}{2}$$

- Si $p < \lambda\alpha$ alors il existe deux solutions stationnaires $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ et $(\mathbb{R}, \varphi_2)$ définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi_1(t) = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha - \frac{p}{\lambda})}}{2}, \quad \varphi_2(t) = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - \frac{p}{\lambda})}}{2}.$$

On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\varphi_1(t) < 0$ et $\varphi_2(t) > 0$.

Dans le premier cas : $\lambda\alpha < p$, on va montrer que $\lim_{t \rightarrow t_+} \varphi(t) = -\infty$. En effet, pour tout $t \in]-t_-, t_+[$, on a

$$\varphi'(t) = \lambda\varphi(t) \left(1 - \frac{K}{n_*} \varphi(t) \right) - p < 0$$

donc φ est strictement décroissante. Si φ est minorée alors il existe $\ell \in]-\infty, n_0]$ tel que $\lim_{t \rightarrow t_+} \varphi(t) = \ell$. Nécessairement, d'après la Proposition 3.42, ℓ est solution de $g(\ell) = 0$ mais ce n'est pas possible car g n'a pas de racine réelle. On en déduit que $\lim_{t \rightarrow t_+} \varphi(t) = -\infty$: au bout d'un certain temps la population de poisson devient nulle et les pêcheurs ont pêché tous les poissons dans le lac. C'est normal, dans ce premier cas, le taux de pêche p est trop grand.

Dans le deuxième cas, cela dépend de la valeur de n_0 . Si $n_0 \in]0, \frac{\alpha}{2}[$ alors pour tout $t \in]-t_-, t_+[$ on a

$$\varphi'(t) = \lambda\varphi(t) \left(1 - \frac{K}{n_*} \varphi(t) \right) - p < 0$$

et donc φ est strictement décroissante. Si φ est minorée alors il existe $\ell \in]-\infty, n_0]$ tel que $\lim_{t \rightarrow t_+} \varphi(t) = \ell$. Nécessairement, d'après la Proposition 3.42, ℓ est solution de $g(\ell) = 0$ mais $\ell \leq n_0 < \frac{\alpha}{2}$ et $\frac{\alpha}{2}$ étant la seule racine réelle de g on en déduit que $\lim_{t \rightarrow t_+} \varphi(t) = -\infty$: au bout d'un certain temps la population de poisson devient nulle et les pêcheurs ont pêché tous les poissons dans le lac. Dans ce cas, le taux de pêche p est trop grand par rapport à la population initiale de poissons : cette dernière disparaît.

Si $n_0 > \frac{\alpha}{2}$ on sait que pour tout $t \in]-t_-, t_+[$, $\varphi(t) > \frac{\alpha}{2}$ car les trajectoires d'une équation différentielle ne peuvent pas se croiser et $(\mathbb{R}, \varphi_0)$ est une solution stationnaire (voir la Proposition 69). Par ailleurs pour tout $t \in]-t_-, t_+[$, $\varphi'(t) < 0$ donc φ est décroissante et minorée. On en déduit que φ admet une limite finie en t_+ et d'après le théorème d'explosion en temps fini de la Proposition 70 on en déduit que $t_+ = +\infty$. Par conséquent il existe $\ell \in [n_0, \frac{\alpha}{2}]$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \ell$. D'après la Proposition 3.42 on a nécessairement $g(\ell) = 0$ donc $\ell = \frac{\alpha}{2}$. Dans ce cas, la population initiale de poissons est suffisamment élevée pour que la population ne disparaisse pas, elle converge vers une valeur critique.

Dans le troisième cas si $n_0 \in]0, \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - \frac{p}{\lambda})}}{2}]$ alors, grâce à la Proposition 69, pour tout $t \in]-t_-, t_+[$ on a

$$\varphi(t) \in \left] 0, \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - \frac{p}{\lambda})}}{2} \right[$$

et donc φ est bornée et d'après le Corollaire 5 $t_+ = t_- = +\infty$. Par ailleurs, on remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi'(t) = \lambda\varphi(t) \left(1 - \frac{K}{n_*} \varphi(t) \right) - p > 0$$

donc φ est croissante sur $\mathbb{R}$ et majorée : il existe $\ell \in \left[n_0, \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - \frac{p}{\lambda})}}{2} \right]$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \ell$.

Nécessairement, cette limite est une racine de g d'après est donc comme $n_0 > 0$ on a $\ell = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - \frac{p}{\lambda})}}{2}$.

Si $n_0 > \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - \frac{p}{\lambda})}}{2}$, on remarque que grâce à la Proposition 69, pour tout $t \in]-t_-, t_+[$ on a

$$\varphi(t) > \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - \frac{p}{\lambda})}}{2}.$$

Par ailleurs, pour tout $t \in]-t_-, t_+[$, on a

$$\varphi'(t) = \lambda\varphi(t) \left(1 - \frac{K}{n_*}\varphi(t)\right) - p < 0$$

et donc φ est décroissante sur $] -t_-, t_+[$. Elle est donc décroissante et minorée donc converge vers une limite finie $\ell \geq \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - \frac{p}{\lambda})}}{2}$ en t_+ . D'après le théorème d'explosion en temps fini (Proposition 70), on a nécessairement $t_+ = +\infty$ et d'après la Proposition 3.42 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - \frac{p}{\lambda})}}{2}$.

Annexe A

Solutions du Chapitre 1

Solution (de l'exercice 1). Vous trouverez ces définitions dans vos cours d'analyse de L1 et L2. On les rappelle ici.

- (i) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. On dit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

- (ii) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$, on dit que $f(x)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $x \rightarrow a$ et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]a - \delta, a + \delta[\cap I, |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Lorsque $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = \infty$:

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]a - \delta, a + \delta[\cap I, f(x) > M.$$

Lorsque $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = -\infty$:

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]a - \delta, a + \delta[\cap I, f(x) < -M.$$

Lorsque $a = +\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I \cap]x_0, +\infty[, |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Lorsque $a = -\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I \cap]-\infty, x_0[, |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Lorsque $a = +\infty$ et $\ell = +\infty$

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I \cap]x_0, +\infty[, f(x) > M.$$

Lorsque $a = +\infty$ et $\ell = -\infty$

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I \cap]-\infty, x_0[, f(x) < -M.$$

Lorsque $a = -\infty$ et $\ell = +\infty$

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I \cap]-\infty, x_0[, f(x) > M.$$

Lorsque $a = -\infty$ et $\ell = -\infty$

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I \cap]-\infty, x_0[, f(x) < -M.$$

- (iii) On dit que $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

- (iv) On dit que $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow a} \tau_a(x) = \ell$ où $\tau_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ est le taux d'accroissement en a :

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in I \setminus \{a\}.$$

Solution (de l'exercice 2). Une suggestion d'espaces vectoriels :

- (i) Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$).
- (ii) L'espace vectoriel des matrices de taille $d \times p$ $\mathcal{M}_{d,p}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_{d,p}(\mathbb{C})$.
- (iii) L'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}[X]$ où $\mathbb{R}_d[X]$ (pour ceux de degré inférieur ou égal à $d \in \mathbb{N}$).
- (iv) L'espace vectoriel des applications linéaires d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F : $\mathcal{L}(E, F)$.
- (v) L'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- (vi) L'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
- (vii) ...

Solution (de l'exercice 4). Soit $x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. On a

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

(i) On a

$$\left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \right)^2 = \frac{x_1^2 + 4x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \leq 4 \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = 4.$$

On en déduit que

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq 2$$

et par passage au sup en x que

$$\|A\|_{2,2} \leq 2.$$

De plus, pour $x = (0, 1)^\top$ on a

$$\|A\|_{2,2} \geq \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\sqrt{0^2 + 2^2 \times 1^2}}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 2.$$

Conclusion : $\|A\|_{2,2} = 2$.

(ii) On a

$$|x_1| \leq |x_1| + |x_2| = \|x\|_1, \quad 2|x_2| \leq 2\|x\|_1.$$

On en déduit que $\|x\|_\infty \leq 2\|x\|_1$ et donc que $\|A\|_{\infty,1} \leq 2$. En choisissant $x = (0, 1)^\top$, on a $\|x\|_1 = 1$ et $\|Ax\|_\infty = 2$. En particulier

$$\|A\|_{\infty,1} \geq \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Conclusion : $\|A\|_{\infty,1} = 2$.

Solution (de l'Exercice 5). Soit $x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$, tel que $x \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. On a

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

(i) On a

$$|x_1 + x_3|^2 \leq 2(|x_1|^2 + |x_3|^2) \leq 2\|x\|_2^2, \quad 2|x_2| \leq 2\|x\|_2.$$

Par passage au sup sur x , on en déduit que

$$\|Ax\|_\infty \leq 2\|x\|_2$$

et donc on obtient

$$\|A\|_{\infty,2} \leq 2.$$

On choisit $x = (0, 1, 0)$ et on a $\|Ax\|_\infty = 2$ et $\|x\|_2 = 1$

$$\|A\|_{\infty,2} \geq \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_2} = \frac{2}{1} = 2.$$

On en déduit que $\|A\|_{\infty,2} = 2$.

(ii) On a

$$\|Ax\|_1 = |x_1 + x_3| + 2|x_2| \leq |x_1| + 2|x_2| + |x_3| \leq 4\|x\|_\infty.$$

On en déduit par passage au sup en x que

$$\|A\|_{1,\infty} \leq 4.$$

On choisit $x = (1, 1, 1)$. On a $\|x\|_\infty = 1$ et $\|Ax\|_1 = 4$. Alors, on a

$$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_\infty} = \frac{4}{1} = 4 \leq \|A\|_{\infty,1}.$$

Par conséquent, on obtient $\|A\|_{\infty,1} = 4$.

Solution (de l'Exercice 6).

(i) Soient $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\Gamma(x + \lambda y) = (x_1 + \lambda y_1)\sigma_1 + (x_2 + \lambda y_2)\sigma_2 = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + \lambda(y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2) = \Gamma(x) + \lambda\Gamma(y).$$

On en déduit que Γ est linéaire.

(ii) Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\Gamma(x) = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 = x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $z = (z_1, z_2)^\top \in \mathbb{C}^2$ tel que $z \neq 0_{\mathbb{C}^2}$. On a

$$\Gamma(x)z = \begin{pmatrix} (x_1 + ix_2)z_2 \\ (x_1 - ix_2)z_1 \end{pmatrix}$$

et

$$\|\Gamma(x)z\|_2^2 = |(x_1 + ix_2)z_2|^2 + |(x_1 - ix_2)z_1|^2 = |x_1 - ix_2|^2|z_2|^2 + |x_1 + ix_2|^2|z_1|^2 = (x_1^2 + x_2^2)\|z\|_2^2.$$

On en déduit que

$$\|\Gamma(x)\|_{2,2} \leq (x_1^2 + x_2^2).$$

En choisissant $z = (1, 1)^\top \in \mathbb{C}^2$, on a $\|z\|_2 = \sqrt{2}$ et

$$\Gamma(x)z = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 \end{pmatrix}, \quad \|\Gamma(x)z\|_2 = \sqrt{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

En particulier,

$$\|\Gamma(x)\|_{2,2} \geq \frac{\|\Gamma(x)z\|_2}{\|z\|_2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

On en déduit que

$$\|\Gamma(x)\|_{2,2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Maintenant, on a pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, on a

$$\frac{\|\Gamma(x)\|_{2,2}}{\|x\|_2} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 1.$$

On en déduit que

$$\|\Gamma\| := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0_{\mathbb{R}^2}}} \frac{\|\Gamma(x)\|_{2,2}}{\|x\|_2} = 1.$$

Solution (de l'Exercice 7).

(i) Nous allons démontrer que N vérifie les axiomes de norme.

(i) Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$, pour tout $k \in \{0, \dots, d\}$, on a

$$0 \leq |P^{(k)}(0)|$$

et en passant au max sur $k \in \{0, \dots, d\}$ on aboutit à

$$0 \leq \left(\max_{k \in \{0, \dots, d\}} |P^{(k)}(0)| \right) = N(P).$$

(ii) Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$, tel que

$$0 = N(P) = \left(\max_{k \in \{0, \dots, d\}} |P^{(k)}(0)| \right).$$

On en déduit que chaque terme est nul c'est-à-dire que pour tout $k \in \{0, \dots, d\}$, on a $P^{(k)}(0) = 0$.
On va démontrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = X^{d+1}Q.$$

La construction se fait par récurrence.

Initialisation. Comme $P(0) = 0$ il existe $Q_0 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = XQ_0$.

Hypothèse de récurrence. Soit $k \in \{0, \dots, d-1\}$ supposons qu'il existe $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = X^{k+1}Q_k$.

Hérédité. Soit $k \in \{0, \dots, d-1\}$. D'après la formule de Leibniz, on a

$$P^{(k+1)} = (X^{k+1}Q_k)^{(k+1)} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (X^{k+1})^{(j)} Q_k^{(k+1-j)} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (X^{k+1})^{(j)} Q_k^{(k+1-j)}.$$

Or on remarque que pour $j \in \{0, \dots, k+1\}$

$$(X^{k+1})^{(j)} = c_{k,j} X^{k+1-j}, \quad \text{avec } c_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0, \\ \prod_{p=1}^j (k-p+2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, on a

$$P^{(k+1)} = \left(\sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} c_{k,j} X^{k+1-j} Q_k^{(k+1-j)} \right) + (k+1)! Q_k.$$

Comme $P^{(k+1)}(0) = 0$, on en déduit que $Q_k(0) = 0$ et donc qu'il existe un polynôme $\tilde{Q}_{k+1} \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q_k = X\tilde{Q}_{k+1}$. Ainsi, on a

$$P = X^{k+1}Q_k = X^{k+2}\tilde{Q}_{k+1}.$$

Pour $k = d$, on en déduit que $P = X^{d+1}Q_d$ et donc si $Q_d \neq 0$ on a $\deg(P) \geq d+1$ ce qui est impossible puisque $\deg(P) \leq d$ et donc $P = 0$.

(iii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_d[X]$, on a

$$|(\lambda P)^{(k)}(0)| = |\lambda P^{(k)}(0)| = |\lambda| |P^{(k)}(0)| \leq |\lambda| \left(\max_{k \in \{0, \dots, d\}} |P^{(k)}(0)| \right) = |\lambda| N(P).$$

Si $\lambda = 0$, on a $N(\lambda P) = |\lambda| N(P) = 0$. Si $\lambda \neq 0$ alors

$$\begin{aligned} |P^{(k)}(0)| &= \frac{|\lambda|}{|\lambda|} |P^{(k)}(0)| = \frac{1}{|\lambda|} |\lambda P^{(k)}(0)| = \frac{1}{|\lambda|} |(\lambda P)^{(k)}(0)| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} \left(\sup_{k \in \{0, \dots, d\}} |(\lambda P)^{(k)}(0)| \right) \\ &= \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda P). \end{aligned}$$

En passant au max sur $k \in \{0, \dots, d\}$ on obtient

$$N(P) \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda P)$$

ce qui se ré-écrit $|\lambda|N(P) \leq N(P)$. On en déduit que N est homogène.

(iv) Soit $P, Q \in \mathbb{R}_d[X]$, pour tout $k \in \{0, \dots, d\}$ on a

$$|(P+Q)^{(k)}(0)| = |P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0)| \leq |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)| \leq N(P) + N(Q).$$

Par passage au max sur $k \in \{0, \dots, d\}$ on obtient

$$N(P+Q) \leq N(P) + N(Q)$$

ce qui est précisément l'inégalité triangulaire.

Conclusion : $(\mathbb{R}_d[X], N)$ est un espace vectoriel normé.

(ii) (a) Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{R}_d[X]$, on a

$$D(P) = \sum_{k=0}^d k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{d-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

On en conclut que $D(P) \in \mathbb{R}_{d-1}[X] \subset \mathbb{R}_d[X]$. Il suffit de démontrer que D est une application linéaire. Soient $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^d b_k X^k \in \mathbb{R}_d[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} D(P + \lambda Q) &= \sum_{k=0}^{d-1} (k+1)(a_{k+1} + \lambda b_{k+1}) X^k = \left(\sum_{k=0}^{d-1} (k+1) a_{k+1} X^{k+1} \right) + \lambda \left(\sum_{k=0}^{d-1} (k+1) b_{k+1} X^{k+1} \right) \\ &= D(P) + \lambda D(Q). \end{aligned}$$

D est donc une application linéaire de $\mathbb{R}_d[X]$ dans lui-même : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$, on a

$$N(D(P)) = \left(\max_{k \in \{0, \dots, d\}} |(P')^{(k)}(0)| \right) = \left(\max_{k \in \{0, \dots, d\}} |P^{(k+1)}(0)| \right) = \left(\max_{k \in \{1, \dots, d+1\}} |P^{(k)}(0)| \right).$$

Comme $\deg(P) \leq d$, on a nécessairement $P^{(k+1)} = 0_{\mathbb{R}_d[X]}$ et ainsi

$$N(D(P)) = \left(\max_{k \in \{1, \dots, d\}} |P^{(k)}(0)| \right) \leq \left(\max_{k \in \{0, \dots, d\}} |P^{(k)}(0)| \right) = N(P).$$

On en déduit que $\|P\| \leq 1$. Soit $P = X \in \mathbb{R}_d[X]$. On a $D(P) = 1$ donc

$$N(D(P)) = 1, \quad N(P) = 1.$$

On en conclut que

$$\|P\| \geq \frac{N(D(P))}{N(P)} = \frac{1}{1} = 1$$

et donc $\|P\| = 1$.

Solution (de l'Exercice 8).

(i) Soient $f, g \in \mathcal{C}([0, 1])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(f + \lambda g) = \int_0^1 (f(t) + \lambda g(t)) t^2 dt = \left(\int_0^1 f(t) t^2 dt \right) + \lambda \left(\int_0^1 g(t) t^2 dt \right) = \varphi(f) + \lambda \varphi(g).$$

On en déduit que φ est linéaire.

(ii) Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, on a

$$|\varphi(f)| = \left| \int f(t)t^2 dt \right| \leq \int |f(t)| t^2 dt \leq \|f\|_\infty \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \|f\|_\infty.$$

On en déduit que

$$\|\varphi\|_\infty := \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \\ f \neq 0}} \left(\frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_\infty} \right) \leq \frac{1}{3}.$$

Choisissons $\varphi \equiv 1$ (la fonction constante à 1). Alors, on a

$$\|f\|_\infty = 1, \quad \varphi(f) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

On en déduit que

$$\|\varphi\|_\infty \geq \frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_\infty} = \frac{1}{3}.$$

Cela nous permet d'affirmer que $\|\varphi\|_\infty = \frac{1}{3}$.

(iii) Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, on a

$$|\varphi(f)| = \left| \int_0^1 f(t)t^2 dt \right| \leq \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 t^4 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \|f\|_2.$$

On en déduit que

$$\|\varphi\|_2 := \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \\ f \neq 0}} \left(\frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_2} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Choisissons $(\varphi : t \in [0, 1] \mapsto t^2) \in \mathcal{C}([0, 1])$. Alors, on a

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \varphi(f) = \int_0^1 t^4 dt = \frac{1}{5}.$$

On en déduit que

$$\|\varphi\|_2 \geq \frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_2} = \frac{1}{5} \sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Cela nous permet d'affirmer que $\|\varphi\|_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Solution (de l'Exercice 9). Soit $A \in \mathcal{M}_{d,p}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^p$. On considère $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et on a

$$x = \sum_{j=1}^p x_j e_j, \quad Ax = \sum_{j=1}^p x_j A e_j.$$

En particulier, en reprenant les notations de la Proposition 5, on obtient

$$N_a(Ax) \leq \sum_{j=1}^p |x_j| N(Ae_j) \leq \|x\|_{\ell^\infty(\mathbb{R}^p)} \left(\sum_{j=1}^p N(Ae_j) \right).$$

En posant $C = \sum_{j=1}^p N(Ae_j)$, on obtient

$$N_a(Ax) \leq C \|x\|_{\ell^\infty(\mathbb{R}^p)}.$$

Maintenant, comme $\mathbb{R}^p$ est de dimension finie les normes $\|\cdot\|_{\ell^\infty(\mathbb{R}^p)}$ et N_b sont équivalentes et il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ on ait

$$\|x\|_\infty \leq CM N_b(x).$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ on a

$$N_a(Ax) \leq CM N_b(x)$$

et donc pour tout $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ on a

$$0 \leq \frac{N_a(Ax)}{N_b(x)} \leq CM.$$

Le membre de droite ne dépend plus de x et en passant au supremum sur $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ on aboutit à

$$\mathcal{N}(A) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^p \\ x \neq 0_{\mathbb{R}^p}}} \left(\frac{N_a(Ax)}{N_b(x)} \right) \leq CM < +\infty.$$

Solution (de l'Exercice 10).

(i) Nous allons démontrer les axiomes de norme.

(i) Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on a

$$N(x) = \sum_{j=1}^d j|x_j| \geq 0$$

en tant que somme de termes positifs. Ainsi, N est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

(ii) Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que $N(x) = 0$. On a alors

$$\sum_{j=1}^d j|x_j| = 0$$

et comme il s'agit d'une somme de termes positifs qui est nulle alors chacun des termes de la somme est nulle, c'est-à-dire que pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ on a

$$j|x_j| = 0.$$

Donc pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, on a $x_j = 0$ donc $x = 0_{\mathbb{R}^d}$. N est donc définie.

(iii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. On a

$$N(\lambda x) = \sum_{j=1}^d j|\lambda x_j| = \sum_{j=1}^d j|\lambda||x_j| = |\lambda| \left(\sum_{j=1}^d j|x_j| \right) = |\lambda|N(x)$$

et donc N est homogène.

(iv) Soient $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$. D'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$, on a pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$

$$|x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j|.$$

En multipliant cette inégalité par $j \in \{1, \dots, d\}$, on obtient

$$j|x_j + y_j| \leq j|x_j| + j|y_j|.$$

Enfin, en sommant sur $j \in \{1, \dots, d\}$, on aboutit à

$$N(x+y) = \left(\sum_{j=1}^d j|x_j + y_j| \right) \leq \left(\sum_{j=1}^d j|x_j| + j|y_j| \right) = \left(\sum_{j=1}^d j|x_j| \right) + \left(\sum_{j=1}^d j|y_j| \right) = N(x) + N(y).$$

En particulier N vérifie l'inégalité triangulaire.

Conclusion : $(\mathbb{R}^d, N)$ est un espace vectoriel normé.

(ii) Comme $\mathbb{R}^d$ est de dimension finie, d'après le Théorème 1, on sait que N et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes équivalentes sur $\mathbb{R}^d$. Par conséquent, il existe $m, M \in \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on ait

$$m\|x\|_\infty \leq N(x) \leq M\|x\|_\infty.$$

(iii) Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, on a

$$|x_j| \leq j|x_j| \leq N(x).$$

En particulier, en passant au max sur $j \in \{1, \dots, d\}$ on obtient

$$\|x\|_\infty \leq N(x).$$

On en déduit par passage au sup sur $x \in \mathbb{R}^d, x \neq 0_{\mathbb{R}^d}$ que

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ x \neq 0_{\mathbb{R}^d}}} \frac{\|x\|_{\infty}}{N(x)} \leq 1.$$

Choisissons $x = (1, 0, \dots, 0)$. On a $\|x\|_{\infty} = 1$ et $N(x) = 1$ donc

$$1 = \frac{\|x\|_{\infty}}{N(x)} \leq \left(\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ x \neq 0_{\mathbb{R}^d}}} \frac{\|x\|_{\infty}}{N(x)} \right)$$

et donc

$$\left(\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ x \neq 0_{\mathbb{R}^d}}} \frac{\|x\|_{\infty}}{N(x)} \right) = 1.$$

Comme on a pour tout $x \in \mathbb{R}^d, x \neq 0_{\mathbb{R}^d}$ que

$$\|x\|_{\infty} = \frac{\|x\|_{\infty}}{N(x)} N(x) \leq \left(\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ x \neq 0_{\mathbb{R}^d}}} \frac{\|x\|_{\infty}}{N(x)} \right) N(x) = N(x).$$

et donc la meilleure constante est $m = 1$.

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}^d, x \neq 0_{\mathbb{R}^d}$, on a

$$N(x) = \sum_{j=1}^d j|x_j| \leq \|x\|_{\infty} \left(\sum_{j=1}^d j \right) \|x\|_{\infty} = \frac{d(d+1)}{2} \|x\|_{\infty}.$$

En particulier, on a par passage au sup sur $x \in \mathbb{R}^d, x \neq 0_{\mathbb{R}^d}$

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ x \neq 0_{\mathbb{R}^d}}} \frac{N(x)}{\|x\|_{\infty}} \leq \frac{d(d+1)}{2}.$$

En choisissant $x = (1, \dots, 1)$, on a $\|x\|_{\infty} = 1$ et $N(x) = \left(\sum_{j=1}^d j \right) = \frac{d(d+1)}{2}$. On en déduit que

$$\frac{d(d+1)}{2} = \frac{N(x)}{\|x\|_{\infty}} \leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ x \neq 0_{\mathbb{R}^d}}} \frac{N(x)}{\|x\|_{\infty}}$$

et donc

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ x \neq 0_{\mathbb{R}^d}}} \frac{N(x)}{\|x\|_{\infty}} = \frac{d(d+1)}{2}.$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^d, x \neq 0_{\mathbb{R}^d}$, on a

$$N(x) = \frac{N(x)}{\|x\|_{\infty}} \|x\|_{\infty} \leq \left(\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ x \neq 0_{\mathbb{R}^d}}} \frac{N(x)}{\|x\|_{\infty}} \right) \|x\|_{\infty} = \frac{d(d+1)}{2} \|x\|_{\infty}.$$

En particulier la meilleure constante M est $M = \frac{d(d+1)}{2}$.

Solution (de l'Exercice 11).

(i) (i) Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$N_1(x) = 2|x_1| + |x_2|$$

et cette quantité est positive en tant que somme de termes positifs donc N_1 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

(ii) Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $N_1(x) = 0$. Alors, on a

$$0 = N_1(x) = 2|x_1| + |x_2|.$$

Il s'agit d'une somme de termes positifs qui est nulle donc chacun des termes est nul donc $x_1 = x_2 = 0$ et $x = 0_{\mathbb{R}^2}$. N_1 est donc définie.

(iii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$N_1(\lambda x) = 2|\lambda x_1| + |\lambda x_2| = 2|\lambda||x_1| + |\lambda||x_2| = |\lambda|(2|x_1| + |x_2|) = |\lambda|N_1(x).$$

On en déduit que N_1 est homogène.

(iv) Soient $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. En utilisant l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} N_1(x + y) &= 2|x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \leq 2(|x_1| + |y_1|) + |x_2| + |y_2| \\ &= 2|x_1| + |x_2| + 2|y_1| + |y_2| \\ &= N_1(x) + N_1(y). \end{aligned}$$

N_1 vérifie donc l'inégalité triangulaire.

Conclusion : N_1 est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(ii) Soit $x = (x_1, x_2) \in B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$. On a

$$2|x_1| + |x_2| < 1. \tag{A.1}$$

On remarque que $(x_1, -x_2) \in B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ et donc que la boule unité est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. De même, on a $(-x_1, x_2) \in B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ et donc la boule unité est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On s'intéresse donc à l'intersection entre la boule unité et le quart de plan $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ puis, on reconstituera $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ par symétrie.

Si $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$, (A.1) devient $2x_1 + x_2 < 1$. On en déduit que $x_2 < 1 - 2x_1$ et donc que $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ est sous la droite passant par les points $(0, 1)$ et $(\frac{1}{2}, 0)$. On en déduit la figure A.1, que l'on a complétée par symétrie.

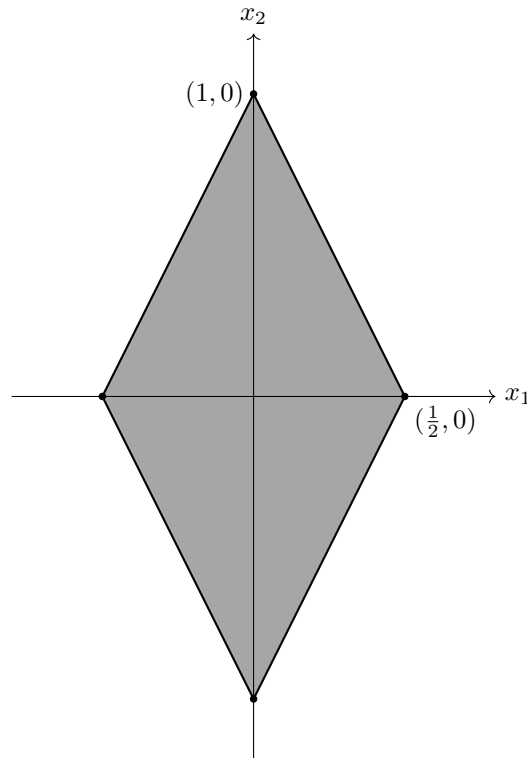


FIGURE A.1 – La boule unité pour la norme N_1 .

Solution (de l'Exercice 12).

- (i) Montrer que la norme N_2 est une norme. On va commencer par remarquer que pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$N_2(x) = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2} = \sqrt{(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + x_2^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + x_2^2}.$$

Pour $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$\phi(x, y) = \frac{N_2(x+y)^2 - N_2(x)^2 - N_2(y)^2}{2} = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + x_2y_2.$$

On remarque que $\phi(x, x) = N(x)^2$ et nous allons démontrer que ϕ est un produit scalaire.

- (i) Soient $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\phi(x, y) = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + x_2y_2 = (y_1 - y_2)(x_1 - x_2) + y_2x_2 = \phi(y, x)$$

et donc ϕ est symétrique.

- (ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} \phi(\lambda x + y, z) &= (\lambda x_1 + y_1 - (\lambda x_2 + y_2))(z_1 - z_2) + (\lambda x_2 + y_2)z_2 \\ &= (\lambda(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2))(z_1 - z_2) + \lambda x_2 z_2 + y_2 z_2 \\ &= \lambda((x_1 - x_2)(z_1 - z_2) + x_2 z_2) + (y_1 - y_2)(z_1 - z_2) + y_2 z_2 \\ &= \lambda\phi(x, z) + \phi(y, z). \end{aligned}$$

On en déduit que ϕ est linéaire par rapport à sa première variable et donc bilinéaire (car symétrique).

- (iii) Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\phi(x, x) = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 \geq 0$$

qui est positif en tant que somme de termes positifs donc ϕ est positive.

- (iv) Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\phi(x, x) = 0$. Alors, on a

$$\phi(x, x) = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 = 0.$$

Comme il s'agit d'une somme de termes positifs qui est nulle, chacun des termes est nul. En particulier, on a $x_2 = 0$ et $x_1 - x_2 = 0$. Comme $x_2 = 0$, il vient $x_1 = 0$ et donc $x = 0_{\mathbb{R}^2}$ et ϕ est définie.

Conclusion : N_2 est une norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ associée au produit scalaire ϕ .

- (ii) Soit $x = (x_1, x_2) \in B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$, on a

$$N_2(x)^2 = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 < 1. \quad (\text{A.2})$$

On remarque que l'on a

$$N_2(x)^2 = \phi(x, x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = \langle Ax^\top, x^\top \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormée. On remarque les valeurs propres de A sont données par les solutions $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1.$$

Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est donné par

$$\Delta = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5 > 0.$$

Les deux valeurs propres de A sont donc

$$\lambda_{\pm} := \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} > 0.$$

Cherchons des vecteurs propres associés $x_{\pm} = (x_{1,\pm}, x_{2,\pm})$. On a

$$Ax_{\pm} = \lambda_{\pm} x_{\pm} \iff \begin{cases} x_{1,\pm} - x_{2,\pm} = \lambda_{\pm} x_{1,\pm} \\ -x_{1,\pm} + 2x_{2,\pm} = \lambda_{\pm} x_{2,\pm} \end{cases} \iff \begin{cases} (1 - \lambda_{\pm})x_{1,\pm} - x_{2,\pm} = 0 \\ -x_{1,\pm} + (2 - \lambda_{\pm})x_{2,\pm} = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $x_{\pm}$ est de la forme

$$x_{\pm} = \alpha(1, 1 - \lambda_{\pm}), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Cherchons à choisir $x_{\pm}$ normalisé pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on a alors

$$1 = \|x_{\pm}\|_2^2 = \alpha^2(1 + (1 - \lambda_{\pm})^2) = \alpha^2(2 + \lambda_{\pm}^2 - 2\lambda_{\pm}) = \alpha^2(1 + \lambda_{\pm}),$$

où on a utilisé le fait que $\lambda_{\pm}^2 - 3\lambda_{\pm} + 1 = 0$. On choisit donc

$$x_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_{\pm}}}(1, 1 - \lambda_{\pm}).$$

Soit

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_-}} & \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_+}} \\ \frac{1-\lambda_-}{\sqrt{1+\lambda_-}} & \frac{1-\lambda_+}{\sqrt{1+\lambda_+}} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} P^{\top} P &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_-}} & \frac{1-\lambda_-}{\sqrt{1+\lambda_-}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_+}} & \frac{1-\lambda_+}{\sqrt{1+\lambda_+}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_-}} & \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_+}} \\ \frac{1-\lambda_-}{\sqrt{1+\lambda_-}} & \frac{1-\lambda_+}{\sqrt{1+\lambda_+}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2-2\lambda_-+\lambda_-^2}{1+\lambda_-} & \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_-}\sqrt{1+\lambda_+}}(2+\lambda_- \lambda_+ - (\lambda_- + \lambda_+)) \\ \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_-}\sqrt{1+\lambda_+}}(2+\lambda_- \lambda_+ - (\lambda_- + \lambda_+)) & \frac{2-2\lambda_++\lambda_+^2}{1+\lambda_+} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Or, en utilisant le fait que $\lambda_{\pm}$ soit solution de $0 = \lambda^2 - 3\lambda + 1$ on a $(\lambda - \lambda_-)(\lambda - \lambda_+) = 0$ on remarque que

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (\lambda - \lambda_-)(\lambda - \lambda_+) = \lambda^2 - (\lambda_- + \lambda_+)\lambda + \lambda_- \lambda_+.$$

En particulier, on a $\lambda_- + \lambda_+ = 3$ et $\lambda_- \lambda_+ = 1$. Donc, on obtient

$$2 + \lambda_- \lambda_+ - (\lambda_- + \lambda_+) = 2 + 1 - 3 = 0.$$

Par ailleurs, on a

$$2 - 2\lambda_{\pm} + \lambda_{\pm}^2 = 2 - 2\lambda_{\pm} + 3\lambda_{\pm} - 1 = \lambda_{\pm} + 1.$$

On en déduit que

$$P^{\top} P = Id.$$

Par ailleurs, on a

$$P^{\top} A P = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} =: D.$$

En particulier, on a

$$N(x)^2 = \langle P D P^{\top} x^{\top}, x \rangle = \langle D P^{\top} x^{\top}, P^{\top} x \rangle = \lambda_- |(P^{\top} x)_1|^2 + \lambda_+ |(P^{\top} x)_2|^2$$

On en déduit que $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ est une ellipse de centre l'origine, d'axes $x_{\pm}$ et de demi petit-axe $\lambda_+^{-\frac{1}{2}}$ et de demi grand-axe λ_- . On en déduit la Figure A.2 : la boule unité pour la norme N_2 est l'intérieur de l'ellipse en bleu.

Solution (de l'Exercice 13).

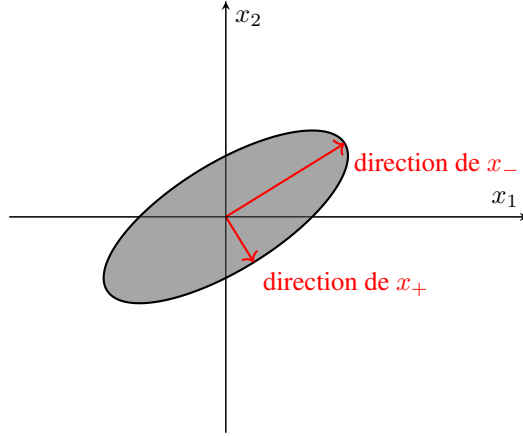


FIGURE A.2 – La boule unité $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ pour la norme N_2 .

- (i) (i) Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Comme N_1 est une norme on a

$$0 \leq N_1(x) \leq \max(N_1(x), N_2(x)) = N(x).$$

en particulier, N est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

- (ii) Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $N(x) = 0$. En particulier

$$0 \leq N_1(x) \leq \max(N_1(x), N_2(x)) = N(x) = 0$$

donc $N_1(x) = 0$ et comme N_1 est une norme alors $x = 0_{\mathbb{R}^2}$ donc N est définie.

- (iii) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$, pour $j \in \{1, 2\}$, on a

$$N_j(\lambda x) = |\lambda| N_j(x) \leq |\lambda| \max(N_1(x), N_2(x)) = |\lambda| N(x)$$

et donc par passage au max sur $j \in \{1, 2\}$ on a

$$N(\lambda x) = \max(N_1(\lambda x), N_2(\lambda x)) \leq |\lambda| N(x). \quad (\text{A.3})$$

De plus, si $\lambda = 0$ alors $0 = N(\lambda x) = \lambda N(x)$. Si $\lambda \neq 0$, on a pour $j \in \{1, 2\}$

$$N_j(x) = \frac{|\lambda|}{|\lambda|} N_j(x) = \frac{1}{|\lambda|} N_j(\lambda x) \leq \frac{1}{|\lambda|} \max(N_1(\lambda x), N_2(\lambda x)) = \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda x).$$

Par passage au max sur $j \in \{1, 2\}$ on obtient

$$N(x) = \max(N_1(x), N_2(x)) \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda x).$$

Combiné à (A.3) on aboutit à

$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$

et donc N est homogène.

- (iv) Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$. Pour $j \in \{1, 2\}$, grâce à l'inégalité triangulaire pour N_j , on a

$$N_j(x + y) \leq N_j(x) + N_j(y) \leq \max(N_1(x), N_2(x)) + \max(N_1(y), N_2(y)) = N(x) + N(y).$$

Par passage au max sur $j \in \{1, 2\}$, on obtient

$$N(x + y) = \max(N_1(x + y), N_2(x + y)) \leq N(x) + N(y)$$

et donc N vérifie l'inégalité triangulaire.

Conclusion : N est une norme $\mathbb{R}^2$.

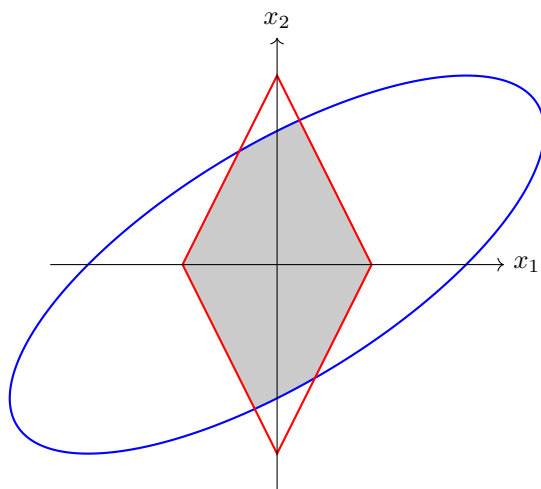


FIGURE A.3 – Boule unité pour la norme N (en gris, sans le bord).

(ii) On a

$$\begin{aligned} B_N(0_{\mathbb{R}^2}, 1) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : N(x) < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : N_1(x) < 1 \text{ et } N_2(x) < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : N_1(x) < 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : N_2(x) < 1\} \\ &= B_{N_1}(0_{\mathbb{R}^2}, 1) \cap B_{N_2}(0_{\mathbb{R}^2}, 1). \end{aligned}$$

$B_N(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ est donc l'intersection entre $B_{N_1}(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ et $B_{N_2}(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$. D'après les exercices 11 et 12, on en déduit le dessin de la Figure A.3.

Solution (de l'Exercice 14). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intervalle ouvert $I_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$. C'est un ouvert en tant qu'intervalle ouvert. Montrons maintenant l'égalité ensembliste

$$\left(\bigcap_{n \geq 1} I_n \right) = \{0\}.$$

$\{0\} \subset \bigcap_{n \geq 1} I_n$: cette inclusion est évidente puisque pour tout $n \geq 1$, $0 \in I_n$.

$$\left(\bigcap_{n \geq 1} I_n \right) \subset \{0\} : \text{Soit } x \in \bigcap_{n \geq 1} I_n, \text{ alors pour tout } n \geq 1, \text{ on a}$$

$$-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}.$$

Par passage à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, les inégalités strictes deviennent larges et on obtient par encadrement

$$0 \leq x \leq 0 \implies x = 0.$$

On en déduit que

$$\left(\bigcap_{n \geq 1} I_n \right) = \{0\}.$$

Or $\{0\}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$. En effet, pour $r > 0$, on peut considérer la boule ouverte de centre 0 et de rayon r , c'est-à-dire l'intervalle $] -r, r[$. On remarque que $\frac{r}{2} \in] -r, r[$ mais $\frac{r}{2} \notin \{0\}$ car $r > 0$. Le singleton $\{0\}$ n'est donc pas ouvert et on a bien trouvé une intersection d'ouverts de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

Solution (de l'Exercice 15). On démontre que l'intervalle $[a, b[$ n'est ni ouvert, ni fermé (avec $a < b$). Commençons par démontrer qu'il n'est pas ouvert. Soit $r > 0$, on considère $B(a, r) =]a - r, a + r[$. Alors, on a $a - \frac{r}{2} \in B(a, r)$ et $a - \frac{r}{2} \notin [a, b[$. Comme c'est vrai pour tout $r > 0$, $[a, b[$ n'est pas ouvert. Montrons maintenant que $[a, b[$ n'est pas fermé. Soit la suite définie pour $n \geq 0$ par $b_n = b - \frac{1}{n+1}$. On remarque que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ et comme $a < b$,

il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(b_n)_{n \geq n_0}$ soit une suite d'éléments de $[a, b[$. $(b_n)_{n \geq n_0}$ est donc une suite d'éléments de $[a, b[$ qui converge dans $\mathbb{R}$, si $[a, b[$ était fermé alors la limite de la suite $(b_n)_{n \geq n_0}$ serait un élément de $[a, b[$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b \notin [a, b[$. On en conclut que $[a, b[$ n'est pas fermé.

Solution (de l'Exercice 16). Il suffit de considérer la boule ouverte de même rayon.

Solution (de l'Exercice 17).

(i) On commence par remarque que

$$A = B \cap C$$

avec

$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < x_2\} \quad \text{et} \quad C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \leq 1\}.$$

B est donc un demi-plan délimité par la droite d'équation $x_1 = x_2$, cette droite n'appartient pas à B . Si on veut savoir s'il s'agit du demi-plan au dessus ou au dessous de la droite, il suffit de remarque que le point $(0, 1) \in B$ et donc qu'il s'agit du demi-plan au dessus de la droite.

On remarque que l'équation $\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1$ est une équation d'ellipse de centre $0_{\mathbb{R}^2}$, de demi-grand axe 2 (le long de l'axe des abscisses) et de demi-petit axe 1 (le long de l'axe des ordonnées). C est l'intérieur de l'ellipse, avec le bord. Il est représenté en Figure A.4.

(ii) A n'est pas ouvert. En effet, la Figure A.4 nous incite à poser $x = (-2, 0)$, on a bien $x \in A$ car

$$-2 < 0 \quad \text{et} \quad \frac{(-2)^2}{4} + 0^2 = 1 \leq 1$$

et on comprend que toute boule centrée en x intersecte le complémentaire de A . Il convient maintenant de le démontrer. Soit $r > 0$, on considère $y = x - (\frac{r}{2}, 0) = (-2 - \frac{r}{2}, 0)$. Choisissons la norme 2, par construction on a $y \in B(x, r)$ car

$$\|x - y\|_2 = \|(\frac{r}{2}, 0)\|_2 = \frac{r}{2} < r$$

et pourtant $y \notin A$ car

$$\frac{(-2 - \frac{r}{2})^2}{4} + 0^2 = \frac{(2 + \frac{r}{2})^2}{4} = (1 + \frac{r}{4})^2 > 1.$$

On en déduit que A n'est pas ouvert.

A n'est pas fermé. En effet, le vecteur $y = (0, 0) \notin A$ car il appartient à la droite d'équation $x_1 = x_2$ qui n'est pas dans A et pourtant il est limite d'une suite d'éléments de A que l'on va maintenant construire. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = (-\frac{1}{n+1}, 0)$. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$-\frac{1}{n+1} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{(\frac{1}{n+1})^2}{4} + 0^2 = \frac{1}{4(n+1)^2} \leq 1.$$

et donc que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$. Par ailleurs, on remarque que

$$\|y_n - y\|_2 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc que y est bien limite d'une suite d'éléments de A : A ne peut pas être fermé.

(iii) Nous allons démontrer que

$$\overset{\circ}{A} = \underbrace{\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < x_2 \text{ et } \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 < 1\}}_{:=D}.$$

La démonstration se fait par double inclusion.

$\overset{\circ}{A} \subset D$: Soit $x = (x_1, x_2) \in \overset{\circ}{A}$, par définition, il existe $\rho > 0$ tel que $B(x, \rho) \subset A$ (on va prendre la boule pour la norme 2). Comme $\overset{\circ}{A} \subset A$, on peut supposer que $x \in A \setminus D$, c'est à dire que

$$x_1 < x_2 \text{ et } \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1.$$

Si $x_2 \geq 0$, on considère $y = (x_1, x_2 + \frac{\rho}{2})$. On remarque que $y \in B(x, \rho)$ car

$$\|x - y\|_2 = \|(0, \frac{\rho}{2})\|_2 = \frac{\rho}{2} < \rho$$

et donc $y \in B(x, \rho) \subset A$. En particulier, on a

$$\frac{y_1^2}{4} + y_2^2 = \frac{x_1^2}{4} + (x_2 + \frac{\rho}{2})^2 \leq 1$$

ce qui revient à dire, en développant le carré et en utilisant le fait que $\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1$ que

$$0 \geq \frac{\rho^2}{4} + x_2\rho = (\frac{\rho}{2} + x_2)^2 - x_2^2$$

ou encore

$$(\frac{\rho}{2} + x_2)^2 \leq x_2^2.$$

En prenant la racine, comme $x_2 \geq 0$, on obtient

$$\frac{\rho}{2} + x_2 \leq x_2$$

ce qui est impossible car alors $\rho \leq 0$.

Maintenant, si $x_2 < 0$, on considère $y = (x_1, x_2 - \frac{\rho}{2})$. On remarque que $y \in B(x, \rho)$ car

$$\|x - y\|_2 = \|(0, -\frac{\rho}{2})\|_2 = \frac{\rho}{2} < \rho$$

et donc $y \in B(x, \rho) \subset A$. En particulier, on a

$$\frac{y_1^2}{4} + y_2^2 = \frac{x_1^2}{4} + (x_2 - \frac{\rho}{2})^2 \leq 1$$

ce qui revient à dire, en développant le carré et en utilisant le fait que $\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1$ que

$$0 \geq \frac{\rho^2}{4} - x_2\rho$$

or $\frac{\rho^2}{4} > 0$ et $-x_2 > 0$ donc c'est impossible et $y \notin A$. On en conclut que $\mathring{A} \subset D$.

$D \subset \mathring{A}$: Remarquons d'abord que $D \subset A$. Soit $x \in D$, on sait que la distance euclidienne de x à la droite D est donnée par

$$\delta_1 := \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{2}} > 0.$$

La distance de x à l'ellipse en bleu est plus compliquée à déterminer. Pour cela, on remarque que

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1\} = \{(2 \cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 2\pi]\}. \quad (\text{A.4})$$

En effet, si (x_1, x_2) appartient à l'ensemble de gauche, on a

$$1 = \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = \left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + x_2^2.$$

En particulier, on a

$$|\frac{x_1}{2} + ix_2| = 1$$

et donc il existe $t \in [0, 2\pi]$ tel que

$$\frac{x_1}{2} + ix_2 = e^{it}.$$

En prenant les parties réelles puis imaginaires, on aboutit à

$$x_1 = 2 \cos(t), \quad x_2 = \sin(t).$$

On en conclut que l'ensemble de gauche est inclut dans l'ensemble de droite. Maintenant si $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$\frac{(2 \cos(t))^2}{4} + \sin(t)^2 = \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1.$$

En particulier l'égalité ensembliste annoncée en (A.4) est vraie. Maintenant, on essaye de montrer qu'il existe $\delta_2 > 0$, qui serait la distance entre x et l'ellipse. Il s'agit donc de considérer la fonction

$$f : t \in [0, 2\pi] \mapsto \|x - (2 \cos(t), \sin(t))\|_2^2$$

et de montrer qu'elle admet un minimum strictement positif. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$f(t) = (x_1 - 2 \cos(t))^2 + (x_2 - \sin(t))^2.$$

Il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty([0, 2\pi])$:

- $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \sin(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty([0, 2\pi])$ d'après le cours.
- Les applications $g_1 : s \mapsto (x_1 - 2s)$ et $g_2 : s \mapsto (x_2 - s)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ en tant que fonctions polynomiales.
- La fonction $h : s \mapsto s^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ en tant que fonction polynomiale.

on remarque alors que $f = h \circ g_1 \circ \cos + h \circ g_2 \circ \sin$ et on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ en tant que composée et somme de fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. f étant en particulier continue sur l'intervalle fermé $[0, 2\pi]$, elle y atteint son minimum en un point t_* et il convient de montrer que ce minimum est strictement positif. Il est nécessairement positif car f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et si $f(t_*) = 0$ alors $\|x - (2 \cos(t_*), \sin(t_*))\|_2 = 0$ et donc $x = (2 \cos(t_*), \sin(t_*))$. En particulier, on a

$$\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = \frac{(2 \cos(t_*))^2}{4} + \sin(t_*)^2 = 1.$$

Or, $x \in D$ donc $\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 < 1$ et ainsi, $f(t_*) > 0$. Posons

$$\delta_2 := \sqrt{f(t_*)} > 0, \quad \delta := \min(\delta_1, \delta_2).$$

On considère alors $B(x, \delta)$ et on veut montrer que $B(x, \delta) \subset A$. Soit $y \in B(x, \delta)$, on va montrer que nécessairement $y_1 < y_2$. Supposons que ça ne soit pas le cas, pour $t \in [0, 1]$, on pose

$$z_t = tx + (1 - t)y. \tag{A.5}$$

On remarque que

$$\|x - z_t\|_2 = \|(1 - t)x - (1 - t)y\|_2 = (1 - t)\|x - y\|_2 < (1 - t)\delta \leq \delta$$

donc $z_t \in B(x, \delta)$. Par ailleurs, on considère

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) := tx_1 + (1 - t)y_1 - tx_2 - (1 - t)y_2.$$

g est une fonction polynomiale donc continue sur $[0, 1]$. Par ailleurs on a $g(0) = y_1 - y_2 \geq 0$ et $g(1) = x_1 - x_2 < 0$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_* \in [0, 1]$ tel que $g(t_*) = 0$. On en déduit alors que z_{t_*} appartient à la droite d'équation $x_1 = x_2$. En particulier, par définition du minimum, on a

$$\|x - z_{t_*}\|_2 \geq \delta_1 \geq \delta$$

or $z_{t_*} \in B(x, \delta)$ donc c'est absurde et $y_1 < y_2$.

On va maintenant montrer que $\frac{y_1^2}{4} + y_2^2 < 1$. Supposons là encore que ça ne soit pas le cas, c'est-à-dire que $\frac{y_1^2}{4} + y_2^2 \geq 1$. On considère le vecteur z_t définie en (A.5) pour $t \in [0, 1]$. On considère

$$h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) := \frac{(tx_1 + (1 - t)y_1)^2}{4} + (tx_2 + (1 - t)y_2)^2 - 1.$$

h est continue sur $[0, 1]$ en tant que fonction polynomiale et on a

$$h(0) = \frac{y_1^2}{4} + y_2^2 - 1 \geq 0, \quad h(1) = \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 - 1 < 0.$$

Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe t_* tel que

$$h(t_*) = 0$$

et donc $z_{t_*} \in \{(x_1, x_2) : \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 < 1\}$. En particulier, par définition du minimum, on a

$$\|z_{t_*} - x\|_2 \geq \delta_2 \geq \delta.$$

Or, $z_{t_*} \in B(x, \delta)$ donc c'est absurde et $y \in D$, ce qui conclut la preuve.

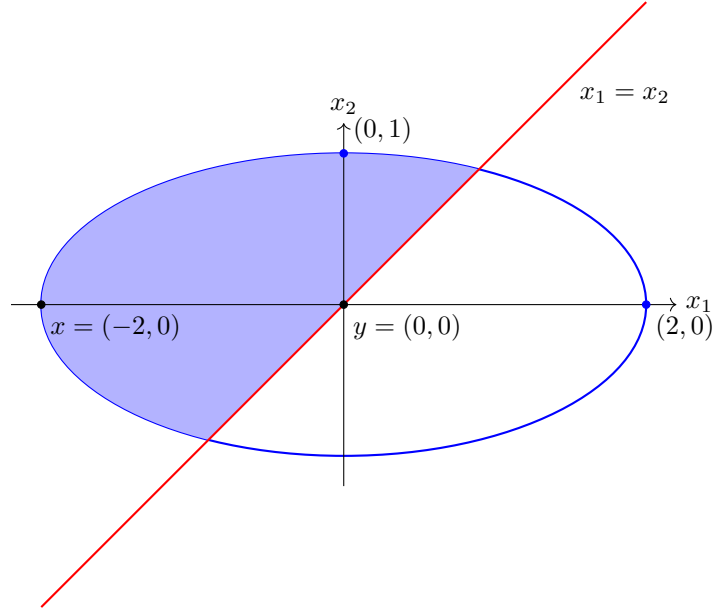


FIGURE A.4 – L'ensemble A est l'ensemble coloré en bleu. Il contient le bord de l'ellipse mais pas la droite d'équation $x_1 = x_2$ en rouge.

Solution (de l'Exercice 18). On va montrer que $\bar{A} = \mathbb{R}^d$ par double inclusion.

$\bar{A} \subset \mathbb{R}^d$: C'est évident.

$\mathbb{R}^d \subset \bar{A}$: Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Si $x \neq a$, alors $x \in A \subset \bar{A}$. Si $x = a$, on choisit un vecteur $y \neq x$ et alors, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$x_n = x + \frac{1}{n+1}(x - y).$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$N(x_n - a) = N(x_n - x) = \frac{1}{n+1}N(x - y) \neq 0$$

donc $x_n \neq a$. De plus, on a,

$$N(x_n - a) = \frac{1}{n+1}N(x - y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

et donc $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$: a est limite d'une suite d'éléments et donc $a \in \bar{A}$. On en déduit que $\mathbb{R}^d \subset \bar{A}$.

Solution (Correction de l'Exercice 23).

- (i) $(t \mapsto t)$ est dérivable en $t_0 \in I$ car c'est la fonction identité et $(t \mapsto f(t))$ est dérivable en $t_0 \in I$ par hypothèse. On en déduit que γ est dérivable en t_0 et que l'on a

$$\gamma'(t_0) = (1, f'(t_0)).$$

En particulier $\gamma'(t_0) \neq (0, 0)$ et donc t_0 est un point régulier.

- (ii) D'après la Proposition 27, l'équation de la tangente à Γ en $\gamma(t_0)$ est donnée par

$$f'(t_0)(x_1 - t_0) - (x_2 - f(t_0)) = 0$$

ce qui se ré-écrit

$$x_2 = f'(t_0)(x_1 - t_0) + f(t_0)$$

ce qui est précisément l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en t_0 .

Solution (Correction de l'Exercice 24). Il s'agit de démontrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 \text{ tel que } \forall y \in A \cap B_{\mathcal{N}_E}(a, r), \mathcal{N}_F(f(y) - \ell) < \varepsilon.$$

Tout en sachant que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 \text{ tel que } \forall y \in A \cap B_{N_E}(a, r), N_F(f(y) - \ell) < \varepsilon. \quad (\text{A.6})$$

Comme $\mathcal{N}_E$ et N_E sont équivalentes, il existe $m_E, M_E > 0$ tels que pour tout $x \in E$ on ait

$$m_E \mathcal{N}_E(x) \leq N_E(x) \leq M_E \mathcal{N}_E(x).$$

De même, comme $\mathcal{N}_F$ et N_F sont équivalentes, il existe $m_F, M_F > 0$ tels que pour tout $z \in F$ on ait

$$m_F \mathcal{N}_F(z) \leq N_F(z) \leq M_F \mathcal{N}_F(z).$$

Soit $\varepsilon > 0$, d'après A.6, il existe $r > 0$ tel que pour tout $y \in A \cap B_{N_E}(a, r)$ on ait $N_F(f(y) - \ell) < m_F \varepsilon$. Notons que si $y \in B_{\mathcal{N}_E}(a, M_E^{-1}r)$ alors

$$N_E(y - a) \leq M_E \mathcal{N}_E(y - a) < M_E M_E^{-1}r = r.$$

En particulier $B_{\mathcal{N}_E}(a, M_E^{-1}r) \subset B_{N_E}(a, r)$. Cela nous incite à choisir $\rho = M_E^{-1}r$.

On observe également que pour tout $y \in A \cap B_{\mathcal{N}_E}(a, \rho) \subset A \cap B_{N_E}(a, r)$ on a

$$\mathcal{N}_F(f(y) - \ell) \leq \frac{1}{m_F} N_F(f(y) - \ell) < \frac{m_F \varepsilon}{m_F} = \varepsilon.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $y \in B_{\mathcal{N}_E}(a, \rho) \cap A$, on a $\mathcal{N}_F(f(y) - \ell) < \varepsilon$ ce qui est précisément ce qu'il fallait démontrer.

Solution (de l'Exercice 25). On va démontrer par récurrence finie sur $n \in \{1, \dots, N\}$ que $\sum_{j=1}^n f_j$ est continue en $a \in A$.

Initialisation : pour $n = 1$, $\sum_{j=1}^n f_j = f_1$ et par hypothèse, f_1 est continue en $a \in A$.

Hypothèse de récurrence : Soit $n \in \{1, \dots, N-1\}$, on suppose que $\sum_{j=1}^n f_j$ est continue en $a \in A$.

Hérédité : On remarque que $\sum_{j=1}^{n+1} f_j = \left(\sum_{j=1}^n f_j\right) + f_{n+1}$. On en déduit que $\sum_{j=1}^{n+1} f_j$ est continue en $a \in A$ en tant que somme de fonctions continues (voir Proposition 33). En effet, $\sum_{j=1}^n f_j$ est continue en $a \in A$ d'après l'hypothèse de récurrence et f_{n+1} est continue en $a \in A$ par hypothèse.

On vient donc de démontrer que pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, l'application $\sum_{j=1}^n f_j$ est continue en $a \in A$.

En particulier, pour $n = N$ on obtient que $f = \sum_{j=1}^N f_j$ est continue en $a \in A$.

Solution (de l'Exercice 26).

(i) On remarque que

$$f = \frac{f_1}{f_2} (f_3 \circ f_2)$$

où on a posé

$$f_1 : \begin{cases} A & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto 1 + x_1^2 + x_2^2 \end{cases}, \quad f_2 : \begin{cases} A & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_2 \end{cases}, \quad f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \sin(t) \end{cases}.$$

f_1 et f_2 sont continues sur A en tant que fonctions polynomiales et f_3 est continue sur $\mathbb{R}$ car la fonction sinus l'est. Comme f_2 ne s'annule pas sur A , on en déduit que $\frac{f_1}{f_2}$ est continue sur A . De plus, $f_2(A) \subset \mathbb{R}$ donc $f_3 \circ f_2$ est continue sur A en tant que composée de fonctions continues. On en déduit que f est continue sur A en tant que produit de fonctions continues sur A .

(ii) On souhaite montrer que $\overline{A} = \mathbb{R}^2$ (faire un dessin pour s'en convaincre). Il est clair que $\overline{A} \subset \mathbb{R}^2$, il reste donc à montrer l'inclusion réciproque. Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, si $x \in A$ alors $x \in \overline{A}$ on peut donc supposer que $x \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, c'est à dire que $x = (x_1, 0)$. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$x_n = \left(x_1, \frac{1}{n+1}\right).$$

On remarque que

$$\|x - x_n\|_2 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$. En particulier, x est limite d'une suite d'éléments de A donc $x \in \overline{A}$, ce qui conclut la démonstration.

- (iii) Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme la fonction $(t \mapsto |t| - |\sin(t)|)$ définie sur $\mathbb{R}$ est paire, il suffit de démontrer l'inégalité pour $t \geq 0$. Si $t \geq 1$, on a toujours $|\sin(t)| \leq t$ et on peut se concentrer sur $t \in [0, 1]$. Pour se faire on considère la fonction définie pour $t \in [0, 1]$ par $g(t) = t - \sin(t)$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty([0, 1])$ en tant que somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty([0, 1])$: la fonction identité et la fonction sinus. De plus, pour $t \in [0, 1]$, on a

$$g'(t) = 1 - \cos(t).$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $g'(t) \geq 0$ (car le cosinus est borné par 1) et donc g est croissante sur $[0, 1]$. En particulier, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$0 = g(0) \leq g(t) = t - \sin(t)$$

et donc, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$t \leq \sin(t).$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(t)| \leq |t|$. Soient $a = (a_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ et $(x_1, x_2) \in A$, on a

$$f(x_1, x_2) - (1 + a_1^2) = \frac{(1 + x_1^2 + x_2^2) \sin(x_2)}{x_2} - (1 + a_1^2) = (1 + x_1^2) \left(\frac{\sin(x_2)}{x_2} - 1 \right) + x_2 \sin(x_2) + (x_1^2 - a_1^2)$$

On peut donc ré-écrire

$$f(x_1, x_2) - (1 + a_1^2) = h_1(\tau - 1) \circ g_2 + g_2 \sin \circ g_2 + h_2$$

où pour $(x_1, x_2) \in A$, $t \in \mathbb{R}^*$, on a défini

$$h_1(x_1, x_2) = 1 + x_1^2, \quad h_2(x_1, x_2) = x_1^2 - a_1^2, \quad g_2(x_1, x_2) = x_2, \quad \tau(t) = \frac{\sin(t)}{t}.$$

Les applications h_1, h_2, g_2 sont continues sur A en tant que fonctions polynomiales de deux variables. De plus, on remarque $g_2(A) \subset \mathbb{R}^*$. Comme τ est le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \tau(t) = 1.$$

En particulier, on obtient

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, 0)} x_2 \sin(x_2) + (x_1^2 - a_1^2) = 0, \quad \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, 0)} (1 + x_1^2) = 1 + a_1^2, \quad \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, 0)} \left(\frac{\sin(x_2)}{x_2} - 1 \right) = 0$$

et donc que

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, 0)} f(x_1, x_2) = 1 + a_1^2.$$

- (iv) Grâce à la Proposition 42, on en déduit que la fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{(1 + x_1^2 + x_2^2) \sin(x_2)}{x_2} & \text{si } (x_1, x_2) \in A \\ 1 + x_1^2 & \text{si } (x_1, x_2) = (x_1, 0) \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de f à $\mathbb{R}^2$.

Solution (Solutions de l'Exercice 27).

1. (i) On remarque que

$$\mathcal{F} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \leq 1\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}x_1 \geq x_2\}.$$

$\mathcal{F}$ est donc l'intersection de l'intérieur de l'ellipse d'équation $\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1$ de centre l'origine, de demi-grand axe 2 (sur l'axe des abscisses) et de demi-petit axe 1 (sur l'axe des ordonnées) et du demi-plan dont le bord la droite d'équation $\frac{1}{2}x_1 = x_2$ et qui contient (par exemple), le point $(0, -1)$. On en déduit la Figure A.5.

(ii) Montrons tout d'abord que $\mathcal{F}$ est fermé. On considère les applications

$$g_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 - 1 \end{cases}, \quad g_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto 2x_2 - x_1 \end{cases}$$

On remarque que l'on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \leq 1\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}x_1 \geq x_2\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x_1, x_2) \leq 0\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : g_2(x_1, x_2) \leq 0\} \\ &= g_1^{-1}(]-\infty, 0]) \cap g_2^{-1}(]-\infty, 0]). \end{aligned}$$

g_1 et g_2 sont des applications continues sur $\mathbb{R}^2$ en tant qu'applications polynomiales (à deux variables). Comme $]-\infty, 0]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, on en déduit que $g_1^{-1}(]-\infty, 0])$ et $g_2^{-1}(]-\infty, 0])$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, $\mathcal{F}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathcal{F}$, on a

$$\frac{1}{4}\|(x_1, x_2)\|_2^2 \leq \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \leq 1$$

et donc pour tout $(x_1, x_2) \in \mathcal{F}$

$$\|(x_1, x_2)\|_2 \leq 2.$$

On en déduit que $\mathcal{F}$ est un borné de $\mathbb{R}^2$.

2. (i) f est continue sur $\mathcal{F} \setminus \{(0, 0)\}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
(ii) Soit $(x_1, x_2) \in \mathcal{F} \setminus \{(0, 0)\}$. On a

$$|f(x_1, x_2)| = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \leq \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2}{4(x_1^2 + x_2^2)} = \frac{1}{4}\|(x_1, x_2)\|_2^2 \xrightarrow{(x_1, x_2) \rightarrow 0_{\mathbb{R}^2}} 0.$$

On en déduit que f admet pour limite 0 en $(0, 0)$.

Pour $(x_1, x_2) \in \mathcal{F}$, on définit alors

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = \begin{cases} f(x_1, x_2) & \text{si } (x_1, x_2) \in \mathcal{F} \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

On remarque que $\overline{\mathcal{F} \setminus \{(0, 0)\}} = \mathcal{F}$. En effet, il suffit de montrer que $(0, 0)$ est limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{F} \setminus \{(0, 0)\}$. Pour cela, on considère pour $n \geq 0$

$$x_n := \left(0, -\frac{1}{n+1}\right).$$

Pour tout $n \geq 0$, on a

$$\frac{0^2}{4} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \leq 1$$

et que l'on a

$$2 \times \left(-\frac{1}{n+1}\right) - 0 = -\frac{2}{n+1} \leq 0$$

et donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F} \setminus \{(0, 0)\}$ et on a

$$\|x_n\|_2 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En particulier, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = (0, 0)$ et donc $(0, 0) \in \overline{\mathcal{F} \setminus \{(0, 0)\}}$. On en déduit que $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F} \setminus \{(0, 0)\}}$.

Ainsi, on en déduit que $\tilde{f}$ est continue sur $\mathcal{F}$.

- (iii) $\tilde{f}$ est continue sur $\mathcal{F}$ qui un fermé borné de $\mathbb{R}^2$: elle y est bornée et atteint ses bornes.

Solution (de l'Exercice 28). (i) On remarque que l'on a

$$\mathcal{E} = g^{-1}(]-\infty, 1])$$

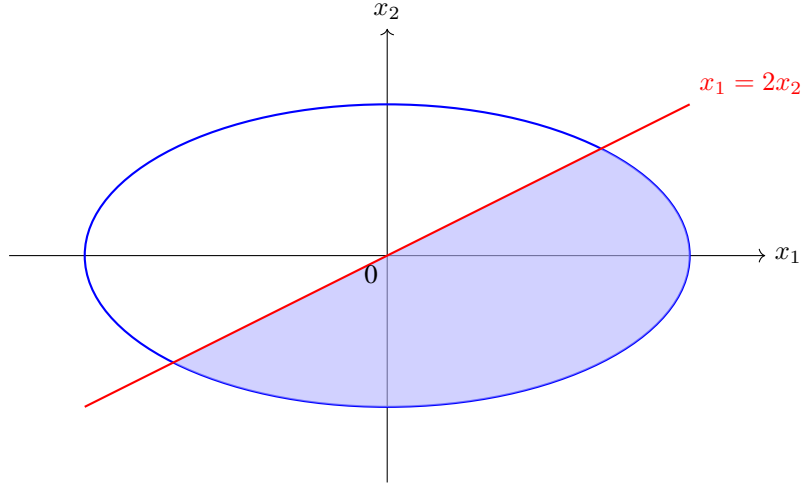


FIGURE A.5 – Représentation de l'ensemble $\mathcal{F}$ en bleu (bords compris).

où

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \end{cases}.$$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale et $] -\infty, 1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ en tant qu'intervalle fermé. On en déduit que $\mathcal{E}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. De plus, on remarque que $\mathcal{E} \subset B_{\|\cdot\|_2}(0_{\mathbb{R}^2}, 2)$. En effet, si $(x_1, x_2) \in \mathcal{E}$, on a

$$x_1^2 + x_2^2 = 4 \left(\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \right) \leq 4 \left(\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \right) \leq 4$$

et donc comme la fonction $(t \mapsto \sqrt{t})$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ on a

$$\|(x_1, x_2)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.$$

Par ailleurs la fonction f est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc de classe $\mathcal{C}^2(\mathcal{E}, \mathbb{R})$ et en particulier continue. f est donc continue sur $\mathcal{E}$ qui est fermé et borné : f y est bornée et atteint ses bornes.

- (ii) (a) On va montrer que $\overset{\circ}{\mathcal{E}} = \underbrace{\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 < 1\}}_{:=A}$.

$A \subset \overset{\circ}{\mathcal{E}}$: On remarque que $A = g^{-1}(] -\infty, 1[)$ où g est définie à la question précédente. Comme $] -\infty, 1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ en tant qu'intervalle ouvert, A est ouvert dans $\mathbb{R}^2$ en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue. De plus, $A \subset \mathcal{E}$ et on en déduit que $A \subset \overset{\circ}{\mathcal{E}}$ car $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$ est le plus grand ouvert contenu dans $\mathcal{E}$.

$\overset{\circ}{\mathcal{E}} \subset A$: Soit $(x_1, x_2) \in \overset{\circ}{\mathcal{E}}$. En particulier $(x_1, x_2) \in \mathcal{E}$. Si $(x_1, x_2) \in A$ il n'y a rien à démontrer donc supposons que $(x_1, x_2) \in \mathcal{E}$ soit tel que $\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1$. Comme $(x_1, x_2) \in \overset{\circ}{\mathcal{E}}$, il existe $\delta > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|_2}((x_1, x_2), \delta) \subset \mathcal{E}$. Si $x_2 \geq 0$, on considère $y = (y_1, y_2) := (x_1, x_2 + \frac{\delta}{2})$. On a $y \in B_{\|\cdot\|_2}((x_1, x_2), \delta)$ car

$$\|(x_1, x_2) - (x_1, x_2 + \frac{\delta}{2})\|_2 = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Donc en particulier $y \in \mathcal{E}$. De plus, on a

$$\frac{y_1^2}{4} + y_2^2 = \frac{x_1^2}{4} + (x_2 + \frac{\delta}{2})^2 = \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 + \delta x_2 + \frac{\delta^2}{4} = 1 + x_2^2 + \delta x_2 > 1$$

car $x_2 \geq 0$. On en déduit que ce n'est pas possible.

Si $x_2 < 0$, on considère $y = (y_1, y_2) := (x_1, x_2 - \frac{\delta}{2})$. On a $y \in B_{\|\cdot\|_2}((x_1, x_2), \delta)$ car

$$\|(x_1, x_2) - (x_1, x_2 - \frac{\delta}{2})\|_2 = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Donc en particulier $y \in \mathcal{E}$. De plus, on a

$$\frac{y_1^2}{4} + y_2^2 = \frac{x_1^2}{4} + (x_2 - \frac{\delta}{2})^2 = \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 - \delta x_2 + \frac{\delta^2}{4} = 1 + x_2^2 - \delta x_2 > 1$$

car $x_2 < 0$. On en déduit que ce n'est pas possible que $(x_1, x_2) \in \mathcal{E} \setminus A$ et donc nécessairement $(x_1, x_2) \in A$ et $\mathring{\mathcal{E}} = A$.

- (b) Par définition $\partial\mathcal{E} = \overline{\mathcal{E}} \setminus \mathring{\mathcal{E}}$. On a vu que $\mathcal{E}$ est fermé donc $\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}$. On en déduit que

$$\partial\mathcal{E} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \leq 1\} \setminus \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 < 1\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1\}$$

où on a utilisé la détermination de $\mathring{\mathcal{E}}$ de la question précédente.

Montrons maintenant que $\partial\mathcal{E} = B$ où $B = \{(2 \cos(t), \sin(t)) : t \in [0, 2\pi]\}$.

$B \subset \partial\mathcal{E}$: Soit $(x_1, x_2) \in B$, par définition de B il existe $t \in [0, 2\pi]$, tel que $(x_1, x_2) = (2 \cos(t), \sin(t))$ et on a

$$\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = \frac{(2 \cos(t))^2}{4} + \sin(t)^2 = \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$$

donc $(x_1, x_2) \in \partial\mathcal{E}$.

$\partial\mathcal{E} \subset B$: Soit $(x_1, x_2) \in \mathcal{E}$. On considère le nombre complexe $z = \frac{x_1}{2} + ix_2$ et on remarque que $|z| = \sqrt{\frac{x_1^2}{4} + x_2^2} = 1$. z étant un nombre complexe de module 1, il existe $t \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{it}$. De plus, on a d'une part

$$\Re(z) = \cos(t), \quad \Im(z) = \sin(t)$$

et d'autre part

$$\Re(z) = \frac{x_1}{2}, \quad \Im(z) = x_2.$$

On en déduit que $(x_1, x_2) = (2 \cos(t), \sin(t))$ et donc que $(x_1, x_2) \in B$.

- (c) Si f admet un minimum ou maximum global dans $\mathcal{E}$, comme ce dernier est ouvert et que f est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ on a nécessairement qu'il est atteint en un point critique de f . Calculons les dérivées partielles de f . Soit $(x_1, x_2) \in \mathring{\mathcal{E}}$, on a

$$(\partial_1 f)(x_1, x_2) = \frac{(4x_1 + 2)(4 + x_1^2 + 4x_2^2) - (4 + 2x_1^2 + 8x_2^2 + 2x_1)2x_1}{(4 + x_1^2 + 4x_2^2)^2} = \frac{-2x_1^2 + 8x_1 + 8x_2^2 + 8}{(4 + x_1^2 + 4x_2^2)^2}$$

et

$$(\partial_2 f)(x_1, x_2) = \frac{16x_2(2 - x_1)}{(4 + x_1^2 + 4x_2^2)^2}.$$

On en déduit que $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique si

$$\begin{cases} -2x_1^2 + 8x_1 + 8x_2^2 + 8 &= 0 \\ x_2(2 - x_1) &= 0. \end{cases}$$

La deuxième équation nous dit que soit $x_2 = 0$ soit $x_1 = 2$. Si $x_1 = 2$ la première équation devient

$$-8 + 16 + 8x_2^2 + 8 = 0 \iff 4 + x_2^2 = 0$$

ce qui est impossible donc nécessairement $x_2 = 0$. Dans ce cas, la première équation devient

$$-2x_1^2 + 8x_1 + 8 = 0 \iff x_1^2 - 4x_1 - 4 = 0.$$

Le discriminant de ce polynôme du second degré est $\Delta := 16 - 4 \times (-4) = 32 > 0$ et $\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{2}$. On en déduit que

$$x_1 = \frac{4 - 4\sqrt{2}}{2} = 2 - 2\sqrt{2} \text{ ou } x_1 = 2 + 2\sqrt{2}.$$

Les points critiques sont donc à chercher parmi $(2 - 2\sqrt{2}, 0)$ et $(2 + 2\sqrt{2}, 0)$. Toutefois, seul $(2 - 2\sqrt{2}, 0) \in \mathring{\mathcal{E}}$. En effet, on a

$$\frac{1}{4}(2 - 2\sqrt{2})^2 + 0^2 = \frac{1}{4}(4 + 8 - 8\sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2} < 1$$

et

$$\frac{1}{4}(2 + 2\sqrt{2})^2 + 0^2 = \frac{1}{4}(4 + 8 + 8\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2} > 1.$$

On a donc que f atteint un extrema en $(2 - 2\sqrt{2}, 0)$ et on a

$$\begin{aligned} f(2 - 2\sqrt{2}, 0) &= \frac{4 + 2(2 - 2\sqrt{2})^2 + 2(2 - 2\sqrt{2})}{4 + (2 - 2\sqrt{2})^2} = \frac{4 + 8(1 - \sqrt{2})^2 + 4(1 - \sqrt{2})}{4(1 + (1 - \sqrt{2})^2)} \\ &= \frac{1 + 2(1 + 2 - 2\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2}}{1 + 1 + 2 - 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{8 - 5\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{8 - 5\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} \times \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{(8 - 5\sqrt{2})(4 + 2\sqrt{2})}{8} \\ &= \frac{12 - 4\sqrt{2}}{8} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

On en conclut que si f atteint son minimum dans $\mathring{\mathcal{E}}$ alors ce minimum vaut $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{2})$.

- (d) Nous allons comparer la valeur $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{2})$ avec le minimum de f sur $\partial\mathcal{E}$. On considère pour cela la fonction

$$h : \begin{cases} [0, 2\pi] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(2\cos(t), \sin(t)). \end{cases}$$

On remarque que pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$h(t) = \frac{4 + 8\cos(t)^2 + 8\sin(t)^2 + 4\cos(t)}{4 + 4\cos(t)^2 + 4\sin(t)^2} = \frac{4 + 8 + 4\cos(t)}{4 + 4} = 2 + \frac{1}{2}\cos(t).$$

La fonction $\cos$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty([0, 2\pi])$, on a que $h \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi])$ et on a

$$\inf_{t \in [0, 2\pi]} (h(t)) = h(\pi) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Or $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{2}) < \frac{3}{2}$ donc f atteint son minimum dans $\mathring{\mathcal{E}}$ et ce minimum vaut $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{2})$

- (iii) f atteint nécessairement son maximum sur $\partial\mathcal{E}$ puisque le seul point critique de f dans $\mathring{\mathcal{E}}$ est un point de minimum. Étudier le maximum de la fonction f restreinte à $\partial\mathcal{E}$ revient à étudier le maximum de la fonction h . Il se trouve que

$$\sup_{t \in [0, 2\pi]} (h(t)) = h(0) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

et donc $\max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{E}} f(x) = \frac{5}{2}$.