

Équations de transport.

Université Aix-Marseille

Préparation à l'agrégation (Option B)

2019/2020

THOMAS OURMIÈRES-BONAFOS

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Programme de l'agrégation	1
1.2	Modélisation	2
1.2.1	Cas général	2
1.2.2	Propagation d'un nuage de fumée	2
2	Méthode des caractéristiques	3
2.1	Cas d'une vitesse constante	3
2.2	Cas d'une vitesse quelconque	5
3	Analyse numérique des équations de transport	6
3.1	Quelques schémas numériques	6
3.2	Notion de consistance	6
3.3	Stabilité au sens de Von Neumann	7

1 Introduction

Ce document est très largement inspiré de [1].

1.1 Programme de l'agrégation

Extrait du programme de l'agrégation externe 2020 Avant de commencer, on prendra connaissance du programme de l'agrégation externe, qui détaille les notions à maîtriser concernant les équations de transport (voir Figure 1).

- (e) Notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles classiques en dimension un.
Équation de transport (advection) linéaire : méthode des caractéristiques.
Équations des ondes et de la chaleur : résolution par série de FOURIER, transformée de FOURIER et séparation des variables. Aspects qualitatifs élémentaires.
Équations elliptiques, utilisation du théorème de LAX-MILGRAM.
Exemples de discrétisation d'équations aux dérivées partielles en dimension un par la méthode des différences finies : notions de consistance, stabilité, convergence, ordre.

FIGURE 1 – Extrait du programme de l'agrégation 2020 concernant les équations de transport. Disponible à l'url suivante : http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agreg_externes/59/7/p2020_agreg_ext_maths_1107597.pdf

1.2 Modélisation

On va commencer par étudier deux systèmes physiques pour lesquels nous ferons apparaître naturellement des équations dites de transport.

1.2.1 Cas général

On se donne une quantité physique $N(t, x)$ qui constitue le nombre de "particules" au temps t et au point $x \in \mathbb{R}^d$ de notre modèle (nombre de voitures, nombre de particules polluantes dans un nuage de fumée...). On définit alors la densité volumique de particules $\rho(t, x)$ au temps t et la position x .

Exercice 1 (🕒 15 min.) *On va dériver une équation aux dérivées partielles sur $\rho(t, x)$ en utilisant des lois de conservations physiques.*

1. Justifier que le nombre de particules au temps t dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ soit donnée par

$$n_\Omega(t) = \int_\Omega \rho(t, x) dx.$$

2. On se donne un champ de vitesse pour nos particules noté $\vec{V} : (t, x, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$. Justifier que

$$\frac{dn_\Omega}{dt}(t) = - \int_{\partial\Omega} \rho(t, x) \vec{V}(t, x, \rho(t, x)) \cdot \vec{n} ds,$$

où $\vec{n}$ est la normale sortante à Ω .

3. En utilisant le théorème de la divergence, en déduire que ρ satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + \operatorname{div}(\rho \vec{V})(t, x) = 0.$$

4. En déduire que si $\vec{V}$ est constant on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + \vec{V} \cdot \nabla \rho(t, x) = 0.$$

On va maintenant s'intéresser à des cas particuliers en dimension un.

1.2.2 Propagation d'un nuage de fumée

On considère une usine qui émet un nuage de fumée toxique qui va se propager sous l'effet du vent à une maison voisine. On va supposer que la fumée ne peut se propager que le long d'un axe horizontal et on s'intéresse à la concentration de fumée $c(t, x)$ au temps t et au point x . Et on se donne la vitesse du vent au temps t et au point x , notée $v(t, x)$. On suppose que la concentration fumée au temps $t = 0$ est connue et donnée par une fonction $c_0(x)$.

On cherche à établir une équation dictant l'évolution de la concentration de fumée au cours du temps.

Exercice 2 (🕒 15 min.) *Pour établir une équation sur $c(t, x)$, on va effectuer un bilan d'entrée et de sorties dans un intervalle $I_x = [x, x + \delta x]$ entre deux temps t et $t + \delta t$.*

1. Exprimer $n_{I_x}(t)$, la quantité de fumée contenue dans I_x au temps t , à l'aide de la concentration de fumée.
2. On va supposer que la variation de la quantité de fumée dans I_x sur un intervalle de temps $[t, t + \delta t]$ est due à deux phénomènes.
 - (a) Ce premier phénomène est la contribution du vent sur la quantité de fumée présente dans I_x entre t et $t + \delta t$. Expliquer pourquoi la quantité de fumée entrant dans I_x à cause du vent peut s'écrire

$$(v(t, x)c(t, x) - v(t, x + \delta x)c(t, x + \delta x))(\delta t).$$

- (b) Le deuxième phénomène est un phénomène de type diffusion qui, même sans vent, fait que le nuage de fumée s'étale dans l'espace. Montrer que si j est le flux correspondant à ce phénomène alors la variation de la quantité de fumée dans I_x due au phénomène de diffusion est donnée par

$$(j(t, x) - j(t, x + \delta x))(\delta t)$$

3. En déduire une équation aux dérivées partielles satisfaite par c .
4. On suppose désormais le flux j suit une loi de la forme $j(t, x) = -k \frac{\partial c}{\partial x}(t, x)$.
 - (a) Selon vous, de quelles quantités physique peut dépendre ce paramètre $k > 0$?
 - (b) Commenter l'hypothèse faite sur le flux j . Est-ce qu'elle vous rappelle une autre loi bien connue ? Il s'agit ici de la loi dite de Fick.
 - (c) Que devient l'équation aux dérivées partielles satisfaite par c ?
 - (d) Justifier l'appellation d'équation de transport-diffusion.

2 Méthode des caractéristiques

On va s'intéresser à l'existence de solutions $\rho \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ pour une équation de transport unidimensionnelle

$$(\star) : \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial(v\rho)}{\partial x}(t, x) &= f(t, x) \quad \text{pour tout } t \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ \rho(0, x) &= \rho_0(x) \end{cases}$$

où $\rho_0 \in C^1(\mathbb{R})$, $v \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ (la vitesse v peut être fonction du temps t , de la position x et de la densité ρ) et $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ est un terme source.

2.1 Cas d'une vitesse constante

On commence par étudier le cas où $v = v_0$ et $f \equiv 0$. La méthode des caractéristiques consiste à chercher une fonction $x \in C^1(\mathbb{R}_+)$ telle que ρ soit constante le long des trajectoires $\{(t, x(t)) : t \geq 0\}$.

Exercice 3 (🕒 15 min.)

1. On commence par supposer l'existence d'une solution $\rho \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ à $(\star)$.
 - (a) Quelle est la régularité de $\Phi(t) = \rho(t, x(t))$ et quelle équation satisfait-elle ?
 - (b) Quelle condition imposer sur x' pour que Φ soit constante le long des trajectoires $(t, x(t))$?
 - (c) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}_+$ une caractéristique est l'application $X_x^s : t \mapsto x(t)$, qui vérifie $X_x^s(s) = x$. Quel problème de Cauchy vérifie une caractéristique ? Quelles sont-elles ici (les dessiner) ?
 - (d) En déduire que nécessairement $\rho(t, x) = \rho_0(X_x^t(0))$ est solution de $(\star)$. Qu'est-ce que cela signifie pour le modèle ?
 - (e) Si ρ_0 est à support compact, qu'en est-il du support de $\rho(t, \cdot)$ que l'on vient de trouver ? Commenter en terme de modélisation.
2. On va maintenant démontrer l'existence de cette solution. Montrer que $\rho(t, x) := \rho_0(x - v_0 t)$ est solution de $(\star)$.

On déduit de l'Exercice 3 le théorème suivant.

Théorème 1 Soit $\rho_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et $v_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution $\rho \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ de l'équation de transport

$$(\star) : \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + v_0 \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, x) &= 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ \rho(0, x) &= \rho_0(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Elle est donnée pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ par $\rho(t, x) = \rho_0(x - v_0 t)$.

On continue à s'intéresser au cas où $v_0 \in \mathbb{R}$ mais on ne suppose plus que le terme source est nécessairement nul.

Exercice 4 (🕒 20 min)

1. Soit $\rho \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ une solution du système $(\star)$.

(a) Montrer que si X_x^s est une courbe caractéristique pour le système homogène

$$\frac{\partial \rho_h}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \rho_h}{\partial x} = 0$$

alors $\Phi(t) = \rho(t, X_x^s(t))$ vérifie l'équation différentielle

$$\Phi'(t) = f(t, X_x^s(t)).$$

(b) En déduire que

$$\rho(t, x) = \rho_0(x - v_0 t) + \int_0^t f(\sigma, x + (\sigma - t)v_0) d\sigma.$$

2. Pourquoi une telle solution est unique ?

On a donc démontré le théorème suivant.

Théorème 2 Soit $v_0 \in \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et $\rho_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Il existe une unique solution à l'équation de transport

$$(\star\star) : \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + v_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} &= f(t, x) \quad \text{pour tout } t \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ \rho(0, x) &= \rho_0(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Elle est donnée pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ par

$$\rho(t, x) = \rho(t, x) = \rho_0(x - v_0 t) + \int_0^t f(\sigma, x + (\sigma - t)v_0) d\sigma.$$

Intéressons-nous à quelques exemples.

Exercice 5 (🕒 25 min.) En utilisant la méthode des caractéristiques, résoudre les équations de transport suivantes.

1.

$$\begin{cases} 4 \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) - 3 \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, x) &= 0 \\ \rho(0, x) &= x^3. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, x) &= 0 \\ \rho(0, x) &= \sin(x). \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, x) &= \cos(t) \\ \rho(0, x) &= \exp(-x^2). \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, x) &= \exp(x) \\ \rho(0, x) &= 0. \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, x) &= t \exp(x) \\ \rho(0, x) &= 0. \end{cases}$$

Avant de travailler sur le cas d'une vitesse quelconque, on va s'intéresser aux solutions $u \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ de l'équation des ondes

$$(\heartsuit) : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x). \end{cases}$$

Ici, la donnée initiale u_0 est de classe $C^2(\mathbb{R})$, $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et $c > 0$ est une constante.

Exercice 6 (🕒 15 min.) On va chercher des potentielles solutions à l'équation des ondes ($\heartsuit$).

1. Montrer que si $u \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x)$$

2. Étant donnés $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ et $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$, proposer une solution de ($\heartsuit$).

2.2 Cas d'une vitesse quelconque

On ne suppose plus que la vitesse est constante mais on va supposer qu'elle ne dépend que du temps t et de la position x . On a donc $v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et on suppose de plus qu'elle est globalement Lipschitzienne en sa seconde variable (celle de position). On s'intéresse donc à l'existence de solutions $\rho \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ pour une équation de transport uni-dimensionnelle

$$(\star) : \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial(v\rho)}{\partial x}(t, x) &= f(t, x) \quad \text{pour tout } t \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ \rho(0, x) &= \rho_0(x) \end{cases}$$

où $\rho_0 \in C^1(\mathbb{R})$, $v \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ est un terme source.

Exercice 7 (🕒 25 min.) On considère dans un premier temps que le terme source est nul, c'est-à-dire $f \equiv 0$.

1. Montrer que si $\rho \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ est solution de ($\star$) alors pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + v(t, x) \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, x) = - \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) \rho(t, x).$$

2. On va maintenant s'intéresser aux caractéristiques de l'équation ($\star$). Pour $s \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit la caractéristique X_x^s comme l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= v(t, y) \\ y(s) &= x. \end{cases}$$

On fixe alors $s \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$.

- Pourquoi la caractéristique X_x^s est bien définie pour tout temps $t \geq 0$?
 - On suppose que ρ est une solution de ($\star$). Quelle équation vérifie la fonction Φ définie pour $t \geq 0$ par $\Phi(t) = \rho(t, X_x^s(t))$.
 - En déduire l'expression que doit satisfaire ρ .
 - Si ρ_0 est de signe constant, qu'en est-il pour ρ ?
3. Qu'est-ce qui change en présence d'un second membre ? Proposer une caractérisation de la solution dans ce cas là.

Nous n'avons pas démontré ici l'existence d'une telle solution. En revanche, nous avons démontré la proposition suivante dans le cas où le terme source $f \equiv 0$.

Proposition 1 Supposons qu'il existe une solution $\rho \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ à ($\star$), alors cette solution est unique et s'écrit

$$\rho(t, x) = \rho_0(X_x^t(0)) \exp \left(- \int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(s, X_x^t(s)) ds \right).$$

Nous n'allons pas discuter de l'existence de solutions dans un cadre général mais nous concentrer sur des exemples.

Exercice 8 (🕒 10 min.) En utilisant la méthode des caractéristiques, résoudre l'équations de transport suivante. Quelle est la régularité de la solution trouvée ?

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + tx \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, x) &= 0 \\ \rho(0, x) &= x^2. \end{cases}$$

3 Analyse numérique des équations de transport

3.1 Quelques schémas numériques

On ne va s'intéresser qu'à des schémas à pas constants (en temps et en espace). Pour cela, on se donne un pas $\Delta x > 0$ et un pas $\Delta t > 0$ et on considère, pour simplifier, l'équation de transport à vitesse constante $v \in \mathbb{R}$ suivante

$$(\star) : \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + v \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, x) = 0. \quad (1)$$

On aura également besoin d'une condition initiale définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\rho(0, x) = \rho_i(x), \quad \rho_i \in C^1(\mathbb{R}). \quad (2)$$

On se donne un maillage en espace $x_j = j(\Delta x)$ et un maillage en temps $t_n = n(\Delta t)$ pour $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \{0, \dots, N\}$. Le but de l'exercice suivant est d'introduire plusieurs schémas aux différences finies que l'on va étudier pour $(\star)$.

Exercice 9 (🕒 35 min.)

1. Montrer que si $\rho \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ on a pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tels que $x + (\Delta x), x - (\Delta x) \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, x) &= \frac{\rho(t, x + \Delta x) - \rho(t, x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \\ &= \frac{\rho(t, x) - \rho(t, x - \Delta x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \\ &= \frac{\rho(t, x + \Delta x) - \rho(t, x - \Delta x)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x). \end{aligned}$$

2. On va considérer dans un premier temps des schémas numériques d'Euler explicites en temps. Écrire trois schémas aux différences finies que l'on peut déduire de la question précédente.
3. Ils portent les noms de schémas décentré amont, décentré aval et centré. Selon le signe de v , qui est qui ?
4. On suppose que $v > 0$. Pour chacun des schémas précédents, représenter graphiquement l'ensemble des points $(j(\Delta x), n(\Delta t))_{j,n}$ dans le demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Représenter alors le **cône de dépendance numérique** pour un point de cet ensemble. Il s'agit de l'ensemble des points du maillage nécessaire pour calculer l'approximation numérique en (x_j, t_n) fixé. Représenter également les caractéristiques passant en ce point (x_j, t_n) . Quelle condition sur $\Delta t, \Delta x$ et v peut-on imposer pour que les caractéristiques restent dans le **cône de dépendance numérique** pour chacun des schémas ?
5. Reprendre les trois questions précédentes en prenant un schéma d'Euler implicite en temps.

Dans ce qui suit, on va s'intéresser à des schémas qui s'écrivent sous la forme générale suivante :

$$\rho_j^{n+1} = \gamma_{-1}\rho_{j-1}^n + \gamma_0\rho_j^n + \gamma_1\rho_{j+1}^n. \quad (3)$$

Exercice 10 (🕒 15 min.) Montrer que les schémas précédents peuvent s'écrire sous la forme donnée en (3) et expliciter chaque fois qui sont les coefficients γ_k ($k \in \{-1, \dots, 1\}$).

3.2 Notion de consistance

Nous allons maintenant aborder la notion de consistance. Pour cela, on se donne ρ une solution de l'équation de transport (1) associée à la condition initiale (2) et on introduit l'erreur locale de consistance

$$e_j^{n+1} = \rho(t_{n+1}, x_j) - \sum_{k=-1}^1 \gamma_k \rho(t_n, x_{j+k}).$$

Exercice 11 (🕒 20 min.)

1. Pourquoi parle-t-on d'erreur locale pour e_j^n ?
2. On rappelle que le schéma décentré amont s'écrit (lorsque $v > 0$)

$$\rho_j^{n+1} = (1 - \nu)\rho_j^n + \nu\rho_{j-1}^n, \quad \nu = v \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

On suppose que $\rho_0 \in C_0^2(\mathbb{R})$. Montrer que pour ce schéma on a pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \{0, \dots, N\}$:

$$|e_j^n| \leq C(\Delta t^2 + \Delta x^2),$$

pour une constante C uniforme en n et j (mais qui dépend de ρ_0 !). On dit que le schéma est consistant d'ordre 1 en temps et en espace.

3. On rappelle que le schéma centré s'écrit (lorsque $v > 0$)

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{\nu}{2}(\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n), \quad \nu = v \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

On suppose que $\rho_0 \in C_0^3(\mathbb{R})$. Montrer que pour ce schéma on a pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \{0, \dots, N\}$:

$$|e_j^n| \leq C((\Delta t)^2 + (\Delta x)^3),$$

pour une constante C uniforme en n et j (mais qui dépend de ρ_0 !). On dit que le schéma est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

3.3 Stabilité au sens de Von Neumann

La stabilité au sens de Von Neumann a été introduite au laboratoire de Los Alamos aux États-Unis (Nouveau-Mexique). C'est ce que nous allons étudier dans les exercices suivants. On s'intéresse au cas particulier de l'équation de transport (1) avec la condition initiale (2).

Exercice 12 (🕒 15 min.) On s'intéresse à un schéma numérique de la forme (3).

1. Pourquoi peut-on dire que si $\rho_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\hat{\rho}_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a

$$\rho(t_n, x_j) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(t_n, k) e^{2i\pi k x_j} dk \quad ?$$

2. On fixe $k \in \mathbb{R}$ et on note $\hat{\rho}^n$ une approximation de $\hat{\rho}(t_n, k)$ obtenue par la méthode numérique (3). Quelle relation de récurrence doit vérifier formellement $\hat{\rho}^n$?
3. Est-ce que la solution théorique de (1) avec la condition initiale (2) est bornée ? Quelle condition sur $\gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1$ voudriez-vous imposer pour que la solution numérique reste bornée ? Dans quelle norme le serait-elle ? Cette condition est connue sous le nom de condition de stabilité au sens de Lax.

On s'intéresse maintenant au cas du schéma centré.

Exercice 13 (🕒 15 min.) On considère le schéma numérique centré en espace

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}(\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n).$$

1. Montrer que ce schéma est instable au sens de Lax.
2. Qu'en pensez-vous d'un point de vue pratique ?

On considère le schéma décentré amont ($v > 0$).

Exercice 14 (🕒 15 min.) On considère le schéma numérique décentré en espace

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{v\Delta t}{\Delta x}(\rho_j^n - \rho_{j-1}^n).$$

1. Sous quelle condition CFL ce schéma est-il stable ?
2. Qu'en pensez-vous d'un point de vue pratique ?

Exercice 15 (🕒 20 min.) Étude du schéma de Lax-Wendroff On considère le schéma de Lax-Wendroff donné par

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \frac{1}{2}(\rho_{j-1}^n + \rho_{j+1}^n)}{\Delta t} + v \frac{\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n}{2(\Delta x)} = 0$$

1. Tracer le cône de dépendance numérique associé à ce schéma.
2. Étudier la stabilité au sens de Lax du schéma ci-dessus.
3. Quel est son intérêt par rapport au schéma centré ?

Références

- [1] G. Caloz, G. Vial : *Un modèle de propagation d'un nuage de fumée*, page web de Grégory Vial.
- [2] M. Crouzeix, A.L. Mignot : *Analyse Numérique des Équations Différentielles*, Masson.
- [3] H. Queffelec, C.Zuily : *Analyse pour l'agrégation*, Dunod.