COMPORTEMENT EN TEMPS FINI DE LA PROBABILITE DE NOUVEAUTE

G. Decrouez
Higher School of Economics, Faculty of Computer Science
Department of Artificial Intelligence, Moscow

M. Grabchak
University of North Carolina, Department of Mathematics
Charlotte

Q. Paris
Higher School of Economics, Faculty of Economics
Department of Statistics and Data Analysis
& Laboratory of Stochastic Analysis and its Applications
Moscow

Rencontres de Statistiques d'Avignon-Marseille, 24 Juin 2016

Plan

Première partie

Probabilités d’occupation

Cadre – $\mathcal{A} = \{a_k : k \geq 1\}$, $P = \{p_k : k \geq 1\}$ proba sur $\mathcal{A}$ et $(X_n)_{n\geq 1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} P$

But – Décrire la répartition de $(X_n)_{n\geq 1}$ sur le support de P

Probabilités d'occupation – Pour $n \geq 1$ et $a \in \mathcal{A}$,

$$L_n(a) := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_n = a\}$$

Définition. Pour $n \geq 1$ et $0 \leq r \leq n$,

$$M_{n,r} := \mathbb{P}(L_n(X_{n+1}) = r | X_1, \ldots, X_n)$$

Probabilité de nouveauté – $M_{n,0}$

Cadre – $\mathcal{A} = \{a_k : k \geq 1\}$, $P = \{p_k : k \geq 1\}$ proba sur $\mathcal{A}$ et $(X_n)_{n\geq 1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} P$

But – Décrire la répartition de $(X_n)_{n\geq 1}$ sur le support de P

Probabilités d'occupation – Pour $n \geq 1$ et $a \in \mathcal{A}$,

$$L_n(a) := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_n = a\}$$

Définition. Pour $n \geq 1$ et $0 \leq r \leq n$,

$$M_{n,r} := \mathbb{P}(L_n(X_{n+1}) = r | X_1, \ldots, X_n)$$

Probabilité de nouveauté – $M_{n,0}$

Cadre – $\mathcal{A} = \{a_k : k \geq 1\}$, $P = \{p_k : k \geq 1\}$ proba sur $\mathcal{A}$ et $(X_n)_{n\geq 1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} P$

But – Décrire la répartition de $(X_n)_{n\geq 1}$ sur le support de P

Probabilités d'occupation – Pour $n \geq 1$ et $a \in \mathcal{A}$,

$$L_n(a) := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_n = a\}$$

> **Définition.** Pour $n \geq 1$ et $0 \leq r \leq n$,
>
> $$M_{n,r} := \mathbb{P}(L_n(X_{n+1}) = r | X_1, \ldots, X_n)$$

Probabilité de nouveauté – $M_{n,0}$

Cadre – $\mathcal{A} = \{a_k : k \geq 1\}$, $P = \{p_k : k \geq 1\}$ proba sur $\mathcal{A}$ et $(X_n)_{n\geq 1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} P$

But – Décrire la répartition de $(X_n)_{n\geq 1}$ sur le support de P

Probabilités d'occupation – Pour $n \geq 1$ et $a \in \mathcal{A}$,

$$L_n(a) := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_n = a\}$$

Définition. Pour $n \geq 1$ et $0 \leq r \leq n$,

$$M_{n,r} := \mathbb{P}(L_n(X_{n+1}) = r | X_1, \ldots, X_n)$$

Probabilité de nouveauté – $M_{n,0}$

Cadre – $\mathcal{A} = \{a_k : k \geq 1\}$, $P = \{p_k : k \geq 1\}$ proba sur $\mathcal{A}$ et $(X_n)_{n\geq 1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} P$

But – Décrire la répartition de $(X_n)_{n\geq 1}$ sur le support de P

Probabilités d'occupation – Pour $n \geq 1$ et $a \in \mathcal{A}$,

$$L_n(a) := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_n = a\}$$

Définition. Pour $n \geq 1$ et $0 \leq r \leq n$,

$$M_{n,r} := \mathbb{P}(L_n(X_{n+1}) = r | X_1, \ldots, X_n)$$

Probabilité de nouveauté – $M_{n,0}$

Cadre – $\mathcal{A} = \{a_k : k \geq 1\}$, $P = \{p_k : k \geq 1\}$ proba sur $\mathcal{A}$ et $(X_n)_{n\geq 1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} P$

But – Décrire la répartition de $(X_n)_{n\geq 1}$ sur le support de P

Probabilités d'occupation – Pour $n \geq 1$ et $a \in \mathcal{A}$,

$$L_n(a) := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_n = a\}$$

Définition. Pour $n \geq 1$ et $0 \leq r \leq n$,

$$M_{n,r} := \mathbb{P}(L_n(X_{n+1}) = r | X_1, \ldots, X_n)$$

Probabilité de nouveauté – $M_{n,0}$

Ecologie – Good et Toulmin (1950) ; Chao (1981) ; Gandolfi et Sastri (2004)

Genomique – Mao et Lindsay (2002)

Linguistique – Thisted et Efron (1987) ; Chen et Goodman (1999) ; Zhang and Huang (2007)

Théorie de l'information – Orlitsky, Santhanam et Zhang (2004)

Remarque – Pour $n \geq 1$ et $a \in \mathcal{A}$,

$$L_n(a) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_n = a\} \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_k := \frac{L_n(a_k)}{n} \approx p_k$$

Reformulation – Pour $n \geq 1$ et $0 \leq r \leq n$,

$$M_{n,r} = \sum_{k \geq 1} p_k \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\}$$

Probabilité de nouveauté – En particulier,

$$M_{n,0} = \sum_{k \geq 1} p_k \mathbf{1}\{\hat{p}_k = 0\}$$

Remarque – Pour $n \geq 1$ et $a \in \mathcal{A}$,

$$L_n(a) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_n = a\} \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_k := \frac{L_n(a_k)}{n} \approx p_k$$

Reformulation – Pour $n \geq 1$ et $0 \leq r \leq n$,

$$M_{n,r} = \sum_{k \geq 1} p_k \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\}$$

Probabilité de nouveauté – En particulier,

$$M_{n,0} = \sum_{k \geq 1} p_k \mathbf{1}\{\hat{p}_k = 0\}$$

Remarque – Pour $n \geq 1$ et $a \in \mathcal{A}$,

$$L_n(a) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_n = a\} \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_k := \frac{L_n(a_k)}{n} \approx p_k$$

Reformulation – Pour $n \geq 1$ et $0 \leq r \leq n$,

$$M_{n,r} = \sum_{k \geq 1} p_k \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\}$$

Probabilité de nouveauté – En particulier,

$$M_{n,0} = \sum_{k \geq 1} p_k \mathbf{1}\{\hat{p}_k = 0\}$$

Remarque – Pour $n \geq 1$ et $a \in \mathcal{A}$,

$$L_n(a) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_n = a\} \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_k := \frac{L_n(a_k)}{n} \approx p_k$$

Reformulation – Pour $n \geq 1$ et $0 \leq r \leq n$,

$$M_{n,r} = \sum_{k \geq 1} p_k \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\}$$

Probabilité de nouveauté – En particulier,

$$M_{n,0} = \sum_{k \geq 1} p_k \mathbf{1}\{\hat{p}_k = 0\}$$

But – Estimer $M_{n,r}$

Approche naïve – Remplacer p_k par $\hat{p}_k$, i.e.

$$M_{n,r} = \sum_{k\geq 1} p_k \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\} \approx \sum_{k\geq 1} \hat{p}_k \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\} = \frac{r}{n}\sum_{k\geq 1} \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\}$$

$\Rightarrow$ **Problème** : $M_{n,0}$ estimé par 0

Formule de Turing – Good (1955) propose

$$M_{n,r} \approx T_{n,r} := \frac{1+r}{n}\sum_{k\geq 1} \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{1+r}{n}\right\}$$

Remarque : $\mathbb{E}[T_{n,r}] = \mathbb{E}[M_{n-1,r}]$

But – Estimer $M_{n,r}$

Approche naïve – Remplacer p_k par $\hat{p}_k$, i.e.

$$M_{n,r} = \sum_{k \geq 1} p_k \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\} \approx \sum_{k \geq 1} \hat{p}_k \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\} = \frac{r}{n} \sum_{k \geq 1} \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\}$$

$\Rightarrow$ **Problème** : $M_{n,0}$ estimé par 0

Formule de Turing – Good (1955) propose

$$M_{n,r} \approx T_{n,r} := \frac{1+r}{n} \sum_{k \geq 1} \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{1+r}{n}\right\}$$

Remarque : $\mathbb{E}[T_{n,r}] = \mathbb{E}[M_{n-1,r}]$

But – Estimer $M_{n,r}$

Approche naïve – Remplacer p_k par $\hat{p}_k$, i.e.

$$M_{n,r} = \sum_{k\geq 1} p_k \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\} \approx \sum_{k\geq 1} \hat{p}_k \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\} = \frac{r}{n} \sum_{k\geq 1} \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\}$$

$\Rightarrow$ **Problème** : $M_{n,0}$ estimé par 0

Formule de Turing – Good (1955) propose

$$M_{n,r} \approx T_{n,r} := \frac{1+r}{n} \sum_{k\geq 1} \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{1+r}{n}\right\}$$

Remarque : $\mathbb{E}[T_{n,r}] = \mathbb{E}[M_{n-1,r}]$

But – Estimer $M_{n,r}$

Approche naïve – Remplacer p_k par $\hat{p}_k$, i.e.

$$M_{n,r} = \sum_{k \geq 1} p_k \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\} \approx \sum_{k \geq 1} \hat{p}_k \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\} = \frac{r}{n} \sum_{k \geq 1} \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\}$$

$\Rightarrow$ **Problème** : $M_{n,0}$ estimé par 0

Formule de Turing – Good (1955) propose

$$M_{n,r} \approx T_{n,r} := \frac{1+r}{n} \sum_{k \geq 1} \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{1+r}{n}\right\}$$

Remarque : $\mathbb{E}[T_{n,r}] = \mathbb{E}[M_{n-1,r}]$

But – Estimer $M_{n,r}$

Approche naïve – Remplacer p_k par $\hat{p}_k$, i.e.

$$M_{n,r} = \sum_{k\geq 1} p_k \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\} \approx \sum_{k\geq 1} \hat{p}_k \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\} = \frac{r}{n}\sum_{k\geq 1} \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\}$$

$\Rightarrow$ **Problème** : $M_{n,0}$ estimé par 0

Formule de Turing – Good (1955) propose

$$M_{n,r} \approx T_{n,r} := \frac{1+r}{n}\sum_{k\geq 1} \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{1+r}{n}\right\}$$

Remarque : $\mathbb{E}[T_{n,r}] = \mathbb{E}[M_{n-1,r}]$

But – Estimer $M_{n,r}$

Approche naïve – Remplacer p_k par $\hat{p}_k$, i.e.

$$M_{n,r} = \sum_{k\geq 1} p_k \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\} \approx \sum_{k\geq 1} \hat{p}_k \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\} = \frac{r}{n} \sum_{k\geq 1} \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{r}{n}\right\}$$

$\Rightarrow$ **Problème** : $M_{n,0}$ estimé par 0

Formule de Turing – Good (1955) propose

$$M_{n,r} \approx T_{n,r} := \frac{1+r}{n} \sum_{k\geq 1} \mathbf{1}\left\{\hat{p}_k = \frac{1+r}{n}\right\}$$

Remarque : $\mathbb{E}[T_{n,r}] = \mathbb{E}[M_{n-1,r}]$

Consistance – Attention : $M_{n,r} \to 0$ et $T_{n,r} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$

Théorème. (Ohannessian et Dahleh, 2012) Pour tout $r \geq 0$ fixé,

$$\frac{T_{n,r}}{M_{n,r}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \quad \text{p.s.}$$

si P est à variation régulière d'indice $\alpha \in (0,1)$

Problème – Pas de vitesses disponibles

Consistance – Attention : $M_{n,r} \to 0$ et $T_{n,r} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$

Théorème. (Ohannessian et Dahleh, 2012) Pour tout $r \geq 0$ fixé,

$$\frac{T_{n,r}}{M_{n,r}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1, \quad \text{p.s.}$$

si P est à variation régulière d'indice $\alpha \in (0, 1)$

Problème – Pas de vitesses disponibles

Consistance – Attention : $M_{n,r} \to 0$ et $T_{n,r} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$

Théorème. (Ohannessian et Dahleh, 2012) Pour tout $r \geq 0$ fixé,

$$\frac{T_{n,r}}{M_{n,r}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1, \quad \text{p.s.}$$

si P est à variation régulière d'indice $\alpha \in (0, 1)$

Problème – Pas de vitesses disponibles

Consistance – Attention : $M_{n,r} \to 0$ et $T_{n,r} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$

Théorème. (Ohannessian et Dahleh, 2012) Pour tout $r \geq 0$ fixé,

$$\frac{T_{n,r}}{M_{n,r}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \quad \text{p.s.}$$

si P est à variation régulière d'indice $\alpha \in (0,1)$

Problème – Pas de vitesses disponibles

Deuxième partie

Concentration et comportement asymptotique

Contributions – Pour la probabilité de nouveauté : McAllester et Ortiz (2003), Ohannessian et Dahleh (2012). Pour les probabilités d'occupation : Ben-Hamou, Boucheron et Ohannessian (2015).

Théorème. (McAllester et Ortiz, 2003) Pour tout $t > 0$ et tout $n \geq 1$, chacune des deux inégalités

$$\mathbb{E}M_{n,0} - \sqrt{\frac{2t}{ne}} \leq M_{n,0} \quad \text{et} \quad M_{n,0} \leq \mathbb{E}M_{n,0} + \sqrt{\frac{3t}{n}}$$

a lieu avec probabilité au moins $1 - e^{-t}$.

Outil important – Association négative des variables aléatoires $\hat{p}_k$, $k \geq 1$ (Dubhashi et Ranjan, 1998).

Contributions – Pour la probabilité de nouveauté : McAllester et Ortiz (2003), Ohannessian et Dahleh (2012). Pour les probabilités d'occupation : Ben-Hamou, Boucheron et Ohannessian (2015).

Théorème. (McAllester et Ortiz, 2003) Pour tout $t > 0$ et tout $n \geq 1$, chacune des deux inégalités

$$\mathbb{E}M_{n,0} - \sqrt{\frac{2t}{ne}} \leq M_{n,0} \quad \text{et} \quad M_{n,0} \leq \mathbb{E}M_{n,0} + \sqrt{\frac{3t}{n}}$$

a lieu avec probabilité au moins $1 - e^{-t}$.

Outil important – Association négative des variables aléatoires $\hat{p}_k$, $k \geq 1$ (Dubhashi et Ranjan, 1998).

Contributions – Pour la probabilité de nouveauté : McAllester et Ortiz (2003), Ohannessian et Dahleh (2012). Pour les probabilités d'occupation : Ben-Hamou, Boucheron et Ohannessian (2015).

Théorème. (McAllester et Ortiz, 2003) Pour tout $t > 0$ et tout $n \geq 1$, chacune des deux inégalités

$$\mathbb{E}M_{n,0} - \sqrt{\frac{2t}{ne}} \leq M_{n,0} \quad \text{et} \quad M_{n,0} \leq \mathbb{E}M_{n,0} + \sqrt{\frac{3t}{n}}$$

a lieu avec probabilité au moins $1 - e^{-t}$.

Outil important – Association négative des variables aléatoires $\hat{p}_k$, $k \geq 1$ (Dubhashi et Ranjan, 1998).

Contributions – Pour la probabilité de nouveauté : McAllester et Ortiz (2003), Ohannessian et Dahleh (2012). Pour les probabilités d'occupation : Ben-Hamou, Boucheron et Ohannessian (2015).

Théorème. (McAllester et Ortiz, 2003) Pour tout $t > 0$ et tout $n \geq 1$, chacune des deux inégalités

$$\mathbb{E}M_{n,0} - \sqrt{\frac{2t}{ne}} \leq M_{n,0} \quad \text{et} \quad M_{n,0} \leq \mathbb{E}M_{n,0} + \sqrt{\frac{3t}{n}}$$

a lieu avec probabilité au moins $1 - e^{-t}$.

Outil important – Association négative des variables aléatoires $\hat{p}_k$, $k \geq 1$ (Dubhashi et Ranjan, 1998).

Fonction de comptage – $P = \{p_k : k \geq 1\}$. On définit sa mesure de comptage ν sur $[0,1]$ par

$$\nu(\mathrm{d}x) = \sum_{k \geq 1} \delta_{p_k}(\mathrm{d}x)$$

Définition. On définit la fonction de comptage $\overrightarrow{\nu} : [0,1] \to \mathbb{N}$ de P par

$$\overrightarrow{\nu}(\varepsilon) = \nu([\varepsilon, 1]) = |\{k : p_k \geq \varepsilon\}|$$

Propriétés – Pour tour $\varepsilon \in (0,1]$, $\varepsilon \overrightarrow{\nu}(\varepsilon) \leq 1$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \overrightarrow{\nu}(\varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \overrightarrow{\nu}(\varepsilon) \mathrm{d}\varepsilon \leq 1$$

Fonction de comptage – $P = \{p_k : k \geq 1\}$. On définit sa mesure de comptage ν sur $[0, 1]$ par

$$\nu(\mathrm{d}x) = \sum_{k \geq 1} \delta_{p_k}(\mathrm{d}x)$$

Définition. On définit la fonction de comptage $\vec{\nu} : [0,1] \to \mathbb{N}$ de P par

$$\vec{\nu}(\varepsilon) = \nu([\varepsilon, 1]) = |\{k : p_k \geq \varepsilon\}|$$

Propriétés – Pour tour $\varepsilon \in (0, 1]$, $\varepsilon \vec{\nu}(\varepsilon) \leq 1$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \vec{\nu}(\varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \vec{\nu}(\varepsilon) \mathrm{d}\varepsilon \leq 1$$

Fonction de comptage – $P = \{p_k : k \geq 1\}$. On définit sa mesure de comptage ν sur $[0,1]$ par

$$\nu(\mathrm{d}x) = \sum_{k \geq 1} \delta_{p_k}(\mathrm{d}x)$$

Définition. On définit la fonction de comptage $\overrightarrow{\nu} : [0,1] \to \mathbb{N}$ de P par

$$\overrightarrow{\nu}(\varepsilon) = \nu([\varepsilon, 1]) = |\{k : p_k \geq \varepsilon\}|$$

Propriétés – Pour tour $\varepsilon \in (0,1]$, $\varepsilon \overrightarrow{\nu}(\varepsilon) \leq 1$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \overrightarrow{\nu}(\varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \overrightarrow{\nu}(\varepsilon) \mathrm{d}\varepsilon \leq 1$$

Fonction de comptage – $P = \{p_k : k \geq 1\}$. On définit sa mesure de comptage ν sur $[0,1]$ par

$$\nu(\mathrm{d}x) = \sum_{k \geq 1} \delta_{p_k}(\mathrm{d}x)$$

Définition. On définit la fonction de comptage $\overrightarrow{\nu} : [0,1] \to \mathbb{N}$ de P par

$$\overrightarrow{\nu}(\varepsilon) = \nu([\varepsilon, 1]) = |\{k : p_k \geq \varepsilon\}|$$

Propriétés – Pour tour $\varepsilon \in (0,1]$, $\varepsilon \overrightarrow{\nu}(\varepsilon) \leq 1$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \overrightarrow{\nu}(\varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \overrightarrow{\nu}(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon \leq 1$$

Variation régulière – (Karamata, 1933 ; Karlin, 1967)

Définition. On dit que $P = \{p_k : k \geq 1\}$ est à variation regulière de paramètre $\alpha \in [0,1]$ – et on note $P \in RV(\alpha)$ – si

$$\vec{\nu}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0+}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{où} \quad \forall \lambda > 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{\ell(\lambda x)}{\ell(x)} = 1.$$

$\alpha = 0 \to$ Variation lente ; $\alpha = 1 \to$ Variation rapide.

Exemples

Loi à support fini, loi géométrique : $\to RV(0)$
Loi puissance ($p_k \propto k^{-1/\alpha} |\log k|^{-\beta}$, $\alpha \in (0,1)$) $\to RV(\alpha)$
Loi puissance ($p_k \propto k^{-1} |\log k|^{-\beta}$, $\beta > 1$) $\to RV(1)$

Variation régulière – (Karamata, 1933 ; Karlin, 1967)

Définition. On dit que $P = \{p_k : k \geq 1\}$ est à variation regulière de paramètre $\alpha \in [0, 1]$ – et on note $P \in RV(\alpha)$ – si

$$\vec{\nu}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0+}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{où} \quad \forall \lambda > 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{\ell(\lambda x)}{\ell(x)} = 1.$$

$\alpha = 0 \to$ Variation lente ; $\alpha = 1 \to$ Variation rapide.

Exemples

Loi à support fini, loi géométrique : $\to RV(0)$
Loi puissance ($p_k \propto k^{-1/\alpha} |\log k|^{-\beta}$, $\alpha \in (0, 1)$) $\to RV(\alpha)$
Loi puissance ($p_k \propto k^{-1} |\log k|^{-\beta}$, $\beta > 1$) $\to RV(1)$

Variation régulière – (Karamata, 1933 ; Karlin, 1967)

Définition. On dit que $P = \{p_k : k \geq 1\}$ est à variation regulière de paramètre $\alpha \in [0,1]$ – et on note $P \in RV(\alpha)$ – si

$$\vec{\nu}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0+}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{où} \quad \forall \lambda > 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{\ell(\lambda x)}{\ell(x)} = 1.$$

$\alpha = 0 \to$ Variation lente ; $\alpha = 1 \to$ Variation rapide.

Exemples

Loi à support fini, loi géométrique : $\to RV(0)$
Loi puissance ($p_k \propto k^{-1/\alpha} |\log k|^{-\beta}$, $\alpha \in (0,1)$) $\to RV(\alpha)$
Loi puissance ($p_k \propto k^{-1} |\log k|^{-\beta}$, $\beta > 1$) $\to RV(1)$

Variation régulière – (Karamata, 1933 ; Karlin, 1967)

Définition. On dit que $P = \{p_k : k \geq 1\}$ est à variation regulière de paramètre $\alpha \in [0,1]$ – et on note $P \in RV(\alpha)$ – si

$$\vec{\nu}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0+}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{où} \quad \forall \lambda > 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{\ell(\lambda x)}{\ell(x)} = 1.$$

$\alpha = 0 \to$ Variation lente ; $\alpha = 1 \to$ Variation rapide.

Exemples

Loi à support fini, loi géométrique : $\to RV(0)$
Loi puissance ($p_k \propto k^{-1/\alpha} |\log k|^{-\beta}$, $\alpha \in (0,1)$) $\to RV(\alpha)$
Loi puissance ($p_k \propto k^{-1} |\log k|^{-\beta}$, $\beta > 1$) $\to RV(1)$

Variation régulière – (Karamata, 1933 ; Karlin, 1967)

Définition. On dit que $P = \{p_k : k \geq 1\}$ est à variation regulière de paramètre $\alpha \in [0,1]$ – et on note $P \in RV(\alpha)$ – si

$$\vec{\nu}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0+}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{où} \quad \forall \lambda > 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{\ell(\lambda x)}{\ell(x)} = 1.$$

$\alpha = 0 \to$ Variation lente ; $\alpha = 1 \to$ Variation rapide.

Exemples

Loi à support fini, loi géométrique : $\to RV(0)$

Loi puissance ($p_k \propto k^{-1/\alpha} |\log k|^{-\beta}$, $\alpha \in (0,1)$) $\to RV(\alpha)$

Loi puissance ($p_k \propto k^{-1} |\log k|^{-\beta}$, $\beta > 1$) $\to RV(1)$

Variation régulière – (Karamata, 1933 ; Karlin, 1967)

Définition. On dit que $P = \{p_k : k \geq 1\}$ est à variation regulière de paramètre $\alpha \in [0,1]$ – et on note $P \in RV(\alpha)$ – si

$$\vec{\nu}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0+}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{où} \quad \forall \lambda > 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{\ell(\lambda x)}{\ell(x)} = 1.$$

$\alpha = 0 \to$ Variation lente ; $\alpha = 1 \to$ Variation rapide.

Exemples

Loi à support fini, loi géométrique : $\to RV(0)$
Loi puissance ($p_k \propto k^{-1/\alpha} |\log k|^{-\beta}$, $\alpha \in (0,1)$) $\to RV(\alpha)$
Loi puissance ($p_k \propto k^{-1} |\log k|^{-\beta}$, $\beta > 1$) $\to RV(1)$

Variation régulière – (Karamata, 1933 ; Karlin, 1967)

Définition. On dit que $P = \{p_k : k \geq 1\}$ est à variation regulière de paramètre $\alpha \in [0,1]$ – et on note $P \in RV(\alpha)$ – si

$$\vec{\nu}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0+}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{où} \quad \forall \lambda > 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{\ell(\lambda x)}{\ell(x)} = 1.$$

$\alpha = 0 \to$ Variation lente ; $\alpha = 1 \to$ Variation rapide.

Exemples

Loi à support fini, loi géométrique : $\to RV(0)$
Loi puissance $(p_k \propto k^{-1/\alpha} |\log k|^{-\beta}, \alpha \in (0,1)) \to RV(\alpha)$
Loi puissance $(p_k \propto k^{-1} |\log k|^{-\beta}, \beta > 1) \to RV(1)$

Comportement asymptotique – (Ohannessian et Dahleh, 2012)

Théorème. Pour tout $r \geq 0$,

$$\vec{\nu}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0+}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \Rightarrow \quad M_{n,r} \underset{p.s.}{\sim} \mathbb{E} M_{n,r} \sim \frac{\alpha \Gamma(1+r-\alpha)}{r!} \frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}},$$

quand $n \to +\infty$.

Question – Si $\vec{\nu}(\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, peut-on obtenir une borne explicite du type

$$\mathbb{E} M_{n,r} \lesssim \frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}},$$

valable pour tout $n \geq 1$?

Comportement asymptotique – (Ohannessian et Dahleh, 2012)

Théorème. Pour tout $r \geq 0$,

$$\vec{\nu}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0+}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \Rightarrow \quad M_{n,r} \underset{p.s.}{\sim} \mathbb{E} M_{n,r} \sim \frac{\alpha \Gamma(1+r-\alpha)}{r!} \frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}},$$

quand $n \to +\infty$.

Question – Si $\vec{\nu}(\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, peut-on obtenir une borne explicite du type

$$\mathbb{E} M_{n,r} \lesssim \frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}},$$

valable pour tout $n \geq 1$?

Comportement asymptotique – (Ohannessian et Dahleh, 2012)

Théorème. Pour tout $r \geq 0$,

$$\vec{\nu}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0+}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \Rightarrow \quad M_{n,r} \underset{p.s.}{\sim} \mathbb{E} M_{n,r} \sim \frac{\alpha \Gamma(1+r-\alpha)}{r!} \frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}},$$

quand $n \to +\infty$.

Question – Si $\vec{\nu}(\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, peut-on obtenir une borne explicite du type

$$\mathbb{E} M_{n,r} \lesssim \frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}},$$

valable pour tout $n \geq 1$?

Comportement asymptotique – (Ohannessian et Dahleh, 2012)

Théorème. Pour tout $r \geq 0$,

$$\vec{\nu}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0+}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \Rightarrow \quad M_{n,r} \underset{p.s.}{\sim} \mathbb{E} M_{n,r} \sim \frac{\alpha \Gamma(1+r-\alpha)}{r!} \frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}},$$

quand $n \to +\infty$.

Question – Si $\vec{\nu}(\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, peut-on obtenir une borne explicite du type

$$\mathbb{E} M_{n,r} \lesssim \frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}},$$

valable pour tout $n \geq 1$?

Troisième partie

Bornes en temps fini

$$c(r) = \begin{cases} e^{-1} & \text{si} \quad r = 0, \\ \frac{(1+r)^{2+r}}{r!} e^{-\frac{1+r}{2}} & \text{si} \quad r \geq 1. \end{cases}$$

Théorème. (Decrouez, Grabchak et P.) Pour tous $n \geq 1$ et $0 \leq r \leq n-1$,

$$\mathbb{E} M_{n,r} \leq \inf_{\varepsilon} \left\{ \varphi^{+}_{n,r}(\varepsilon) + \psi^{+}_{n,r}(\varepsilon) \right\},$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi^{+}_{n,r}(\varepsilon) &= \frac{c(r)\overrightarrow{\nu}(\varepsilon)}{n}, \\ \psi^{+}_{n,r}(\varepsilon) &= 2^{1+r} \binom{n}{r} \int_0^{\varepsilon} \overrightarrow{\nu}\left(\frac{u}{2}\right) u^r \left(1 - \frac{u}{2}\right)^{n-r} \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

$$c(r) = \begin{cases} e^{-1} & \text{si} \quad r = 0, \\ \frac{(1+r)^{2+r}}{r!} e^{-\frac{1+r}{2}} & \text{si} \quad r \geq 1. \end{cases}$$

Théorème. (Decrouez, Grabchak et P.) Pour tous $n \geq 1$ et $0 \leq r \leq n-1$,

$$\mathbb{E} M_{n,r} \leq \inf_{\varepsilon} \left\{ \varphi^{+}_{n,r}(\varepsilon) + \psi^{+}_{n,r}(\varepsilon) \right\},$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi^{+}_{n,r}(\varepsilon) &= \frac{c(r)\overrightarrow{\nu}(\varepsilon)}{n}, \\ \psi^{+}_{n,r}(\varepsilon) &= 2^{1+r} \binom{n}{r} \int_0^{\varepsilon} \overrightarrow{\nu}\left(\frac{u}{2}\right) u^r \left(1 - \frac{u}{2}\right)^{n-r} \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

$$c(r) = \begin{cases} e^{-1} & \text{si} \quad r = 0, \\ \frac{(1+r)^{2+r}}{r!} e^{-\frac{1+r}{2}} & \text{si} \quad r \geq 1. \end{cases}$$

Théorème. (Decrouez, Grabchak et P.) Pour tous $n \geq 1$ et $0 \leq r \leq n-1$,

$$\mathbb{E} M_{n,r} \leq \inf_{\varepsilon} \left\{ \varphi_{n,r}^{+}(\varepsilon) + \psi_{n,r}^{+}(\varepsilon) \right\},$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi_{n,r}^{+}(\varepsilon) &= \frac{c(r)\vec{\nu}(\varepsilon)}{n}, \\ \psi_{n,r}^{+}(\varepsilon) &= 2^{1+r} \binom{n}{r} \int_0^{\varepsilon} \vec{\nu}\left(\frac{u}{2}\right) u^r \left(1 - \frac{u}{2}\right)^{n-r} \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Support fini – Si le support S de P est fini, alors pour tout $0 \leq r \leq n-1$,

$$\mathbb{E}M_{n,r} \leq \frac{c(r)|S|}{n}$$

$\Rightarrow$ Vitesse optimale puisque $P \in RV(0)$

Concernant $M_{n,0}$ – On obtient, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}M_{n,0} \leq \inf_{\varepsilon} \left\{ \frac{\overrightarrow{\nu}(\varepsilon)}{en} + 2\int_0^{\varepsilon} \overrightarrow{\nu}\left(\frac{u}{2}\right)\left(1-\frac{u}{2}\right)^n \mathrm{d}u \right\}$$

Support fini – Si le support S de P est fini, alors pour tout $0 \leq r \leq n-1$,

$$\mathbb{E}M_{n,r} \leq \frac{c(r)|S|}{n}$$

$\Rightarrow$ Vitesse optimale puisque $P \in RV(0)$

Concernant $M_{n,0}$ – On obtient, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}M_{n,0} \leq \inf_{\varepsilon} \left\{ \frac{\vec{\nu}(\varepsilon)}{en} + 2 \int_0^{\varepsilon} \vec{\nu}\left(\frac{u}{2}\right) \left(1 - \frac{u}{2}\right)^n \mathrm{d}u \right\}$$

Support fini – Si le support S de P est fini, alors pour tout $0 \leq r \leq n-1$,

$$\mathbb{E}M_{n,r} \leq \frac{c(r)|S|}{n}$$

$\Rightarrow$ Vitesse optimale puisque $P \in RV(0)$

Concernant $M_{n,0}$ – On obtient, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}M_{n,0} \leq \inf_{\varepsilon} \left\{ \frac{\vec{\nu}(\varepsilon)}{en} + 2\int_0^{\varepsilon} \vec{\nu}\left(\frac{u}{2}\right)\left(1-\frac{u}{2}\right)^n \mathrm{d}u \right\}$$

Support fini – Si le support S de P est fini, alors pour tout $0 \leq r \leq n-1$,

$$\mathbb{E}M_{n,r} \leq \frac{c(r)|S|}{n}$$

$\Rightarrow$ Vitesse optimale puisque $P \in RV(0)$

Concernant $M_{n,0}$ – On obtient, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}M_{n,0} \leq \inf_{\varepsilon} \left\{ \frac{\vec{\nu}(\varepsilon)}{en} + 2\int_0^{\varepsilon} \vec{\nu}\left(\frac{u}{2}\right)\left(1-\frac{u}{2}\right)^n \mathrm{d}u \right\}$$

Rappel : $\overrightarrow{\nu}(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0+}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \Rightarrow \mathbb{E}M_{n,r} \sim \frac{\alpha\Gamma(1+r-\alpha)}{r!}\frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}}$

Corollaire. (Decrouez, Grabchak et P.)

$$\overrightarrow{\nu}(\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}M_{n,r} \leq c(\alpha, r)\,\frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}},$$

où

$$c(\alpha, r) = c(r) + \frac{4^{1+r}}{r!}(1+r)^{1+r-\alpha}\int_0^{1/2} u^{r-\alpha}e^{-u}\mathrm{d}u$$

En particulier

$$\mathbb{E}M_{n,0} \leq \left\{\frac{1}{e} + 4\int_0^{1/2} u^{-\alpha}e^{-u}\mathrm{d}u\right\}\frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}}$$

Rappel : $\vec{\nu}(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0+}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \Rightarrow \mathbb{E}M_{n,r} \sim \frac{\alpha\Gamma(1+r-\alpha)}{r!}\frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}}$

Corollaire. (Decrouez, Grabchak et P.)

$$\vec{\nu}(\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}M_{n,r} \leq c(\alpha, r)\,\frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}},$$

où

$$c(\alpha, r) = c(r) + \frac{4^{1+r}}{r!}(1+r)^{1+r-\alpha}\int_0^{1/2} u^{r-\alpha}e^{-u}\mathrm{d}u$$

En particulier

$$\mathbb{E}M_{n,0} \leq \left\{\frac{1}{e} + 4\int_0^{1/2} u^{-\alpha}e^{-u}\mathrm{d}u\right\}\frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}}$$

Rappel : $\vec{\nu}(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0+}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \Rightarrow \mathbb{E}M_{n,r} \sim \frac{\alpha\Gamma(1+r-\alpha)}{r!}\frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}}$

Corollaire. (Decrouez, Grabchak et P.)

$$\vec{\nu}(\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}M_{n,r} \leq c(\alpha, r)\,\frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}},$$

où

$$c(\alpha, r) = c(r) + \frac{4^{1+r}}{r!}(1+r)^{1+r-\alpha}\int_0^{1/2} u^{r-\alpha}e^{-u}\mathrm{d}u$$

En particulier

$$\mathbb{E}M_{n,0} \leq \left\{\frac{1}{e} + 4\int_0^{1/2} u^{-\alpha}e^{-u}\mathrm{d}u\right\}\frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}}$$

Rappel : $\overrightarrow{\nu}(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0+}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \;\Rightarrow\; \mathbb{E}M_{n,r} \sim \frac{\alpha\Gamma(1+r-\alpha)}{r!}\frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}}$

Corollaire. (Decrouez, Grabchak et P.)

$$\overrightarrow{\nu}(\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}M_{n,r} \leq c(\alpha,r)\,\frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}},$$

où

$$c(\alpha,r) = c(r) + \frac{4^{1+r}}{r!}(1+r)^{1+r-\alpha}\int_0^{1/2} u^{r-\alpha}e^{-u}\mathrm{d}u$$

En particulier

$$\mathbb{E}M_{n,0} \leq \left\{\frac{1}{e} + 4\int_0^{1/2} u^{-\alpha}e^{-u}\mathrm{d}u\right\}\frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}}$$

Limite de couche – On pose

$$\kappa_-^0 = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup_{u \in (0,\varepsilon]} \frac{\vec{\nu}(u)}{\vec{\nu}(u/2)}.$$

Remarque : $\kappa_-^0 \in [0,1]$ et si $P \in RV(\alpha)$ alors $\kappa_-^0 = 2^{-\alpha}$.

Corollaire. (Decrouez, Grabchak et P.)

$$\vec{\nu}(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E} M_{n,0} \geq \left(\frac{1-\kappa_-^0}{8e}\right) \frac{\gamma(1-\alpha,2)}{2^{1-\alpha}} \frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}},$$

si ℓ est croissante.

Limite de couche – On pose

$$\kappa_-^0 = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup_{u \in (0,\varepsilon]} \frac{\overrightarrow{\nu}(u)}{\overrightarrow{\nu}(u/2)}.$$

Remarque : $\kappa_-^0 \in [0,1]$ et si $P \in RV(\alpha)$ alors $\kappa_-^0 = 2^{-\alpha}$.

Corollaire. (Decrouez, Grabchak et P.)

$$\overrightarrow{\nu}(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}M_{n,0} \geq \left(\frac{1-\kappa_-^0}{8e}\right) \frac{\gamma(1-\alpha,2)}{2^{1-\alpha}} \frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}},$$

si ℓ est croissante.

Limite de couche – On pose

$$\kappa_-^0 = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup_{u \in (0,\varepsilon]} \frac{\overrightarrow{\nu}(u)}{\overrightarrow{\nu}(u/2)}.$$

Remarque : $\kappa_-^0 \in [0,1]$ et si $P \in RV(\alpha)$ alors $\kappa_-^0 = 2^{-\alpha}$.

Corollaire. (Decrouez, Grabchak et P.)

$$\overrightarrow{\nu}(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E} M_{n,0} \geq \left(\frac{1-\kappa_-^0}{8e}\right) \frac{\gamma(1-\alpha,2)}{2^{1-\alpha}} \frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}},$$

si ℓ est croissante.

Limite de couche – On pose

$$\kappa_-^0 = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup_{u \in (0,\varepsilon]} \frac{\vec{\nu}(u)}{\vec{\nu}(u/2)}.$$

Remarque : $\kappa_-^0 \in [0,1]$ et si $P \in RV(\alpha)$ alors $\kappa_-^0 = 2^{-\alpha}$.

Corollaire. (Decrouez, Grabchak et P.)

$$\vec{\nu}(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \ell\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E} M_{n,0} \geq \left(\frac{1-\kappa_-^0}{8e}\right) \frac{\gamma(1-\alpha,2)}{2^{1-\alpha}} \frac{\ell(n)}{n^{1-\alpha}},$$

si ℓ est croissante.

Quatrième partie

Extension au cas non discret

Cadre – (E, d), P proba sur E et $(X_n)_{n\geq 1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} P$

Probabilités d'occupation – Pour $\delta > 0$, $n \geq 1$ et $x \in E$,

$$L_n^\delta(x) := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_n \in B(x, \delta)\}$$

Définition. (Decrouez, Grabchak et P.) Pour $n \geq 1$ et $0 \leq r \leq n$,

$$M_{n,r}^\delta := \mathbb{P}(L_n^\delta(X_{n+1}) = r | X_1, \ldots, X_n) = \int_E \mathbf{1}\{L_n^\delta(x) = r\} P(\mathrm{d}x)$$

Remarque – Si le support de P est au plus dénombrable,

$$M_{n,r}^\delta \xrightarrow[\delta \to 0+]{} M_{n,r}$$

Cadre – (E, d), P proba sur E et $(X_n)_{n\geq 1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} P$

Probabilités d'occupation – Pour $\delta > 0$, $n \geq 1$ et $x \in E$,

$$L_n^{\delta}(x) := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_n \in B(x, \delta)\}$$

> **Définition.** (Decrouez, Grabchak et P.) Pour $n \geq 1$ et $0 \leq r \leq n$,
>
> $$M_{n,r}^{\delta} := \mathbb{P}(L_n^{\delta}(X_{n+1}) = r | X_1, \dots, X_n) = \int_E \mathbf{1}\{L_n^{\delta}(x) = r\} P(\mathrm{d}x)$$

Remarque – Si le support de P est au plus dénombrable,

$$M_{n,r}^{\delta} \xrightarrow[\delta \to 0+]{} M_{n,r}$$

Cadre – (E, d), P proba sur E et $(X_n)_{n\geq 1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} P$

Probabilités d'occupation – Pour $\delta > 0$, $n \geq 1$ et $x \in E$,

$$L_n^{\delta}(x) := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_n \in B(x, \delta)\}$$

Définition. (Decrouez, Grabchak et P.) Pour $n \geq 1$ et $0 \leq r \leq n$,

$$M_{n,r}^{\delta} := \mathbb{P}(L_n^{\delta}(X_{n+1}) = r | X_1, \ldots, X_n) = \int_E \mathbf{1}\{L_n^{\delta}(x) = r\} P(\mathrm{d}x)$$

Remarque – Si le support de P est au plus dénombrable,

$$M_{n,r}^{\delta} \xrightarrow[\delta \to 0+]{} M_{n,r}$$

Cadre – (E, d), P proba sur E et $(X_n)_{n\geq 1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} P$

Probabilités d'occupation – Pour $\delta > 0$, $n \geq 1$ et $x \in E$,

$$L_n^{\delta}(x) := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_n \in B(x, \delta)\}$$

Définition. (Decrouez, Grabchak et P.) Pour $n \geq 1$ et $0 \leq r \leq n$,

$$M_{n,r}^{\delta} := \mathbb{P}(L_n^{\delta}(X_{n+1}) = r | X_1, \ldots, X_n) = \int_E \mathbf{1}\{L_n^{\delta}(x) = r\} P(\mathrm{d}x)$$

Remarque – Si le support de P est au plus dénombrable,

$$M_{n,r}^{\delta} \xrightarrow[\delta \to 0+]{} M_{n,r}$$

Cadre – (E, d), P proba sur E et $(X_n)_{n\geq 1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} P$

Probabilités d'occupation – Pour $\delta > 0$, $n \geq 1$ et $x \in E$,

$$L_n^{\delta}(x) := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_n \in B(x, \delta)\}$$

Définition. (Decrouez, Grabchak et P.) Pour $n \geq 1$ et $0 \leq r \leq n$,

$$M_{n,r}^{\delta} := \mathbb{P}(L_n^{\delta}(X_{n+1}) = r | X_1, \ldots, X_n) = \int_E \mathbf{1}\{L_n^{\delta}(x) = r\} P(\mathrm{d}x)$$

Remarque – Si le support de P est au plus dénombrable,

$$M_{n,r}^{\delta} \underset{\delta \to 0+}{\longrightarrow} M_{n,r}$$

Notations – Pour $x \in E$,

$$\tau_x(t) := 1 - P(B(x,t)) \quad \text{et} \quad N_x(t) = N\left(\frac{\delta}{2}, B(x,t)\right),$$

$N(u, A)$: nombre minimal de boules de rayon u dans E nécessaires pour recouvrir $A \subset E$.

Résultat – Pour tout $\delta > 0$ et $n \geq 1$,

$$\mathbb{E} M_{n,0}^{\delta} \leq \inf_{x,t} \left\{ \tau_x(t) + \frac{N_x(t)}{en} \right\}$$

Problème – Ne s'adapte pas au cas $r \geq 1$; Dépend de la géométrie du support de P.

Notations – Pour $x \in E$,

$$\tau_x(t) := 1 - P(B(x,t)) \quad \text{et} \quad N_x(t) = N\left(\frac{\delta}{2}, B(x,t)\right),$$

$N(u, A)$: nombre minimal de boules de rayon u dans E nécessaires pour recouvrir $A \subset E$.

Résultat – Pour tout $\delta > 0$ et $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}M_{n,0}^{\delta} \leq \inf_{x,t} \left\{ \tau_x(t) + \frac{N_x(t)}{en} \right\}$$

Problème – Ne s'adapte pas au cas $r \geq 1$; Dépend de la géométrie du support de P.

Notations – Pour $x \in E$,

$$\tau_x(t) := 1 - P(B(x,t)) \quad \text{et} \quad N_x(t) = N\left(\frac{\delta}{2}, B(x,t)\right),$$

$N(u, A)$: nombre minimal de boules de rayon u dans E nécessaires pour recouvrir $A \subset E$.

Résultat – Pour tout $\delta > 0$ et $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}M_{n,0}^{\delta} \leq \inf_{x,t}\left\{\tau_x(t) + \frac{N_x(t)}{en}\right\}$$

Problème – Ne s'adapte pas au cas $r \geq 1$; Dépend de la géométrie du support de P.

Notations – Pour $x \in E$,

$$\tau_x(t) := 1 - P(B(x,t)) \quad \text{et} \quad N_x(t) = N\left(\frac{\delta}{2}, B(x,t)\right),$$

$N(u, A)$: nombre minimal de boules de rayon u dans E nécessaires pour recouvrir $A \subset E$.

Résultat – Pour tout $\delta > 0$ et $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}M_{n,0}^{\delta} \leq \inf_{x,t}\left\{\tau_x(t) + \frac{N_x(t)}{en}\right\}$$

Problème – Ne s'adapte pas au cas $r \geq 1$; Dépend de la géométrie du support de P.

Fonction de δ-comptage – On définit ν_δ comme la mesure sur $[0,1]$ définit par

$$\int_0^1 f(u)\nu_\delta(\mathrm{d}u) = \int_E \frac{f(P(B(x,\delta)))}{P(B(x,\delta))} P(\mathrm{d}x),$$

pour toute $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ mesurable, et on pose

$$\overrightarrow{\nu}_\delta(\varepsilon) = \nu_\delta([\varepsilon, 1]).$$

Théorème. (Decrouez, Grabchak et P.) Soit P à support au plus dénombrable dans E, sans point d'accumulation. Alors, pour tout $\varepsilon \in (0,1]$,

$$\overrightarrow{\nu}_\delta(\varepsilon) \underset{\delta \to 0+}{\longrightarrow} \overrightarrow{\nu}(\varepsilon).$$

Fonction de δ-comptage – On définit ν_δ comme la mesure sur $[0,1]$ définit par

$$\int_0^1 f(u)\nu_\delta(\mathrm{d}u) = \int_E \frac{f(P(B(x,\delta)))}{P(B(x,\delta))} P(\mathrm{d}x),$$

pour toute $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ mesurable, et on pose

$$\overrightarrow{\nu}_\delta(\varepsilon) = \nu_\delta([\varepsilon, 1]).$$

Théorème. (Decrouez, Grabchak et P.) Soit P à support au plus dénombrable dans E, sans point d'accumulation. Alors, pour tout $\varepsilon \in (0,1]$,

$$\overrightarrow{\nu}_\delta(\varepsilon) \underset{\delta \to 0+}{\longrightarrow} \overrightarrow{\nu}(\varepsilon).$$

Fonction de δ-comptage – On définit ν_δ comme la mesure sur $[0,1]$ définit par

$$\int_0^1 f(u)\nu_\delta(\mathrm{d}u) = \int_E \frac{f(P(B(x,\delta)))}{P(B(x,\delta))} P(\mathrm{d}x),$$

pour toute $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ mesurable, et on pose

$$\overrightarrow{\nu}_\delta(\varepsilon) = \nu_\delta([\varepsilon, 1]).$$

Théorème. (Decrouez, Grabchak et P.) Soit P à support au plus dénombrable dans E, sans point d'accumulation. Alors, pour tout $\varepsilon \in (0,1]$,

$$\overrightarrow{\nu}_\delta(\varepsilon) \xrightarrow[\delta \to 0+]{} \overrightarrow{\nu}(\varepsilon).$$

Fonction de δ-comptage – On définit ν_δ comme la mesure sur $[0,1]$ définit par

$$\int_0^1 f(u)\nu_\delta(\mathrm{d}u) = \int_E \frac{f(P(B(x,\delta)))}{P(B(x,\delta))} P(\mathrm{d}x),$$

pour toute $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ mesurable, et on pose

$$\vec{\nu}_\delta(\varepsilon) = \nu_\delta([\varepsilon, 1]).$$

Théorème. (Decrouez, Grabchak et P.) Soit P à support au plus dénombrable dans E, sans point d'accumulation. Alors, pour tout $\varepsilon \in (0,1]$,

$$\vec{\nu}_\delta(\varepsilon) \underset{\delta \to 0+}{\longrightarrow} \vec{\nu}(\varepsilon).$$

Observation – L'étude asymptotique, ainsi que toutes les bornes présentées dans la partie précédente, s'adaptent exactement au cas de P quelconque en remplacant $\overrightarrow{\nu}$ par $\overrightarrow{\nu}_{\delta}$.

Fin

Merci pour votre attention