Cours de calcul matriciel :
Algèbre linéaire en kit 1

Yves Lafont
Institut de Mathématiques de Luminy
Université d'Aix-Marseille

13 janvier 2012

René Descartes
(1596-1650)

Avant-propos

L'*algèbre linéaire* est un des piliers des mathématiques. Issue d'un rapprochement entre l'*algèbre* et la *géométrie*, qui est généralement attribué à René Descartes, elle repose sur le *calcul vectoriel*, et surtout sur le *calcul matriciel*. Elle s'applique aux autres branches des mathématiques, aux sciences de la nature, de l'homme, et de l'ingénieur.

Attention : ceci n'est pas un *cours magistral*, mais plutôt une invitation à reconstruire vous-même l'algèbre linéaire. Ce cours est principalement constitué de *définitions*, *notations*, *exercices*, *propositions*, *théorèmes* et *corollaires* :

- Les *définitions* sont importantes : il faut nommer précisément les *objets mathématiques* et leurs *propriétés*. Les *notations* sont généralement communes à toute la littérature mathématique, mais il existe des variantes : ici, par exemple, les *vecteurs* sont notés comme des *colonnes* plutôt que comme des couples ou des triplets.
- Les *exercices* sont de difficultés et de types variés. Certains semblent trop faciles : on dit qu'ils sont *triviaux*. D'autres exigent un peu de réflexion : ils anticipent les démonstrations des propositions et des théorèmes. Tous servent à se familiariser avec les notions et les méthodes de l'algèbre linéaire, par la pratique assidue du *calcul*, du *raisonnement*, et de l'*imagination*.
- Les *propositions*, les *théorèmes* et leurs *corollaires* sont presque toujours *à démontrer*, et parfois *à compléter*. Leurs démonstrations sont souvent préparées par les exercices précédents. Certains théorèmes sont *admis*, parce que leurs démonstrations dépasseraient largement le cadre de notre cours. Tel est le cas, par exemple, du fameux *théorème de d'Alembert-Gauss*.

Ce cours exige donc des efforts personnels, mais on comprend et on retient mieux ce que l'on a trouvé soi-même !

Quelques conseils et précisions :

- conservez soigneusement vos solutions d'exercices et vos démonstrations : elles seront utilisées par la suite ;
- un exercice est parfois un *lemme*, qui permettra ensuite de démontrer une *proposition* ou un *théorème* ;
- lorsqu'un exercice commence par « en déduire que », il faut bien sûr utiliser ce qui précède immédiatement ;
- vous pouvez utiliser vos connaissances scolaires, mais jamais les résultats qui seront démontrés par la suite ;
- avant toute démonstration, commencez par expliciter l'*hypothèse* (ou les *hypothèses*) $\mathcal{H}$ et la *conclusion* $\mathcal{C}$;
- pensez aussi à utiliser une des méthodes suivantes : démonstration *par cas*, *par récurrence*, ou *par l'absurde* ;
- lorsqu'un exercice contient la question « si $\mathcal{H}$, peut-on déduire $\mathcal{C}$? », il faut donner une *démonstration* de $\mathcal{C}$ à partir de $\mathcal{H}$ (si la réponse est *oui*), ou bien un *contre-exemple*, qui satisfait $\mathcal{H}$, mais pas $\mathcal{C}$ (si c'est *non*) ;
- dans le second cas, un contre-exemple se trouve souvent dans un des exercices précédents ;
- si $\mathcal{C}$ se déduit de $\mathcal{H}$, *montrer la réciproque* consiste à déduire $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}$: on dit alors que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$ sont *équivalents*, ou encore que l'hypothèse $\mathcal{H}$ est une *condition nécessaire et suffisante* pour que la conclusion $\mathcal{C}$ soit vraie ;
- pour montrer que plusieurs énoncés $(1), (2), \ldots, (n)$ sont équivalents, il est commode de montrer que chacun implique le suivant, et que le dernier implique le premier : $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow (n) \Rightarrow (1)$;
- vous pouvez parfois éviter certains calculs répétitifs ou fastidieux en expliquant *comment* vous les feriez ;
- il n'y a aucune figure géométrique dans ce document : c'est à vous de les dessiner … ou de les imaginer.

1 Calcul vectoriel dans le plan

1.1 Scalaires et vecteurs

Définitions : Dans ce chapitre (et le suivant) :
- un *scalaire* est un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$;
- un *vecteur* est un couple u de scalaires x, y, noté $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;
- les *composantes* du vecteur u sont les scalaires x, y.

L'ensemble de ces *vecteurs du plan* est noté $\mathbb{R}^2$.

Remarques :
- Dans la littérature, on écrit parfois $\vec{u}$ pour un vecteur. Ici, on ne mettra jamais de fléchette sur une *variable*.
- Dans la littérature, on écrit souvent $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ici, u est toujours noté comme un *vecteur colonne*.
- L'*interprétation géométrique* de u est d'abord le *point* P du plan de coordonnées x, y dans un *repère* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. En général, on suppose de plus que ce repère est *orthonormé direct*.
- Mais on représente aussi ce vecteur par une *flèche* joignant l'*origine* O au point P, et on écrit alors $u = \overrightarrow{OP}$. On peut ainsi translater ces deux points, de sorte que notre vecteur u reste inchangé : $u = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P'}$. Autrement dit, les flèches ont la même *direction* (elles sont parallèles), le même *sens*, et la même *longueur*.
- Enfin, on associe à u la *translation* de vecteur u, qui envoie le point P sur l'unique point Q tel que $\overrightarrow{PQ} = u$.

Exemples : On introduit le *vecteur nul* $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ainsi que les vecteurs $\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de la *base canonique*.

Définitions : La *somme* de deux vecteurs et le *produit* d'un vecteur par un scalaire λ sont définis de façon évidente :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}, \qquad \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Remarque : Le scalaire λ est toujours placé *avant* le vecteur u : on écrit λu, et non $u\lambda$.

Exercice 1 : Calculer le vecteur $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Notations : On écrit $-u$ pour le vecteur $(-1)u$, et $u - v$ pour le vecteur $u + (-v) = u + (-1)v$. Autrement dit :

$$-\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Quelles sont les interprétations géométriques des vecteurs $\vec{0}$, $-u$, $u + v$, et λu (dans le cas où $\lambda > 0$) en termes de points, de flèches, et de translations ?

Pour les scalaires, on utilise les règles de calcul habituelles. Pour les vecteurs, on peut en principe se ramener à un calcul sur les composantes, mais autant que possible, on utilise les règles du *calcul vectoriel* :

Proposition 1 (règles du *calcul vectoriel*, *à démontrer*)
Si u, v, w sont des vecteurs et λ, μ sont des scalaires, on a :

$$u + v = v + u, \qquad (u + v) + w = u + (v + w),$$

$$(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u, \qquad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v, \qquad 0u = \vec{0}, \qquad (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u), \qquad 1u = u.$$

Exercice 3 : En déduire les *règles dérivées* suivantes :

$$u + \vec{0} = u, \qquad \lambda\vec{0} = \vec{0}, \qquad (\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u, \qquad \lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v, \qquad u - u = \vec{0}.$$

Remarques :
- Certaines règles font intervenir à la fois des opérations sur les scalaires et des opérations sur les vecteurs. Ainsi, la *distributivité à droite* $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ fait intervenir l'addition des scalaires et celle des vecteurs.
- La somme $(u + v) + w = u + (v + w)$ s'écrit $u + v + w$. De même, le produit $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$ s'écrit $\lambda\mu u$. Plus généralement, la somme $u_1 + \cdots + u_n$ s'écrit sans parenthèses, et de même pour le produit $\lambda_1 \cdots \lambda_n u$.

Toutes ces règles sont évidentes et faciles à utiliser, car ce sont essentiellement les mêmes que pour les scalaires. La particularité du calcul vectoriel est la suivante : on ne peut pas multiplier, ni diviser, un vecteur par un autre. Par contre, on peut diviser un vecteur u par un scalaire $\lambda \neq 0$, en le multipliant par $\frac{1}{\lambda}$: on écrit alors $\frac{1}{\lambda}u$, et non $\frac{u}{\lambda}$.

Exercice 4 : En utilisant les règles ci-dessus, que peut-on déduire si on a $u + w = v + w$? et comment le déduit-on ?

Exercice 5 : Que peut-on déduire si on a $\lambda u = \vec{0}$ avec $\lambda \neq 0$ (respectivement $u \neq \vec{0}$) ? et comment le déduit-on ?

1.2 Droites vectorielles et bases du plan

Notation : Si u est un vecteur, on pose $\mathbb{R}u = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Autrement dit, l'ensemble $\mathbb{R}u$ est défini par le système d'*équations paramétriques* suivant :

$\begin{cases} x = a\lambda, \\ y = b\lambda, \end{cases}$ où λ est le *paramètre*, et les *coefficients* a, b sont les composantes du vecteur $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exercice 6 : Donner les interprétations géométriques des ensembles $\mathbb{R}\vec{0}$, $\mathbb{R}\vec{\imath}$, $\mathbb{R}\vec{\jmath}$, $\mathbb{R}(\lambda\vec{\imath})$, $\mathbb{R}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$, $\mathbb{R}(\vec{\imath}-\vec{\jmath})$.

Exercice 7 : Montrer que si $u \neq \vec{0}$, tout $v \in \mathbb{R}u$ s'écrit *de façon unique* sous la forme $v = \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Définition : Si $u \neq \vec{0}$, la *droite vectorielle engendrée par* u est l'ensemble $\mathbb{R}u$.

Exercice 8 : Quelle est l'interprétation géométrique de cet ensemble pour $u = \overrightarrow{OP}$?

Proposition 2 (équation cartésienne d'une droite vectorielle du plan, *à compléter et à démontrer*)
Soient a, b des scalaires *non tous nuls* : autrement dit, on a $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

1. L'*équation cartésienne* $ax + by = 0$ définit la droite vectorielle $\mathbb{R}u$, où $\boxed{u = \quad\quad}$
2. Réciproquement, si $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors une équation cartésienne de la droite vectorielle $\mathbb{R}u$ est $\boxed{\quad\quad = 0.}$

Remarque : L'équation cartésienne de la droite $\mathbb{R}u$ est *homogène* : autrement dit, cette droite passe par l'origine O.

Exercice 9 : Expliciter et commenter les cas particuliers suivants : $a = 1$ et $b = 0$, puis $a = b = 1$, puis $a = b = 0$.

Définition : On dit que les vecteurs u, v sont *colinéaires* et on écrit $u \parallel v$ s'il existe un vecteur w tel que $u, v \in \mathbb{R}w$.
Sinon, on dit que les vecteurs u, v sont *linéairement indépendants* et on écrit $u \nparallel v$.

Remarque : Par définition, la relation $\parallel$ est *symétrique* : autrement dit, on a $u \parallel v$ si et seulement si $v \parallel u$.

Exercice 10 : Montrer que la relation $\parallel$ est *réflexive* : autrement dit, on a $u \parallel u$. De même, montrer que $u \parallel \vec{0}$.

Proposition 3 (caractérisations de l'indépendance linéaire de deux vecteurs, *à démontrer*)
Si u, v sont des vecteurs, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $u \nparallel v$, 2. $u \neq \vec{0}$ et $v \notin \mathbb{R}u$, 3. si λ, μ sont des scalaires tels que $\lambda u + \mu v = \vec{0}$, alors $\lambda = \mu = 0$.

En particulier, si u est un vecteur non nul, alors on a $u \parallel v$ si et seulement si $v \in \mathbb{R}u$.

Exercice 11 :

1. Montrer que $\vec{\imath} \nparallel \vec{\jmath}$, et en déduire que si $u \neq \vec{0}$, alors on a $u \nparallel \vec{\imath}$ ou $u \nparallel \vec{\jmath}$.
2. La relation $\parallel$ est-elle *transitive* ? Autrement dit, si $u \parallel v$ et $v \parallel w$, peut-on en déduire que $u \parallel w$?
3. Même question dans le cas où le vecteurs u, v, w sont non nuls.

Exercice 12 : Montrer que $u \nparallel v$ pour $u = \vec{\imath}+\vec{\jmath}$ et $v = \vec{\imath}-\vec{\jmath}$, puis pour $u = \vec{\imath}+3\vec{\jmath}$ et $v = 2\vec{\imath}+4\vec{\jmath}$.

Notation : Si u, v sont des vecteurs, on pose $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
Autrement dit, l'ensemble $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ est défini par le système d'équations paramétriques suivant :

$\begin{cases} x = a\lambda + b\mu, \\ y = c\lambda + d\mu, \end{cases}$ où λ, μ sont les paramètres, et les coefficients a, b, c, d sont donnés par $u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

Exercice 13 : Expliciter les ensembles suivants : $\mathbb{R}\vec{0}+\mathbb{R}\vec{0}$, $\mathbb{R}\vec{\imath}+\mathbb{R}\vec{0}$, $\mathbb{R}\vec{\imath}+\mathbb{R}\vec{\imath}$, $\mathbb{R}\vec{\imath}+\mathbb{R}(\lambda\vec{\imath})$, $\mathbb{R}\vec{\imath}+\mathbb{R}\vec{\jmath}$, $\mathbb{R}(\lambda\vec{\imath})+\mathbb{R}(\mu\vec{\jmath})$.

Exercice 14 : Dans les deux cas de l'exercice 12, montrer que $\vec{\imath}, \vec{\jmath} \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$, et en déduire que $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v = \mathbb{R}^2$.

Théorème 1 (somme et intersection de deux droites vectorielles du plan, *à compléter et à démontrer*)
Soient u, v des vecteurs *non nuls* du plan : autrement dit, on a $u \neq \vec{0}$ et $v \neq \vec{0}$.

1. Si $u \parallel v$, alors $\boxed{\mathbb{R}u + \mathbb{R}v = \mathbb{R}u \cap \mathbb{R}v = \quad\quad}$
2. Si $u \nparallel v$, alors $\boxed{\mathbb{R}u + \mathbb{R}v = \quad\quad}$ et $\boxed{\mathbb{R}u \cap \mathbb{R}v = \quad\quad}$

Définition : Une *base du plan* est un couple (u, v) de vecteurs du plan tels que $u \nparallel v$.

Corollaire (décomposition d'un vecteur dans une base du plan, *à compléter et à démontrer*)
Si (u, v) est une base du plan, tout $w \in \mathbb{R}^2$ s'écrit de façon unique sous la forme $\boxed{w = \quad\quad}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Définition : On dit alors que λ, μ sont les *composantes* du vecteur w *dans la base* (u, v).

Exemple : Les composantes x, y du vecteur $u = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ sont ses composantes *dans la base canonique* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 15 : Quelles sont les composantes des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans chacune des deux bases de l'exercice 12 ?

1.3 Produit scalaire et norme euclidienne

Définition : Le *produit scalaire* de deux vecteurs $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $u' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est le scalaire $\langle u, u' \rangle = xx' + yy'$.

Remarque : Dans la littérature, le produit scalaire est aussi noté $u \cdot u'$, ou encore $\langle u \mid u' \rangle$.

Exercice 16 : Quels sont les scalaires $\langle u, \vec{\imath} \rangle$ et $\langle u, \vec{\jmath} \rangle$?

Proposition 4 (*symétrie* et *bilinéarité* du produit scalaire, *à compléter et à démontrer*)
Si u, v, w sont des vecteurs et λ est un scalaire, on a :

$$\boxed{\langle u, v \rangle = \quad} \qquad \boxed{\langle u + v, w \rangle = \quad} \qquad \boxed{\langle \lambda u, v \rangle = \quad}$$

Exercice 17 : En déduire les règles dérivées suivantes (*à compléter*) :

$$\boxed{\langle \vec{0}, u \rangle = \langle u, \vec{0} \rangle = \quad} \qquad \boxed{\langle u, v + w \rangle = \quad} \qquad \boxed{\langle u, \lambda v \rangle = \quad}$$

Exercice 18 : Compléter la table suivante, et en déduire la formule du produit scalaire à partir des règles ci-dessus.

$\langle -, - \rangle$	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$
$\vec{\imath}$		
$\vec{\jmath}$		

Définition : Le *carré scalaire* de u est le produit scalaire $\langle u, u \rangle$.

Exercice 19 : Quelle est la formule de ce carré scalaire pour $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$? quel est son signe ? et quand s'annule-t-il ?

Proposition 5 (signe du carré scalaire, *à compléter*)
Pour tout vecteur u, on a $\langle u, u \rangle \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $\boxed{\quad\quad}$

Définition : On dit que les vecteurs u, v sont *orthogonaux* et on écrit $u \perp v$ si on a $\langle u, v \rangle = 0$.

Exemple : Le vecteur nul est orthogonal à tous les autres, et c'est le seul qui soit orthogonal à lui-même.

Exercice 20 : Quel est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné $u = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$?

Exercice 21 : Si $u \perp v$, peut-on en déduire que $u \not\parallel v$? Même question si on suppose de plus que $u, v \neq \vec{0}$.

Définition : La *norme euclidienne* d'un vecteur u est le scalaire $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Remarques :

- L'interprétation géométrique de $\|u\|$ est la *longueur* de u, c'est-à-dire la distance entre O et P pour $u = \overrightarrow{OP}$.
- Par définition, on a $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$. D'ailleurs, le carré scalaire se note plutôt $\|u\|^2$ que $\langle u, u \rangle$.
- Lorsque c'est possible, on utilise le carré scalaire plutôt que la norme, pour éviter les racines carrées.

Exercice 22 : En déduire l'équation cartésienne du *cercle* de centre O et de rayon $\rho \geqslant 0$.

Exercice 23 : Développer $\|u + v\|^2$, et en déduire une expression du produit scalaire à partir de la norme.

Proposition 6 (expression du produit scalaire à partir de la norme, *à compléter*)

On a $\boxed{\langle u, v \rangle = \quad\quad\quad\quad}$ Ainsi, $u \perp v$ si et seulement si $\boxed{\|u + v\|^2 = \quad\quad}$

Exercice 24 : Quelle est l'interprétation géométrique de cette dernière équivalence ?

Exercice 25 : On considère le *parallélogramme* $OPRQ$ défini par les vecteurs u et v. Autrement dit, on a :

$$u = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QR}, \qquad v = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PR}.$$

1. Développer $\|u - v\|^2$, et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour avoir $\|u + v\| = \|u - v\|$.
2. Développer $\langle u + v, u - v \rangle$, et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour avoir $u + v \perp u - v$.
3. Quelles sont les interprétations géométriques de ces deux équivalences ?

Augustin Louis Cauchy
(1789-1857)

Hermann Amandus Schwarz
(1843-1921)

Exercice 26 : Soient u, v des vecteurs. On pose $f(\lambda) = \|\lambda u + v\|^2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que dans le cas où $u \neq \vec{0}$, la fonction f s'écrit comme un polynôme du second degré.
2. Calculer le discriminant Δ de ce polynôme, et en déduire une inégalité vraie dans tous les cas.
3. Dans quel cas cette inégalité devient-elle une égalité ?

Proposition 7 (*inégalité de Cauchy-Schwarz, à compléter*)
Si u, v sont des vecteurs, on a $\boxed{|\langle u, v\rangle| \leqslant \qquad\qquad}$ avec égalité si et seulement si $\boxed{\qquad}$

Proposition 8 (propriétés de la norme, *à compléter et à démontrer*)
Si u, v sont des vecteurs et λ est un scalaire, on a :

$\boxed{\|\lambda u\| = \qquad\qquad}$ $\boxed{\|u + v\| \leqslant \qquad\qquad}$ $\|u\| \geqslant 0,$ avec égalité si et seulement si $\boxed{\qquad}$

En particulier, on a $\boxed{\|-u\| = \qquad}$

Exercice 27 : Quelle est l'interprétation géométrique de la deuxième propriété ?

Définition : On dit qu'un vecteur u est *unitaire* si on a $\|u\| = 1$, et on note $\mathcal{U}$ l'ensemble de ces vecteurs unitaires.

Exercice 28 : Quelle est l'équation cartésienne de cet ensemble ? et quelle est son interprétation géométrique ?

Exercice 29 : Quels sont les vecteurs unitaires colinéaires à un vecteur donné $u \neq \vec{0}$?

Définition : La *distance euclidienne* entre deux vecteurs u et v est le scalaire $\mathrm{d}(u, v) = \|v - u\|$.

Exercice 30 : Quelle est l'interprétation géométrique de cette notion pour $u = \overrightarrow{OP}$ et $v = \overrightarrow{OQ}$?

Exercice 31 : Démontrer les propriétés suivantes (*à compléter*) :

$\boxed{\mathrm{d}(u, v) = \qquad\qquad}$ $\boxed{\mathrm{d}(u, w) \leqslant \qquad\qquad}$ $\mathrm{d}(u, v) \geqslant 0,$ avec égalité si et seulement si $\boxed{\qquad}$

Exercice 32 : Montrer que si $u \neq \vec{0}$, il existe un unique scalaire λ tel que $u \perp v - \lambda u$.

Définitions : Soient $u \neq \vec{0}$ et v des vecteurs :

- le *projeté orthogonal* de v sur l'axe $\mathbb{R}u$ est l'unique vecteur v' tel que $v = v' + v''$ avec $u \parallel v'$ et $u \perp v''$;
- la *distance* $\mathrm{d}(v, \mathbb{R}u)$ entre v et l'axe $\mathbb{R}u$ est la norme du vecteur $v'' = v - v'$.

Exercice 33 : Quelles sont les interprétations géométriques de ces deux notions pour $u = \overrightarrow{OP}$ et $v = \overrightarrow{OQ}$?

Proposition 9 (projeté orthogonal sur une droite, *à compléter*)
Si $u \neq \vec{0}$ et v sont des vecteurs, le projeté orthogonal de v sur l'axe $\mathbb{R}u$ est le vecteur $\boxed{v' = \qquad\qquad}$

Exercice 34 : En déduire la formule du *symétrique* de v par rapport à l'axe $\mathbb{R}u$.

Exercice 35 : Montrer que $\mathrm{d}(v, \mathbb{R}u)$ est la plus petite distance entre v et un vecteur de la droite $\mathbb{R}u$.

1.4 Déterminant de deux vecteurs

Définition : Le *déterminant* de deux vecteurs $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $u' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est le scalaire $\det(u, u') = xy' - yx'$.

Remarque : L'interprétation géométrique de $\det(u, v)$ est la suivante, pour $u = \overrightarrow{OP}$ et $v = \overrightarrow{OQ}$:

- sa valeur absolue est l'*aire* du parallélogramme $OPRQ$ défini par ces deux vecteurs ;
- il est positif (respectivement négatif) lorsque Q est *à gauche* (respectivement *à droite*) de P, vu depuis O.

Exercice 36 : En déduire l'aire du triangle OPQ.

Proposition 10 (*antisymétrie* et *bilinéarité* du déterminant, *à compléter et à démontrer*)
Si u, v, w sont des vecteurs et λ est un scalaire, on a :

$\boxed{\det(u, v) = \qquad}$ $\boxed{\det(u + v, w) = \qquad}$ $\boxed{\det(\lambda u, v) = \qquad}$

Exercice 37 : En déduire les règles dérivées suivantes (*à compléter*) :

$\boxed{\det(\vec{0}, u) = \det(u, \vec{0}\,) = \qquad}$ $\boxed{\det(u, v + w) = \qquad}$ $\boxed{\det(u, \lambda v) = \qquad}$

$\boxed{\det(u, u) = \qquad}$ $\boxed{\det(u + \lambda v, v) = \det(u, v + \lambda u) = \qquad}$

Exercice 38 : Compléter la table suivante, et en déduire la formule du déterminant à partir des règles ci-dessus.

det	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$
$\vec{\imath}$		
$\vec{\jmath}$		

Proposition 11 (critère de colinéarité dans le plan, *à compléter et à démontrer*)
On a $u \parallel v$ si et seulement si $\boxed{\qquad}$ Ainsi, (u, v) est une base du plan si et seulement si $\boxed{\qquad}$

Exercice 39 : En déduire une équation cartésienne de la droite $\mathbb{R}u$ pour un vecteur donné $u \neq \vec{0}$ (proposition 2).

Exercice 40 : Expliciter l'interprétation géométrique de $\det(u, v)$ dans le cas particulier où $u \parallel v$.

Proposition 12 (*identité de Lagrange* et *inégalité de Hadamard* dans le plan, *à compléter et à démontrer*)
On a $\boxed{\langle u, v\rangle^2 + \det(u, v)^2 = \qquad}$ Ainsi, $\boxed{|\det(u, v)| \leqslant \qquad}$ avec égalité si et seulement si $\boxed{\qquad}$

Remarque : De même, on obtient une preuve alternative de l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*.

Exercice 41 : Quelle est l'interprétation géométrique de l'*inégalité de Hadamard* ?

Proposition 13 (distance entre un vecteur et une droite vectorielle du plan, *à compléter et à démontrer*)

Si $u \neq \vec{0}$ et v sont des vecteurs du plan, la distance entre v et l'axe $\mathbb{R}u$ est $\boxed{\mathrm{d}(v, \mathbb{R}u) = \qquad}$

Exercice 42 : Quelle est l'interprétation géométrique de cette identité ?

Définitions : Une base (u, v) du plan est dite :

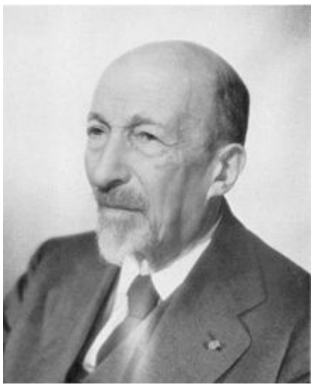
- *orthogonale* si les vecteurs u, v sont orthogonaux ;
- *orthonormée* si elle est orthogonale et si les vecteurs u, v sont unitaires ;
- *directe* (respectivement *indirecte*) si son déterminant est positif (respectivement négatif).

Exercice 43 : Que peut-on dire des bases suivantes : $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $(\vec{\jmath}, \vec{\imath})$, $(\vec{\imath}, -\vec{\jmath})$, $(-\vec{\imath}, -\vec{\jmath})$, $(\vec{\imath}, \vec{\imath} + \vec{\jmath})$, $(\vec{\imath} + \vec{\jmath}, \vec{\imath} - \vec{\jmath})$?

Exercice 44 : Si une base est orthonormée, que peut-on dire de son déterminant ? La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 45 : Soit $u = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ un vecteur quelconque du plan.

1. Montrer qu'il existe un unique vecteur v tel que $u \perp v$, $\|u\| = \|v\|$ et $\det(u, v) \geqslant 0$.
2. Que peut-on conclure dans le cas particulier où u est unitaire ?
3. Quelle transformation géométrique fait passer de u à v ?
4. En déduire la forme générale d'une *base orthonormée directe* (respectivement *indirecte*) du plan.



Jacques Hadamard
(1865-1963)

Pancrace Eusèbe Zéphyrin Brioché
(le *savant Cosinus*)

1.5 Angle de deux vecteurs

Notation : Si α est un nombre réel, on pose $\vec{e}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$.

Exercice 46 : Calculer $\vec{e}_0$ et $\vec{e}_{\frac{\pi}{2}}$. Montrer que $\vec{e}_\alpha \in \mathcal{U}$, et que si $\alpha \equiv \beta \pmod{2\pi}$, alors $\vec{e}_\alpha = \vec{e}_\beta$.

En fait, on peut démontrer un résultat plus précis, que l'on admettra :

Théorème 2 (paramétrage du cercle trigonométrique, *à compléter*)
Si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\vec{e}_\alpha \in \mathcal{U}$, et tout vecteur de $\mathcal{U}$ est de cette forme, avec α *unique modulo* 2π :

$$\vec{e}_\alpha = \vec{e}_\beta \text{ si et seulement si } \alpha \equiv \beta \pmod{2\pi}.$$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{U}$ est défini par le système d'équations paramétriques suivant :

$$\boxed{\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}} \qquad \text{où l'}\textit{angle } \theta \text{ est le paramètre.}$$

Corollaire (forme polaire d'un vecteur, *à compléter et à démontrer*)
Tout vecteur $u \neq \vec{0}$ du plan est de la forme $\boxed{u = \qquad}$ où $\rho = \|u\| > 0$ et l'angle θ est unique modulo 2π.

Remarque : Si $u = \overrightarrow{OP}$, alors ρ et θ sont les *coordonnées polaires* du point P.

Exercice 47 : Si on suppose que les vecteurs u, v sont unitaires, que peut-on dire du vecteur $w = \begin{pmatrix} \langle u, v\rangle \\ \det(u, v) \end{pmatrix}$?

Exercice 48 : Calculer w dans le cas particulier où $u = \vec{\imath}$.

Définition : Soient u, v des vecteurs non nuls du plan.

- Si u, v sont unitaires, l'*angle orienté* de u et v est l'angle α tel que $\vec{e}_\alpha = \begin{pmatrix} \langle u, v\rangle \\ \det(u, v) \end{pmatrix}$.
- Plus généralement, l'*angle orienté* de u et v est l'angle orienté des vecteurs unitaires $\frac{1}{\|u\|}u$ et $\frac{1}{\|v\|}v$.

Remarques :

- Cet angle est défini *modulo* 2π. En pratique, on choisit $\alpha \in]-\pi, \pi]$, ou encore $\alpha \in [0, 2\pi[$.
- Son interprétation géométrique est évidente. On y reviendra dans l'étude des *rotations* du plan (section 2.7).

Proposition 14 (angle orienté de deux vecteurs du plan, *à compléter*)
Si u, v sont des vecteurs non nuls du plan, l'angle orienté α de u et v est caractérisé par les formules suivantes :

$$\boxed{\cos\alpha = \qquad} \qquad \boxed{\sin\alpha = \qquad}$$

En particulier, on a $u \parallel v$ si et seulement si $\boxed{\alpha \equiv \qquad}$ et $u \perp v$ si et seulement si $\boxed{\alpha \equiv \qquad}$

Exercice 49 : Si α est l'angle orienté de u et v, quel est l'angle orienté de v et u ?

Définition : Si $\alpha \in]-\pi, \pi]$ est l'angle orienté de u et v, l'*angle non orienté* de u et v est $|\alpha| \in [0, \pi]$.

Exercice 50 : Donner les formules pour $\cos|\alpha|$ et $\sin|\alpha|$, et montrer qu'une seule suffit pour déterminer cet angle.