2 Calcul matriciel dans le plan

2.1 Matrices carrées

Définitions : Dans ce chapitre :

- une *matrice* est un quadruplet A de scalaires a, b, c, d, noté $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;
- les *coefficients* de cette matrice sont les scalaires a, b, c, d ;
- et les *colonnes* de cette matrice sont les deux vecteurs $u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

L'ensemble de ces *matrices carrées d'ordre* 2 est noté $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exemples : On introduit la *matrice nulle* $\mathbf{O}$, la *matrice identité* $\mathbf{I}$, et les matrices de la *base canonique* de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarques :

- Dans la littérature, ces matrices sont plutôt notées $\mathbf{0}_{2,2}$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{E}_{1,1}$, $\mathbf{E}_{1,2}$, $\mathbf{E}_{2,1}$, $\mathbf{E}_{2,2}$.
- Les colonnes de la matrice $\mathbf{I}$ sont les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Définition : La *somme* de deux matrices et le *produit* d'une matrice par un scalaire sont définis de façon évidente :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}, \qquad \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

Remarque : Comme en calcul vectoriel, le scalaire λ est toujours placé *avant* la matrice A : on écrit λA, et non $A\lambda$.

Exercice 51 : Calculer $\mathbf{E} + \mathbf{H}$, puis $a\,\mathbf{E} + b\,\mathbf{F} + c\,\mathbf{G} + d\,\mathbf{H}$.

Notations : Comme en calcul vectoriel, on note $-A$ la matrice $(-1)A$, et $A - B$ la matrice $A + (-B) = A + (-1)B$.

Proposition 15 (règles du calcul vectoriel pour les matrices, *à compléter et à démontrer*)
Si A, B, C sont des matrices et λ, μ sont des scalaires, on a :

$$\boxed{A + B = \qquad} \qquad \boxed{(A + B) + C = \qquad}$$

$$\boxed{(\lambda + \mu)A = \qquad} \quad \boxed{\lambda(A + B) = \qquad} \quad \boxed{0A = \quad} \quad \boxed{(\lambda\mu)A = \qquad} \quad \boxed{1A = \quad}$$

Exercice 52 : En déduire les règles dérivées suivantes (*à compléter*) :

$$\boxed{A + \mathbf{O} = \quad} \quad \boxed{\lambda\mathbf{O} = \quad} \quad \boxed{(\lambda - \mu)A = \qquad} \quad \boxed{\lambda(A - B) = \qquad} \quad \boxed{A - A = \quad}$$

Définition : Le *produit* d'un vecteur u par une matrice A est le vecteur Au défini de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Remarque : La matrice A est toujours placée *avant* le vecteur u : on écrit Au, et non uA.

Exercice 53 : Calculer $A\vec{\imath}$ et $A\vec{\jmath}$ pour une matrice quelconque A, puis $\mathbf{O}u$ et $\mathbf{I}u$ pour un vecteur quelconque u.

Exercice 54 : Montrer que si λ est un scalaire, il existe une matrice A telle que $Au = \lambda u$ pour tout vecteur u.

Définition : Le *produit* de deux matrices est défini de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, si u et v sont les colonnes de B, alors AB est la matrice dont les colonnes sont Au et Av.

Remarque : Pour calculer ces produits, il est commode de disposer le vecteur et les matrices de la façon suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{ax + by} \\ cx + dy \end{pmatrix} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} & b' \\ \boldsymbol{c'} & d' \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{aa' + bc'} & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \end{array}$$

Chaque coefficient du produit s'obtient alors en multipliant la ligne juste à gauche par la colonne juste au dessus.

Exercice 55 : Calculer les produits $\mathbf{O}A$ et $A\mathbf{O}$ ainsi que $\mathbf{I}A$ et $A\mathbf{I}$ pour une matrice quelconque A, puis dresser la *table de multiplication* des matrices $\mathbf{O}, \mathbf{I}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$.

Proposition 16 (règles de calcul pour le produit d'un vecteur par une matrice, *à compléter et à démontrer*)
Si A, B sont des matrices, u, v sont des vecteurs, et λ est un scalaire, on a :

$$\boxed{(A+B)u = \qquad} \quad \boxed{A(u+v) = \qquad} \quad \boxed{(\lambda A)u = A(\lambda u) = \qquad}$$

$$\boxed{(AB)u = \qquad} \quad \boxed{\mathbf{I}u = \quad}$$

Exercice 56 : En déduire les règles dérivées suivantes (*à compléter*) :

$$\boxed{\mathbf{O}u = \quad} \quad \boxed{A\vec{0} = \quad} \quad \boxed{(A-B)u = \qquad} \quad \boxed{A(u-v) = \qquad}$$

Remarque : Le scalaire passe à gauche dans la règle $A(\lambda u) = \lambda(Au)$, selon la convention mentionnée ci-dessus. En fait, le produit $(\lambda A)u = A(\lambda u) = \lambda(Au)$ s'écrit λAu. De même, le produit $(AB)u = A(Bu)$ s'écrit ABu.

Exercice 57 : Si $Au = \vec{0}$ avec $A \neq \mathbf{O}$, peut-on en déduire que $u = \vec{0}$? Comparer avec l'exercice 5.

Proposition 17 (règles de calcul pour le produit de deux matrices, *à compléter et à démontrer*)
Si A, B, C sont des matrices et λ est un scalaire, on a :

$$\boxed{(A+B)C = \qquad} \quad \boxed{A(B+C) = \qquad} \quad \boxed{(\lambda A)B = A(\lambda B) = \qquad}$$

$$\boxed{(AB)C = \qquad} \quad \boxed{\mathbf{I}A = A\mathbf{I} = \quad}$$

Exercice 58 : En déduire les règles dérivées suivantes (*à compléter*) :

$$\boxed{\mathbf{O}A = A\mathbf{O} = \quad} \quad \boxed{(A-B)C = \qquad} \quad \boxed{A(B-C) = \qquad}$$

Remarques :

- Le produit $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$ s'écrit λAB. De même, le produit $(AB)C = A(BC)$ s'écrit ABC. Plus généralement, le produit $A_1 \cdots A_n$ s'écrit sans parenthèses, car le produit des matrices est *associatif*.
- L'ordre est crucial, car le produit des matrices est *non commutatif* : en général, on a $AB \neq BA$ (exercice 55). C'est pourquoi on a besoin d'une règle pour $\mathbf{I}A$ et d'une autre pour $A\mathbf{I}$.

Exercice 59 : Si $AB = \mathbf{O}$ avec $A \neq \mathbf{O}$, peut-on en déduire que $B = \mathbf{O}$? Comparer avec le produit des scalaires.

Définition : Si A est une matrice, on définit sa *puissance* A^n par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$A^0 = \mathbf{I}, \qquad A^{n+1} = A^n A.$$

Autrement dit, $A^0 = \mathbf{I}$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, $\ldots$

Exercice 60 : Si $A^2 = \mathbf{O}$, peut-on en déduire que $A = \mathbf{O}$? Comparer avec l'exercice 59.

Définition : On dit qu'une matrice A *commute* avec une autre matrice B si on a $AB = BA$.

Exemples : Toute matrice commute bien sûr avec elle-même, et les matrices $\mathbf{O}, \mathbf{I}$ commutent avec toutes les autres. Par contre, la matrice $\mathbf{E}$ ne commute pas avec la matrice $\mathbf{F}$ (exercice 55).

Exercice 61 : Montrer que si $p, q \in \mathbb{N}$, on a $A^{p+q} = A^p A^q$, et en déduire que A^p commute avec A^q.

Remarque : En particulier, A^n commute avec A : on a donc $A^{n+1} = A^n A = AA^n$.

Définition : On dit qu'une matrice A est *diagonale* si elle est de la forme suivante : $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Exercice 62 : Donner une formule pour (les coefficients de) A^n dans ce cas.

Remarque : Il n'y a pas de formule pour le cas général.

Exercice 63 : On considère les deux matrices suivantes : $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les matrices S^2, T^2, ST, TS.
2. Pour $R = ST$, calculer les matrices R^2, R^3, R^4, puis R^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 64 : Parmi les règles suivantes, lesquelles sont *valides*, c'est-à-dire vraies dans tous les cas ?

$$(\lambda A)^2 = \lambda^2 A^2, \qquad (AB)^2 = A^2B^2, \qquad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \qquad A^2 - B^2 = (A+B)(A-B).$$

Exercice 65 : On considère une matrice quelconque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A commute avec $\lambda\mathbf{I}$.
2. À quelles conditions la matrice A commute-t-elle avec $\mathbf{E}$? avec $\mathbf{F}$? avec les deux ?
3. En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les autres.

2.2 Endomorphismes

Définition : Un *endomorphisme* (*du plan*) est une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui satisfait les conditions de *linéarité*. Autrement dit, si u, v sont des vecteurs et λ est un scalaire, on a :

$$f(u+v) = f(u) + f(v), \qquad f(\lambda u) = \lambda f(u).$$

Exercice 66 : En déduire les propriétés supplémentaires suivantes (*à compléter*) :

$$\boxed{f(\vec{0}\,) = \quad} \qquad \boxed{f(-u) = \qquad\quad}$$

Remarques :

- Dans la littérature, on dit plutôt que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une *application linéaire*.
- On peut remplacer les deux conditions de linéarité par une seule :

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Exemples :

- L'*endomorphisme nul* est l'*application constante* $\vec{0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\vec{0}(u) = \vec{0}$.
- L'*identité* est l'application $\mathrm{id} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\mathrm{id}(u) = u$: c'est aussi un endomorphisme du plan.
- La plupart des transformations géométriques classiques, comme les *homothéties*, les *rotations*, les *réflexions* et les *dilatations*, sont des endomorphismes du plan, mais il faut aussi que l'origine O soit un *point fixe* de f. Les *translations* sont donc exclues (sauf l'identité) : ce sont des transformations *affines*, mais pas *linéaires*.

Proposition 18 (opérations sur les endomorphismes, *à compléter et à démontrer*)
Si f, g sont des endomorphismes du plan et λ est un scalaire, alors :

1. l'application $f+g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par $\boxed{(f+g)(u) = \qquad\qquad}$ est un endomorphisme du plan ;
2. l'application $\lambda f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par $\boxed{(\lambda f)(u) = \qquad}$ est un endomorphisme du plan ;
3. la *composée* $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par $\boxed{(f \circ g)(u) = \qquad}$ est un endomorphisme du plan.

Exercice 67 : Montrer que si f est endomorphisme bijectif, alors sa *réciproque* f^{-1} est aussi un endomorphisme.

Théorème 3 (caractérisation des endomorphismes du plan, *à compléter et à démontrer*)

1. Pour toute matrice A, l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\boxed{f(u) = \quad}$ est un endomorphisme du plan.
2. Tout endomorphisme du plan est de cette forme.
3. La matrice A est déterminée par l'endomorphisme f : ses colonnes sont $\boxed{\quad}$ et $\boxed{\quad}$

Définition : On dit alors que A est la *matrice de l'endomorphisme* f, ou que f est *l'endomorphisme de matrice* A.

Remarques :

- Si on considère les vecteurs comme des points, on dit aussi que f est l'*interprétation géométrique* de A.
- Dans ce cas, on trouve la matrice de f en représentant graphiquement les deux vecteurs $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$.
- Réciproquement, on trouve l'interprétation géométrique de A en représentant graphiquement ses colonnes.

Corollaire (critère d'égalité de deux endomorphismes, *à compléter*)
Deux endomorphismes f, g du plan coïncident si et seulement si on a $\boxed{\qquad\quad}$ et $\boxed{\qquad\quad}$

Exercice 68 : Donner la matrice de chacun des endomorphismes suivants :

1. *homothétie* de rapport 2 et de centre O ;
2. *symétrie centrale* par rapport à l'origine O ;
3. *rotation* d'angle $\frac{\pi}{2}$ (respectivement $-\frac{\pi}{2}$) autour de l'origine O ;
4. *réflexion* (ou *symétrie orthogonale*) d'axe Ox (respectivement Oy) ;
5. *dilatation orthogonale* de rapport 2 et d'axe Ox (respectivement Oy) ;
6. *réflexion* par rapport à chacune des deux bissectrices des axes Ox et Oy.

Remarque : On peut ainsi interpréter géométriquement les résultats de l'exercice 63.

Exercice 69 : Quelles sont les interprétations géométriques des matrices $\mathbf{I}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{O}$?

Proposition 19 (opérations sur les matrices d'endomorphismes, *à compléter et à démontrer*)
Si f, g sont des endomorphismes de matrices respectives A, B et λ est un scalaire, alors :

1. la matrice de l'endomorphisme $f + g$ est $\boxed{\qquad\quad}$
2. la matrice de l'endomorphisme λf est $\boxed{\quad}$
3. la matrice de l'endomorphisme $f \circ g$ est $\boxed{\quad}$

En particulier, la matrice de l'*itérée* n-ième $f^n = f \circ \cdots \circ f$ est $\boxed{\quad}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 70 : Soit $u = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ un vecteur non nul du plan.

1. En utilisant la proposition 9, calculer la matrice M de la *projection orthogonale* sur l'axe $\mathbb{R}u$.
2. Montrer que la matrice S de la *réflexion* d'axe $\mathbb{R}u$ s'exprime en fonction de M et de $\mathbf{I}$, et en déduire S.
3. Expliciter les cas particuliers suivants : $a = 1$ et $b = 0$, $a = 0$ et $b = 1$, $a = b = 1$, $a = 1$ et $b = -1$.
4. Comparer avec les résultats des exercices 68 et 69.

2.3 Matrices inversibles et automorphismes

Définition : On dit qu'une matrice (carrée) A est *inversible* s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = \mathbf{I}$.

Exercice 71 : Montrer l'*unicité* de la matrice B ci-dessus : si $AB = BA = AB' = B'A = \mathbf{I}$, alors $B = B'$.

Définition : Si la matrice A est *inversible*, son *inverse* est l'unique matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{I}$.

Remarques :

- On écrit A^{-1}, et non $\frac{1}{A}$. Plus généralement, on n'utilise pas de *fractions* pour des matrices ;
- On a besoin des deux égalités, mais en fait, on verra qu'il suffit d'en vérifier une seule (exercice 81).

Exemples : La matrice $\mathbf{I}$ est inversible et son inverse est $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$. Par contre, la matrice $\mathbf{O}$ n'est pas inversible.

Exercice 72 : Si $AB = \mathbf{O}$ avec A inversible, peut-on en déduire que $B = \mathbf{O}$? Comparer avec l'exercice 59.

Proposition 20 (propriétés de l'inverse, *à compléter et à démontrer*)

1. Si la matrice A est inversible, alors A^{-1} l'est aussi, et son inverse est $\boxed{(A^{-1})^{-1} = \qquad}$
2. Si la matrice A est inversible et $\lambda \neq 0$, alors λA l'est aussi, et son inverse est $\boxed{(\lambda A)^{-1} = \qquad\quad}$
3. Si les matrices A et B sont inversibles, alors AB l'est aussi, et son inverse est $\boxed{(AB)^{-1} = \qquad\qquad}$

Exercice 73 : En déduire que si A est inversible et $n \in \mathbb{N}$, alors A^n l'est aussi, et donner une formule pour $(A^n)^{-1}$.

Notation : Si A est inversible, on pose $A^{-n} = (A^{-1})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : La puissance A^n d'une matrice inversible est donc définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 74 : Soit A une matrice inversible.

1. Montrer que si $p, q \in \mathbb{N}$, on a $A^{-p-q} = A^{-p}A^{-q}$ et $A^{p-q} = A^pA^{-q} = A^{-q}A^p$.
2. En déduire que si $m, n \in \mathbb{Z}$, on a $A^{m+n} = A^mA^n$, puis que A^m commute avec A^n.

Définition : Un *automorphisme* (*du plan*) est un endomorphisme bijectif (du plan).

Remarque : D'après l'exercice 67, la réciproque d'un automorphisme est un automorphisme.

Proposition 21 (matrice d'un automorphisme, *à compléter et à démontrer*)
Un endomorphisme f est un automorphisme si et seulement si sa matrice A est $\boxed{\qquad\qquad}$

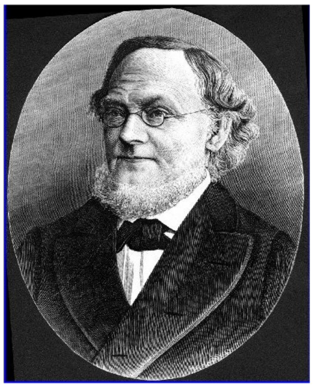
La matrice de sa *réciproque* f^{-1} est alors $\boxed{\quad}$ Autrement dit, on a $Au = v$ si et seulement si $\boxed{u = \qquad}$

Définition : L'endomorphisme f est *involutif* si on a $f^2 = \mathrm{id}$. Autrement dit, sa matrice A satisfait l'égalité $A^2 = \mathbf{I}$.

Remarque : Un endomorphisme involutif est un automorphisme qui est égal à sa propre réciproque.

Exercice 75 : Parmi les endomorphismes des exercices 68 et 69, lesquels sont bijectifs ? et lesquels sont involutifs ? On donnera la réciproque de chaque automorphisme, et on vérifiera que la proposition 21 s'applique à chaque cas.

Sir William Rowan Hamilton
(1805-1865)



Hermann Günther Grassmann
(1809-1877)

2.4 Déterminant et inversion d'une matrice carrée

Définition : Le *déterminant* d'une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le scalaire $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Remarque : C'est le déterminant des colonnes de A.

Exercice 76 : Calculer le déterminant des matrices **O**, **I**, **E**, **F**, **G**, **H**.

Proposition 22 (propriétés du déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2, *à compléter et à démontrer*)

1. Le déterminant de la matrice identité est $\boxed{\det \mathbf{I} = \quad}$
2. Si λ est un scalaire et A est une matrice, alors $\boxed{\det(\lambda A) = \qquad}$
3. Si A et B sont des matrices, alors $\boxed{\det(AB) = \qquad}$

Exercice 77 : Calculer $\det(-\mathbf{I})$, et en déduire que $\det(A + B)$ ne s'exprime pas en fonction de $\det A$ et $\det B$.

Définition : Le *déterminant* d'un endomorphisme est celui de sa matrice. Autrement dit, $\det f = \det(f(\vec{\imath}), f(\vec{\jmath}))$.

Proposition 23 (propriété du déterminant d'un endomorphisme du plan, *à compléter et à démontrer*)

Si f est un endomorphisme et u, v sont des vecteurs, on a $\boxed{\det(f(u), f(v)) = \qquad}$

Remarque : L'interprétation géométrique de ce déterminant est la suivante :

- sa valeur absolue est le *facteur de changement d'aire* de f ;
- il est strictement *positif* (respectivement *négatif*) lorsque f *préserve* (respectivement *renverse*) *l'orientation*.

Exercice 78 : Expliciter cette interprétation géométrique dans le cas des endomorphismes de l'exercice 68.

Exercice 79 : Montrer que si A est inversible, alors $\det A \neq 0$, et exprimer $\det(A^{-1})$ en fonction de $\det A$.

Exercice 80 : Si A est une matrice quelconque, trouver une matrice B telle que $AB = (\det A)\mathbf{I}$, puis calculer BA.

Théorème 4 (critère d'inversibilité et inversion d'une matrice carrée d'ordre 2, *à compléter et à démontrer*)

La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\boxed{\qquad}$ et dans ce cas, $\boxed{A^{-1} = \qquad}$

Corollaire (facteurs d'une matrice inversible, *à démontrer*)

Si AB est inversible, alors A et B le sont aussi.

Exercice 81 : En déduire que si $AB = \mathbf{I}$, alors $BA = \mathbf{I}$.

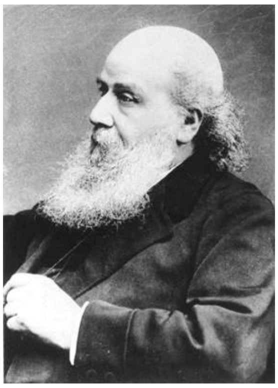
Exercice 82 : Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et celui de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Comparer avec les résultats de l'exercice 15.

Exercice 83 : À quelle condition une matrice diagonale est-elle inversible ? et dans ce cas, quel est son inverse ?

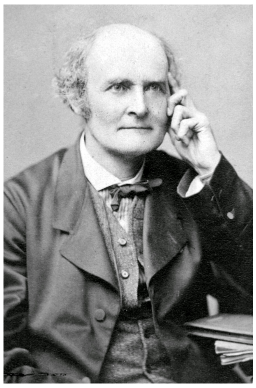
Exercice 84 : Calculer les inverses des matrices de l'exercice 68 et comparer avec les résultats de l'exercice 75.

Exercice 85 : Soit A une matrice *à coefficients entiers* : autrement dit, on a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Si A est inversible et A^{-1} est à coefficients entiers, que peut-on dire de $\det A$? La réciproque est-elle vraie ?



James Joseph Sylvester
(1814-1897)



Arthur Cayley
(1821-1895)

2.5 Rang d'une matrice ou d'un endomorphisme

Définitions : Le *noyau* (en allemand : *kern*) et l'*image* d'un endomorphisme f du plan sont les ensembles suivants :

$$\ker f = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid f(u) = \vec{0}\,\} \subset \mathbb{R}^2, \qquad \operatorname{im} f = \{f(u) \mid u \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Exercice 86 : Expliciter le noyau et l'image des endomorphismes de matrices $\mathbf{O}, \mathbf{I}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$.

Proposition 24 (critère d'injectivité pour un endomorphisme, *à compléter et à démontrer*)

Un endomorphisme f est *injectif* si et seulement si $\boxed{\ker f = \qquad}$

Exercice 87 : Quel est le *critère de surjectivité* pour un endomorphisme f du plan ?

Proposition 25 (calcul du noyau et de l'image d'un endomorphisme du plan, *à compléter et à démontrer*)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme f du plan, et soient $u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ les colonnes de A.

Alors $\ker f$ est l'ensemble des solutions du système $\boxed{\qquad\qquad}$ et $\boxed{\operatorname{im} f = \qquad}$.

Remarque : Le noyau est donné par des *équations cartésiennes*, et l'image par des *équations paramétriques*.

Exercice 88 : Pour chacune des matrices suivantes, expliciter le noyau et l'image de l'endomorphisme associé :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Théorème 5 (*théorème du rang* en dimension 2, *à compléter et à démontrer*)

Soit A la matrice d'un endomorphisme f du plan. Il y a trois cas possibles :

0. Si $A = \mathbf{O}$, alors $\boxed{\ker f = \qquad}$ et $\boxed{\operatorname{im} f = \qquad}$
1. Si $A \neq \mathbf{O}$ et $\det A = 0$, alors les ensembles $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont des $\boxed{\qquad\qquad}$
2. Si $\det A \neq 0$, alors $\boxed{\ker f = \qquad}$ et $\boxed{\operatorname{im} f = \qquad}$

Définition : Selon le cas, on dit que la matrice A (ou l'endomorphisme f) est de *rang* 0, 1, ou 2.

Remarque : Ce théorème donne une condition satisfaite par les *dimensions* de $\ker f$ et $\operatorname{im} f$: leur somme vaut 2. Le rang de f est en fait la dimension de $\operatorname{im} f$. Cette notion de dimension sera définie ultérieurement.

Corollaire (caractérisation des automorphismes du plan, *à compléter et à démontrer*)

Si A est la matrice d'un endomorphisme f, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. l'endomorphisme f est *bijectif* ;
2. l'endomorphisme f est *injectif* ;
3. l'endomorphisme f est *surjectif* ;
4. la matrice A est $\boxed{\qquad\qquad}$
5. le déterminant de la matrice A est $\boxed{\qquad}$
6. les colonnes de la matrice A forment une $\boxed{\qquad\qquad}$

Exercice 89 : Si u, v sont des vecteurs non nuls donnés, existe-t-il f tel que $\ker f = \mathbb{R}u$ et $\operatorname{im} f = \mathbb{R}v$?

Exercice 90 : Montrer que f^2 est nul si et seulement si $\operatorname{im} f \subset \ker f$. Dans quel cas l'inclusion est-elle *stricte* ?

2.6 Changement de base

Définitions : Soit (u, v) une base du plan.

- La *matrice de la base* (u, v) est la matrice P dont les colonnes sont u et v.
- La *matrice colonne d'un vecteur* $w \in \mathbb{R}^2$ *dans la base* (u, v) est le vecteur $w' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que x' et y' soient les composantes de w dans cette base : autrement dit, on a $w = x'u + y'v$.
- La *matrice d'un endomorphisme* f du plan *dans la base* (u, v) est la matrice A' telle que, pour tout vecteur w de matrice colonne w' dans cette base, la matrice colonne du vecteur $f(w)$ dans cette base soit $A'w'$.

Remarques :

- Dans la littérature, la matrice P est souvent appelée *matrice de passage de la base canonique à la base* (u, v).
- En général, on a $w \neq w'$, mais w et w' ont la même interprétation géométrique : c'est la base qui change.

Exemple : La matrice de la *base canonique* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est la matrice **I**. Dans ce cas, on a bien sûr $w' = w$ et $A' = A$. Autrement dit, quand on parle de la matrice d'un endomorphisme, on sous-entend « dans la base canonique ».

Exercice 91 : À quelle condition une matrice P est-elle la matrice d'une base ?

Proposition 26 (*formules de changement de base*, *à compléter et à démontrer*)
Soit P la matrice d'une base (u, v) du plan :

1. Si w' est la matrice colonne d'un vecteur w dans la base (u, v), alors $\boxed{w = \quad\quad}$
2. Réciproquement, la matrice colonne du vecteur w dans la base (u, v) est $\boxed{w' = \quad\quad}$
3. Si A' est la matrice d'un endomorphisme f dans la base (u, v), alors sa matrice est $\boxed{A = \quad\quad}$
4. Réciproquement, si la matrice de f est A, alors sa matrice dans la base (u, v) est $\boxed{A' = \quad\quad}$

Remarques :

- Dans la littérature, la base canonique est souvent appelée l'*ancienne base* : l'autre est alors la *nouvelle base*.
- Si P est la matrice d'une base (u, v), alors P^{-1} donne les composantes des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans cette base. Cela explique la correspondance entre les résultats de l'exercice 15 et ceux de l'exercice 82.

La difficulté est de savoir dans quel cas on doit utiliser une formule de changement de base ou bien sa réciproque. Pour éviter toute confusion, il suffit de bien mémoriser la première et la troisième formule de changement de base. Les réciproques en sont des conséquences immédiates.

Exercice 92 : Peut-on exprimer le changement de base pour les endomorphismes sans utiliser l'inverse P^{-1} ?

Exercice 93 : On considère les matrices P, A, A' et l'endomorphisme f de la proposition 26.

1. Si P commute avec A, que peut-on dire de A' ?
2. En déduire la matrice de f dans la base $(\lambda\vec{\imath}, \lambda\vec{\jmath})$ pour $\lambda \neq 0$.
3. De même, en déduire la matrice de l'endomorphisme $\lambda\,\mathrm{id}$ dans n'importe quelle base.

Exercice 94 : On considère les matrices P, A, A' de la proposition 26.

1. Exprimer A^2 en fonction de P et A'^2.
2. Plus généralement, exprimer A^n en fonction de P et A'^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 95 : Soient $u = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $v = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la réflexion d'axe $\mathbb{R}u$.

1. Que peut-on dire de la base (u, v) ?
2. En déduire la matrice S' de l'endomorphisme f dans la base (u, v).
3. Quelle est la matrice P de la base (u, v) ? et quel est son inverse ?
4. En déduire la matrice S de l'endomorphisme f, et comparer avec l'exercice 68.
5. De même, en déduire la matrice D de la dilatation orthogonale de rapport 2 et d'axe $\mathbb{R}u$.

Définition : On dit que A et B sont *semblables*, et on écrit $A \approx B$, s'il existe P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Exercice 96 : Montrer que $\approx$ est une *relation d'équivalence* : elle est *réflexive*, *symétrique*, et *transitive*.

Exercice 97 : Quelles sont les matrices semblables à la matrice d'un endomorphisme donné f ?

Exercice 98 : Quelles sont les matrices semblables à **O** ? à **I** ? à λ**I** ?

Exercice 99 : Trouver deux matrices $A \neq B$ telles que $A \approx B$.

Exercice 100 : Montrer que si $A \approx B$, alors $\det A = \det B$. La réciproque est-elle vraie ?

2.7 Isométries et similitudes vectorielles

Proposition 27 (caractérisations des isométries vectorielles du plan, *à démontrer*)
Si f est un endomorphisme du plan, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. l'endomorphisme f préserve la *norme* : si u est un vecteur, alors $\|f(u)\| = \|u\|$;
2. l'endomorphisme f préserve le *produit scalaire* : si u, v sont des vecteurs, alors $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$;
3. les vecteurs $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ forment une *base orthonormée* du plan : $f(\vec{\imath}) \perp f(\vec{\jmath})$ et $\|f(\vec{\imath})\| = \|f(\vec{\jmath})\| = 1$.

Définition : On dit alors que l'endomorphisme f est une *isométrie* (*vectorielle*) du plan.

Exercice 101 : Montrer que toute isométrie f est un automorphisme, et que sa réciproque f^{-1} est une isométrie. De même, montrer que la composée $f \circ g$ de deux isométries est une isométrie.

Définition : On dit qu'une isométrie f est *positive* si $\det f > 0$, et qu'elle est *négative* si $\det f < 0$.

Remarque : Une isométrie positive *préserve l'orientation*, alors qu'une isométrie négative la *renverse*.

Exemple : L'identité $\mathrm{id} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une isométrie positive du plan.

Exercice 102 : Parmi les endomorphismes de l'exercice 68, lesquels sont des isométries positives ? négatives ?

Exercice 103 : Montrer qu'une isométrie f préserve les *angles non orientés* : si u, v sont des vecteurs non nuls, alors les vecteurs $f(u), f(v)$ le sont aussi, et l'angle non orienté de $f(u)$ et $f(v)$ est le même que celui de u et v.

Notations : Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ et $\mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

Exercice 104 : Calculer $\mathbf{R}_\alpha$ et $\mathbf{S}_\alpha$ pour $\alpha = 0, \pi, \pm\frac{\pi}{2}$. Comparer avec les résultats de l'exercice 68.

Proposition 28 (matrices des isométries vectorielles du plan, *à compléter et à démontrer*)

1. $\mathbf{R}_\alpha$ est la matrice d'une $\boxed{\qquad\qquad}$ et toute $\boxed{\qquad\qquad}$ du plan est de cette forme.
2. $\mathbf{S}_\alpha$ est la matrice d'une $\boxed{\qquad\qquad}$ et toute $\boxed{\qquad\qquad}$ du plan est de cette forme.

Proposition 29 (produit de matrices d'isométries vectorielles du plan, *à compléter et à démontrer*)

$\boxed{\mathbf{R}_\alpha\mathbf{R}_\beta = \mathbf{R}_\beta\mathbf{R}_\alpha = \qquad}$ $\boxed{\mathbf{R}_\alpha\mathbf{S}_\beta = \qquad}$ $\boxed{\mathbf{S}_\alpha\mathbf{R}_\beta = \qquad}$ $\boxed{\mathbf{S}_\alpha\mathbf{S}_\beta = \qquad}$

Exercice 105 : En déduire les formules pour $\mathbf{R}_\alpha^2$ et $\mathbf{S}_\alpha^2$, pour $\mathbf{R}_\alpha^{-1}$ et $\mathbf{S}_\alpha^{-1}$, puis pour $\mathbf{R}_\alpha^n$ et $\mathbf{S}_\alpha^n$, lorsque $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 106 : Soit $u = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \neq \vec{0}$.

1. Calculer l'angle orienté des vecteurs u et $\mathbf{R}_\alpha u$.
2. En déduire que $\mathbf{R}_\alpha$ est la matrice d'une rotation, dont on précisera l'angle et le centre.

Exercice 107 : Soit (u, v) l'image de la base canonique par la rotation d'angle α, et soit f la réflexion d'axe $\mathbb{R}u$.

1. Donner la matrice de la base (u, v) et la matrice de f dans cette base, puis en déduire la matrice de f.
2. En déduire que $\mathbf{S}_\alpha$ est la matrice d'une réflexion, dont on précisera l'axe.

Exercice 108 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. À quelle condition a-t-on $\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{R}_0$? et à quelle condition a-t-on $\mathbf{S}_\alpha = \mathbf{S}_0$?
2. Quelles sont les interprétations géométriques de ces deux conditions ?
3. Si $n \geqslant 2$, montrer qu'il existe une matrice A telle que $A^1, \ldots, A^{n-1} \neq \mathbf{I}$ et $A^n = \mathbf{I}$.

Proposition 30 (caractérisations des similitudes vectorielles du plan, *à démontrer*)
Si f est un endomorphisme du plan, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f préserve l'*orthogonalité* : si u, v sont des vecteurs, alors on a $u \perp v$ si et seulement si $f(u) \perp f(v)$;
2. $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ sont orthogonaux, non nuls, et de même norme : $f(\vec{\imath}) \perp f(\vec{\jmath})$ et $\|f(\vec{\imath})\| = \|f(\vec{\jmath})\| > 0$;
3. il existe un scalaire $\lambda > 0$ tel que $\|f(u)\| = \lambda\|u\|$ pour tout vecteur u ;
4. il existe un scalaire $\lambda > 0$ tel que λf est une isométrie vectorielle ;
5. f préserve les *angles non orientés*.

Définition : On dit alors que l'endomorphisme f est une *similitude* (*vectorielle*) du plan.

On définit de même la notion de similitude *positive* (respectivement *négative*).

Exercice 109 : Quelle est la forme générale d'une matrice de similitude positive (respectivement négative) ?

Exercice 110 : Quels sont les endomorphismes du plan qui préservent les *angles orientés* ?