Corrigé de l'examen de calcul matriciel

Licence MASHS - MI - SPC, semestre 2

15 mai 2006

Exercice 1 :

a. Trois vecteurs u, v, w de $\mathbb{R}^3$ sont coplanaires si et seulement si on a $\det(u, v, w) = 0$. Quatre points P, Q, R, S sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}$ le sont, c'est-à-dire si $\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}) = 0$.

b. Si $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, alors on a $\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}) = \det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS}) = \det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{RS}) = 0$, donc les quatre points sont coplanaires.

c. Dans ce cas, le quadrilatère $PQSR$ est un parallélogramme.

d. Les coordonnées de A sont $1, 1, 1$, celles de B sont $-1, 1, 1$, et celles de C sont $0, 2, 2$.

e. On a $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$, donc $OACB$ est un parallélogramme. C'est même un losange, car $\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{3} = \|\overrightarrow{OB}\|$.

f. Son aire vaut $\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\| = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

g. Le *facteur de changement d'aire* d'une homothétie de rapport $\rho > 0$ est ρ^2. Pour que l'image de ce quadrilatère par cette homothétie soit d'aire 1, il faut donc avoir $\rho^2(2\sqrt{2}) = 1$, c'est-à-dire $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

Exercice 2 :

a. A est la matrice de la rotation d'angle $\pi/4$ autour de l'axe $O\vec{k}$.

b. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est la matrice de la rotation d'angle $\pi/2$ autour de l'axe $O\vec{k}$.

c. On calcule A^{-1} par la méthode du pivot :

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ d'où } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les opérations utilisées sont les suivantes : soustraire la ligne 1 de la ligne 2 ; multiplier la ligne 1 par $\sqrt{2}$; diviser la ligne 2 par $\sqrt{2}$; ajouter la ligne 2 à la ligne 1.
[Remarque : A^{-1} est la matrice de la rotation d'angle $-\pi/4$ autour de l'axe $O\vec{k}$.]

d. On remarque que $A^{-1} = {}^tA$, donc la matrice A est orthogonale, mais $A \neq {}^tA$, donc elle n'est pas symétrique.

e. Le polynôme caractéristique de A est :

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda\sqrt{2} + 1).$$

Comme le discriminant du second facteur est $\Delta = -2 < 0$, la seule valeur propre réelle de A est 1.

f. Une matrice qui n'a qu'une seule valeur propre réelle n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}^3$, sauf si c'est la matrice d'une homothétie. Donc A n'a pas de base de vecteurs propres dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 :

a. Le polynôme caractéristique de A est $\det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - d\lambda - c$. Comme A n'est pas diagonale, elle a une base de vecteurs propres (dans $\mathbb{R}^2$) si et seulement si le discriminant $\Delta = d^2 + 4c$ est > 0.

b. Comme $\Delta > 0$, on a $\alpha \neq \beta$. Les vecteurs propres associés à α sont les solutions de l'équation $y = \alpha x$, par exemple $u = \vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath}$. De même, $v = \vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$ est un vecteur propre associé à β.
Donc $P^{-1}AP = D$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base u, v, et $P^{-1} = \dfrac{1}{\beta - \alpha}\begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$.

c. On a $A = PDP^{-1}$, d'où $A^n = PD^nP^{-1}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

d. On a donc $A^n = \dfrac{1}{\beta - \alpha}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^n\beta - \alpha\beta^n}{\beta-\alpha} & \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta-\alpha} \\ \frac{\alpha^{n+1}\beta - \alpha\beta^{n+1}}{\beta-\alpha} & \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta-\alpha} \end{pmatrix}$.

e. On a $V_{n+1} = AV_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $V_n = A^nV_0$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

f. Autrement dit, V_n est la deuxième colonne de A^n, d'où $u_n = \dfrac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 :

a. Un système paramétrique pour la droite $\mathbb{R}u$ est :

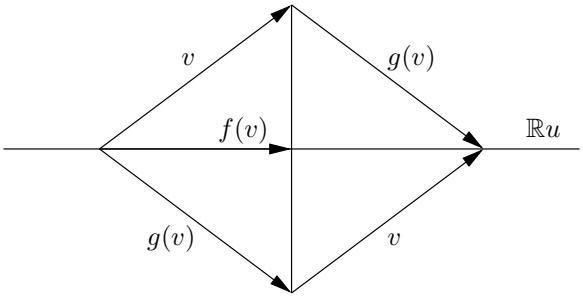
$$\begin{cases} x = \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = 3\lambda. \end{cases}$$

b. Le projeté orthogonal de v sur l'axe $\mathbb{R}v$ est $f(v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2}u$.

c. Les composantes de $f(v)$ pour $v = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ sont donc $\dfrac{x+2y+3z}{14}, \dfrac{x+2y+3z}{7}, \dfrac{3(x+2y+3z)}{14}$ pour $v = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, car $\|u\|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$. La matrice de f est donc :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & \frac{9}{14} \end{pmatrix}.$$

d. Si $g(v)$ est le symétrique orthogonal de v par rapport à l'axe $\mathbb{R}u$, on a $v + g(v) = 2f(v)$.



e. Si B est la matrice de g, on a donc $\mathrm{I} + B = 2A$, d'où :

$$B = 2A - \mathrm{I} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

f. La distance entre le point P et l'axe $\mathbb{R}u$ est $\frac{\|u \wedge v\|}{\|u\|}$.

g. L'équation cartésienne du cylindre d'axe $\mathbb{R}u$ et de rayon r est donc $\|u \wedge v\|^2 = r^2\|u\|^2$. Ici, on obtient :

$$\begin{vmatrix} y & 2 \\ z & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & 1 \\ z & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 2 \end{vmatrix}^2 = 2 \times 14, \text{ c'est-à-dire } 13x^2 + 10y^2 + 5z^2 - 4xy - 6xz - 12yz = 28.$$

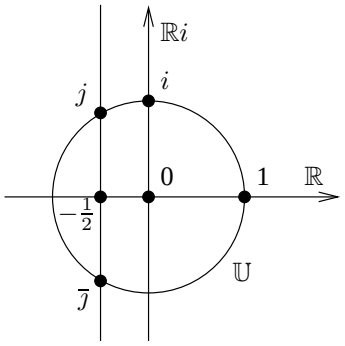
Exercice 5 :

a. On a $|j|^3 = |j^3| = |1| = 1$, d'où $|j| = 1$. On a donc $j\overline{j} = |j|^2 = 1$, d'où $\overline{j} = \dfrac{1}{j} = \dfrac{j^3}{j} = j^2$.

b. On en déduit que $1 + j + \overline{j} = 1 + j + j^2 = \dfrac{1 - j^3}{1 - j} = 0$, d'où $j + \overline{j} = -1$ et donc $\mathfrak{Re}(j) = \dfrac{j + \overline{j}}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

c. Comme $|j| = 1$, on a $\mathfrak{Re}(j)^2 + \mathfrak{Im}(j)^2 = 1$, d'où $\mathfrak{Im}(j)^2 = 1 - \mathfrak{Re}(j)^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ et donc $\mathfrak{Im}(j) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

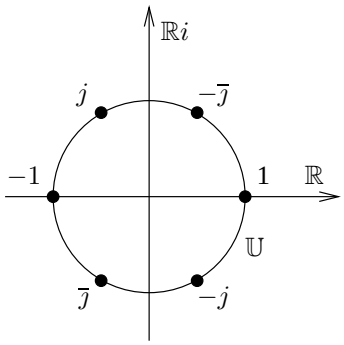
d. Dans le cas où $\mathfrak{Im}(j) > 0$, on a $j = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.



e. Comme $j^3 = 1$ et comme $2006 \bmod 3 = 2$, on a $j^{2006} = j^2 = \overline{j} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.

f. Si u est une racine cubique de l'unité, alors $u^3 = 1$, d'où $u^6 = (u^3)^2 = 1$ et $(-u)^6 = (u^6) = 1$.

g. Les 6 racines 6-ièmes de l'unité sont donc $1, j, \overline{j}$ et $-1, -j, -\overline{j}$.



h. On sait par ailleurs que les racines 6-ièmes de l'unité sont les $e^{i\frac{n\pi}{3}} = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. On en déduit les valeurs de $\cos\frac{n\pi}{3}$ et $\sin\frac{n\pi}{3}$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

n	1	2	3	4	5
$e^{i\frac{n\pi}{3}}$	$-\overline{j}$	j	-1	$\overline{j}$	$-j$
$\cos\frac{n\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin\frac{n\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

i. Si $z, z' \in \mathbb{Q}[j]$, on a $z = x + yj$ et $z' = x' + y'j$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{Q}$, d'où $zz' = xx' + (xy' + yx')j + yy'j^2$. Or $j^2 = \overline{j} = -1 - j$, d'où $zz' = xx' - yy' + (xy' + yx' - yy')j \in \mathbb{Q}[j]$.

j. De même, si $z \in \mathbb{Q}[j]$, on a $z = x + yj$ avec $x, y \in \mathbb{Q}$, d'où $z\overline{z} = (x + yj)(x + y\overline{j}) = x^2 + xy(j + \overline{j}) + y^2 j\overline{j}$. Or $j + \overline{j} = -1$ et $j\overline{j} = 1$, d'où $z\overline{z} = x^2 - xy + y^2 \in \mathbb{Q}$. D'autre part, on a $\overline{z} = x + y\overline{j} = x - y - yj \in \mathbb{Q}[j]$.

k. Si de plus, $z \neq 0$, on a $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{x - y}{x^2 - xy + y^2} - \dfrac{y}{x^2 - xy + y^2}j \in \mathbb{Q}[j]$.