Corrigé de l'examen de calcul matriciel du 9 mai 2012

Les réponses alternatives sont entre crochets [...].

Exercice 1 :

- Le vecteur $u' = \frac{1}{\|u\|}u = \frac{1}{5}u = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$ est unitaire, colinéaire à u et de même sens que u .
- On a $u' = a\vec{i} + b\vec{j}$ avec $a = 3/5$ et $b = -4/5$.
Pour obtenir une base orthonormée directe (u', v') du plan, on pose $v' = -b\vec{i} + a\vec{j} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$.
On a alors $\langle u', v' \rangle = -ab + ba = 0$ et $\|u'\|^2 = \|v'\|^2 = \det(u', v') = a^2 + b^2 = 1$.
- La matrice A a pour colonnes u' et v' : autrement dit, $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$.
- L'endomorphisme f préserve la norme d'un vecteur quelconque $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, car on a $f(w) = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}$,
d'où $\|f(w)\|^2 = (ax - by)^2 + (bx + ay)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 = \|w\|^2$.
- Il préserve aussi l'orientation et l'aire d'un parallélogramme quelconque, car on a $\det f = a^2 + b^2 = 1$.
- Il s'agit donc d'une isométrie vectorielle positive du plan, c'est-à-dire d'une rotation (autour de l'origine).
[On peut aussi remarquer que le vecteur unitaire u' est de la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$.
On en déduit que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\theta$ est celle de la rotation d'angle θ .]

Exercice 2 :

- M_{-1} est la matrice de la symétrie d'axe (Oy) et N_2 est la matrice de la dilatation orthogonale dont le rapport est 2 et la base est l'axe (Ox) . Autrement dit, la direction de cette dilatation est l'axe (Oy) .
- Si $\lambda \neq 0$, on a $\det M_\lambda = \det N_\lambda = \lambda \neq 0$, donc M_λ et N_λ sont inversibles.
De même, on a $\det P_\lambda = \det Q_\lambda = 1 \neq 0$ pour tout λ , donc P_λ et Q_λ sont inversibles.
De plus, les inverses des matrices élémentaires sont des matrices élémentaires :
$$M_\lambda^{-1} = M_{\frac{1}{\lambda}}, \quad N_\lambda^{-1} = N_{\frac{1}{\lambda}}, \quad P_\lambda^{-1} = P_{-\lambda}, \quad Q_\lambda^{-1} = Q_{-\lambda}.$$
- On a $D = M_2N_3$. [En fait, on a aussi $D = N_3M_2$, car M_2 commute avec N_3 .]
- Si on pose $B = Q_{-3}$, on obtient $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
- Si on pose $C = N_{-\frac{1}{2}}$, on obtient $CBA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_2$.
- On a donc $BA = C^{-1}P_2$, d'où $A = B^{-1}C^{-1}P_2 = Q_3N_{-2}P_2$.

Exercice 3 : On utilise ci-dessous les notations introduites dans le cours.

- On calcule $\langle u, v \rangle = 1 - 1 + 0 = 0$. De même, $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 0$ et de plus $u, v, w \neq \vec{0}$, donc (u, v, w) est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Elle n'est pas orthonormée car, par exemple, on a $\|u\| = \sqrt{3} \neq 1$.
- On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et on calcule $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}$ par la méthode du pivot de Gauss, en appliquant successivement les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} L_2 &\rightarrow L_2 - L_1, & L_3 &\rightarrow L_3 - L_1, & L_3 &\rightarrow L_3 - L_2/2, & L_1 &\rightarrow L_1 + L_3/3, \\ L_1 &\rightarrow L_1 - L_2/2, & L_2 &\rightarrow -L_2/2, & L_3 &\rightarrow -L_3/3. \end{aligned}$$

[On pouvait aussi utiliser la méthode de Cramer, ou encore, résoudre un système d'équations.]

- Si A est la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, alors sa matrice dans la base (u, v, w) est $A' = P^{-1}AP$.
- On a $S' = P^{-1}SP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

[On pouvait aussi calculer directement $Su = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u$, $Sv = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = v$, et $Sw = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -w$.]

- Les valeurs propres de f sont donc 1 et -1 . De plus, $\mathcal{E}_1$ est le plan $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ et $\mathcal{E}_{-1}$ est la droite $\mathbb{R}w$.
- L'endomorphisme f est la symétrie orthogonale [ou la réflexion] par rapport au plan $\mathcal{E}_1 = \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$.