Corrigé de l'examen de calcul matriciel du 18 juin 2012

Les réponses alternatives sont entre crochets [. . .].

Exercice 1 :

1. On a $\langle u, v - \lambda u\rangle = \langle u, v\rangle - \lambda\|u\|^2$ avec $\|u\|^2 \neq 0$. Donc $\langle u, v - \lambda u\rangle = 0$ si et seulement si $\lambda = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2}$.
2. Le projeté orthogonal de v sur l'axe $\mathbb{R}u$ est donc le vecteur $\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2}\, u$.
3. En appliquant la formule ci-dessus aux vecteurs $u = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $v = \vec{\imath}$, puis $v = \vec{\jmath}$, on obtient :

$$f(\vec{\imath}) = \frac{\langle u, \vec{\imath}\rangle}{\|u\|^2}\, u = \frac{1}{5}u = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \text{ et } f(\vec{\jmath}) = \frac{\langle u, \vec{\jmath}\rangle}{\|u\|^2}\, u = \frac{2}{5}u = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \text{ d'où } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

4. On a $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1\times1+2\times2}{5^2} & \frac{1\times2+2\times4}{5^2} \\ \frac{2\times1+4\times2}{5^2} & \frac{2\times2+4\times4}{5^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = A$ et $\det A = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{vmatrix} = \frac{1\times4-2\times2}{5^2} = 0$.
5. On a $A^2 = A$ car $f \circ f = f$: en effet, le projeté du projeté de v est le projeté de v.
   On a $\det A = 0$ car l'endomorphisme f n'est pas bijectif : en effet, on a $\operatorname{im} f = \mathbb{R}u \neq \mathbb{R}^2$.
   [Pour le second point, on peut aussi remarquer que $\ker f$ est l'axe orthogonal à u, ou encore que $\det A$ est le déterminant des deux colonnes de A, qui sont évidemment colinéaires, puisqu'elles appartiennent à $\mathbb{R}u$.]
6. L'unique vecteur unitaire, colinéaire à u et de même sens que u est $u' = \frac{1}{\|u\|}u = \frac{1}{\sqrt{5}}u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.
7. Pour obtenir une base orthonormée directe (u', v') de $\mathbb{R}^2$, on pose $v' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.
8. Comme $u' \parallel u$ et $v' \perp u$, on a $f(u') = u'$ et $f(v') = \vec{0}$.
   La matrice de f dans la base (u', v') est donc $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   [On peut aussi calculer $f(u')$ et $f(v')$ en utilisant la matrice A. On obtient alors :

$$f(u') = Au' = \begin{pmatrix} \frac{1\times1+2\times2}{5\sqrt{5}} \\ \frac{2\times1+4\times2}{5\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = u', \qquad f(v') = Av' = \begin{pmatrix} \frac{1\times(-2)+2\times1}{5\sqrt{5}} \\ \frac{2\times(-2)+4\times1}{5\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

   Enfin, on pourrait aussi utiliser la formule de passage $A' = P^{-1}AP$, mais le calcul serait encore plus long !]

Exercice 2 :

1. On a $MM' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' & 0 \\ ca' + dc' & cb' + dd' & 0 \\ xa' + yc' + zx' & xb' + yd' + zy' & zz' \end{pmatrix}$.
2. Si la matrice M a un inverse de la forme M', alors on a $MM' = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   En particulier, si on pose $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on obtient $NN' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $zz' = 1$.
   Donc la matrice N est inversible et $z \neq 0$.
   Réciproquement, supposons que la matrice N soit inversible et $z \neq 0$.
   On note a', b', c', d' les coefficients de la matrice N^{-1} et on pose :

$$x' = \frac{-xa' - yc'}{z}, \qquad y' = \frac{-xb' - yd'}{z}, \qquad z' = \frac{1}{z}.$$

   On a alors $MM' = \mathbf{I}$, donc la matrice M est inversible.
   [On peut vérifier aussi que $M'M = \mathbf{I}$, mais ce n'est pas utile, puisque la condition $MM' = \mathbf{I}$ est suffisante.]

3. On a $M_\lambda = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -8 & -2-\lambda \end{pmatrix}$.
4. λ est une valeur propre de A si et seulement si la matrice M_λ n'est pas inversible, c'est-à-dire $\det M_\lambda = 0$.
5. En développant $\det M_\lambda$ par rapport à la dernière colonne, on obtient :

$$\det M_\lambda = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -8 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} (-2-\lambda) = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(-2-\lambda).$$

   Les valeurs propres de A sont donc les racines de ce polynôme caractéristique, c'est-à-dire 1 et -2.
   [On peut aussi appliquer le résultat de la question 2 à la matrice M_λ.
   Cette matrice n'est pas inversible lorsque l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :
   - la matrice $N_\lambda = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, c'est-à-dire $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$;
   - le coefficient $-2-\lambda$ est nul.

   On admet ici que si une matrice de la forme M est inversible, alors son inverse est de la même forme.]
6. Par définition, le sous-espace propre associé à $\lambda = 1$ est l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 3x + y = x, \\ -4x - y = y, \\ 4x - 8y - 2z = z, \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 2x + y = 0, \\ 20x - 3z = 0. \end{cases}$$

   C'est donc l'axe $\mathbb{R}w$, où $w = 3\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 20\vec{k}$.
   De même, le sous-espace propre associé à $\lambda = -2$ est l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 3x + y = -2x, \\ -4x - y = -2y, \\ 4x - 8y - 2z = -2z, \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

   C'est donc l'axe $\mathbb{R}\vec{k}$.
7. La matrice A n'est pas diagonalisable, car la somme des sous-espaces propres est le plan $\mathbb{R}w + \mathbb{R}\vec{k} \neq \mathbb{R}^3$.
   [Autrement dit, 1 est une racine double du polynôme caractéristique, mais le sous-espace propre associé est de dimension 1.]