# Examen de calcul matriciel

Licence MASHS - MI - SPC, semestre 2

15 mai 2006

**Durée de l'épreuve : 3 heures. Documents, calculettes et téléphones interdits.**

Ce sujet comporte deux pages.

**Exercice 1 :** On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

**a.** Ecrire le critère de coplanarité pour trois vecteurs $u, v, w$, puis pour quatre points $P, Q, R, S$.

**b.** Montrer que si $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, alors les quatre points sont coplanaires.

**c.** Dans ce cas, quelle est la nature du quadrilatère $PQSR$ ?

On note $O$ l'origine et on considère les points $A, B, C$ tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\jmath}+\vec{k}-\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OC} = 2(\vec{\jmath}+\vec{k})$.

**d.** Quelles sont les coordonnées des points $A, B, C$ ?

**e.** Quelle est la nature du quadrilatère $OACB$ ?

**f.** Calculer son aire.

**g.** Trouver $\rho > 0$ tel que l'image de ce quadrilatère par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\rho$ soit d'aire $1$.

**Exercice 2 :** On pose $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**a.** Donner l'interprétation géométrique de cette matrice.

**b.** Calculer la matrice $A^2$ et donner son interprétation géométrique.

**c.** Calculer l'inverse de $A$ en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

**d.** La matrice $A$ est-elle orthogonale ? symétrique ?

**e.** Quelles sont les valeurs propres réelles de $A$ ?

**f.** Existe-t-il une base de vecteurs propres (dans $\mathbb{R}^3$) pour cette matrice ?

**Exercice 3 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $c, d \in \mathbb{R}$.

**a.** À quelle condition sur $c$ et $d$ existe-t-il une base de vecteurs propres (dans $\mathbb{R}^2$) pour $A$ ?

On suppose que cette condition est satisfaite et on note $\alpha, \beta$ les valeurs propres. On pose $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

**b.** Trouver une matrice $P$ inversible telle que $P^{-1}AP = D$ et calculer $P^{-1}$.

**c.** Exprimer $A$ en fonction des matrices $P$ et $D$, puis $A^n$ en fonction des matrices $P$ et $D^n$.

**d.** En déduire une formule pour chacun des coefficients de $A^n$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$.

On considère la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et $u_{n+2} = cu_n + du_{n+1}$. On pose $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

**e.** Exprimer $V_{n+1}$ en fonction des matrices $A$ et $V_n$, puis $V_n$ en fonction des matrices $A^n$ et $V_0$.

**f.** En déduire une formule pour $u_n$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$.

**Exercice 4 :** Soit $u = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

**a.** Donner un système paramétrique pour la droite $\mathbb{R}u$.

Soient $f$ la projection orthogonale sur l'axe $\mathbb{R}u$ et $g$ la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $\mathbb{R}u$.

**b.** Exprimer $f(v)$ en fonction de $u$ et $v$ si $v$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

**c.** En déduire les composantes de $f(v)$ pour $v = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, puis la matrice $A$ de $f$.

**d.** Exprimer $v + g(v)$ en fonction de $f(v)$.

**e.** En déduire la matrice $B$ de $g$.

On note $O$ l'origine et $P$ le point tel que $\overrightarrow{OP} = v$.

**f.** Exprimer la distance entre le point $P$ et l'axe $\mathbb{R}u$ en fonction de $u$ et $v$.

**g.** En déduire l'équation cartésienne du cylindre d'axe $\mathbb{R}u$ et de rayon $\sqrt{2}$.

**Exercice 5 :** Dans cet exercice, on ne doit pas utiliser de forme trigonométrique (sauf pour la question **h**).

Soit $j$ un nombre complexe tel que $j^3 = 1$ et $j \neq 1$.

**a.** Montrer que $|j| = 1$ et en déduire que $\overline{\jmath} = j^2$.

**b.** En déduire la valeur de $1 + j + \overline{\jmath}$ puis celle de $\mathfrak{Re}(j)$.

**c.** En déduire les deux valeurs possibles pour $\mathfrak{Im}(j)$.

**d.** Dessiner le cercle unité et placer les points d'affixes respectives $0, 1, i, j, \overline{\jmath}$ dans le cas où $\mathfrak{Im}(j) > 0$.

**e.** Calculer $j^{2006}$ sous forme algébrique dans le cas où $\mathfrak{Im}(j) > 0$.

**f.** Montrer que si $u$ est une racine cubique de l'unité, alors $u$ et $-u$ sont des racines 6-ièmes de l'unité.

**g.** En déduire l'ensemble des racines 6-ièmes de l'unité, et placer-les sur le dessin de la question **d**.

**h.** En déduire les valeurs de $\cos \frac{n\pi}{3}$ et $\sin \frac{n\pi}{3}$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

On pose $\mathbb{Q}[j] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}j = \{a + bj \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ où $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels.

**i.** Montrer que si $z, z' \in \mathbb{Q}[j]$, alors $zz' \in \mathbb{Q}[j]$.

**j.** Montrer que si $z \in \mathbb{Q}[j]$, alors $z\overline{z} \in \mathbb{Q}$ et $\overline{z} \in \mathbb{Q}[j]$.

**k.** En déduire que si $z \in \mathbb{Q}[j]$ et $z \neq 0$, alors $1/z \in \mathbb{Q}[j]$.